Universität Stuttgart

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers
www.mechbau.uni-stuttgart.de

Ergänzung zur Vorlesung

Technische Mechanik III – Teil III

Formelsammlung

Stand WS 2012/13

letzte Änderung: 9.1.2013

Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik, Pfaffenwaldring 7, D-70 569 Stuttgart, Tel.: (0711) 685-66346

TEIL I: Allgemeine Vorraussetzungen

1 Materieller Körper, Konfiguration und Bewegung

Definition:	Ein materieller Körper $\mathcal{B}$ ist eine kontinuierlich verteilte Menge materieller Punkte $\mathcal{P}$, die sich eindeutig auf Gebiete des Anschauungsraums abbilden läßt. Eine solche Abbildung heißt Konfiguration.

Einführung der Plazierungsfunktion:

$$\boxed{\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathcal{P}, t)}$$

Bem.: Die Bewegungsfunktion $\boldsymbol{\chi}$ weist jedem materiellen Punkt $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ zu jeder Zeit $t \geq t_0$ eine eindeutige Lage $\mathbf{x}(t)$ zu.

Anfangsbedingung $(t = t_0)$**:**

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}(t = t_0) = \boldsymbol{\chi}(\mathcal{P}, t_0)$$

Folgerung: Man identifiziert die materiellen Punkte $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ durch ihre Ausgangslage $\mathbf{X}$ zum Zeitpunkt t_0.

Einführung der Bewegungsfunktion:

$$\boxed{\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}$$

Geschwindigkeit und Beschleunigung:

- Einführung der Geschwindigkeit als zeitliche Änderung der Bewegung

$$\mathbf{v} := \dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$$

- Einführung der Beschleunigung als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit

$$\mathbf{b} := \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$$

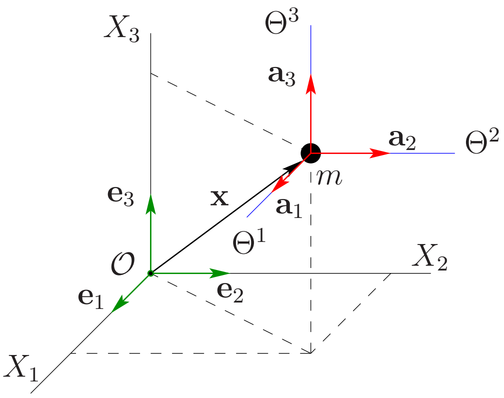
Bem.: Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind **Feldfunktionen**, d. h. Funktionen von Ort und Zeit:

$$\boxed{\{\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}\} = \mathbf{f}\,(\mathbf{X}, t)}$$

2 Darstellung der Bewegung in natürlichen Koordinaten

2.1 Darstellung der Bewegung im Raum

Darstellung der Bewegung in kartesischen Koordinaten in einem raumfesten Bezugssystem $\{\mathcal{O}, \mathbf{e}_i\}$:



Bewegung:

$$\boxed{\mathbf{x} = x_i(X_1, X_2, X_3, t)\,\mathbf{e}_i}$$

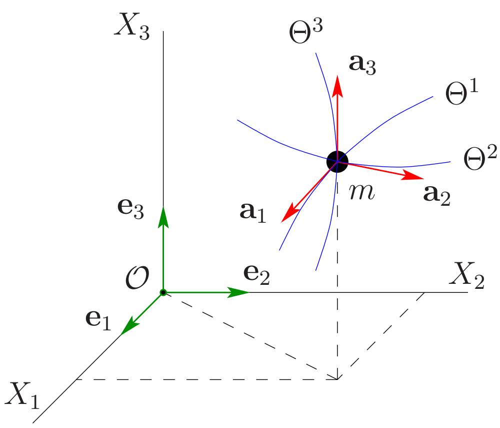
Tangentenvektoren:

$$\boxed{\mathbf{a}_i := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_i}}$$

Bemerkungen:

- Die Parameterlinien X_i sind die natürlichen Koordinaten des Raumes.
- Bezüglich kartesischer Koordinaten sind die Tangentenvektoren $\mathbf{a}_i$ (natürliche Basis) und die orthonormierten Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ identisch.
- Man identifiziert die speziellen natürlichen Koordinaten X_i mit den allgemeinen natürliche Koordinaten Θ^i.
- Die Parameterlinien Θ^i müssen nicht entlang einer Geraden gemessen werden (krummlinige Koordinaten).

Darstellung der Bewegung in krummlinigen Koordinaten in einem raumfesten Bezugssystem $\{\mathcal{O}, \mathbf{e}_i\}$:



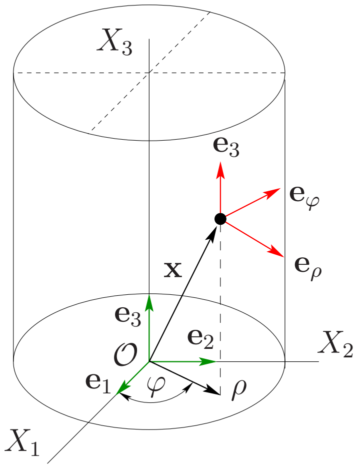
Bewegung:

$$\boxed{\mathbf{x} = x_i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t)\,\mathbf{e}_i}$$

Tangentenvektoren:

$$\boxed{\mathbf{a}_i := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^i}}$$

Darstellung der Bewegung in Zylinderkoordinaten:



Einführung natürlicher Koordinaten (Zylinderkoordinaten):

$$\Theta^1 = \rho \quad ; \quad \Theta^2 = \varphi \quad ; \quad \Theta^3 = X_3$$

Transformationsbeziehungen zwischen X_i und Θ^i:

$$\begin{aligned} X_1 &= \rho\cos\varphi &&= \Theta^1\cos\Theta^2 \\ X_2 &= \rho\sin\varphi &&= \Theta^1\sin\Theta^2 \\ X_3 &= \Theta^3 \end{aligned}$$

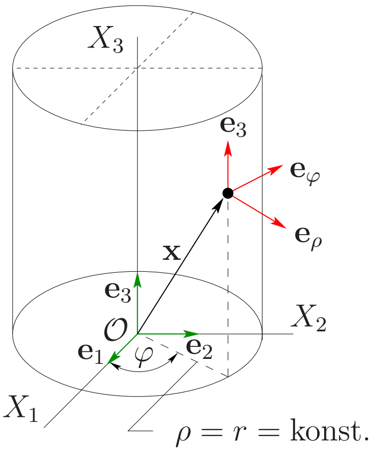
Ortsvektor $\mathbf{x}$ in natürlichen Koordinaten:

$$\mathbf{x} = \Theta^1\cos\Theta^2\,\mathbf{e}_1 + \Theta^1\sin\Theta^2\,\mathbf{e}_2 + \Theta^3\,\mathbf{e}_3$$

Differentiation nach Θ^i und Normierung der Tangentenvektoren liefert:

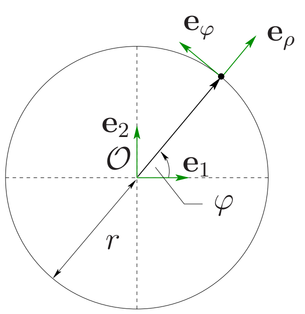
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{a}_1 &&= \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} &&= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

Beispiel: Bewegung auf einer Zylindermantelfläche ($\rho = r = \text{konst.}$)



$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_3 \end{aligned}}$$

Beispiel: Bewegung auf einer Kreisbahn ($\rho = r = \text{konst.}$ und $X_3 = \text{konst.}$)



$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\rho &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2 \end{aligned}}$$

TEIL II: Kinematik der Massenpunkte und der Starrkörper

3 Kinematik der Massenpunkte

3.1 Geradlinige Bewegung

Charakterisierung der Bewegung mit Hilfe der Beschleunigung b:

$$b \begin{cases} > 0 : & \text{beschleunigte Bewegung} \\ = 0 : & \text{gleichförmige Bewegung} \\ < 0 : & \text{verzögerte Bewegung} \end{cases}$$

Grundaufgaben der geradlinigen Bewegung:

Fall 1: $b = \text{konst.}$ (konstante Beschleunigung)

$$b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad v = b\,(t - t_0) + v_0$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad s = \tfrac{1}{2}\,b\,(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + s_0$$

Fall 2: $b = b\,(t)$ (zeitabhängige Beschleunigung)

$$b\,(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad v = \int_{t_0}^{t} b\,(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t} + v_0$$

$$v\,(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad s = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b\,(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}\tilde{t} + v_0(t - t_0) + s_0$$

Fall 3: $b = b\,(v)$ (geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung)

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{b\,(v)} \quad \rightarrow \quad t = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{b\,(\tilde{v})}\,\mathrm{d}\tilde{v} + t_0$$

$$\mathrm{d}s = \frac{v\,\mathrm{d}v}{b\,(v)} \quad \rightarrow \quad s = \int_{v_0}^{v} \frac{\tilde{v}\,\mathrm{d}\tilde{v}}{b\,(\tilde{v})} + s_0$$

Fall 4: $b = b\,(s)$ (wegabhängige Beschleunigung)

$$b\,(s) = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\,(v^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s} b\,(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v(s)} \quad \rightarrow \quad t = \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{v(\tilde{s})} + t_0$$

3.2 Krummlinige Bewegung

Darstellung in Zylinderkoordinaten (Bezug der Bewegung auf $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_3$):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 &= \text{konst.} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_\rho &= \dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot\varphi\,\mathbf{e}_\rho \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= \mathbf{0} \end{aligned} \right.$$

Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \rho\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \rho\sin\varphi\,\mathbf{e}_2 + x_3\,\mathbf{e}_3 \\ &= \rho\,\mathbf{e}_\rho + x_3\,\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} &= \dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot x_3\,\mathbf{e}_3 \\ &= \underbrace{\dot\rho}_{v_\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \underbrace{\rho\,\dot\varphi}_{v_\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi + \underbrace{\dot x_3}_{v_3}\,\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} &= \ddot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \dot\rho\,\dot{\mathbf{e}}_\rho + (\dot\rho\,\dot\varphi + \rho\,\ddot\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi + \rho\,\dot\varphi\,\dot{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot x_3\,\mathbf{e}_3 \\ &= \underbrace{(\ddot\rho - \rho\,\dot\varphi^2)}_{b_\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \underbrace{(2\,\dot\rho\,\dot\varphi + \rho\,\ddot\varphi)}_{b_\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi + \underbrace{\ddot x_3}_{b_3}\,\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Bewegung auf der Zylindermantelfläche ($\rho = r =$ konst.)**:**

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= r\,\mathbf{e}_\rho + x_3\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} &= r\,\dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \dot x_3\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} &= -r\,\dot\varphi^2\,\mathbf{e}_\rho + r\,\ddot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \ddot x_3\,\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Bewegung auf einer Kreisbahn ($\rho = r =$ konst. und $x_3 =$ konst.)**:**

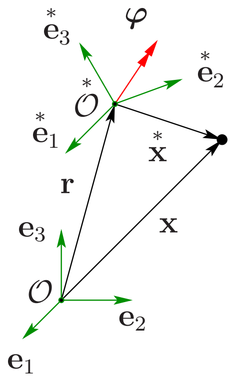
$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= r\,\mathbf{e}_\rho + x_3\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} &= \underbrace{r\,\dot\varphi}_{v_\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{b} &= \underbrace{-r\,\dot\varphi^2}_{b_\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \underbrace{r\,\ddot\varphi}_{b_\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad \left\{ \begin{aligned} v_\varphi &: \ \text{Umfangsgeschwindigkeit} \\ b_\rho &: \ \text{Zentripetalbeschleunigung} \\ b_\varphi &: \ \text{Umfangsbeschleunigung} \end{aligned} \right.$$

3.3 Relativbewegung

Bem.: Manchmal kann es sinnvoll sein, Bewegungen in einem mitbewegten Bezugssystem $\{\overset{*}{\mathcal{O}}, \overset{*}{\mathbf{e}}_1\}$ zu formulieren. Dabei ist zu beachten, daß bei Zeitableitungen die Basis des Relativsystems ebenfalls eine Zeitableitung besitzt.

