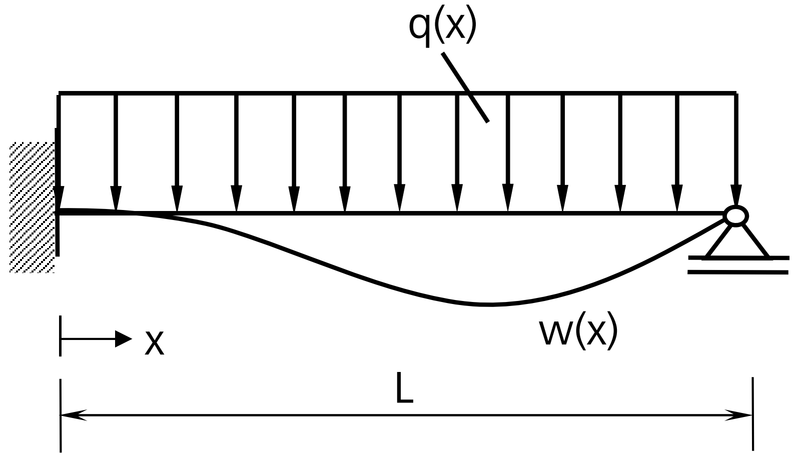
Modellierung mit FEM
Kapitel 2: Mathematische Grundlagen der FEM

Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch
Department Maschinenbau und Produktion
Fakultät Technik und Informatik
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

thomas.graetsch@haw-hamburg.de

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Das Balkenproblem:



Gesucht ist die Biegelinie w(x) bei gegebener Belastung q(x), Biegesteifigkeit EI und Balkenlänge L

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Mathematisches Modell:

$$EIw^{IV}(x) = q(x)$$

Funktionenräume:

C = Raum der stetig differenzierbaren Funktionen

C^n = Raum der n-fach stetig differenzierbaren Funktionen, d.h eine Funktion ist dann in C^n, wenn dessen n-te Ableitung noch stetig ist

$\Rightarrow$ Forderung für das Balkenproblem somit: $w \in C^4$

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Ausgangspunkt ist die Balken-DGL

$$EIw^{IV} = q \tag{1}$$

Multiplikation mit einer zweiten Funktion v(x) $\in C^2$ und Integration liefert:

$$\int_0^L EIw^{IV} v\,dx = \int_0^L qv\,dx \tag{2}$$

Weiteres Umformen von Gl. (2) mit Hilfe partieller Integration:

$$\int_0^L f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_0^L - \int_0^L f(x)g'(x)dx$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Wir setzen

$$f'(x) = w^{IV} \quad \text{und} \quad g(x) = v$$

Aus Gl. (2) folgt dann

$$\int_0^L EIw^{IV} v \, dx = \left[EIw''' v\right]_0^L - \int_0^L EIw''' v' \, dx = \int_0^L q v \, dx \qquad (3)$$

Nochmalige partielle Integration des zweiten Integrals in Gl. (3) liefert

$$-\int_0^L EIw''' v' \, dx = -\left[EIw'' v'\right]_0^L + \int_0^L EIw'' v'' \, dx \qquad (4)$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Einsetzen von Gl. (4) in Gl. (3) und umsortieren liefert:

$$\int_0^L EIw''v''\,dx = \int_0^L qv\,dx - \left[EIw'''v\right]_0^L + \left[EIw''v'\right]_0^L \tag{5}$$

Verwendung der Schnittgrößendefinitionen

$$M = -EIw'' \text{ und } Q = -EIw'''$$

ergibt aus Gl. (5) das Prinzip der virtuellen Verrückungen für den Balken:

$$\boxed{\underbrace{\int_0^L EIw''v''\,dx}_{\text{Innere virtuelle Arbeit}} = \underbrace{\int_0^L qv\,dx + \left[Qv\right]_0^L - \left[Mv'\right]_0^L}_{\text{äußere virtuelle Arbeit}}} \tag{6}$$

