FEM für Dynamik

Kapitel 5: Modale Superposition

Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch

Department Maschinenbau und Produktion
Fakultät Technik und Informatik
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Einführung

Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{1}$$

Lösungsstrategien:

- Lösung im **Frequenzbereich**: sinnvoll bei harmonischer Erregung
- Lösung im **Zeitbereich**: sinnvoll bei beliebiger Anregung

direkte Lösung:

- Integration im physikalischen Bereich (explizit oder implizit)
- Lineare/nichtlineare Systeme
- aufwendig bei großen Matrizen

modale Lösung:

- Transformation auf modale Koordinaten
- nur für lineare Systeme
- weniger aufwendig

Modale Bewegungsgleichung

Ansatz für Verschiebung im Zeitbereich:

$$\mathbf{U}(t) = \phi \mathbf{q}(t) = \sum_r \mathbf{X}_r q_r(t) \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \phi \dot{\mathbf{q}}(t) \tag{3}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}(t) = \phi \ddot{\mathbf{q}}(t) \tag{4}$$

Hierbei gilt:

$\mathbf{X}_r$ = ungedämpfte Eigenform

q_r = modale Freiheitsgrade (Wichtungsfaktoren für die Eigenformen)

$r = 1, \ldots, R \leq N$ (Anzahl DOF)

Interpretation

Systemantworten $\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t), \ddot{\mathbf{U}}(t)$ werden durch Superposition der ungedämpften Eigenformen dargestellt.

Modale Bewegungsgleichung

Die Transformation in Gl. (2) ist

- *vollständig*, wenn $R = N$
- *unvollständig*, wenn $R < N$

Empfehlung für die Praxis

Anteil höherer Eigenformen ist oftmals vernachlässigbar, daher:
$\rightarrow$ Mitnahme aller relevanten Eigenformen, so dass ca. 90% der zugehörigen effektiven Massen im Ansatz enthalten sind.

Modale Bewegungsgleichung

Einsetzen von Gl. (2)-(4) in Gl. (1) liefert:

$$\mathbf{M}\phi\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\phi\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\phi\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{5}$$

Multiplikation von links mit ϕ^T liefert:

$$\underbrace{\phi^T\mathbf{M}\phi}_{\boldsymbol{\mu}=diag(\mu_{rr})}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \underbrace{\phi^T\mathbf{C}\phi}_{\boldsymbol{\Delta}\neq diag}\dot{\mathbf{q}}(t) + \underbrace{\phi^T\mathbf{K}\phi}_{\boldsymbol{\gamma}=diag(\gamma_{rr})}\mathbf{q}(t) = \phi^T\mathbf{F}(t) =: \mathbf{r}(t) \tag{6}$$

Somit folgt die modale Bewegungsgleichung:

$$\boldsymbol{\mu}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\Delta}\dot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(t) \tag{7}$$

mit der modalen Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{\Delta} := \phi^T\mathbf{C}\phi \neq diag$

Modale Bewegungsgleichung

Gl. (7) lautet ausgeschrieben:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1R} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Delta_{R1} & \cdots & \cdots & \Delta_{RR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_R \end{bmatrix}$$

Einführen der *Bequemlichkeitshypothese* (d.h. keine Dämpfungskopplung)

$$\Delta_{rs} = 0 \qquad \text{für } r \neq s \tag{8}$$

liefert

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta_{RR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_R \end{bmatrix}$$

Das Gleichungssystem von R gekoppelten Differentialgleichungen zerfällt somit in R einzelne Differentialgleichungen.

