FEM für Dynamik

Kapitel 7: Direkte Integration der Bewegungsgleichung

Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch

Department Maschinenbau und Produktion
Fakultät Technik und Informatik
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Vorbemerkungen

Bewegungsgleichung:

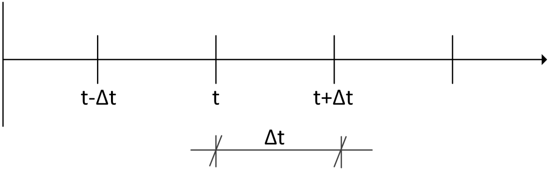
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{1}$$

Anfangsbedingungen:

$$^{0}\mathbf{U} = \mathbf{U}(t = 0) \tag{2}$$

$$^{0}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}(t = 0) \tag{3}$$

Idee: Lösung im Zeitbereich an diskreten Zeitpunkten t



- Explizite Verfahren: z.B. Zentrale Differenzenmethode (CDM)
- Implizite Verfahren: z.B. Newmark-Verfahren

Newmark-Verfahren

⇒ Implizites Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichung

Ansatz für Geschwindigkeiten:

$$^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^{t}\dot{\mathbf{U}} + \left[(1-\delta)\,{}^{t}\ddot{\mathbf{U}} + \delta \cdot {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}\right]\Delta t \tag{4}$$

Analogie zur 'Vorwärtsdifferenz' beim Differenzenverfahren:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$$

Mit dem Newmark-Parameter δ kann in Gl. (4) die Wichtung von $\ddot{\mathbf{U}}$ zur Zeit t und $t+\Delta t$ verändert werden und somit Einfluss auf Stabilität und Genauigkeit des Verfahrens genommen werden.

Newmark-Verfahren

Für die Verschiebung folgt aus Gl. (4) durch Integration über Δt:

$$ {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t}\mathbf{U} + {}^{t}\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \left[(1-\delta)\,{}^{t}\ddot{\mathbf{U}} + \delta \cdot {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}\right]\frac{\Delta t^2}{2} \tag{5} $$

Verwenden von $\alpha = \dfrac{\delta}{2}$ liefert:

$$ {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t}\mathbf{U} + {}^{t}\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right){}^{t}\ddot{\mathbf{U}} + \alpha \cdot {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}\right]\Delta t^2 \tag{6} $$

Umstellen von Gl. (6) nach ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ ergibt:

$$ {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = \left[\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t}\mathbf{U} - {}^{t}\dot{\mathbf{U}}\Delta t\right)\frac{1}{\Delta t^2} - \left(\frac{1}{2}-\alpha\right){}^{t}\ddot{\mathbf{U}}\right]\frac{1}{\alpha} \tag{7} $$

Newmark-Verfahren

Einsetzen von Gl. (7) in Gl. (4) liefert:

$$
\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^{t}\dot{\mathbf{U}} + \Bigg[(1-\delta)\,{}^{t}\ddot{\mathbf{U}} + \delta \cdot \Big[\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t}\mathbf{U} - {}^{t}\dot{\mathbf{U}}\Delta t \right) \frac{1}{\Delta t^2} \\
- \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^{t}\ddot{\mathbf{U}} \Big] \frac{1}{\alpha} \Bigg] \Delta t
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Noch sind die drei Größen ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$, ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$ und ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ unbekannt, es stehen mit Gln. (7) und (8) aber nur zwei unabhängige Gleichungen zur Lösung zur Verfügung.

Idee: Als 3. Gleichung wird Gl. (1) zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ verwendet:

$$
\mathbf{M}\,{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\,{}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \tag{9}
$$

Newmark-Verfahren

Einsetzen von Gl. (7) und Gl. (8) in Gl. (9) liefert:

$$\mathbf{M}(\ldots) + \mathbf{C}(\ldots) + \mathbf{K}\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \tag{10}$$

Umordnen von Gl. (10) und Auflösen nach ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ liefert:

$$\hat{\mathbf{K}}\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}} \tag{11}$$

mit der effektiven Steifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{K}} := \mathbf{K} + a_0 \cdot \mathbf{M} + a_1 \cdot \mathbf{C} \tag{12}$$

und dem effektiven Lastvektor

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}} := {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} + \mathbf{M}\left[a_0 \cdot {}^{t}\mathbf{U} + a_2 \cdot {}^{t}\dot{\mathbf{U}} + a_3 \cdot {}^{t}\ddot{\mathbf{U}}\right] \\ + \mathbf{C}\left[a_1 \cdot {}^{t}\mathbf{U} + a_4 \cdot {}^{t}\dot{\mathbf{U}} + a_5 \cdot {}^{t}\ddot{\mathbf{U}}\right] \end{aligned} \tag{13}$$