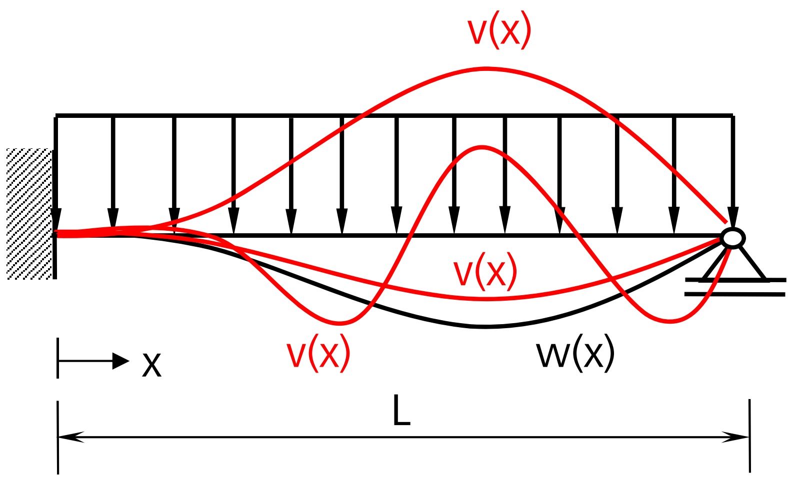
Prinzip der virtuellen Verrückungen

Anmerkungen:

- Nach Gl. (6) gilt: Befindet sich ein System im Gleichgewicht, dann sind bei einer aufgebrachten virtuellen (gedachten) Verrückung die äußeren und inneren Arbeiten gleich groß
- Der Umkehrschluss ist auch richtig und wird von der FEM verwendet
- Für die Biegelinie w gilt offenbar die schwächere Forderung $w \in C^2$
- Gl. (6) wird deshalb auch als sog. „schwache Form“ der DGL bezeichnet, weil an die Differenzierbarkeit von w schwächere Anforderungen gestellt werden im Vergleich zur „starken Form“ nach Gl. (1)

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Gl. (6) gilt für alle virtuellen Verrückungen v(x), welche die Lagerbedingungen erfüllen:



$\Rightarrow$ Übungsaufgabe an der Tafel

Eine neue Notation

Um Schreibarbeit zu sparen, verwenden wir eine neue Notation:

$$a(w,v) = \int_0^L EI w'' v''\, dx$$

$$p(v) = \int_0^L qv\, dx + \left[Qv\right]_0^L - \left[Mv'\right]_0^L$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Gl. (6) lautet somit:

$$a(w,v) = p(v) \qquad (7)$$

Eine neue Notation

Man bezeichnet $a(w,v)$ auch als sog. Bilinearform mit den Eigenschaften:

Faktorregel: $a(\alpha w,v) = \alpha \cdot a(w,v)$

Bilinearität: $a(w+u,v) = a(w,v)+a(u,v)$ und $a(w,u+v) = a(w,u)+a(w,v)$

Symmetrie: $a(w,v) = a(v,w)$

Definitheit: $a(w,w) > 0 \;\; \forall \; w \neq 0$

Analog bezeichnet man $p(v)$ als sog. Linearform mit den Eigenschaften:

Faktorregel: $p(\alpha v) = \alpha \cdot p(v)$

Linearität: $p(v+u) = p(v)+p(u)$

Nebenprodukte

Aus Gl. (7) ergeben sich durch einfaches Einsetzen die folgenden mechanischen Grundbeziehungen:

1.) Wir setzen v = w in Gl. (7), multiplizieren mit ½ und erhalten:

$$\frac{1}{2}a(w,w) = \frac{1}{2}p(w)$$

Nach Ausschreiben der Kurzbezeichnungen erkennen wir den Arbeitssatz:

$$\frac{1}{2}\int_0^L EIw''^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^L qw\,dx + \left[Qw\right]_0^L - \left[Mw'\right]_0^L\right) \qquad (8)$$

2.) Folgende Notation liefert die potentielle Energie des Biegebalkens:

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}a(w,w) - p(w) \qquad (9)$$

Finite-Element-Methode (FEM)

Die FEM basiert auf dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Gl. (6) bzw. Gl. (7) und verwendet folgenden Näherungsansatz für die unbekannte Biegelinie:

$$w_h = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i(x) \tag{10}$$

Es sind u_i unbekannte Knotenverformungen („Freiheitsgrade") und $\varphi_i(x)$ gegebene Ansatzfunktionen, beim Balken sind dies die sog. Hermite-Polynome:

