

a: Fließfläche für $\sigma_3 = 0$. Die einzelnen Bereiche sind im Text erläutert.

b: Fließfläche für beliebige Spannungszustände im Hauptspannungsraum

Bild 3.22: Fließfläche für die Fließbedingung nach Tresca

Die Fließbedingung $R_p = \sigma_I - \sigma_{III}$ führt auf $\sigma_I = R_p$. Im Bereich ② ergibt sich $\sigma_I = \sigma_2$, $\sigma_{II} = \sigma_1$ und $\sigma_{III} = 0$ und somit $\sigma_2 = R_p$. Im Bereich ③ sind $\sigma_2 > 0$ und $\sigma_1 < 0$. Daher ergibt sich $\sigma_I = \sigma_2$, $\sigma_{II} = 0$ und $\sigma_{III} = \sigma_1$. Die Fließbedingung führt auf $R_p = \sigma_2 - \sigma_1$ bzw. auf die Geradengleichung $\sigma_2 = \sigma_1 + R_p$. Ähnlich lassen sich die Bereiche ④, ⑤ und ⑥ beschreiben.

Betrachtet man einen allgemeinen, dreiachsigen Spannungszustand, so ergibt sich eine sechseckige Röhre, deren Mittelachse der Raumdiagonalen $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ entspricht. Die zugehörige Fließfläche ist in Bild 3.22 b skizziert.

Da die Fließbedingung nach Tresca sehr einfach im mohrschen Spannungskreis dargestellt werden kann, wird sie häufig für anschauliche Erklärungen verwendet. Ihre Anwendung bei der Berechnung von plastischen Deformationen, beispielsweise in der Finite-Elemente-Methode, ist jedoch problematisch, weil die Fließfläche an den Ecken nicht stetig differenzierbar ist (siehe Anmerkung auf Seite 96).

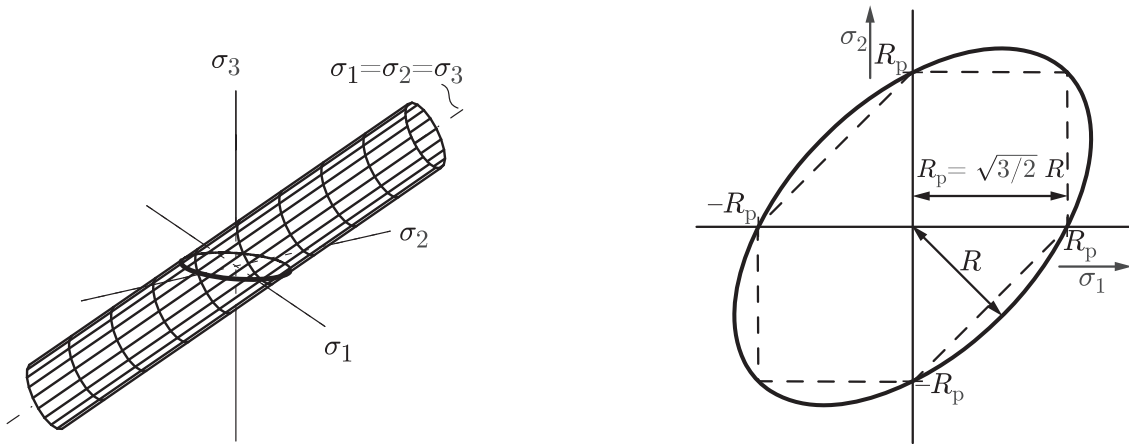
Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises

Die *Fließbedingung nach von Mises* oder auch *Gestaltänderungsenergiehypothese*²² stellt im Hauptspannungsraum einen Zylinder um die hydrostatische Achse $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ mit dem Radius

$$R = \sqrt{2} k_F$$

dar (vgl. Bild 3.23 a). k_F ist dabei die Fließgrenze für die folgende Fließbedingung, die in

²² Der Name folgt aus einer der Annahmen bei der Herleitung dieser Fließbedingung, wonach die sogenannte *Gestaltänderungsenergie* (die plastisch dissipierte Energie) bei der plastischen Verformung maximal werden soll. Dies geschieht dadurch, dass sich bei einer vorgegebenen Dehngeschwindigkeit die Spannung so einstellt, dass unter Erfüllung der Fließbedingung die Gestaltänderungsenergie maximal wird. Darauf wird in Abschnitt 3.3.4 noch einmal eingegangen.



a: Fließfläche für beliebige Spannungszustände im Hauptspannungsraum

b: Fließfläche für $\sigma_3 = 0$. Die Fließbedingung nach Tresca ist zum Vergleich gestrichelt eingezeichnet.

