Найдем касательную к графику в точке (0,0). Поскольку

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$

то касательная имеет уравнение $y - 0 = 0 \cdot (x - 0)$, или просто $y = 0$.

Таким образом, в нашем примере касательная совпадает с осью Ox,с которой график имеет бесконечное количество точек пересечения в любой окрестности точки касания.

В силу определения дифференцируемости функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in \in E$ имеем

$$f(x) - f(x_0) = A(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

при $x \to x_0$, $x \in E$.

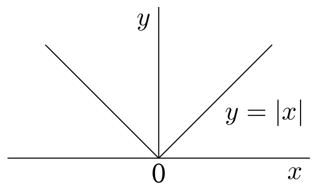

Рис. 18.

Поскольку правая часть этого равенства стремится к нулю при $x \to x_0$, $x \in E$, то $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, так что дифференцируемая в точке функция обязана быть непрерывной в этой точке.

Покажем, что обратное, конечно, не всегда имеет место.

Пример 8. Пусть $f(x) = |x|$ (рис. 18). Тогда в точке $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to -0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to -0} \frac{-x}{x} = -1,$$
$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to +0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to +0} \frac{x}{x} = 1.$$

Следовательно, в этой точке функция не имеет производной, а значит, и не дифференцируема в этой точке.

Пример 9. Покажем, что $e^{x+h} - e^x = e^x h + o(h)$ при $h \to 0$.

Таким образом, функция $\exp(x) = e^x$ дифференцируема, причем $d\exp(x)h = \exp(x)h$, или $de^x = e^x dx$, и тем самым $\exp' x = \exp x$, или $\frac{de^x}{dx} = e^x$.

◀ $e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1) = e^x(h + o(h)) = e^x h + o(h)$.

Мы воспользовались полученной в примере 39, гл. III, §2, п.4 формулой $e^h - 1 = h + o(h)$ при $h \to 0$. ▶