Newmark-Verfahren

Die Koeffizienten in Gln. (12) und (13) ergeben sich zu:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \qquad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \qquad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \qquad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right)$$

$$a_6 = \Delta t\,(1 - \delta) \qquad a_7 = \delta \cdot \Delta t$$

Newmark-Verfahren

Anmerkungen

- Die effektive Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ ist für alle Zeitschritte konstant
- Gl. (11) ist ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$
- Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ berechnen sich aus Gl. (7) und Gl. (4) zu

$$
\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} &= a_0 \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t}\mathbf{U} \right) - a_2 \cdot {}^{t}\dot{\mathbf{U}} - a_3 \cdot {}^{t}\ddot{\mathbf{U}} \\
{}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} &= {}^{t}\dot{\mathbf{U}} + a_6 \cdot {}^{t}\ddot{\mathbf{U}} + a_7 \cdot {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}
\end{aligned}
$$

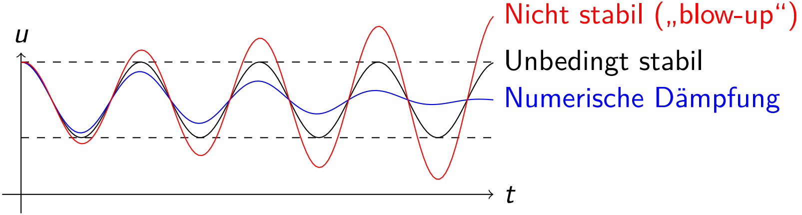
- Praxistipp: $\Delta t \approx 1/10$ bis $1/20$ von der Periodendauer wählen, die zu der kleinsten relevanten Eigenfrequenz gehört

Newmark-Verfahren

Das Newmark-Verfahren ist *unbedingt stabil*, falls für die Parameter gilt:

$$\delta \geq 0,5$$

$$\alpha \geq 0,25 \cdot (\delta + 0,5)^2$$



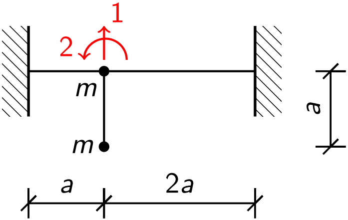
Numerische Dämpfung kann ausgeschlossen werden, wenn δ und α direkt an den Stabilitätsgrenzen gewählt werden, d.h

$$\delta = 0,5$$

$$\alpha = 0,25$$

Hausaufgabe

Gegeben ist folgendes System mit zwei Freiheitsgraden und den Systemgrößen aus Kapitel 6:



Aufgabe:

- Berechnen Sie die Antwort im Zeitbereich mit Hilfe des Newmark-Verfahrens.
- Werten Sie die Antworten am Freiheitsgrad 1 und 2 für eine beliebige Anregung am Freiheitsgrad 1 aus.
- Stellen Sie die Lösung in Matlab graphisch dar.

Zentrale Differenzenmethode

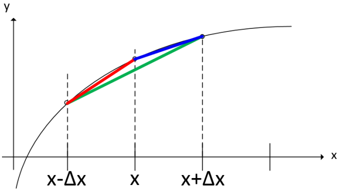
⇒ Explizites Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichung (engl.: CDM)

Ansatz für Geschwindigkeiten:

$$^{t}\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2\Delta t}\left(^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}\right) \tag{14}$$

Analogie zur zentralen Differenzenformel beim Differenzenverfahren:

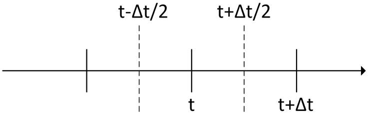
$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$



Zentrale Differenzenmethode

Ansatz für Beschleunigung ebenfalls aus zentraler Differenzenformel:

$$ {}^{t}\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t}\left({}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\dot{\mathbf{U}} - {}^{t-\frac{\Delta t}{2}}\dot{\mathbf{U}} \right) \tag{15} $$



Für die Geschwindigkeiten wird verwendet:

$$ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t}\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t}\mathbf{U} \right) \tag{16} $$

$$ {}^{t-\frac{\Delta t}{2}}\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t}\left({}^{t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \right) \tag{17} $$

Zentrale Differenzenmethode

Einsetzen von Gln. (16) und (17) in Gl. (15) liefert:

$$ {}^{t}\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{(\Delta t)^2}\left({}^{t+\Delta}\mathbf{U} - 2\,{}^{t}\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}\right) \tag{18} $$

Einsetzen von Gl. (14) und Gl. (18) in die Bewegungsgleichung (1) zum Zeitpunkt t liefert

$$ \underbrace{\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)}_{\hat{\mathbf{K}}}{}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = $$

$$ = \underbrace{{}^{t}\mathbf{F} - \mathbf{K}\,{}^{t}\mathbf{U} + \frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M}\left(2\,{}^{t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}\right) + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\,{}^{t-\Delta t}\mathbf{U}}_{{}^{t}\hat{\mathbf{F}}} \tag{19} $$

$$ \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{K}}\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t}\hat{\mathbf{F}} \tag{20} $$