Veranschaulichung:



Zusammenhang zwischen Absolut- und Relativbewegung:

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{r} + \overset{*}{\mathbf{x}}} \qquad \text{mit} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\overset{*}{\mathbf{x}}} \\ \mathbf{b} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\overset{*}{\mathbf{x}}} \end{aligned} \right.$$

Zeitableitung der Basisvektoren:

$$\boxed{\dot{\overset{*}{\mathbf{e}}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\mathbf{e}}_i} \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

Zeitableitung im Relativsystem:

Für einen beliebigen Vektor $\overset{*}{\mathbf{u}} = u_i \overset{*}{\mathbf{e}}_i$ im Relativsystem gilt:

$$\dot{\overset{*}{\mathbf{u}}}_i = (\overset{*}{\mathbf{u}})^{\triangledown} + \boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\mathbf{u}} \qquad \text{mit} \quad \left\{ \begin{aligned} (\overset{*}{\mathbf{u}})^{\triangledown} &:= \dot{\overset{*}{u}}_i(t)\, \overset{*}{\mathbf{e}}_i && : \text{relative } (\textit{Oldroyd})\text{-Ableitung} \\ \boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\mathbf{u}} &= \overset{*}{u}_i(t)\, \dot{\overset{*}{\mathbf{e}}}_i && : \text{Anteil aus Änderung der Basis} \end{aligned} \right.$$

Allgemeine Formel für Absolutgeschwindigkeit und Absolutbeschleunigung:

$$\mathbf{v} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\mathbf{x}}}_{\text{Führungsgeschwindigkeit}} + \underbrace{\overset{*}{\mathbf{v}}}_{\text{Relativgeschwindigkeit}}$$

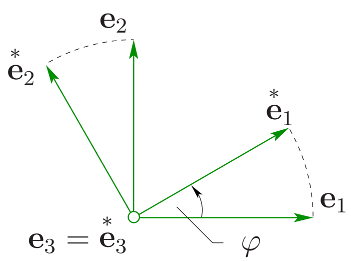
$$\mathbf{b} = \underbrace{\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overset{*}{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\mathbf{x}})}_{\text{Führungsbeschleunigung}} + \underbrace{2\, \boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\mathbf{v}}}_{\textit{Coriolis}\text{-Beschleunigung}} + \underbrace{\overset{*}{\mathbf{b}}}_{\text{Relativbeschleunigung}}$$

Möglichkeit zur Berechnung von Relativaufgaben:

(a) Einsetzen in die Formeln, d. h., Formulierung von $\dot{\mathbf{r}}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\overset{*}{\mathbf{x}}$, $\overset{*}{\mathbf{v}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, $\overset{*}{\mathbf{b}}$

(b) Aufstellen des Ortsvektors und anschließendes zeitliches Ableiten (Koeffizienten und Basis)

Einschub Koordinatentransformationen für Drehung in der Ebene:

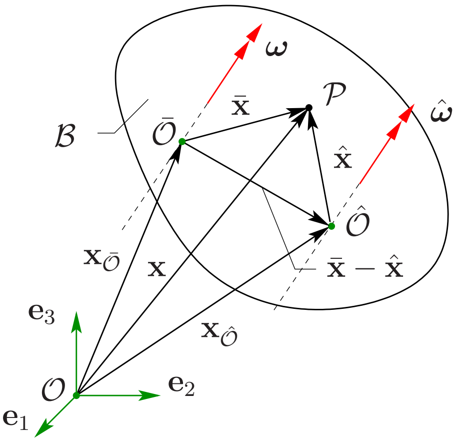


$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos\varphi\, \overset{*}{\mathbf{e}}_1 - \sin\varphi\, \overset{*}{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{e}_2 &= \sin\varphi\, \overset{*}{\mathbf{e}}_1 + \cos\varphi\, \overset{*}{\mathbf{e}}_2 \\ \overset{*}{\mathbf{e}}_1 &= \cos\varphi\, \mathbf{e}_1 + \sin\varphi\, \mathbf{e}_2 \\ \overset{*}{\mathbf{e}}_2 &= -\sin\varphi\, \mathbf{e}_1 + \cos\varphi\, \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

4 Kinematik der Starrkörper

Allgemeine Bewegung des starren Körpers

Bem.: Der Starrkörper besitzt 6 Freiheitsgrade im Raum (3 Translationen und 3 Rotationen). Bei der Bewegung des Starrkörpers erfahren die Vektoren $\bar{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{x}}$ lediglich eine Rotation, d. h. $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}}$ und $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}$.



Geschwindigkeit und Beschleunigung bei Bezug auf $\bar{\mathcal{O}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}_{\bar{\mathcal{O}}} + \dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ &= \mathbf{v}_{\bar{\mathcal{O}}} + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} &= \dot{\mathbf{v}}_{\bar{\mathcal{O}}} + (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}})^{\cdot} \\ &= \mathbf{b}_{\bar{\mathcal{O}}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

Wechsel des Bezugspunkts::

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\hat{\mathcal{O}}} &= \mathbf{v}_{\bar{\mathcal{O}}} + \boldsymbol{\omega} \times (\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{\hat{\mathcal{O}}} + \hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{v}_{\bar{\mathcal{O}}} + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}} + (\hat{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega}) \times \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\omega} = \hat{\boldsymbol{\omega}}}$$

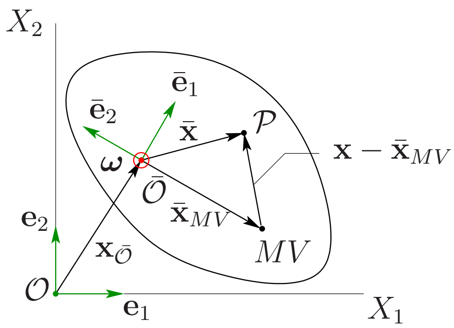
Reduktion auf eine Geschwindigkeitsschraube ($\mathbf{v}_{\bar{\mathcal{O}}}$ und $\boldsymbol{\omega}$ besitzen eine gemeinsame Wirkungslinie)**:**

$$\boxed{\bar{\mathbf{x}}_B = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\bar{\mathcal{O}}}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_B = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_{\bar{\mathcal{O}}}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} \, \boldsymbol{\omega}}$$

Ebene Bewegung des Starrkörpers

Bem.: Die ebene Bewegung des Starrkörper ist ein Sonderfall der allgemeinen Bewegung. Es verbleiben 3 kinematische Freiheitsgrade, nämlich zwei Translationen in der Ebene und eine Rotation senkrecht zu Ebene. Damit entspricht der Ortsvektor $\bar{\mathbf{x}}_B$ bei Reduktion auf eine Geschwindigkeitsschraube der Lage des momentanen Geschwindigkeitspols mit $\mathbf{v}_B = \mathbf{0}$, da $\mathbf{v}_{\bar{\mathcal{O}}} \parallel \boldsymbol{\omega}$.

(a) Geschwindigkeitzustand und momentaner Geschwindigkeitspol MV**:**



Lage des momentanen Geschwindigkeitspols MV:

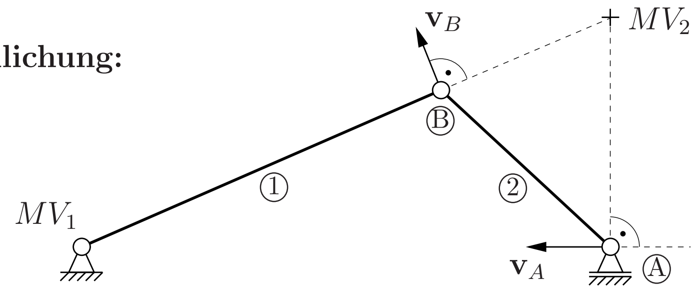
$$\boxed{\mathbf{x}_{MV} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\bar{\mathcal{O}}}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_{MV} = \mathbf{0}}$$

Betrag von $\mathbf{x}_{MV}$:
$$\boxed{\bar{x}_{MV} = \frac{v_{\bar{\mathcal{O}}}}{\omega}}$$

Graphische Methoden zur Bestimmung des momentanen Geschwindigkeitspols:

- Ist in einem Punkt Ⓐ die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ bekannt, so liegt der momentane Geschwindigkeitspol MV auf der Senkrechten zu $\mathbf{v}_A$ in Ⓐ.
- Sind in Ⓐ und Ⓑ die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{v}_B$ bekannt, so liegt MV im Schnittpunkt der beiden in Ⓐ und Ⓑ auf $\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{v}_B$ errichteten Senkrechten.
- Ist ein Punkt bekannt, für den $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ gilt, so ist dieser Punkt der momentane Geschwindigkeitspol MV.

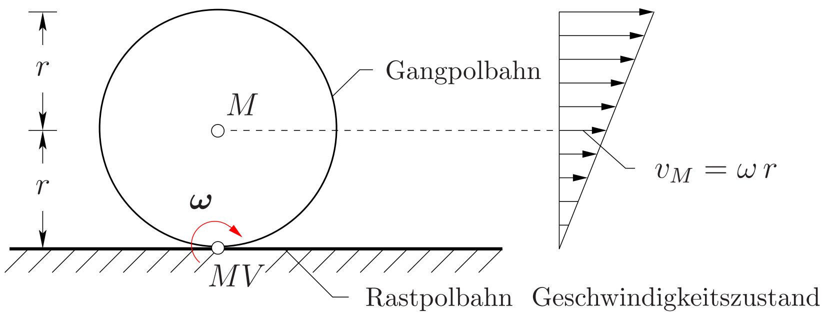
Veranschaulichung:



Gangpolbahn und Rastpolbahn:

- Gangpolbahn (körperfest): Menge aller momentanen Geschwindigkeitspole des Körpers.
- Rastpolbahn (bahnfest): Menge aller momentanen Geschwindigkeitspole der Bahn, auf der der Körper abrollt.

Beispiel: Rollendes Rad



(b) momentaner Beschleunigungspol MB**:**

$$\boxed{\mathbf{x}_{MB} = \frac{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{b}_{\bar{O}} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\,\mathbf{b}_{\bar{O}}}{\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})^2} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}_{MB} = \mathbf{0}}$$

TEIL III: Kinetik der Massenpunkte und der Massenpunktsysteme

5 Impuls- und Drallsatz

5.1 Impulssatz der Punktkinetik

Bem.: Der Impulssatz hat axiomatischen Charakter und basiert auf der Naturbeobachtung.