Bild 3.23: Fließfläche für die von-misesche Fließbedingung

Hauptachsenform

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} = k_F \quad (3.29)$$

lautet.²³ Arbeitet man nicht im Hauptachsensystem, so müssen auch die Schubspannungskomponenten berücksichtigt werden. Dann lautet die von-misesche Fließbedingung

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2]} + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2 = k_F. \quad (3.30)$$

Außer den Hauptspannungen hat ein Spannungstensor auch einen anderen Satz aus invarianten Größen, die als die drei *Grundinvarianten* J_1 , J_2 und J_3 bezeichnet werden (vgl. Anhang A.7). Sie sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{ii}, \\ J_2 &= \frac{\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}}{2}, \\ J_3 &= \det(\sigma_{ij}). \end{aligned}$$

Nach Gleichung (3.25) entspricht der hydrostatische Anteil $\sigma_m = J_1/3$. Daraus folgt die bereits verwendete Koordinateninvarianz der hydrostatischen Spannung σ_m .

Die von-misesche Fließbedingung wird mit den Grundinvarianten für den Spannungsdeviator J'_1 , J'_2 und J'_3 formuliert. Mit Gleichung (3.26) folgt

$$J'_1 = 0,$$

²³ In den Gleichungen (3.29) und (3.30) werden die Komponenten des Spannungstensors statt denen des Deviators verwendet, da für die Hauptdiagonalelemente nur Differenzen vorkommen und $\sigma'_{ii} - \sigma'_{jj} = (\sigma_{ii} - \sigma_m) - (\sigma_{jj} - \sigma_m) = \sigma_{ii} - \sigma_{jj}$ gilt.

$$\begin{aligned}
J_2' &= -\frac{1}{2}(\sigma'_{ij}\sigma'_{ji}) \\
&= -\frac{1}{6}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2\right] - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{12}^2, \\
J_3' &= \det(\sigma'_{ij}).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Formuliert man die Fließfläche nur abhängig von ihnen, so ergibt sich $f(J_2', J_3') = 0$.

Die von-misesche Fließbedingung, Gleichung (3.29), ergibt sich, wenn man postuliert, dass die Fließbedingung nur von der zweiten Invarianten J_2' nach Gleichung (3.31) abhängt:

$$f(J_2') = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ji} - k_F^2 = 0. \tag{3.32}$$

J_2' ist dabei ein Maß für den Abstand von der hydrostatischen Achse im Hauptspannungsraum.

Wendet man Gleichung (3.29) auf einen einachsigen Zugversuch an, so ergibt sich analog zur Herleitung von Gleichung (3.28)

$$k_F = \frac{R_p}{\sqrt{3}}.$$

Damit lässt sich die von-misesche Fließbedingung auf

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]} = R_p \tag{3.33}$$

beziehungsweise

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2\right]} + 3(\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2) = R_p \tag{3.34}$$

umschreiben. Die Wurzelterme der Gleichungen (3.33) und (3.34) werden als *Vergleichsspannung* $\sigma_{V,GEH}$ für die Gestaltänderungsenergiehypothese bezeichnet. Bild 3.23 b zeigt die von-misesche Fließbedingung für einen ebenen Spannungszustand im Vergleich mit der trescaschen Fließbedingung, sofern beide im Zugversuch bestimmt wurden. Der Unterschied zwischen beiden beträgt maximal 15,5 %.

Es ist auch möglich, die beiden Fließbedingungen so zu normieren, dass sie für einen Scherversuch, bei dem $\sigma_2 = -\sigma_1$ gilt, übereinstimmen. Dann ist die von-Mises-Ellipse vollständig innerhalb des trescaschen Fließkriteriums und berührt dieses an den sechs linearen Bereichen.

Es ist nicht möglich, die beiden vorgestellten Fließbedingungen theoretisch zu beweisen. Das ist offensichtlich, da sie nur kontinuumsmechanische Näherungen an die nicht kontinuierliche Wirklichkeit darstellen. Versuche zeigen jedoch, dass beide – insbesondere die von-misesche Fließbedingung – das reale Werkstoffverhalten gut beschreiben.

3.3.3 Fließbedingungen für Polymere

Im Gegensatz zu den Metallen findet man bei Polymeren eine unterschiedliche Zug- und Druckdehngrenze. Häufig liegt die Dehngrenze im einachsigen Druckversuch um 20 % bis