Zentrale Differenzenmethode

Anmerkungen zur CDM

- Die effektive Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ ist für *alle* Zeitschritte bekannt
- Der effektive Lastvektor ${}^{t}\hat{\mathbf{F}}$ ist zum Zeitpunk t stets bekannt
- Nach Berechnung von ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ aus Gl. (20) werden ${}^{t}\dot{\mathbf{U}}$ und ${}^{t}\ddot{\mathbf{U}}$ aus Gl. (14) und Gl.(18) berechnet
- Die *CDM* ist nur bedingt stabil
- Zeitschritte sind in der Regel sehr klein zu wählen, z.B. $\Delta t \approx 10^{-6}$ bis $10^{-7} s$, vgl. Folie 16

Zentrale Differenzenmethode

Die CDM wird im Allgemeinen für $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{M} = diag(\mathbf{M})$ angewendet, dann reduziert sich Gl. (19) zu:

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M}\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t}\hat{\mathbf{F}} \tag{21}$$

Da $\mathbf{M} = diag(\mathbf{M})$ ist die Inversion sehr einfach und es verbleibt

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}_i = {}^{t}\hat{\mathbf{F}}_i \frac{(\Delta t)^2}{m_{ii}} \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{22}$$

mit

$${}^{t}\hat{\mathbf{F}} = {}^{t}\mathbf{F} - \mathbf{K}\,{}^{t}\mathbf{U} + \frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M}\left(2\,{}^{t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}\right) \tag{23}$$

Wahl der Zeitschritte

Courant-Friedrich-Levy-Bedindung (CFL-Zahl):

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}} \underbrace{\left(\sqrt{1+\xi_{max}^2} - \xi_{max}\right)}_{\text{meist vernachlässigt}} \tag{24}$$

$$= \frac{L_e}{c} \tag{25}$$

mit L_e als kleinste Elementabmessung und der Wellengeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{26}$$

Anmerkungen

- Δt ist die Zeit, die eine (Schall)welle benötigt, um ein finites Element zu durchschreiten
- Δt stellt somit eine limitierende Größe für die Netzfeinheit dar

Massenskalierung

Massenskalierung ist eine Maßnahme zur Vergrößerung des Zeitschritts:

$$\Delta t = \frac{L_e}{c} = \frac{L_e \cdot \sqrt{\rho}}{\sqrt{E}} \tag{27}$$

⇒ Eine höhere Dichte hätte einen größeren Zeitschritt zur Folge

Praxisempfehlungen

- Erhöhung der Dichte lokal um ca. 5-10%
- Das dynamische Verhalten wird somit lokal geändert, nicht aber die Steifigkeit
- Bsp. Crash-Berechnung: Bauteile mit großer relativer Bewegung (kinetischer Energie) nicht massenskalieren, dafür etwas gröber vernetzen
- Bauteile mit großen Dehnungen und hoher Energie-Dissipation feiner vernetzen und Massenskalierung anwenden

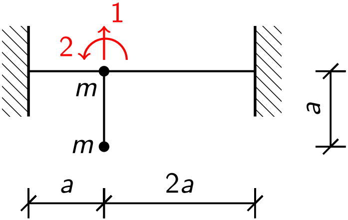
Vergleich der Methoden

Empfehlungen zur Wahl des Integrationsverfahrens:

- Bei linearen Problemen, die von unteren Moden dominiert sind:
  $\Rightarrow$ *Newmark-Verfahren* verwenden (große Zeitschritte möglich, unbedingt stabiles Verfahren, hoher Rechenaufwand je Zeitschritt)
- Bei (nichtlinearen) Problemen, die von hohen Moden dominiert sind (z.B. kurzzeitdynamische Prozesse wie Crash oder Stoß):
  $\Rightarrow$ *CDM* verwenden (kleine Zeitschritte, bedingt stabiles Verfahren, geringer Rechenaufwand pro Zeitschritt)
- Bei nichtlinearen Problemen, die von unteren Moden dominiert sind:
  $\Rightarrow$ *Bathe Integration Method* verwenden (verbessertes Newmark-Verfahren)

Hausaufgabe

Gegeben ist folgendes System mit zwei Freiheitsgraden und den Systemgrößen aus Kapitel 6:



Aufgabe:

- Berechnen Sie die Antwort im Zeitbereich mit Hilfe des CDM-Verfahrens.
- Werten Sie die Antworten am Freiheitsgrad 1 und 2 für eine beliebige, aber kurzzeitdynamische Anregung am Freiheitsgrad 1 aus.
- Stellen Sie die Lösung in Matlab graphisch dar.