***Newton*sche Gesetze:**

1. Ein Körper, auf den keine resultierende Kraft einwirkt, verharrt im Zustand der Ruhe bzw. der gleichförmigen Bewegung ($\mathbf{v} = \text{konst.}$).
2. *Newton*sches Grundgesetz (Impulssatz): „Kraft = Masse × Beschleunigung“
3. Reaktionsgesetz: „Actio = Reactio“
4. Gesetz vom Kräfteparallelogramm

Formelmäßige Darstellung der Gesetze 1. und 2.:

- Das 1. *Newton*sche Gesetz (Impulserhaltungssatz) lautet:

$$\boxed{\mathbf{0} = \mathbf{k} \quad \longleftrightarrow \quad m\,\mathbf{v} = \text{konst.}}$$

- Das 2. *Newton*sche Gesetz (Impulssatz) lautet:

$$\boxed{m\,\mathbf{b} \;=\; \mathbf{k}} \qquad \text{mit} \quad \begin{cases} \text{m} = \text{konst.} \\ \mathbf{k} : \text{auf den Massenpunkt einwirkende} \\ \quad\;\; \text{resultierende Kraft} \end{cases}$$

Axiomatische Einführung des Impulssatzes:

„Impuls (Bewegungsgröße) = Masse × Geschwindigkeit“ $\longrightarrow$ $\boxed{\mathbf{l} = m\,\mathbf{v}}$

Axiom: Die zeitliche Änderung des Impulses enspricht der Summe der auf den Massenpunkt m angreifenden Kräfte. $\longrightarrow$ $\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{k}$

Diskussion des Impulssatzes:

Impulssatz für Systeme mit veränderlichen Massen: $m\,\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\,\mathbf{v} = \mathbf{k}$

Massenänderung in Abhängigkeit von $\mathbf{v}$ nach *Einstein*:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \qquad \text{mit} \left\{ \begin{array}{lll} m_0 & : & \text{Ruhemasse} \\ c & : & \text{Lichtgeschwindigkeit} \end{array} \right.$$

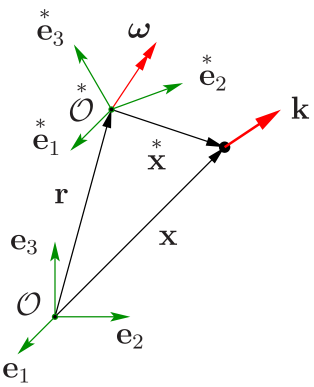
Allgemeine Vorgehensweise:

1. Massenpunkt freischneiden und alle Kräfte antragen.
2. Impulssatz in Koordinatenrichtungen aufstellen.
3. Durch Integration $\mathbf{x}$ bestimmen oder bei bekannter Bewegung $\mathbf{k}$ berechnen.

Inertialsysteme und *Galilei*-Transformation:

Definition:	Alle Bezugssysteme, in denen das *Newton*sche Grundgesetz gilt, sind Inertialsysteme.

Wechsel des Bezugssystems:



$$\boxed{\mathbf{b} = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r}$$

$$\text{mit} \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{b}_f & = & \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overset{*}{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{b}_c & = & 2\,\boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\mathbf{v}} \\ \mathbf{b}_r & = & \overset{*}{\mathbf{b}} \end{array} \right.$$

Im Absolutsystem (Inertialsystem) bzgl. $\{0, \mathbf{e}_i\}$ gilt: $\mathbf{k} = m\,\mathbf{b} = m\,(\mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r)$

Im Relativsystem bzgl. $\{\overset{*}{0}, \overset{*}{\mathbf{e}}_i\}$ gelte: $\mathbf{k} = m\,\mathbf{b}_r$

Forderung, damit auch $\{\overset{*}{0}, \overset{*}{\mathbf{e}}_i\}$ Inertialsystem ist:

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_r \;\rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}_f \equiv \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_c \equiv \mathbf{0} \end{array} \right\} \;\rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; \dot{\mathbf{r}} = \text{konst.} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

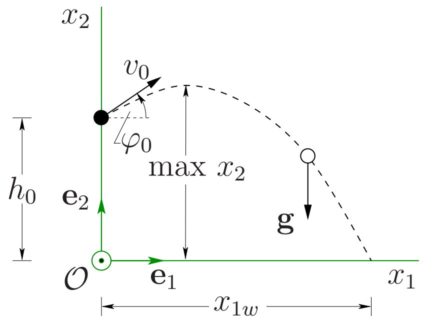
Jedes Bezugssystem, daß durch eine gleichförmige Translationsbewegung ($\dot{\mathbf{r}} = \text{konst.}$) aus einem Inertialsystem hergeleitet wird, ist selbst ein Inertialsystem. Die Ortsvektoren genügen der *Galilei*-Transformation:

$$\boxed{\mathbf{x} = \overset{*}{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{r}}\,t}$$

Beispiele zum Impulssatz der Punktkinetik

Schiefer Wurf

Bem.: Freier Wurf im Schwerefeld (2-d Problem) ohne Luftwiderstand.



gegeben: v_0, φ_0, h_0, $\mathbf{g}$.

gesucht: Wurfbahn $x_2(x_1)$, Wurfzeit t_w, Wurfweite x_{1w}, Wurfhöhe $\max x_2$.

Wurfbahn: $$x_2(x_1) = h_0 + \tan\varphi_0 \; x_1 - \frac{g}{2v_0^2 \, \cos^2\varphi_0} \, x_1^2$$

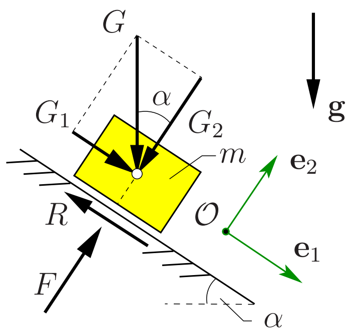
Wurfzeit: $$t_w = \frac{v_0 \, \sin\varphi_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \, \sin\varphi_0}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}}$$

Wurfweite: $$x_{1w} = x_1(t_w) = v_0 \cos\varphi_0 \; t_w \qquad \text{mit} \quad h_0 = 0 \quad \text{folgt} \qquad x_{1w} = \frac{v_0^2}{g} \sin^2\varphi_0$$

Wurfhöhe: $$\max\, x_2 = h_0 + \frac{v_0^2 \, \sin^2\varphi_0}{2g}$$

Geführte Bewegung

Bem.: Klotz auf schiefer Ebene im Schwerefeld mit *Coulomb*scher Gleitreibung.



gegeben: m, α, μ_G, x_0, v_0, $\mathbf{g}$.

gesucht: Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung

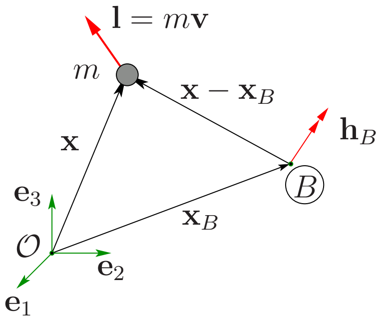
$$m\,\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{k} \;\rightarrow\; \begin{cases} \mathbf{e}_1 : \; m\,\ddot{x}_1 & = \; G_1 - R \\ \mathbf{e}_2 : \; m\,\ddot{x}_2 & = \; F - G_2 \end{cases}$$

Bewegung in $\mathbf{e}_2$-Richtung nicht möglich (Führung): $x_2 \equiv 0 \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x}_2 = 0$

$$\text{Bewegung in } \mathbf{e}_1\text{-Richtung} \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 & = \; g\,(\sin\alpha - \mu_G\cos\alpha) = b_1 = \text{konst.} \\ \dot{x}_1 & = \; g\,(\sin\alpha - \mu_G\cos\alpha)\,t + v_0 \\ x_1 & = \; \frac{1}{2}\,g\,(\sin\alpha - \mu_G\cos\alpha)\,t^2 + v_0\,t + x_0 \end{cases}$$

5.2 Drallsatz der Punktkinetik

Drall (Drehimpuls) $\mathbf{h}_B$ des Massenpunkts m:



$$\boxed{\mathbf{h}_B = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{l}}$$

Bem.: B ist ein beliebiger raumfester Punkt

Zeitableitung von $\mathbf{h}_B$: $\dot{\mathbf{h}}_B = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \times \dot{\mathbf{l}}$

Drallsatz: Die zeitliche Änderung des Drallvektors entspricht dem Moment der auf den Massenpunkt m einwirkenden Kräfte bzgl. desselben raumfesten Punkts B.

$$\boxed{\dot{\mathbf{h}}_B = \mathbf{m}_B}$$

Bem.: Der Drallsatz der Punktkinetik ist kein eigenständiges Axiom, da er aus dem Impulssatz hergeleitet werden kann.

5.3 *d'Alembert*sche Trägheitskräfte

Bem.: Die Einführung *d'Alembert*scher Trägheitskräfte basiert auf der Interpretation der Trägheitswirkungen (Scheinkräfte) als eingeprägte Kräfte.

***d'Alembert*sches Kräftegleichgewicht (dynamisches Gleichgewicht):**

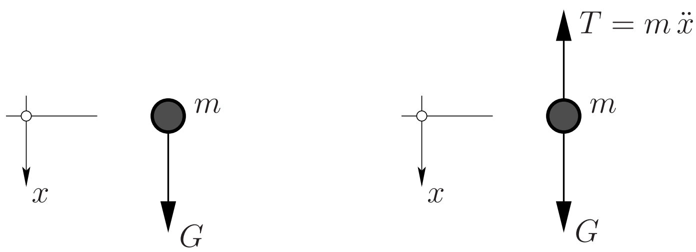
aus dem Impulssatz folgt

$$\boxed{\mathbf{t} = -m\,\ddot{\mathbf{x}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{0} = \mathbf{k} + \mathbf{t}}$$

mit $\mathbf{t}$: *d'Alembert*sche Trägheitskraft

Veranschaulichung: Freier Fall

*Newton*sche Formulierung *d'Alembert*sche Formulierung



$m\,\ddot{x} = G$ $0 = G - T$

6 Impuls- und Drallbilanzsätze

Impuls- und Drallbilanz

Bem.: Impuls- und Drallbilanz sind die integrierten Formen von Impuls- und Drallsatz. Die Impuls- und Drallbilanz können z. B. bei Stoßvorgängen zwischen Massenpunkten und starren Körpern verwendet werden.

Impulsbilanz:

$$\dot{\mathbf{l}} \;=\; \mathbf{k} \;\rightarrow\; \mathbf{l}(t_2) - \mathbf{l}(t_1) \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{k}\,\mathrm{d}t \;=:\; \mathbf{K}$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{K} \;:\; \text{Kraftantrieb}$$

Drallbilanzsatz:

$$\dot{\mathbf{h}}_B \;=\; \mathbf{m}_B \;\rightarrow\; \mathbf{h}_B(t_2) - \mathbf{h}_B(t_1) \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_B\,\mathrm{d}t \;=:\; \mathbf{M}_B$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{M}_B \;:\; \text{Momentenantrieb}$$

Impuls- und Drallerhaltung

Bem.: Sonderfälle für $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{m}_B = \mathbf{0}$.

