FEM für Dynamik

Kapitel 8: Fouriertransformation

Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch

Department Maschinenbau und Produktion
Fakultät Technik und Informatik
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Fouriertransformation

Vorbemerkungen:

- Die Fourier-Transformation wird verwendet, um eine gegebene Erregerfunktion $f(t)$ oder eine Strukturantwort $u(t)$ in den Frequenzbereich zu überführen
- Die Umkehroperation vom Frequenz- in den Zeitbereich bezeichnet man als *inverse* Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte $F(i\omega)$ einer integrierbaren Funktion $f(t)$ berechnet sich aus:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \tag{1}$$

Die inverse Fourier-Transformation ist definiert durch:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \tag{2}$$

Fouriertransformation

Vorraussetzung für die Existenz der Fourier-Transformierten $F(i\omega)$ ist die Bedingung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty \tag{3}$$

In der Mathematik bezeichnet man derartige Integrale als *uneigentliche* Integrale
Eine analoge Bedingung zu Gl. (3) ist

$$|f(t)| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty \tag{4}$$

Periodische Funktionen erfüllen diese Bedingung nicht

Uneigentliche Integrale

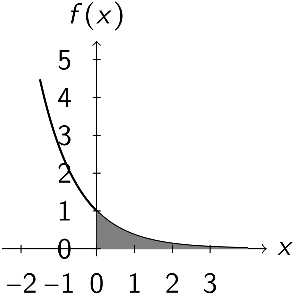
Definition eines uneigentlichen Integrals bei unendlicher oberer Grenze:

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\lambda} f(x)dx$$

Beispiel:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\lambda} e^{-x}dx$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda} = \lim_{\lambda\to\infty} \left[-e^{-\lambda} + e^0\right] = 1$$



Übung: Berechnen Sie die Integrale

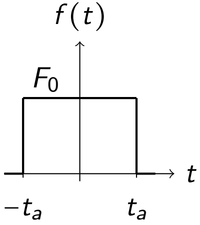
$$\int_0^{\infty} e^x dx \quad \text{und} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}dx$$

Symmetrischer Rechteckimpuls

Für einige Funktionen $f(t)$ kann die Fourier-Transformierte analytisch berechnet werden.

Beispiel: Symmetrischer Rechteckimpuls

$$f(t) = \begin{cases} F_0 & \text{für } -t_a \leq t \leq t_a \\ 0 & \text{für } -t_a > t > t_a \end{cases}$$



Aus Gl. (1) folgt:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$= F_0 \cdot \int_{-t_a}^{t_a} e^{-i\omega t} dt = -\frac{F_0}{i\omega} \cdot \left[e^{-i\omega t} \right]_{-t_a}^{t_a} = -\frac{F_0}{i\omega} \cdot \left(e^{-i\omega t_a} - e^{i\omega t_a} \right)$$

Symmetrischer Rechteckimpuls

Einsetzen der Eulerschen Relation: $e^{\pm i\omega t} = cos(\omega t) \pm i \cdot sin(\omega t)$ liefert:

$$F(i\omega) = -\frac{F_0}{i\omega} \cdot (cos(\omega t_a) - i \cdot sin(\omega t_a) - cos(\omega t_a) - i \cdot sin(\omega t_a))$$

$$F(\omega) = \frac{2F_0}{\omega} \cdot sin(\omega t_a)$$

Berechnung des Wertes an der Stelle $\omega = 0$ mit Hilfe einer Grenzwertuntersuchung und der Regel von L'Hospital:

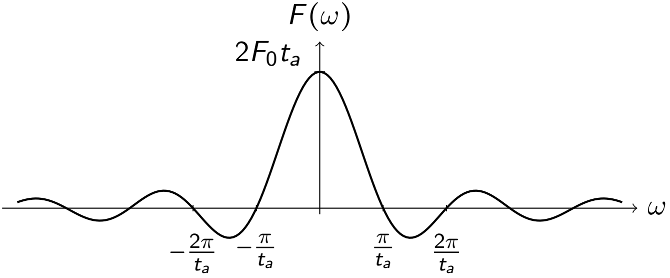
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\omega \to 0} \frac{sin(\omega t_a)}{\omega} = \lim_{\omega \to 0} \frac{t_a \cdot cos(\omega t_a)}{1} = t_a$$

