

Allgemeine Vorgehensweise für Flächenträgheitsmomente von zusammengesetzten Querschnitten

1. Teilen des Querschnitts in ***n Teile***, Schwerpunkt S_i \bar{y}_{S_i} , \bar{z}_{S_i} für jedes Teil.

2. **Fläche:**

$$A = \iint_{(A)} dA = \sum_{i=1}^n A_i \quad [mm^2]$$

3. **Ausgangssachsen** $O\bar{y}\bar{z}$ (beliebig):

4. **Statische Momente:**

$$S_{\bar{y}} = \iint_{(A)} \bar{z} dA = \sum_{i=1}^n \bar{z}_{S_i} A_i \quad ; \quad S_{\bar{z}} = \iint_{(A)} \bar{y} dA = \sum_{i=1}^n \bar{y}_{S_i} A_i \quad [mm^3]$$

5. **Gesamtschwerpunkt S:**

$$\bar{y}_S = \frac{S_{\bar{z}}}{A} \quad ; \quad \bar{z}_S = \frac{S_{\bar{y}}}{A} \quad [mm]$$

6. **Zentrale Achsen** (i.allg. nicht Hauptachsen) S_{yz} , parallel zu $O\bar{y}\bar{z}$.

Koordinatentransformation

von den Ausgangssachsen $O\bar{y}\bar{z}$ in die zentrale Achsen S_{yz} :

$$y = \bar{y} - \bar{y}_S \quad ; \quad z = \bar{z} - \bar{z}_S \quad [mm]$$

7. **Für jedes Teil** Koordinatensystem $S_i y_i z_i$ ($y_i \parallel y$ und $z_i \parallel z$),

8. **Für jedes Teil** $I_{y_i}, I_{z_i}, I_{y_i z_i}$. Falls für die teileigene Achsen $S_i y_i z_i$ keine Hauptachsen sind, Transformation durch Drehung des Koordinatensystems.

9. **Zentrale Flächenträgheitsmomente:**

$$I_y = \iint_{(A)} z^2 dA = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + z_{S_i}^2 A_i) \quad [mm^4]$$

$$I_z = \iint_{(A)} y^2 dA = \sum_{i=1}^n (I_{z_i} + y_{S_i}^2 A_i) \quad [mm^4] \quad (\text{Satz von Steiner})$$

$$I_{yz} = -\iint_{(A)} yz dA = \sum_{i=1}^n (I_{y_i z_i} - y_{S_i} z_{S_i} A_i) \quad [mm^4]$$

10. **Hauptträgheitsmomente** bezüglich $S\eta\zeta$:

$$\left. \begin{matrix} I_\eta \\ I_\zeta \end{matrix} \right\} = I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2} \right)^2 + I_{yz}^2} \quad ; I_{\eta\zeta} = 0 \quad [mm^4]$$

$$\varphi^* = \arctan \frac{I_y - I_z}{I_{yz}} \quad \varphi^* = \angle(1, y) \text{ , von 1 nach } y$$

11. Koordinatentransformation

von den zentralen Achsen S_{yz} in die Hauptachsen $S\eta\zeta$:

$$\eta = y \cos \varphi^* + z \sin \varphi^* \quad ; \quad \zeta = -y \sin \varphi^* + z \cos \varphi^*$$

Check's Querschnittsgrößen

1. Check Gesamtschwerpunkt S:

- Plausibilitätscheck
- statische Momente bezüglich beliebigen zentralen Achsen müssen =0 sein
- bei Fehler: andere Ausgangsachsen

2. Check zentrale Flächenträgheitsmomente I_y, I_z, I_{yz} :

- Plausibilität $I_y < I_z$, $I_y > I_z$ oder $I_y = I_z$; Vorzeichen I_{yz}
- Check Satz von Steiner: es werden $I_{\bar{y}}, I_{\bar{z}}, I_{\bar{y}\bar{z}}$ bezüglich den Ausgangsachsen (oder anderer nichtzentraler Achsen) berechnet und danach in die zentralen Achsen transformiert:

$$I_y = I_{\bar{y}} - z_S^2 A ; \quad I_z = I_{\bar{z}} - y_S^2 A ; \quad I_{yz} = I_{\bar{y}\bar{z}} + y_S z_S A$$

3. Check Hauptträgheitsmomente I_η, I_ζ :

- $I_\eta + I_\zeta = I_y + I_z$ (erste Invariante)
- $I_\eta I_\zeta = I_y I_z - I_{yz}^2$ (zweite Invariante)
- $\varphi^* = \arctan \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$