Modale Bewegungsgleichung

Für jede Eigenform $r = 1,2,...,R$ gilt die Gleichung des gedämpften Einmassenschwingers:

$$\mu_r \ddot{q}_r + \Delta_{rr} \dot{q}_r + \gamma_r q_r = r_r \tag{9}$$

Division durch μ_r ergibt

$$\ddot{q}_r + \frac{\Delta_{rr}}{\mu_r} \dot{q}_r + \underbrace{\frac{\gamma_r}{\mu_r}}_{\omega_r^2} q_r = \frac{r_r}{\mu_r} \tag{10}$$

Unter Verwendung des dimensionslosen modalen Dämpfungsmaßes

$$\xi_r = \frac{\Delta_{rr}}{2\mu_r \omega_r} \qquad \text{analog zu: } D = \frac{c}{2m\omega} \tag{11}$$

folgt die eindimensionale modale Bewegungsgleichung

$$\ddot{q}_r + 2\omega_r \xi_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = \frac{r_r}{\mu_r} \tag{12}$$

Modale Bewegungsgleichung

Anmerkungen

- Gl. (12) kann mit klassischen Lösungsverfahren des Einmassen-schwingers gelöst werden
- Jede Eigenform kann unterschiedlich gedämpft werden
- Das modale Dämpfungsmaß ξ_r kann mit Hilfe experimenteller Modalanalyse versuchstechnisch bestimmt werden

Vorteile des Verfahrens der modalen Superpositionen

1.) Reduktion der Systemgleichungen der Ordnung N auf einen Unterraum der Größe R

2.) Entkopplung der Systemgleichungen mit Hilfe der Bequemlichkeits-hypothese, Zerfall in R entkoppelte Differentialgleichungen

Rayleigh-Dämpfung

In Kapitel 3 wurde die Rayleigh-Dämpfung eingeführt:

$$\mathbf{C} = \alpha \cdot \mathbf{M} + \beta \cdot \mathbf{K} \tag{13}$$

Multiplikation von links mit $\boldsymbol{\phi}^T$ und von rechts mit $\boldsymbol{\phi}$ liefert:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi} &= \alpha \cdot \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} + \beta \cdot \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\Delta} &= \alpha \cdot \boldsymbol{\mu} + \beta \cdot \boldsymbol{\gamma} = diag(\Delta_{rr}) \end{aligned} \tag{14}$$

→ Rayleigh-Dämpfung *unterstellt* Bequemlichkeitshypothese mit

$$\Delta_{rr} = \alpha \cdot \mu_r + \beta \cdot \gamma_r \tag{15}$$

Mit Gl. (11) ergibt sich (Zeigen Sie!)

$$\xi_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta\,\omega_r}{2} \tag{16}$$

Rayleigh-Dämpfung

Bestimmung der Rayleigh-Koeffizienten:

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{2\omega_1} + \frac{\beta\omega_1}{2}$$

$$\xi_2 = \frac{\alpha}{2\omega_2} + \frac{\beta\omega_2}{2}$$

$$\vdots$$

$$\xi_R = \frac{\alpha}{2\omega_R} + \frac{\beta\omega_R}{2}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/2\omega_1 & \omega_1/2 \\ 1/2\omega_2 & \omega_2/2 \\ \vdots & \vdots \\ 1/2\omega_R & \omega_R/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_R \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Auflösen des Gleichungssystems mit der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate (engl. "least squares approximation") liefert

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} \tag{17}$$

Anfangsbedingungen

Physikalische Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t = 0) \tag{18}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{U}}(t = 0) \tag{19}$$

Transformation auf modale Koordinaten mit dem Ansatz:

$$\mathbf{U}_0 = \phi \mathbf{q}_0 \qquad |v.l.\ \phi^{-1}$$

$$\phi^{-1}\mathbf{U}_0 = \mathbf{q}_0 \tag{20}$$

Nebenrechnung:

$$\boldsymbol{\mu} = \phi^T \mathbf{M} \phi \qquad |v.l.\ \boldsymbol{\mu}^{-1}$$

$$\mathbf{I} = \boldsymbol{\mu}^{-1} \phi^T \mathbf{M} \phi \qquad |v.r.\ \phi^{-1}$$

$$\phi^{-1} = \boldsymbol{\mu}^{-1} \phi^T \mathbf{M} \tag{21}$$

Anfangsbedingungen

Durch Einsetzen von Gl. (21) in Gl. (20) folgt:

$$\boldsymbol{\mu}^{-1}\boldsymbol{\phi}^{T}\mathbf{M}\mathbf{U}_0 = \mathbf{q}_0 \tag{22}$$