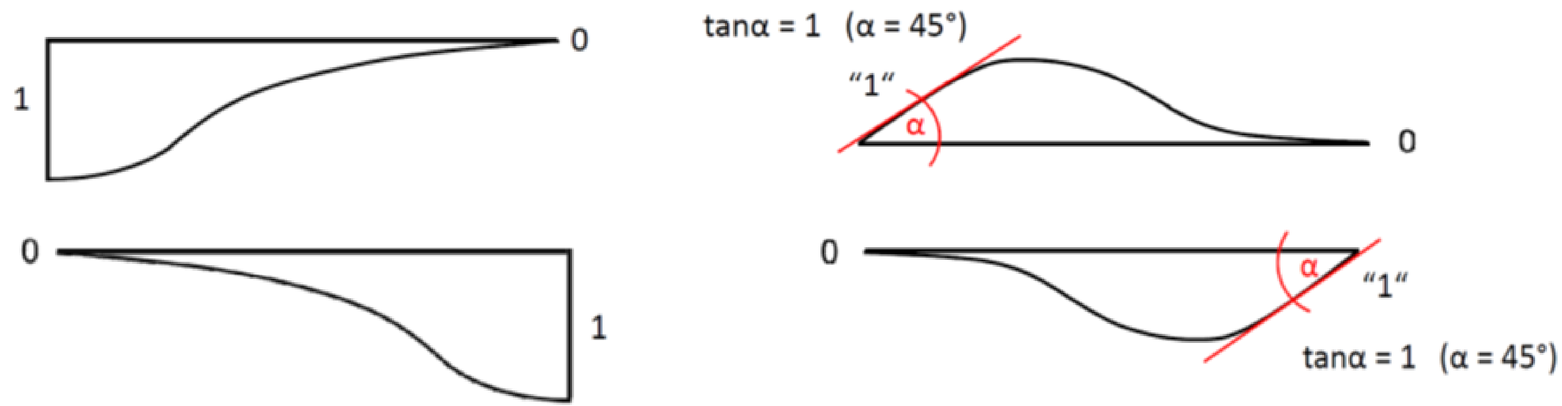
$$\varphi_1 = \frac{2}{L^3} \cdot x^3 - \frac{3}{L^2} \cdot x^2 + 1 \qquad \varphi_3 = -\frac{2}{L^3} \cdot x^3 + \frac{3}{L^2} \cdot x^2$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{L^2} \cdot x^3 + \frac{2}{L} \cdot x^2 - x \qquad \varphi_4 = -\frac{1}{L^2} \cdot x^3 + \frac{1}{L} \cdot x^2$$

Finite-Element-Methode (FEM)

Anmerkungen zu den Ansatzfunktionen:

- Ansatzfunktionen werden auf Teilgebieten konstruiert („finite Elemente“)
- Jeder Ansatzfunktion wird ein sog. Freiheitsgrad zugeordnet
- Ansatzfunktionen werden stets so konstruiert, dass sie an dem ihr zugeordneten Freiheitsgrad den Wert Eins haben und an allen anderen Freiheitsgraden den Wert Null („Partition of Unity“)



Finite-Element-Methode (FEM)

Einsetzen von Gl. (10) in Gl. (6) und wählen von v = $\varphi_k(x)$ liefert:

$$\underbrace{\int_0^L EI \sum_{i=1}^{4} \varphi_i'' \varphi_k'' \, dx}_{\mathbf{K}} \underbrace{u_i}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\int_0^L q \varphi_k \, dx}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\left[Q \varphi_k\right]_0^L - \left[M \varphi_k'\right]_0^L}_{\mathbf{f}} \quad k = 1,\ldots,4 \qquad (11)$$

oder

$$\mathbf{Ku=f+p} \qquad (12)$$

K = Steifigkeitsmatrix

u = Vektor der unbekannten Knotenverformungen

f = Vektor der Knotenkräfte und -momente

p = Vektor der äquivalenten Knotenkräfte und -momente

Finite-Element-Methode (FEM)

