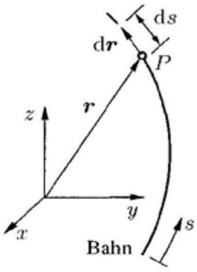
1 Kinematik des Punktes

Die Lage eines Punkte P im Raum wird durch den **Ortsvektor**

$$\boldsymbol{r}(t)$$

beschrieben.



Aus der Verschiebung $d\boldsymbol{r}$ des Punktes P in eine Nachbarlage während der Zeit $\mathrm{d}t$ folgt seine **Geschwindigkeit**

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}}\ .$$

Die Geschwindigkeit ist stets tangential zur Bahn gerichtet. Mit der Bogenlänge s und $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$ gilt für den Betrag der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}\ .$$

Die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}(t)$ heißt **Beschleunigung**

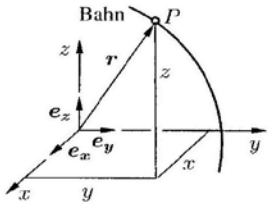
$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}}\ .$$

Die Beschleunigung ist im allgemeinen *nicht* tangential zur Bahn gerichtet!

Die Vektoren $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{a}$ lassen sich in speziellen Koordinatensystemen wie folgt darstellen:

a) Kartesische Koordinaten mit den Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{e}_z$:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z\ ,\\ \boldsymbol{v} &= \dot{x}\,\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\,\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\,\boldsymbol{e}_z\ ,\\ \boldsymbol{a} &= \ddot{x}\,\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\,\boldsymbol{e}_y + \ddot{z}\,\boldsymbol{e}_z\ . \end{aligned}}$$

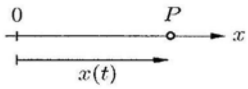


Geradlinige Bewegung

Weg $\quad x(t)$,

Geschwindigkeit $\quad v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$,

Beschleunigung $\quad a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{x}$.



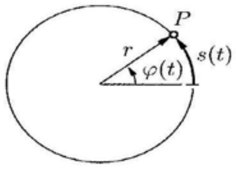
Kreisbewegung

Für $\rho = r = \mathrm{const}$ und $s = r\varphi(t)$ erhält man in natürlichen Koordinaten

Geschwindigkeit $\quad v = r\dot{\varphi} = r\omega$,

Bahnbeschleunigung $\quad a_t = r\ddot{\varphi} = r\dot{\omega}$,

Zentripetalbeschleunigung $\quad a_n = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$



mit $\omega = \dot{\varphi} =$ Winkelgeschwindigkeit.

Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

Für $z = 0$ und $\dot{\varphi} = \omega$ folgen aus den Beziehungen für Zylinderkoordinaten

$$\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi\ , \qquad \boldsymbol{a} = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

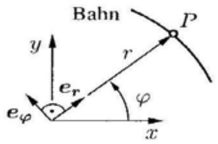
mit

Radialgeschwindigkeit $\quad v_r = \dot{r}$,

Zirkulargeschwindigkeit $\quad v_\varphi = r\omega$,

Radialbeschleunigung $\quad a_r = \ddot{r} - r\omega^2$,

Zirkularbeschleunigung $\quad a_\varphi = r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega$.



Anmerkung: Bei einer *Zentralbewegung* verschwindet die Zirkularbeschleunigung. Aus

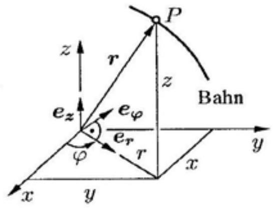
$$a_\varphi = r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega = \frac{1}{r}(r^2\omega)^{\cdot} = 0$$

ergibt sich dann der „Flächensatz" (2. Keplersches Gesetz) .

$$r^2\omega = \mathrm{const}\ .$$

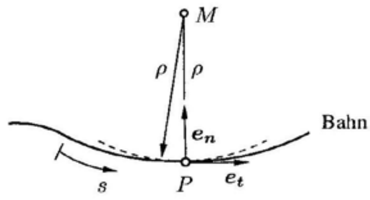
b) Zylinderkoordinaten mit den Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ und $\boldsymbol{e}_z$:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= r\,\boldsymbol{e}_r + z\,\boldsymbol{e}_z\ ,\\ \boldsymbol{v} &= \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\,\boldsymbol{e}_z\ ,\\ \boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,\boldsymbol{e}_\varphi + \ddot{z}\,\boldsymbol{e}_z\ . \end{aligned}}$$



c) Natürliche Koordinaten mit den Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_t$ und $\boldsymbol{e}_n$ in Richtung der Tangente bzw. der Hauptnormalen.

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v\,\boldsymbol{e}_t\ ,\\ \boldsymbol{a} &= \dot{v}\,\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\,\boldsymbol{e}_n\ . \end{aligned}}$$



Dabei sind:

ρ = Krümmungsradius (Abstand zwischen P und Krümmungsmittelpunkt M),

$v = \dot{s} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ = Bahngeschwindigkeit,

$a_t = \dot{v} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ = Bahnbeschleunigung,

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ = Normal- oder Zentripetalbeschleunigung.

Anmerkung: Die beiden Komponenten der Beschleunigung liegen in der sogenannten *Schmiegungsebene*. Der Beschleunigungsvektor zeigt stets ins „Innere" der Bahn.

Kinematische Grundaufgaben für geradlinige Bewegung

Der Bewegungsanfang zur Zeit t_0 sei durch den Anfangsweg x_0 und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gegeben.

Gegeben	Gesuchte Größen
$a = 0$	$v = v_0 = \mathrm{const}$, $x = x_0 + v_0 t$ *gleichförmige Bewegung*
$a = a_0 = const$	$v = v_0 + a_0 t$, $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2$ *gleichmäßig beschleunigte Bewegung*
$a = a(t)$	$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\bar{t})\mathrm{d}\bar{t}$, $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\bar{t})\mathrm{d}\bar{t}$
$a = a(v)$	$t = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{a(\bar{v})} = f(v)$, mit der Umkehrfunktion $v = F(t)$ folgt $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\bar{t})\mathrm{d}\bar{t}$
$a = a(x)$	$v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}$, $t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{v(\bar{x})} = g(x)$ Die Umkehrfunktion liefert $x = G(t)$.

Anmerkungen:

- Die Formeln lassen sich auch bei einer allgemeinen Bewegung anwenden, wenn man x durch s und a durch die Bahnbeschleunigung a_t ersetzt. Die Normalbeschleunigung folgt dann aus $a_n = v^2/\rho$.
- Falls die Geschwindigkeit als Funktion des Weges gegeben ist, folgt die Beschleunigung aus

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v^2}{2}\right)\ .$$