Impulserhaltungssatz:

$$\mathbf{l}(t_2) - \mathbf{l}(t_1) \;=\; 0 \;\rightarrow\; \mathbf{l}(t) \;=\; \text{konst.}$$

Drallerhaltungssatz:

$$\mathbf{h}_B(t_2) - \mathbf{h}_B(t_1) \;=\; 0 \;\rightarrow\; \mathbf{h}_B(t) \;=\; \text{konst.}$$

7 Energie- und Arbeitssatz

Arbeitssatz der Mechanik

$$\boxed{\underbrace{\mathcal{K}_{①} - \mathcal{K}_{②}}_{\substack{\text{kinetische Energie in} \\ \text{den Zuständen ① und ②}}} \;=\; \underbrace{\mathcal{A}_{12}}_{\substack{\text{Arbeit der auf } m \text{ einwirkenden Kräfte} \\ \text{die zwischen ① und ② geleistet wird}}}}$$

allgemein gilt:

$$\boxed{\mathcal{A}_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}}$$

→ Projektion der Summe der eingeprägten Kräfte $\mathbf{F}$ in Wegrichtung durch Skalarprodukt (nur Kräfte in Bewegungsrichtung interessieren).

Arbeit konservativer und nicht-konservativer Kräfte:

$$\boxed{\mathcal{A}_{12} = \underbrace{\tilde{\mathcal{A}}_{12}}_{\substack{\text{nicht-konservative}\\ \text{Kräfte (z. B. Reibung)}}} + \underbrace{\bar{\mathcal{A}}_{12}}_{\substack{\text{konservative Kräfte}\\ \text{(z. B. Gewichtskräfte)}}}}$$

Konservative Kräfte: Eine Kraft ist konservativ, wenn ihre Arbeit $\mathcal{A}_{12}$ nicht vom Weg abhängt, auf dem sie zwischen den Zuständen ① mit t_1 und ② mit t_2 geleistet wird.

Arbeit und Potential konservativer Kräfte:

$$\bar{\mathcal{A}}_{12} = -\mathcal{U}_{12} = -\int_{①}^{②} \frac{\mathrm{d}\mathcal{U}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathcal{U}_{①} - \mathcal{U}_{②}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\underbrace{\underbrace{\mathcal{K}_{②} + \mathcal{U}_{②} = \mathcal{K}_{①} + \mathcal{U}_{①}}_{\text{Energieerhaltungssatz}} + \tilde{\mathcal{A}}_{12}}_{\text{Arbeitssatz}}}$$

Bem.: Die Anwendung des Energieerhaltungssatzes setzt $\tilde{\mathcal{A}}_{12}$ vorraus, d. h., es wirken nur konservative Kräfte.

Kinetische Energie $\mathcal{K}$:

* Translation: $\frac{1}{2}\, m\, v^2$
* Rotation: $\frac{1}{2}\, \theta_M\, \omega^2$
  (nur ausgedehnte Körper)

Potentielle Energie $\mathcal{U}$:

* Lageenergie: $m\, g\, h$
* Normalkraftfeder: $\frac{1}{2}\, c_f\, f^2$
* Momentenfeder: $\frac{1}{2}\, c_\varphi\, \varphi^2$

TEIL IV: Kinetik der starren Körper

8 Impuls- und Drallsatz

Bilanzrelationen für Impuls und Drall

∗ Kinetik der Massenpunkte

- Impulssatz: axiomatische Einführung
- Drallsatz: Herleitung aus dem Impulssatz, d. h. kein eigenständiges Axiom

∗ Kinetik der materiellen Körper

- Impulssatz: axiomatische Einführung
- Drallsatz: ist ein eigenständiges Axiom

Massenbilanz des materiellen Körpers

Axiom: In einem geschlossenen System bleibt die Masse eines materiellen Körpers $\mathcal{B}$ konstant.

$$\boxed{\begin{aligned} m\,(\mathcal{B},t) &= \text{konst.} \\ \dot{m}\,(\mathcal{B},t) &= 0 \end{aligned}}$$

Impulssatz des materiellen Körpers

Axiom: Die zeitliche Änderung des Impulses entspricht der am Körper $\mathcal{B}$ angreifenden resultierenden Kraft.

$$\boxed{\dot{\mathbf{l}}\,(\mathcal{B},t) = \mathbf{k}\,(\mathcal{B},t)}$$

$$\text{mit} \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{l}}\,(\mathcal{B},t) & = & \left(\int_V \dot{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}m\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = \int_V \ddot{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}m \;\; \text{(mit Massenerhaltungssatz)} \\ \mathbf{k}\,(\mathcal{B},t) & : & \text{resultierende Kraft} \end{array} \right.$$

daraus folgt:

$$\boxed{\int_V \ddot{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}m = \mathbf{k}\,(\mathcal{B},t)}$$

Formulierung des Impulssatzes bzgl. des Massenmittelpunkts:

Lage des Massenmittelpunkts:

$$\mathbf{x}_M = \frac{1}{m}\int_V \mathbf{x}\,\mathrm{d}m \quad\rightarrow\quad m\,\dot{\mathbf{x}}_M = \int_V \dot{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}m \quad\rightarrow\quad m\,\ddot{\mathbf{x}}_M = \int_V \ddot{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}m$$

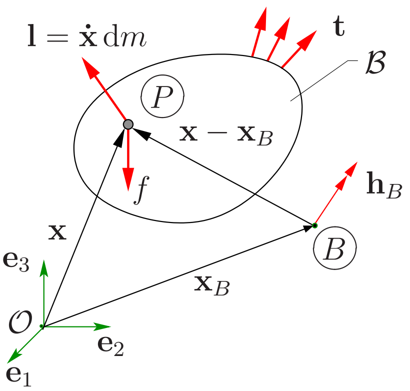
Schwerpunktsatz (Impulssatz bzgl. des Massenmittelpunkts):

$$\boxed{m\,\ddot{\mathbf{x}}_M = \mathbf{k}\,(\mathcal{B},t)}$$

Drallsatz des materiellen Körpers

Formulierung des Drallsatzes

Axiom: Die zeitliche Änderung des Drallvektors entspricht der Summe der Momente aller am Körper $\mathcal{B}$ angreifenden Kräfte bzgl. desselben raumfesten Punkts B.



$$\boxed{\dot{\mathbf{h}}_B = \mathbf{m}_B\,(\mathcal{B},t)}$$

$$\text{mit}\quad\left\{\begin{array}{lcl} \mathbf{h}_B\,(\mathcal{B},t) & = & \int_V (\mathbf{x}-\mathbf{x}_B)\times\dot{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}m \\ \mathbf{m}\,(\mathcal{B},t) & : & \text{Moment bzgl. } B \end{array}\right.$$

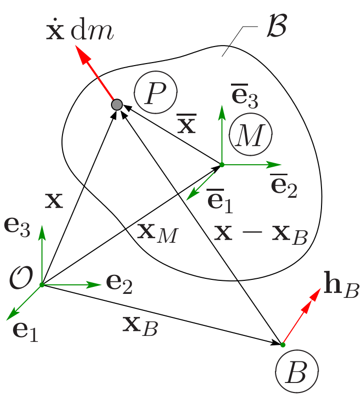
Es gilt mit dem Massenerhaltungssatz

$$\dot{\mathbf{h}}_B = \int_V (\mathbf{x}-\mathbf{x}_B)\times\ddot{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}m$$

es folgt:

$$\boxed{\int_V (\mathbf{x}-\mathbf{x}_B)\times\ddot{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}m = \mathbf{m}_B\,(\mathcal{B},t)}$$

Formulierung des Drallsatzes bzgl. des Massenmittelpunkts



$$\boxed{\dot{\mathbf{h}}_M\,(\mathcal{B},t) = \mathbf{m}_M\,(\mathcal{B},t)}$$

$$\text{mit}\quad\left\{\begin{array}{lcl} \mathbf{h}_M\,(\mathcal{B},t) & = & \int_V \bar{\mathbf{x}}\times\dot{\bar{\mathbf{x}}}\,\mathrm{d}m \\ \bar{\mathbf{x}} & = & \mathbf{x}-\mathbf{x}_M \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}} & = & \boldsymbol{\omega}\times\bar{\mathbf{x}} \end{array}\right.$$

Drallvektor und Massenträgheitstensor

Drallvektor bzgl. des Massenmittelpunkts

$$\boxed{\mathbf{h}_M\,(\mathcal{B},t) = \int_M \bar{\mathbf{x}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}})\,\mathrm{d}m =: \boldsymbol{\theta}_M\,\boldsymbol{\omega}} \quad \text{mit} \begin{cases} \mathbf{h}_M\,(\mathcal{B},t) & : \text{Drallvektor bzgl. } M \\ \boldsymbol{\theta}_M & : \text{Massenträgheitstensor} \end{cases}$$

Massenträgheitstensor bzgl. des Massenmittelpunkts

$$\boldsymbol{\theta}_M \;=\; \int_M \left[(\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{x}})\,\mathbf{I} \,-\, (\overline{\mathbf{x}} \otimes \overline{\mathbf{x}})\right]\mathrm{d}m$$

Auswertung des Massenträgheitstensors

Bezüglich des Massenmittelpunkts eines starren Körpers folgt

$$\boldsymbol{\theta}_M \quad = \underbrace{\int_M \left[(\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_3^2)\delta_{ij} - \overline{x}_i \overline{x}_j\right]\mathrm{d}m}_{\overline{\theta}_{ij}}\,(\overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j)$$

mit $\overline{\theta}_{ij}$: Koeffizienten des Massenträgheitstensors $\boldsymbol{\theta}_M$

- axiale Massenträgheitsmomente

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\theta}_{11} &= \int_M (\bar{x}_2^2 \,+\, \bar{x}_3^2)\,\mathrm{d}m \\ \bar{\theta}_{22} &= \int_M (\bar{x}_1^2 \,+\, \bar{x}_3^2)\,\mathrm{d}m \\ \bar{\theta}_{33} &= \int_M (\bar{x}_1^2 \,+\, \bar{x}_2^2)\,\mathrm{d}m \end{aligned}}$$

- Deviationsmomente

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\theta}_{12} &= \bar{\theta}_{21} = -\int_M \bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\mathrm{d}m \\ \bar{\theta}_{13} &= \bar{\theta}_{31} = -\int_M \bar{x}_1\,\bar{x}_3\,\mathrm{d}m \\ \bar{\theta}_{23} &= \bar{\theta}_{32} = -\int_M \bar{x}_2\,\bar{x}_3\,\mathrm{d}m \end{aligned}}$$

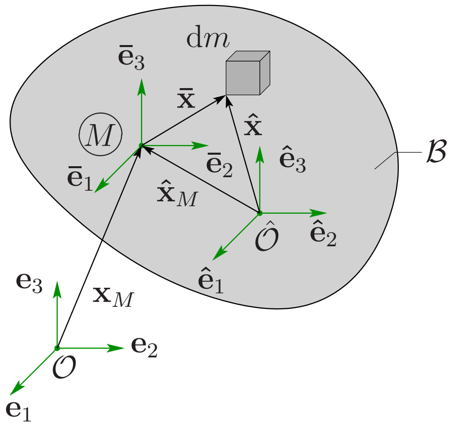
- polares Massenträgheitsmoment

$$\boxed{\bar{\theta}_P \;:=\; \int_M (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2)\,\mathrm{d}m \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\bar{\theta}_{11} + \bar{\theta}_{22} + \bar{\theta}_{33})}$$