Daraus folgt:

$$F(\omega \to 0) = 2F_0 t_a$$

Symmetrischer Rechteckimpuls

Darstellung der Fouriertransformierten $F(\omega) = \frac{2F_0}{\omega} \cdot sin(\omega t_a)$



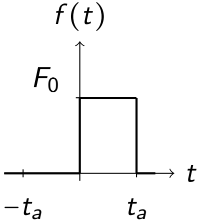
Beobachtung:

- Je kleiner t_a, desto "breiter" wird der Frequenzgang bei $\omega \to 0$, und umgekehrt
- Im Grenzfall $t_a \to \infty$ (Statik), geht $F(\omega)$ in die Dirac-Delta Funktion über

Asymmetrischer Rechteckimpuls

Beispiel: Asymmetrischer Rechteckimpuls

$$f(t) = \begin{cases} F_0 & \text{für} \quad t \leq t_a \\ 0 & \text{für} \quad t > t_a \end{cases}$$



Aus Gl. (1) folgt:

$$F(i\omega) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$= F_0 \cdot \int_0^{t_a} e^{-i\omega t} dt = -\frac{F_0}{i\omega} \cdot \left[e^{-i\omega t} \right]_0^{t_a} = -\frac{F_0}{i\omega} \cdot \left(e^{-i\omega t_a} - e^0 \right)$$

Asymmetrischer Rechteckimpuls

Einsetzen der Eulerschen Relation liefert:

$$F(i\omega) = -\frac{F_0}{i\omega} \cdot (cos(\omega t_a) - i \cdot sin(\omega t_a) - 1)$$

Mit $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$ folgt:

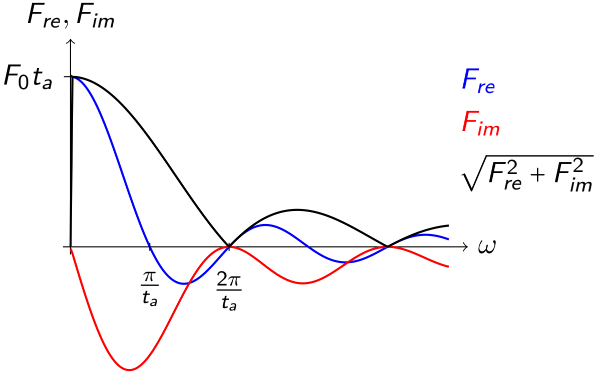
$$\begin{aligned} F(i\omega) &= \frac{F_0}{\omega} \cdot (i \cdot cos(\omega t_a) + sin(\omega t_a) - i) \\ &= \frac{F_0}{\omega} \cdot (\underbrace{sin(\omega t_a)}_{F_{re}} + i \cdot \underbrace{(cos(\omega t_a) - 1)}_{F_{im}}) \end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte enthält somit einen Real- und einen Imaginärteil

Asymmetrischer Rechteckimpuls

Darstellung der Fouriertransformierten

$$F(i\omega) = \frac{F_0}{\omega} \cdot (sin(\omega t_a) + i \cdot (cos(\omega t_a) - 1))$$



Fouriertransformation

Anmerkungen

- Bei geraden Funktionen (Achsensymmetrie) ist stets $F_{im} = 0$
- Bei ungeraden Funktionen (Punktsymmetrie) ist stets $F_{re} = 0$
- Im allgemeinen Fall ist $F_{im} \neq 0$ und $F_{re} \neq 0$
- Falls die Fouriertransformierte nicht mehr analytisch berechnet werden kann, wird diese numerisch mit Hilfe der sogenannten Fast-Fourier-Transformation (FFT) integriert
- Das Integral wird hierbei in einen Summenausdruck entwickelt und an diskreten Punkten berechnet
- Entsprechende numerische Verfahren gibt es für die inverse Fourier-Transformation (IFFT)

$\Rightarrow$ Siehe hierzu Matlab-Beispiele in der Vorlesung