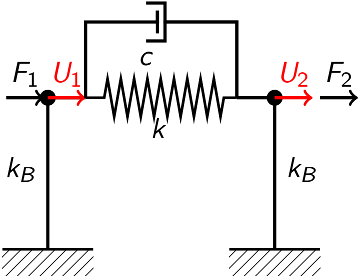
Die Anfangsbedingungen zur Lösung von Gl. (12) ergeben sich somit zu

$$q_{0,r} = \frac{1}{\mu_r}\mathbf{X}_r^{T}\mathbf{M}\mathbf{U}_0 \tag{23}$$

$$\dot{q}_{0,r} = \frac{1}{\mu_r}\mathbf{X}_r^{T}\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}_0 \tag{24}$$

Beispiel

Übungsbeispiel:



Systemmatrizen:

$$\mathbf{C} = c\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 2k_B & 0 \\ 0 & 2k_B + 4k \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe:

- Berechnen Sie die modale Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{\Delta}$, die modalen Dämpfungsparameter ξ_r und den modalen Lastvektor $\mathbf{r}$
- Stellen Sie die modalen Bewegungsgleichungen nach Gl. (12) auf

Beispiel

Berechnung der modalen Dämpfungsmatrix:

$$\boldsymbol{\Delta} = \phi^T \mathbf{C}\, \phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Keine weitere Annahme nötig, da $\boldsymbol{\Delta}$ bereits diagonal ist.
Berechnung der modalen Dämpfungsparameter:

$$\xi_1 = \frac{\Delta_{11}}{2\mu_1\omega_1} = 0$$

$$\xi_2 = \frac{\Delta_{22}}{2\mu_2\omega_2} = \frac{4c}{2 \cdot 2m \cdot \omega_2} = \frac{c}{m\,\omega_2}$$

Berechnung des modalen Lastvektors:

$$\mathbf{r} = \phi^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_2 \end{bmatrix}$$

Beispiel

Durch Einsetzen in Gl. (12) folgt für $r = 1$:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \frac{1}{2m}\left(F_1 + F_2\right)$$

und für $r = 2$:

$$\ddot{q}_2 + \frac{2c}{m}\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \frac{1}{2m}\left(-F_1 + F_2\right)$$

Die physikalische Antwort im Zeitbereich ergibt sich durch Einsetzen von q_1 und q_2 in Gl. (2) zu:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{X}_1 \cdot q_1(t) + \mathbf{X}_2 \cdot q_2(t) \tag{25}$$

Freie Schwingungen

Betrachtet wird das Problem der freien Schwingung mit

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{U}_0 \neq \mathbf{0}; \quad \dot{\mathbf{U}}_0 \neq \mathbf{0} \tag{26}$$

Aus Gl. (12) folgt:

$$\ddot{q}_r + 2\omega_r \xi_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = 0 \tag{27}$$

Lösungsansatz für den gedämpfter Einmassenschwinger war:

$$u(t) = e^{-\delta t}(A \cdot cos(\omega_d t) + B \cdot sin(\omega_d t)) \tag{28}$$

Hier analog:

$$q_r(t) = e^{-\delta_r t}(q_{A,r} \cdot cos(\omega_{d,r} t) + q_{B,r} \cdot sin(\omega_{d,r} t)) \tag{29}$$

mit:

$$\delta_r = \xi_r \omega_r \tag{30}$$

$$\omega_{d,r} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \tag{31}$$

Freie Schwingungen

Bestimmung der Koeffizienten $q_{A,r}$ und $q_{B,r}$ aus den modalen Anfangsbedingungen:

$$q_r(t=0) = q_{0,r} \Rightarrow q_{A,r} = q_{0,r} \tag{32}$$

$$\dot{q}_r(t=0) = \dot{q}_{0,r} = -q_{A,r} \cdot \delta_r + q_{B,r} \cdot \omega_{d,r} \tag{33}$$

$$\Rightarrow q_{B,r} = \frac{q_{0,r} \cdot \delta_r + \dot{q}_{0,r}}{\omega_{d,r}} \tag{34}$$