Massenträgheitsmomente in unterschiedlichen Bezugssystemen

(a) Wechsel des Bezugssystems

Veranschaulichung:



Drallvektor bzgl. $\hat{0}$:

$$\boxed{\mathbf{h}_{\hat{\mathcal{O}}}\,(\mathcal{B}, t) = \boldsymbol{\theta}_{\hat{\mathcal{O}}}\,\boldsymbol{\omega}}$$

Translation des Bezugssystems (Satz von *Steiner-Huygens*):

$$\boldsymbol{\theta}_{\hat{\mathcal{O}}} \;=\; \boldsymbol{\theta}_M + [(\hat{\mathbf{x}}_M \cdot \hat{\mathbf{x}}_M)\,\mathbf{I} - (\hat{\mathbf{x}}_M \otimes \hat{\mathbf{x}}_M)]\,m$$

bzw. in Koeffizientendarstellung:

$$\boxed{\hat{\theta}_{ij} \;=\; \bar{\theta}_{ij} + \underbrace{[(\hat{x}_{M1}^2 + \hat{x}_{M2}^2 + \hat{x}_{M3}^2)\,\delta_{ij} - \hat{x}_{Mi}\hat{x}_{Mj}]\,m}_{\textit{Steiner}\text{-Anteile}}}$$

- axiale Massenträgheitsmomente

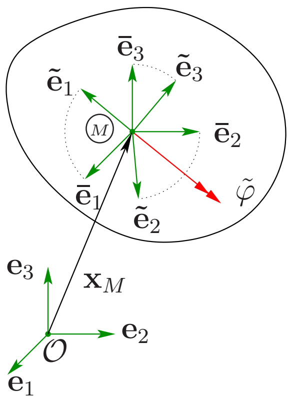
$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\theta}_{11} &= \bar{\theta}_{11} + m\,(\hat{x}_{M2}^2 + \hat{x}_{M3}^2)\\ \hat{\theta}_{22} &= \bar{\theta}_{22} + m\,(\hat{x}_{M1}^2 + \hat{x}_{M3}^2)\\ \hat{\theta}_{33} &= \bar{\theta}_{33} + m\,(\hat{x}_{M1}^2 + \hat{x}_{M2}^2)\end{aligned}}$$

- Deviationsmomente für $i \neq j$

$$\boxed{\hat{\theta}_{ij} \;=\; \bar{\theta}_{ij} - m(\hat{x}_{Mi}\,\hat{x}_{Mj})}$$

Rotation des Bezugssystems bzgl. des Massenmittelpunkts

Bem.: $\boldsymbol{\theta}_M$ bleibt erhalten, seine Koeffizienten ändern sich jedoch mit der Rotation des Bezugssystems



$$\boxed{\boldsymbol{\theta}_M = \tilde{\theta}_{op}\,(\tilde{\mathbf{e}}_o \otimes \tilde{\mathbf{e}}_p)}$$

$$\text{mit} \quad \tilde{\theta}_{op} = \tilde{R}_{oi}\,\bar{\theta}_{ij}\,\tilde{R}_{pj}$$

Bem.: $\tilde{\mathbf{R}}$ kann dargestellt werden durch:

- 3 voneinander unabhängige Richtungs-Cosini
- 3 *Cardano*sche Winkel
- 3 *Euler*sche Winkel
- 1 *Euler-Rodriguez*-Winkel

Hauptträgheitsmomente

Hauptträgheitsmomente für den allgemeinen 3-dimensionalen Fall durch Lösen des Eigenwertproblems bzw. durch Drehung des Basissystems bis ein Zustand erreicht wird, bei dem alle Deviationsmomente verschwinden

$$\boldsymbol{\theta}_M = \theta_{ij}\,(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i\,(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \qquad \text{mit} \quad \theta_{ij} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix}$$

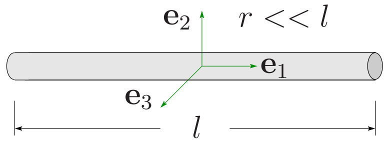
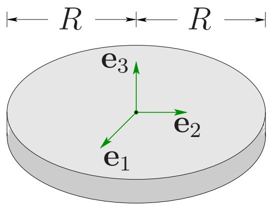
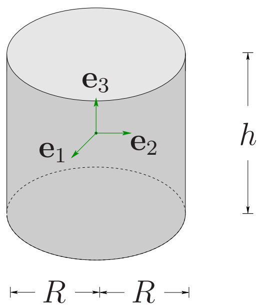
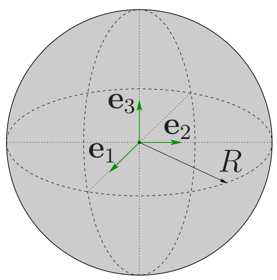
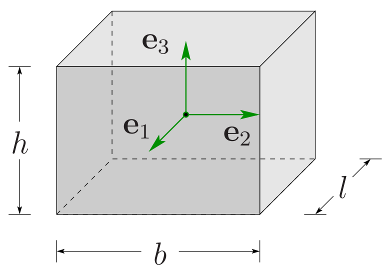
$$\text{mit} \left\{ \begin{array}{l} \theta_i \ : \text{zugehörige Hauptträgheitsmomente (Eigenwerte } \lambda_i \equiv \theta_i \text{ von } \boldsymbol{\theta}_M) \\ \mathbf{e}_i \ : \text{zugehörige Hauptrichtungen} \end{array} \right.$$

Charakteristische Gleichung des Eigenwertproblems

$$\boxed{III_{\boldsymbol{\theta}_M} - \lambda\, II_{\boldsymbol{\theta}_M} + \lambda^2\, I_{\boldsymbol{\theta}_M} - \lambda^3 = 0}$$

$$\text{mit} \left\{ \begin{array}{lcl} I_{\boldsymbol{\theta}_M} & = & \boldsymbol{\theta}_M \cdot \mathbf{I} \\ II_{\boldsymbol{\theta}_M} & = & \frac{1}{2}\,[(\boldsymbol{\theta}_M \cdot \mathbf{I})^2 - \boldsymbol{\theta}_M\,\boldsymbol{\theta}_M \cdot \mathbf{I}\,] \\ III_{\boldsymbol{\theta}_M} & = & \det \boldsymbol{\theta}_M \end{array} \right\} \text{Hauptinvarianten}$$

Beispiele zur Berechnung von Massenträgheitsmomenten

Geometrie	θ_{11}	θ_{22}	θ_{33}
schlanker prismatischer Stab 	0	$\frac{ml^2}{12}$	$\frac{ml^2}{12}$
dünne Kreisscheibe 	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{2}$
Zylinder 	$m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12})$	$m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12})$	$\frac{mR^2}{2}$
Kugel 	$\frac{2mR^2}{5}$	$\frac{2mR^2}{5}$	$\frac{2mR^2}{5}$
Quader 	$\frac{m}{12}(b^2 + h^2)$	$\frac{m}{12}(l^2 + h^2)$	$\frac{m}{12}(b^2 + l^2)$

9 Energie- und Arbeitssatz

9.1 Energiesatz des materiellen Körpers

Energiesatz (Bilanz der mechanischen Leistung)

$$\boxed{\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_i} \qquad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_a & : \text{ Leistung der äußeren Kräfte} \\ \mathcal{L}_i & : \text{ Leistung der inneren Spannungen} \end{cases}$$

Sonderfall des starren Körpers

Bem.: Am starren Körper verschwindet die Leistung der inneren Spannungen (keine Verzerrungsgeschwindigkeiten), d. h.

$$\mathcal{L}_i \equiv 0 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_a}$$

Für die kinetische Energie des starren Körpers gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{K} &= \tfrac{1}{2}\, m\, \dot{\mathbf{x}}_M \cdot \dot{\mathbf{x}}_M + \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h}_M\,(\mathcal{B},\, t) \\ &= \tfrac{1}{2}\, m\, \dot{\mathbf{x}}_M \cdot \dot{\mathbf{x}}_M + \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}_M\, \boldsymbol{\omega} \end{aligned}}$$

Bem.: Die kinetische Energie $\mathcal{K}$ setzt sich aus der Translationsenergie bzgl. des Massenmittelpunkts und der Rotationsenergie um den Massenmittelpunkt zusammen.

Leistung der äußeren Kräfte

$$\mathcal{L}_a = \dot{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{k}(\mathcal{B},\, t) + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m}_M(\mathcal{B},\, t)$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathcal{B},\, t) &= \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_M(\mathcal{B},\, t) &= \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{\mathbf{x}}_i \times \mathbf{f}_i \end{cases}$$

Einsetzen in den Energiesatz liefert

$$\boxed{\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_a \;\longleftrightarrow\; \dot{\mathbf{x}}_M \cdot m\, \ddot{\mathbf{x}}_M + \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{h}}_M(\mathcal{B},\, t) = \dot{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{k}(\mathcal{B},\, t) + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m}_M(\mathcal{B},\, t)}$$

9.2 Arbeitssatz und Energieerhaltungssatz

Arbeitssatz für starre Körper (konservative und nicht-konservative Kräfte)

$$\mathcal{K}_{②} - \mathcal{K}_{①} \;=\; \mathcal{A}_{a12}(\mathcal{B},\, t) \;=\; \int_1^2 \mathcal{L}_a(\mathcal{B},\, t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} \mathcal{K} & = \tfrac{1}{2}\, m\, \dot{\mathbf{x}}_M \cdot \dot{\mathbf{x}}_M + \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h}_M \\[2ex] \mathcal{A}_{a12} & = \displaystyle\int_1^2 (\dot{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m}_M)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{a12} = \tilde{\mathcal{A}}_{a12} + \bar{\mathcal{A}}_{a12} \quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{A}}_{a12} : \text{Arbeit der nicht-konservativen Kräfte} \\ \bar{\mathcal{A}}_{a12} : \text{Arbeit der konservativen Kräfte } (\mathcal{U}_{a①} - \mathcal{U}_{a②}) \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{K}_{②} + \mathcal{U}_{a②} = \mathcal{K}_{①} + \mathcal{U}_{a①} + \tilde{\mathcal{A}}_{a12}}$$

Energieerhaltungssatz für starre Körper ($\tilde{\mathcal{A}}_{a12} \equiv 0$)

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{K}(\mathcal{B},\, t) + \mathcal{U}_a(\mathcal{B},\, t) & = & \text{konst.} \\ \to \quad \mathcal{K}_{②} + \mathcal{U}_{a②} & = & \mathcal{K}_{①} + \mathcal{U}_{a①} \end{array}}$$

9.3 Das Prinzip von *d'Alembert*

Bem.: Das Prinzip von *d'Alembert (Pvd'A)* hat in der Kinetik denselben Stellenwert wie das Prinzip der virtuellen Arbeit *(PdvA)* in der Statik.