Gl. (11) lautet in der neuen Notation mit $v_h = \varphi_k(x)$

$$a(w_h, v_h) = p(v_h) \qquad (13)$$

Die Steifigkeitsmatrix für den Biegebalken lautet:

$$\underline{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Eine erste Interpretation

Wir halten fest:

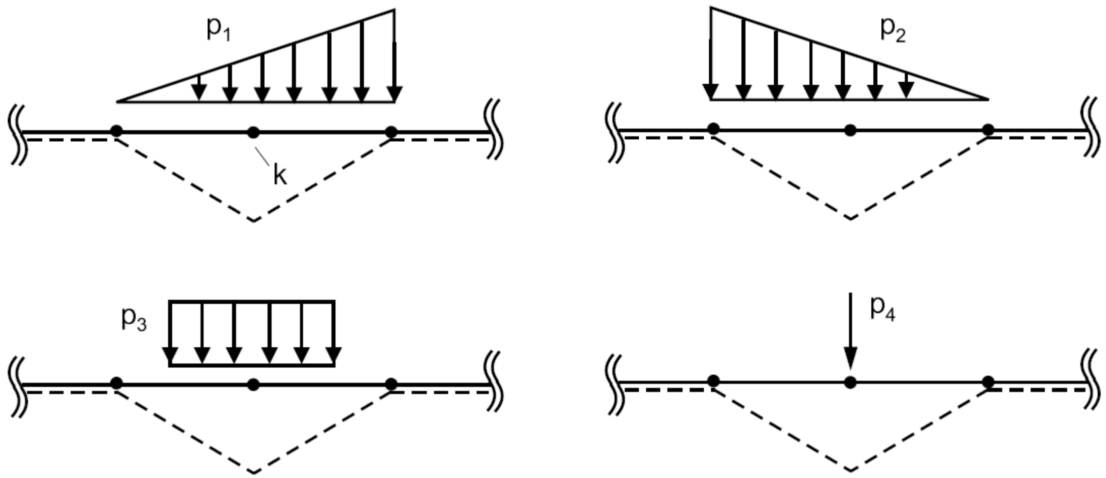
1. Gl. (12) stellt i.A. <u>keine</u> klassische Gleichgewichtsbedingung dar. Stattdessen wird das Prinzip der virt. Verrückungen für einen endlichen Satz von Funktionen formuliert. In jeder Zeile des Gleichungssystems **Ku=f+p** werden somit innere und äußere Arbeiten bilanziert.
2. Finite Elemente sind keine geometrischen Objekte („Zerlegung einer Struktur in Elemente“), sondern dienen lediglich zur Konstruktion der Ansatzfunktionen und der virtuellen Verrückungen
3. Der Vektor **p** beinhaltet die sog. <u>äquivalenten Knotenkräfte</u>, welche die Arbeiten der verteilten Belastung q(x) auf den Wegen der virtuellen Verrückungen $\varphi_k(x)$ darstellen:

$$p_k = \int_0^L q\,\varphi_k\,dx \quad k = 1,\dots,4$$

Eine erste Interpretation

Aus 3.) ergibt sich:

- Die äquivalenten Knotenkräfte sind keine <u>echten</u> Knotenkräfte (insbesondere wichtig für 2D- und 3D-Berechnungen)
- Unterschiedliche Lasten q(x) können auf dieselbe äquivalente Knotenkraft abgebildet werden, d.h. die FE-Methode ist „blind" gegenüber der realen Belastung (Bsp. Seil):



Optimalitätseigenschaft

Wir setzen $v = v_h$ in Gl. (7)

$$a(w, v_h) = p(v_h)$$

und subtrahieren hiervon Gl. (13):

$$a(w, v_h) - a(w_h, v_h) = 0$$

Aufgrund der Linearität folgt:

$$a(w - w_h, v_h) = 0$$

oder

$$a(e, v_h) = 0 \text{ mit } e = w - w_h$$

Erkenntnis: Der Fehler e lässt sich auf einem gegebenen Netz nicht mehr verbessern, die FE-Lösung ist somit stets optimal bezüglich der inneren Energie (d.h. es gibt keine bessere Lösung auf dem gegebenen Netz)