Einsetzen ergibt:

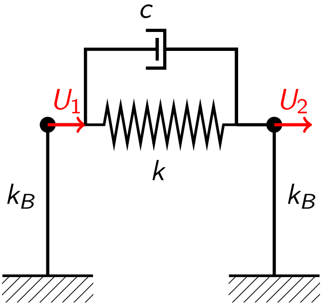
$$q_r(t) = e^{-\delta_r t}\left(q_{0,r} \cdot cos(\omega_{d,r} t) + \frac{q_{0,r} \cdot \delta_r + \dot{q}_{0,r}}{\omega_{d,r}} \cdot sin(\omega_{d,r} t)\right) \tag{35}$$

Verschiebung im Zeitbereich:

$$\mathbf{U}(t) = \sum_r \mathbf{X}_r \cdot q_r(t) \tag{36}$$

Beispiel

Übungsbeispiel:



Systemmatrizen siehe Folie 13.
Eigenkreisfrequenzen:

$$\omega_1^2 = \frac{k_B}{m}; \quad \omega_2^2 = \frac{k_B + 2k}{m}$$

Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} U_{01} \\ U_{02} \end{bmatrix}; \; \dot{\mathbf{U}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Annahme für modale Dämpfungsparameter:

$$\xi_1 = 0,02$$
$$\xi_2 = 0,02$$

Beispiel

Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} U_{01} \\ U_{02} \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{U}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aus dem Modalansatz nach Gl. (36) folgt:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{X}_1 \cdot q_1(t) + \mathbf{X}_2 \cdot q_2(t)$$
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q_1(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q_2(t)$$

Somit ergibt sich die physikalische Antwort des Systems zu:

$$U_1(t) = q_1(t) - q_2(t)$$
$$U_2(t) = q_1(t) + q_2(t)$$

Beispiel

Berechnung der modalen Anfangsbedingungen aus Gl. (23):

$$q_{0,1} = \frac{1}{\mu_1}\mathbf{X}_1^T\mathbf{M}\mathbf{U}_0 = \frac{1}{2m}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{01}\\ U_{02}\end{bmatrix}$$

$$q_{0,1} = \frac{1}{2}(U_{01} + U_{02})$$

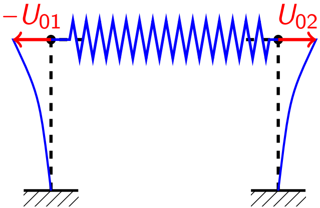
$$q_{0,2} = \frac{1}{\mu_2}\mathbf{X}_2^T\mathbf{M}\mathbf{U}_0 = \frac{1}{2m}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{01}\\ U_{02}\end{bmatrix}$$

$$q_{0,2} = \frac{1}{2}(-U_{01} + U_{02})$$

Da $\dot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{0}$, folgt $\dot{q}_{0,1} = \dot{q}_{0,2} = 0$

Beispiel

Fallunterscheidung: 1.) $-U_{01} = U_{02}$



$$q_{0,1} = 0 \rightarrow q_1(t) = 0$$

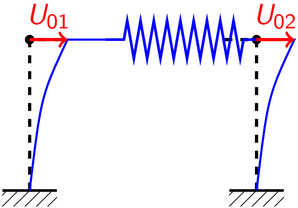
$$q_{0,2} = U_{02} \rightarrow q_2(t) = U_{02} \cdot e^{-\delta_2 t}\left(cos(\omega_{d,2} t) + \frac{\delta_2}{\omega_{d,2}} \cdot sin(\omega_{d,2} t)\right)$$