Formulierung des Prinzips:

Bem.: Man ersetzt im Energiesatz (Bilanz der mechanischen Leistung) die Translations- und Rotationsgeschwindigkeit durch virtuelle Größen, d. h.

$$\begin{array}{lcll} \dot{\mathbf{x}}_M & \to & \delta\mathbf{x}_M & : \text{virtuelle Verschiebung} \\ \boldsymbol{\omega} & \to & \delta\boldsymbol{\varphi} & : \text{virtuelle Verdrehung} \end{array}$$

$$\boxed{[\mathbf{k}(\mathcal{B},\, t) - m\ddot{\mathbf{x}}_M] \cdot \delta\mathbf{x}_M + [\mathbf{m}_M(\mathcal{B},\, t) - \dot{\mathbf{h}}_M(\mathcal{B},\, t)] \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \;=\; 0}$$

Bem.:
- Führungskräfte und -momente sind orthogonal zu virtuellen Größen $\delta\mathbf{x}_M$ und $\delta\boldsymbol{\varphi}$
- Für den Fall der Statik geht das Prinzip von *d'Alembert (Pvd'A)* in das Prinzip der virtuellen Arbeit *(PdvA)* über, es gilt: $\ddot{\mathbf{x}}_M \equiv \mathbf{0}$, $\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \equiv \mathbf{0}$

10 Die ebene Starrkörperbewegung

Beschreibende Gleichungen

Bem.: Darstellung der ebenen Bewegung in der $\mathbf{e}_1$-$\mathbf{e}_2$-Ebene; von den 6 Kinematen der allgemeinen Bewegung verbleiben 3 Kinematen bei ebener Bewegung:

2 Translationsgeschwindigkeiten : $\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{M}1}, \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{M}2}$
1 Rotationsgeschwindigkeit : $\omega_3 = \dot{\varphi}_3$

Koeffizientendarstellung von Schwerpunkt- und Drallsatz:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 : m\,\ddot{x}_{M1} & = & k_1 \\ \mathbf{e}_2 : m\,\ddot{x}_{M2} & = & k_2 \end{array}\right\}\text{Schwerpunktsatz} \\ \mathbf{e}_3 : \theta_M\,\dot{\omega}_3 \;=\; m_{M3} : \text{ Drallsatz} \end{array}}$$

Energiesatz (Bilanz der mechanischen Leistung) bei ebener Starrkörperbewegung:

- Auswertung bezüglich M:

$$\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_a \to (m\,\dot{v}_M)\,v_M + (\theta_M\,\dot{\omega}_3)\,\omega_3 = k_1\,\dot{x}_{M1} + k_2\,\dot{x}_{M2} + m_{M3}\,\omega_3$$

- Auswertung bezüglich MV:

$$\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_a \longrightarrow (\theta_{MV}\,\dot{\omega}_3)\,\omega_3 = m_{MV3}\,\omega_3$$

Arbeitssatz bei ebener Starrkörperbewegung:

$$\mathcal{K}_{②} - \mathcal{K}_{①} = \mathcal{A}_{a12}(\mathcal{B},\,t) = \int_1^2 \mathcal{L}_a(\mathcal{B},\,t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{K} = \begin{cases} \frac{1}{2}\,m\,(\dot{x}_{M1}^2 + \dot{x}_{M2}^2) + \frac{1}{2}\,\theta_M\,\omega_3^2 & : \quad \text{bzgl. } M \\ \frac{1}{2}\,\theta_{MV}\,\omega_3^2 & : \quad \text{bzgl. } MV \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_a = \begin{cases} k_1\,\dot{x}_{M1} + k_2\,\dot{x}_{M2} + m_{M3}\,\omega_3 & : \quad \text{bzgl. } M \\ m_{MV3}\,\omega_3 & : \quad \text{bzgl. } MV \end{cases}$$

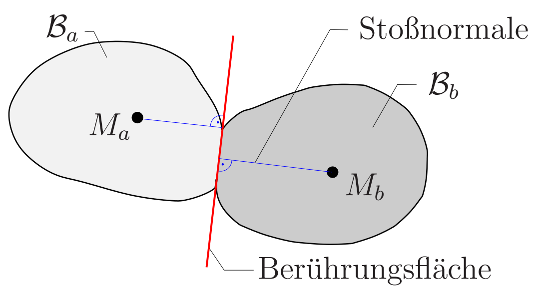
Energieerhaltungssatz bei ebener Starrkörperbewegung:

$$\boxed{\mathcal{K}_{②} + \mathcal{U}_{a②} = \mathcal{K}_{①} + \mathcal{U}_{a①}}$$

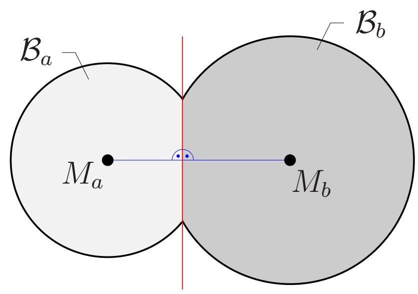
11 Stoßvorgänge

11.1 Beschreibende Gleichungen

exzentrischer Stoß



zentrischer Stoß



- **Zentrischer bzw. zentraler Stoß:**
  Die Stoßnormale führt durch die Massenmittelpunkte beider Körper.
- **Exzentrischer Stoß:**
  sonst

Bem.: Es können sehr komplexe Prozesse beim Stoßvorgang entstehen, die hier unter den folgenden, stark idealisierenden Annahmen beschrieben werden.

Annahmen zur Beschreibung des Stoßproblems:

- Die Stoßdauer τ sei vernachlässigbar klein: $\tau \to 0$.
- Während der Stoßdauer ändern die Körper ihre Lage nicht. Deformationen treten nur in der Berührungszone auf. Sonst bleibt der Körper starr.
- Es existiert ein Grenzwert des Zeitintegrals über $\mathbf{k}\,(\mathcal{B}, t)$:

$$\mathbf{S}\,(\tau) \;:=\; \lim_{\tau \to 0} \int\limits_0^\tau \mathbf{k}\,(\mathcal{B}, t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{mit} \;\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{k}\,(\mathcal{B}, t) & : & \text{resultierende Stoßkraft} \\ \mathbf{S}\,(\tau) & : & \text{Stoßimpuls (Stoßantrieb)} \end{array} \right.$$

- Die in der Berührungszone während des Stoßvorgangs auftretenden Kontaktkräfte sind so groß, daß alle anderen am Körper auftretenden Kräfte dagegen vernachlässigt werden können.
- Die Berührungsfläche sei eine Ebene, so daß die Stoßkraft $\mathbf{k}\,(\mathcal{B}, t)$ nur in Richtung der Stoßnormalen wirkt: $\to$ Vernachlässigung der Tangentialanteile beim Stoß.
- Die Stoßdauer kann in eine Kompressions- und eine Restitutionsphase zerlegt werden. Es folgt für den Stoßimpuls:

  $$\mathbf{S}\,(\tau) \;=\; \mathbf{S}_R \,+\, \mathbf{S}_K$$

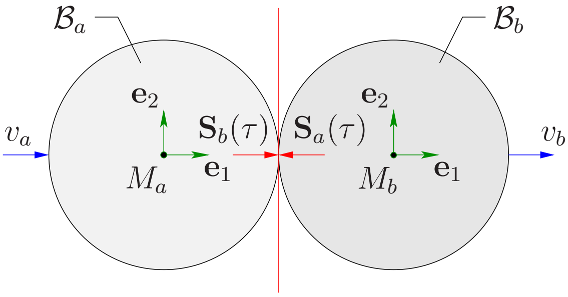
  Allgemeiner Stoß (teilelastisch): $\mathbf{S}_R \;=\; e\; \mathbf{S}_K$

  *Newton*sche Stoßhypothese mit $0 \;\le\; e \;\le\; 1$ (Stoßkennziffer bzw. Stoßzahl)

  $$\text{Grenzfälle :} \qquad e = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \to \; \mathbf{S}_R \;=\; \mathbf{S}_K & : \text{elastischer Stoß} \\ 0 & \to \; \mathbf{S}_R \;=\; \mathbf{0} & : \text{plastischer Stoß} \end{array} \right.$$

11.2 Ebener, zentraler Stoß

Gerader, zentraler Stoß:



$$v_a'' = v_a' - \frac{m_b}{m_a + m_b}(v_a' - v_b')(1 + e)$$

$$v_b'' = v_b' - \frac{m_a}{m_a + m_b}(v_b' - v_a')(1 + e)$$

$(\cdot)''$: Komponente nach dem Stoß

$(\cdot)'$: Komponente vor dem Stoß

Stoßbedingung:

$$e = \frac{v_a'' - v_b''}{v_b' - v_a'}$$

Energieverlust:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{m_a\, m_b}{m_a + m_b}(v_a' - v_b')^2\,(1 - e^2)$$

Sonderfälle des geraden zentralen Stoßes:

elastischer Stoß: $e = 1 \rightarrow \mathbf{S}_R \equiv \mathbf{S}_K$

$$v_a'' = v_a' - \frac{2\,m_b}{m_a + m_b}(v_a' - v_b')$$

$$v_b'' = v_b' - \frac{2\,m_a}{m_a + m_b}(v_b' - v_a')$$

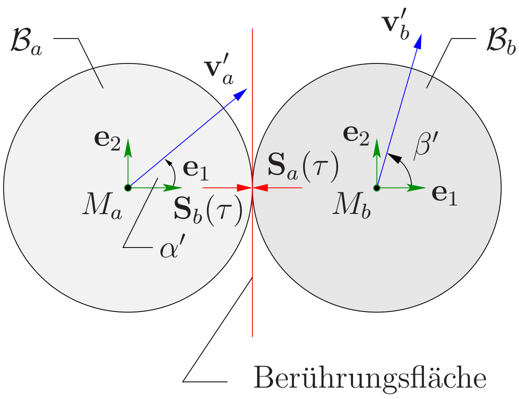
$$\Delta E = 0$$

plastischer Stoß: $e = 0 \rightarrow \mathbf{S}_R \equiv \mathbf{0}$

$$v_a'' = v_b'' = \frac{m_a\, v_a' + m_b\, v_b'}{m_a + m_b}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{m_a\, m_b}{m_a + m_b}(v_a' - v_b')^2$$

Schiefer, zentraler Stoß:



$$v_{a1}'' = v_{a1}' - \frac{m_b}{m_a + m_b}(v_{a1}' - v_{b1}')(1 + e)$$

$$v_{a2}'' = v_{a2}'$$

$$v_{b1}'' = v_{b1}' - \frac{m_a}{m_a + m_b}(v_{b1}' - v_{a1}')(1 + e)$$

$$v_{b2}'' = v_{b2}'$$

Stoßbedingung:

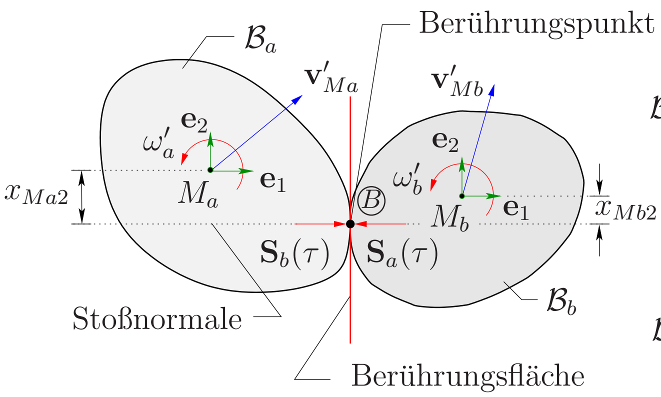
$$e = \frac{v_{a1}'' - v_{b1}''}{v_{b1}' - v_{a1}'}$$

Energieverlust:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{m_a\, m_b}{m_a + m_b}(v_{a1}' - v_{b1}')^2\,(1 - e^2)$$

11.3 Ebener, exzentrischer Stoß

Bem.: Beim exzentrischen Stoß müss neben den Impulsbilanzen bzgl. der Massenmittelpunkte von $\mathcal{B}_\text{a}$ und $\mathcal{B}_\text{b}$ auch die Drallbilanzen für beide Körper ausgewertet werden.