$\Rightarrow$ 1. Eigenform wird nicht angeregt, die Struktur antwortet nur in der 2. Eigenform:

$$U_1(t) = -q_2(t) \qquad U_2(t) = q_2(t)$$

Beispiel

Fallunterscheidung: 2.) $U_{01} = U_{02}$



$$q_{0,2} = 0 \rightarrow q_2(t) = 0$$

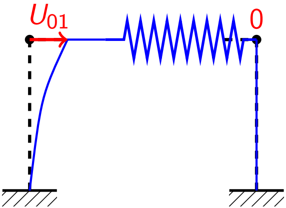
$$q_{0,1} = U_{01} \rightarrow q_1(t) = U_{01} \cdot e^{-\delta_1 t}\left(cos(\omega_{d,1} t) + \frac{\delta_1}{\omega_{d,1}} \cdot sin(\omega_{d,1} t)\right)$$

$\Rightarrow$ 2. Eigenform wird nicht angeregt, die Struktur antwortet nur in der 1. Eigenform:

$$U_1(t) = q_1(t); \quad U_2(t) = q_1(t)$$

Beispiel

Fallunterscheidung: 3.) $U_{01} \neq 0; U_{02} = 0$



$$q_{0,1} = \frac{1}{2}U_{01} \rightarrow q_1(t) = \frac{1}{2}U_{01} \cdot e^{-\delta_1 t}(cos(\omega_{d,1}t) + \frac{\delta_1}{\omega_{d,1}} \cdot sin(\omega_{d,1}t))$$

$$q_{0,2} = -\frac{1}{2}U_{01} \rightarrow q_2(t) = -\frac{1}{2}U_{01} \cdot e^{-\delta_2 t}(cos(\omega_{d,2}t) + \frac{\delta_2}{\omega_{d,2}} \cdot sin(\omega_{d,2}t))$$

$\Rightarrow$ Beide Eigenformen werden angeregt, die Struktur antwortet somit in beiden Eigenformen.

Erzwungene Schwingungen

Bei der erzwungenen Schwingung gilt

$$\mathbf{F}(t) \neq \mathbf{0}$$

Die Lösung der inhomogenen DGL

$$\ddot{q}_r + 2\omega_r \xi_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = \frac{r_r}{\mu_r}$$

setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen DGL nach Gl. (35) und einer Partikulärlösung:

$$q_r(t) = q_{r,hom}(t) + q_{r,part}(t)$$

In der Regel wird die partikuläre Lösung vom FE-Programm numerisch gelöst, z.B. mit dem Newmark-Verfahren

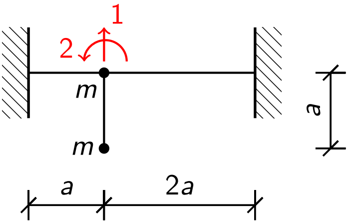
Erzwungene Schwingungen

Empfehlungen für die Praxis

- Bei freien Schwingungen:
  Mitnahme aller relevanten Eigenformen, so dass ca. 90% der zugehörigen effektiven Massen im Ansatz enthalten sind
- Bei erzwungenen Schwingungen:
  Zusätzliche Mitnahme aller Eigenformen bis zur vierfachen Erregerfrequenz (kann direkt aus harmonischer Anregung oder über eine FFT ermittelt werden)

Hausaufgabe

Gegeben ist ein System mit 2 Freiheitsgraden:



Systemgrößen:

$$a = 1,0\,m$$
$$m = 10\,kg$$
$$EI = 10000\,Nm^2$$
$$\xi_1 = \xi_2 = 0,02$$

Die zugehörigen Systemmatrizen lauten:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{a^3} \cdot \begin{bmatrix} 13,5 & -4,5a \\ -4,5a & 6a^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \cdot a^2 \end{bmatrix}$$

Hausaufgabe

Die Eigenfrequenzanalyse ergibt folgende Größen:

$$\omega_1 = 56,3$$

$$\omega_2 = 97,9$$

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ {}^{1,59}/_{a} & {}^{-1,26}/_{a} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 45,3 & 0 \\ 0 & 35,9 \end{bmatrix}$$

Aufgabe:

- Berechnen Sie mit Hilfe modaler Superposition die Antwort im Zeitbereich für die Freiheitsgrade 1 und 2 für eine beliebig gewählte Anfangsauslenkung
- Stellen Sie die Lösung in Matlab graphisch dar