Allgemeine Gleichungen für:

$$\mathcal{B}_a : \begin{cases} \mathbf{e}_1 : & m_a\,(v''_{Ma1} - v'_{Ma1}) = -S(\tau) \\ \mathbf{e}_2 : & m_a\,(v''_{Ma2} - v'_{Ma2}) = 0 \\ \mathbf{e}_3 : & \theta_{Ma}\,(\omega''_a - \omega'_a) = -x_{Ma2}\,S(\tau) \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_b : \begin{cases} \mathbf{e}_1 : & m_b\,(v''_{Mb1} - v'_{Mb1}) = S(\tau) \\ \mathbf{e}_2 : & m_b\,(v''_{Mb2} - v'_{Mb2}) = 0 \\ \mathbf{e}_3 : & \theta_{Mb}\,(\omega''_b - \omega'_b) = x_{Mb2}\,S(\tau) \end{cases}$$

$$\text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{S}_a(\tau) & = & -S(\tau)\,\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{S}_b(\tau) & = & S(\tau)\,\mathbf{e}_1 \end{array} \right\} \quad \text{keine Anteile in } \mathbf{e}_2\text{-Richtung}$$

Bemerkungen:

- Bei Lagerungen der Körper $\mathcal{B}_a$ und $\mathcal{B}_b$ sind Auflagerreaktionen (Impulsantriebe) infolge der Stoßimpulse $\mathbf{S}_a(\tau)$ und $\mathbf{S}_b(\tau)$ zu berücksichtigen.
- Bei Bezug der Drallbilanzen auf den momentanen Geschwindigkeitspol entfallen die Impulsbilanzen, d. h. in der Drallbilanz muss Θ_M durch Θ_{MV} und x_{M2} durch x_{MV2} ersetzt werden.
- Oben genanntes Gleichungssystem enthält 6 Gleichungen für die 7 Unbekannten:

  $v''_{Ma1},\ v''_{Ma2},\ \omega''_a,\ v''_{Mb1},\ v''_{Mb2},\ \omega''_b,\ S(\tau) \quad \rightarrow$ Zusatzgleichung wird benötigt.
- Entwicklung einer Zusatzgleichung in Anologie zur Stoßbedingung beim geraden zentralen Stoß.

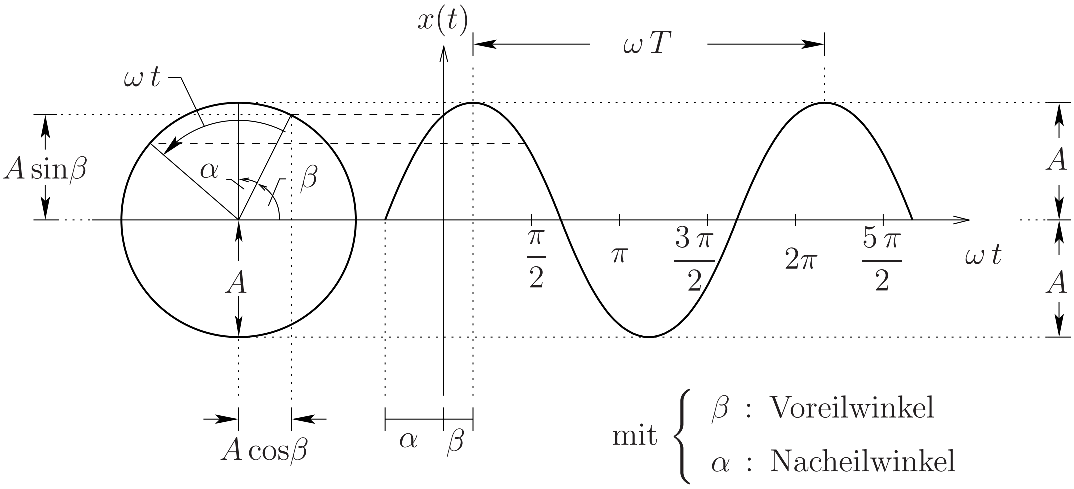
$$\boxed{e = \frac{v''_{Ba1} - v''_{Bb1}}{v'_{Bb1} - v'_{Ba1}}}$$

TEIL V: Einführung in die Schwingungslehre

12 Grundlagen und Voraussetzungen

12.1 Vorbemerkungen und Begriffe

Harmonische, periodische Schwingungen



mit $\begin{cases} \beta \;:\; \text{Voreilwinkel} \\ \alpha \;:\; \text{Nacheilwinkel} \end{cases}$

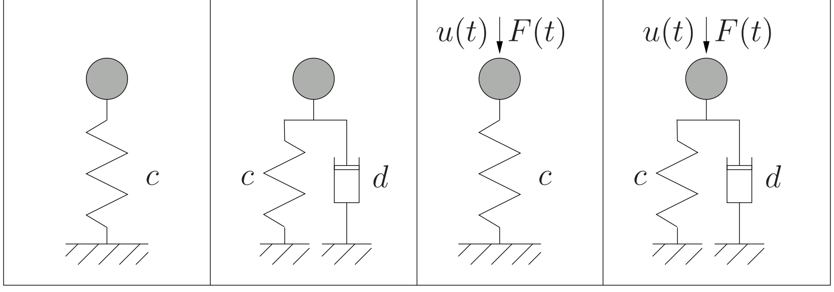
$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \beta) \\ x(t) &= A \cos(\omega t - \alpha) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

Zusammenstellung wichtiger Begriffe:

A	:	Schwingungsamplitude	$A = \frac{1}{2}(x_{max} - x_{min})$
ω	:	Kreisfrequenz	
α, β	:	Phasenwinkel	$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$
T	:	Schwingungsdauer (Periode)	$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
f	:	Frequenz	$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

Klassifikation von harmonischen Schwingungen:

freie Schwingung		erzwungene Schwingung	
ungedämpft	gedämpft	ungedämpft	gedämpft



12.2 Federsteifigkeiten und Federschaltungen

(a) Ersatzfedersteifigkeiten:

Dehnfedern:

Analogie: Federgesetz: $F = c_F\, f \quad \rightarrow \quad c_F = \dfrac{F}{f}$

„1-Kraft“: $F = 1 \quad \rightarrow \quad c_F = \dfrac{1}{f}$

Vorgehen:

- Berechnung der Durchbiegung infolge einer Kraft $F = 1$ (z. B. mit Hilfe des *PdvK*)
- Berechnung der Federsteifigkeit c_F

Drehfedern:

Analogie: Federgesetz: $M = c_D\, \varphi \quad \rightarrow \quad c_D = \dfrac{M}{\varphi}$

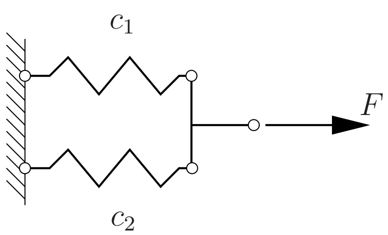
„1-Moment“: $M = 1 \quad \rightarrow \quad c_D = \dfrac{1}{\varphi}$

Vorgehen:

- Berechnung der Durchbiegung infolge eines Moments $M = 1$ (z. B. mit Hilfe des *PdvK*)
- Berechnung der Federsteifigkeit c_D

(b) Federschaltungen:

Parallelschaltung:

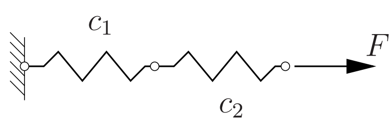


Kriterien der Parallelschaltung:

$F = F_1 + F_2$ (unterschiedliche Kraft)
$f = f_1 = f_2$ (gleicher Weg)

$$\boxed{\overset{*}{c} = c_1 + c_2}$$

Reihenschaltung:



Kriterien der Reihenschaltung:

$F = F_1 = F_2$ (gleiche Kraft)
$f = f_1 + f_2$ (unterschiedlicher Weg)

$$\boxed{\overset{*}{c} = \dfrac{c_1\, c_2}{c_1 + c_2}}$$

13 Freie Schwingungen mit einem Freiheitsgrad

13.1 Freie ungedämpfte Schwingung

- **lineare Schwingung (Schwingungsdifferentialgleichung)**

$$\boxed{\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0} \qquad \text{mit} \quad \begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}} & : \ \text{Eigenkreisfrequenz} \\ x_1 & : \ \text{Koordinate} \end{cases}$$

Lösung der normierten Schwingungsdifferentialgleichung

$$\boxed{x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)}$$

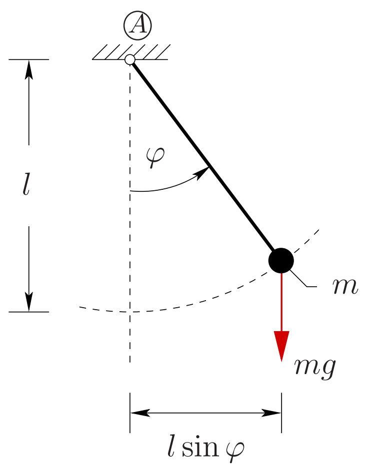
Lösung mit der Berücksichtigung von Anfangsbedingungen

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)} \qquad \text{mit} \quad \begin{cases} x_0 & : \ \text{Anfangsauslenkung} \\ v_0 & : \ \text{Anfangsgeschwindigkeit} \end{cases}$$

Schwingungsamplitude und Phasenwinkel

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(\dfrac{v_0}{\omega})^2 + x_0^2} \\ \tan\beta = \dfrac{C_2}{C_1} \quad \rightarrow \quad \beta = \arctan\dfrac{C_2}{C_1} = \arctan\dfrac{x_0\,\omega}{v_0} \end{array}}$$

- **Nichtlineare Schwingungen am Beispiel des mathematischen Pendels**



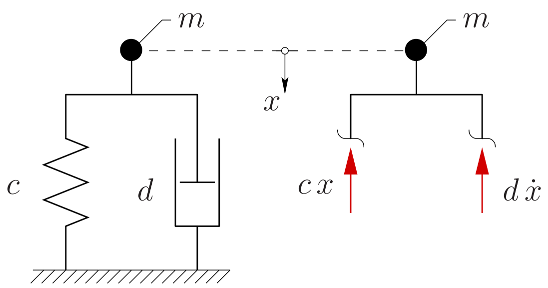
Anwendung des Drallsatzes bezüglich A liefert:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0}$$

$$\text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

13.2 Freie gedämpfte Schwingung

- **gedämpfter Einmassenschwinger**



Stoffgesetze der Feder- und Dämpferelemente:

$$F_F = c\,x$$
$$F_D = d\,\dot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2D\,\omega_0\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}} & : \text{ ungedämpfte Eigenkreisfrequenz} \\[2ex] D = \dfrac{d}{2\,m\,\omega_0} & : \text{ \textit{Lehr}sches Dämpfungsmaß} \end{cases}$$

Fall A: überkritische (starke) Dämpfung $(D > 1)$

$$\boxed{x(t) = e^{-D\,\omega_0\,t}\left(\frac{v_0 + D\,\omega_0\,x_0}{\bar{\nu}}\sinh(\bar{\nu}\,t) + x_0\cosh(\bar{\nu}\,t)\right)}$$

mit $\bar{\nu} = \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$: Kreisfrequenz der stark gedämpften Schwingung

Fall B: kritische Dämpfung (Aperiodischer Grenzfall) $(D = 1)$

$$\boxed{x(t) = e^{-\omega_0\,t}\,[\,x_0 + (v_0 + x_0\,\omega_0)\,t\,]}$$

Fall C: unterkritische (schwache) Dämpfung $(D < 1)$

$$\boxed{x(t) = e^{-D\,\omega_0\,t}\left(\frac{v_0 + D\,\omega_0\,x_0}{\nu}\sin(\nu\,t) + x_0\cos(\nu\,t)\right)}$$

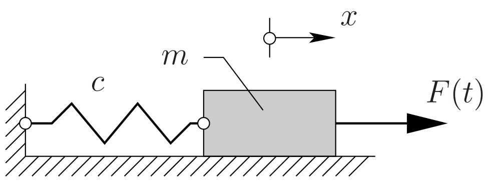
mit $\nu = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$: gedämpfte Kreisfrequenz

Alternative Darstellung der Lösung:

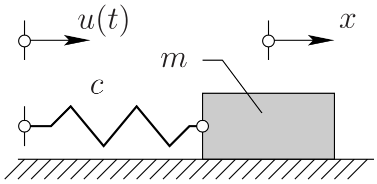
$$\boxed{x(t) = A\,e^{-D\,\omega_0\,t}\sin(\nu\,t + \beta)} \qquad \text{mit} \quad \begin{cases} A = \sqrt{\left(\dfrac{v_0 + D\,\omega_0\,x_0}{\nu}\right)^2 + x_0^2} \\[2ex] \beta = \arctan\dfrac{x_0\,\nu}{v_0 + D\,\omega_0\,x_0} \end{cases}$$

14 Erzwungene Schwingungen mit einem Freiheitsgrad

14.1 Erzwungene ungedämpfte Schwingung mit periodischer Erregung



(1) krafterregtes System



(2) wegerregtes System

Aufstellung der Schwingungsdifferentialgleichungen (reibungsfrei)

(1) kraftregtes System: $m\ddot{x} = F(t) - c\,x \longrightarrow m\ddot{x} + c\,x = F(t)$

(2) wegregtes System: $m\ddot{x} = -c\,(x - u(t)) \longrightarrow m\ddot{x} + c\,x = c\,u(t)$

Bem.: Kraft- und Wegerregung führen auf denselben Typ Differentialgleichung mit dem Störglied $F(t) = c\,u(t)$. Das Störglied repräsentiert in jedem Fall eine Erregerkraft.

Harmonische Erregung:

$$\boxed{\begin{aligned} F(t) &= F_0 \cos(\Omega t) \\ u(t) &= u_0 \cos(\Omega t) \end{aligned}} \quad \text{mit} \begin{cases} F_0, u_0 & : \text{ Erregeramplitude} \\ \Omega & : \text{ Erregerkreisfrequenz} \end{cases}$$

Normierung der Schwingungsdifferentialgleichung.:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2\,x = a\cos(\Omega\,t)} \quad \text{mit} \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}} & : \text{ Eigenkreisfrequenz} \\ a = \left\{ \dfrac{F_0}{m} ; \dfrac{c\,u_0}{m} \right\} & : \text{ Amplitude der Erregerbeschleunigung} \end{cases}$$

Lösung der normierten Schwingungsdifferentialgleichung:

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)} \quad \text{mit} \begin{cases} x_h(t) & : \text{ Lösung der homogenen Dgl.} \\ x_p(t) & : \text{ Partikulärlösung} \end{cases}$$

(a) homogene Lösung:

Lösung der homogenen Schwingungsdifferentialgleichung gemäß 13.1.

(b) spezielle Lösung:

Bem.: Man wählt einen Ansatz in Abhängigkeit des Störglieds.

$\longrightarrow \quad x_p(t) = A_0 \cos(\Omega t) \quad$ mit $\quad A_0$: Amplitude der Partikularlösung

Einsetzen in die inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung liefert die Vergrößerungsfunktion und die statische Amplitude.

Vergrößerungsfunktion und statische Amplitude:

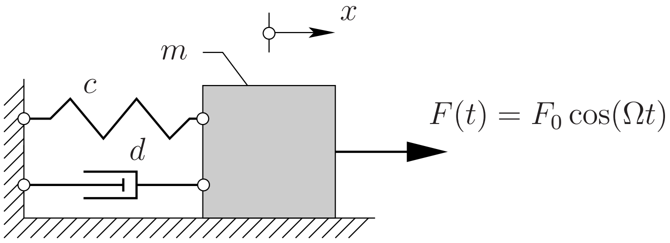
$$\boxed{A_0 \;=\; \frac{a}{\omega^2 - \Omega^2} \;=:\; V_a\, A_{stat.}}$$

weiterhin gilt:

$$\boxed{A_{stat.} = \frac{a}{\omega^2} \quad ; \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0} \;\rightarrow\; V_a = \frac{1}{1-\eta^2}}$$

$$\text{mit} \begin{cases} \eta & : \text{ Frequenzverhältnis} \\ V_a & : \text{ Vergrößerungsfunktion} \\ A_{stat.} & : \text{ stat. Auslenkung infolge der Erregeramplitude} \end{cases}$$

14.2 Erzwungene gedämpfte Schwingung mit periodischer Erregung



Aufstellung der Schwingungsdifferentialgleichung:

$$m\,\ddot{x} = F(t) - c\,x - d\,\dot{x} \qquad\longrightarrow\qquad \boxed{m\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + c\,x = F(t)}$$

Normierung der Schwingungsdifferentialgleichung:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\,D\,\omega_0\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = a\cos(\Omega t)}$$

$$\text{mit}\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}} & : \ \text{Eigenkreisfrequenz} \\ D = \dfrac{d}{2\,m\,\omega_0} & : \ \textit{Lehr}\text{sches Dämpfungsmaß} \\ a = \dfrac{F_0}{m} & : \ \text{Amplitude der Erregerbeschleunigung} \end{cases}$$

(a) homogene Lösung:

Lösung der homogenen Schwingungsdifferentialgleichung gemäß 13.2.

(b) spezielle Lösung:

Bem.: Man wählt einen Ansatz in Abhängigkeit des Störglieds.

$\longrightarrow \quad x_p(t) = A_0\cos(\Omega t) \qquad \text{mit} \quad A_0$: Amplitude der Partikularlösung

Einsetzen in die inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung liefert die Vergrößerungsfunktion und die statische Amplitude.

Amplitude der Partikularlösung und Vergrößerungsfunktion:

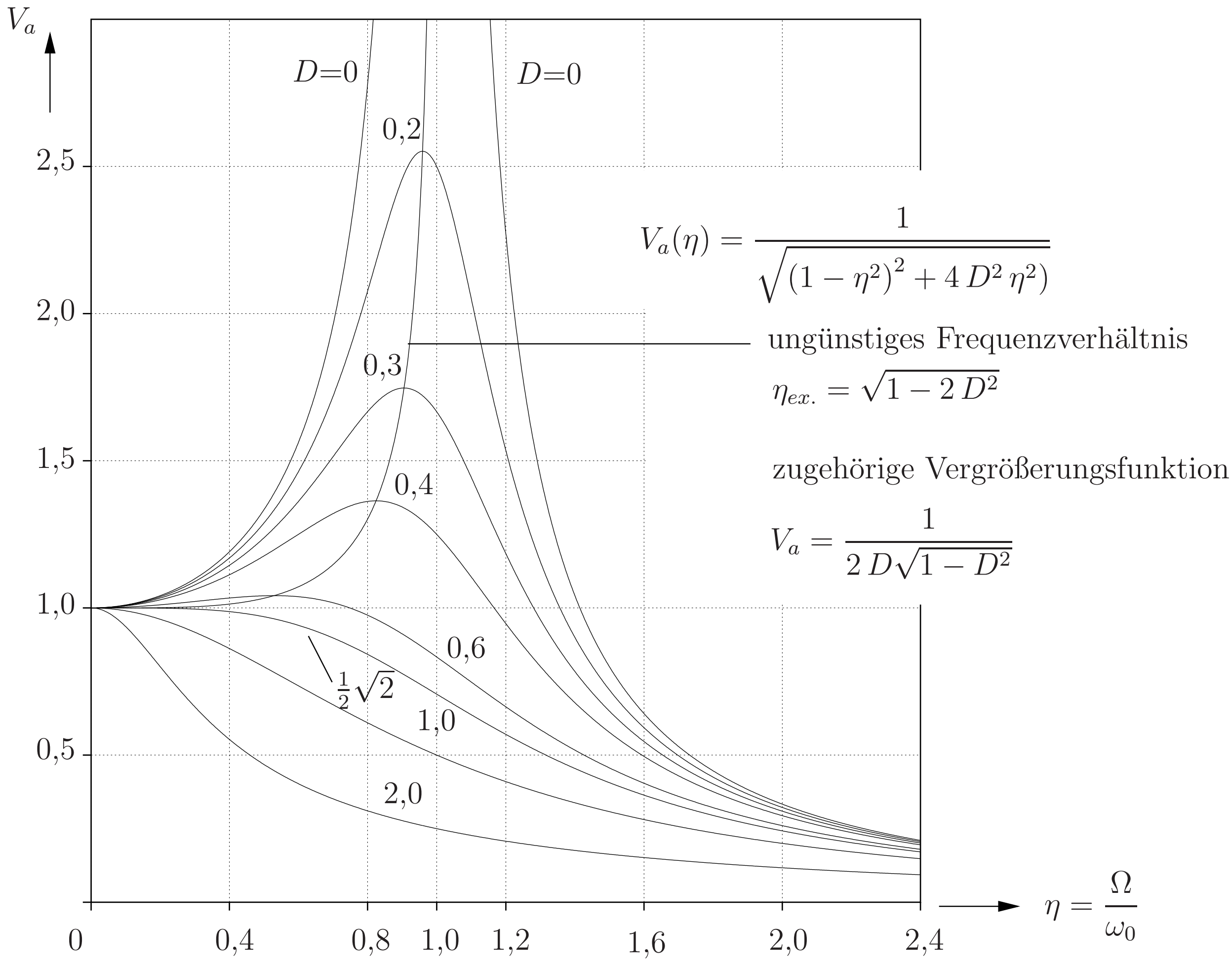
$$\boxed{A_0 = \frac{a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\,D\,\omega_0\,\Omega\right)^2}} =: V_a\,A_{stat.}}$$

Es gilt für die Vergrößerungsfunktion

$$V_a = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\,D\,\omega_0\,\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\,D^2\,\eta^2}}$$

$$\text{mit}\begin{cases} \eta = \dfrac{\Omega}{\omega_0} & : \ \text{Frequenzverhältnis} \\ A_{stat.} = \dfrac{a}{\omega_0^2} & : \ \text{stat. Auslenkung infolge der Erregeramplitude} \end{cases}$$

Vergrößerungsfunktion V_a (Amplituden-Frequenzgang)



Nacheilwinkel φ (Phasen-Frequenzgang)