Modellierung mit FEM
Kapitel 6: Genauigkeit der FE-Methode

Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch

Department Maschinenbau und Produktion

Fakultät Technik und Informatik

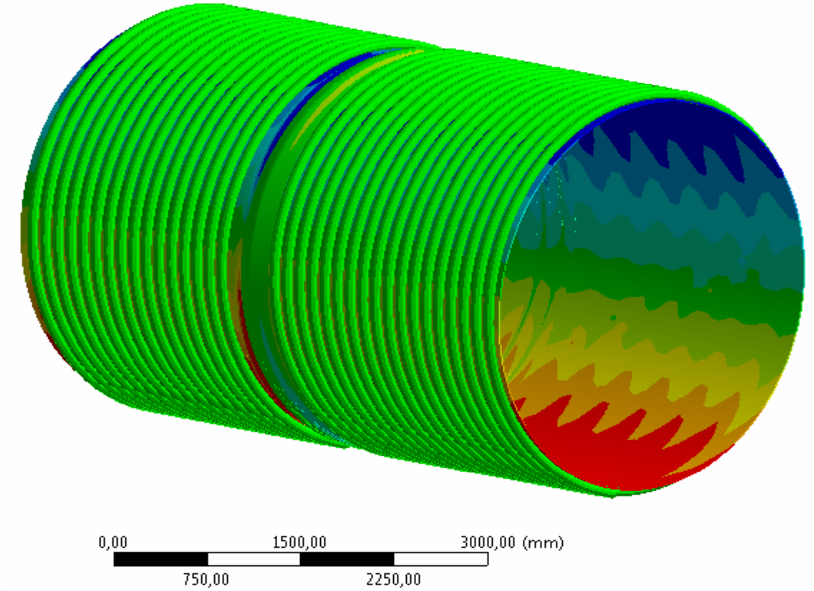
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

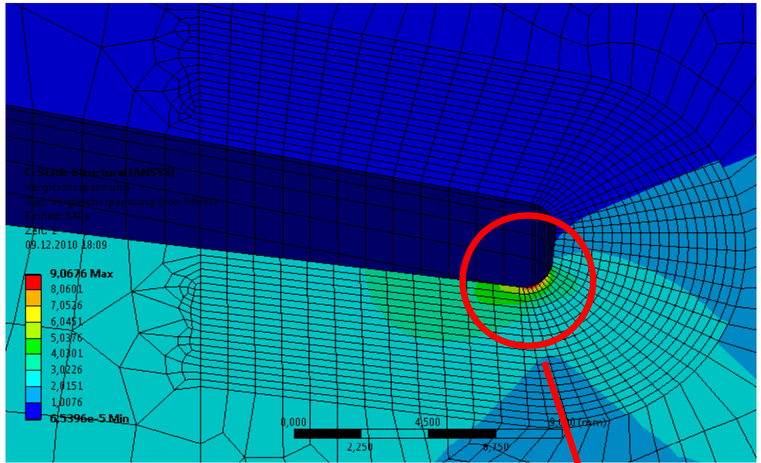
thomas.graetsch@haw-hamburg.de

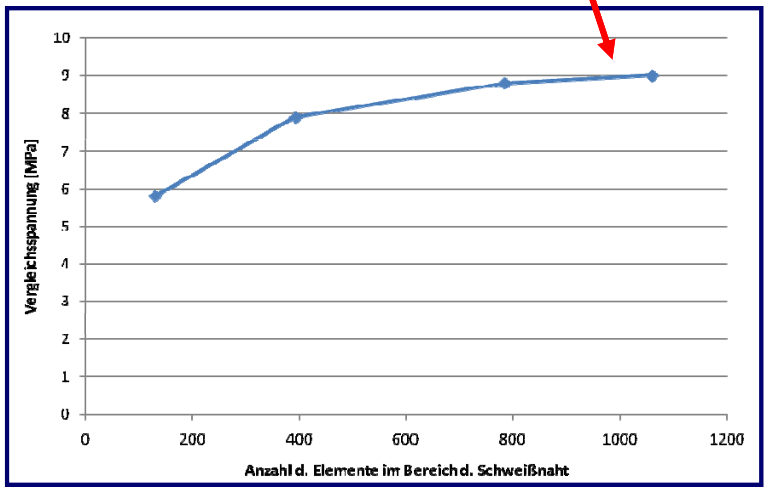
Hinweise zum Vernetzen

- FE-Ergebnisse sollten stets netzunabhängig sein, d.h. eine Konvergenz-studie muss ergeben, dass eine weitere Verfeinerung die Ergebnisse nicht weiter verändert (Ausnahme: Singularitäten, siehe Kap. 5)
- FE-Spannungen sollten so ‘glatt’ wie möglich verlaufen, d.h. es sollen keine großen Spannungssprünge zwischen den Elementen sichtbar sein
- Achtung: Zur Kontrolle nicht die bereits geglätteten Spannungen ausgeben lassen, sondern die echten FE-Spannungen („raw stresses“)
- Mit diesen Maßnahmen werden automatisch ausreichende Netzfeinheiten an Spannungskonzentrationen erreicht (Lasteinleitungen, Radien, Umlenkungen, Wechsel in Material- oder Lagerbedingungen etc.)

Beispiel zur Konvergenzstudie



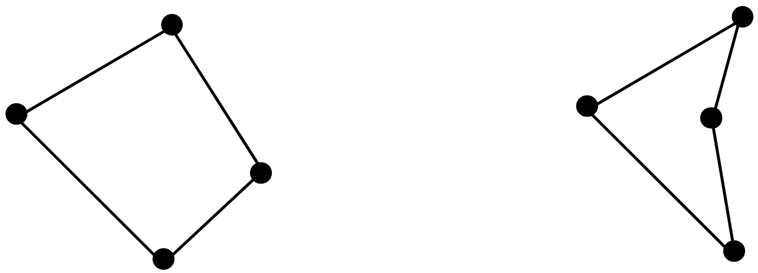




Konvergenzstudie für Spannungen im Schweißnahtbereich

Weitere Hinweise zum Vernetzen

- Elemente sollten nicht zu stark verzerrt sein, Kriterien der FE-Solver und Vernetzer sind stets zu beachten



Verzerrung ok   zu starke Verzerrung

- An Stellen, an denen eine hohe Genauigkeit in den Spannungen benötigt werden, möglichst fein im Vergleich zur Umgebung vernetzen (s. später)
- An Kopplungspunkten zweier Bauteile (z.B. bei Kontakt oder „Klebung“) möglichst knotenkoinzident vernetzen, siehe auch Kap. 7

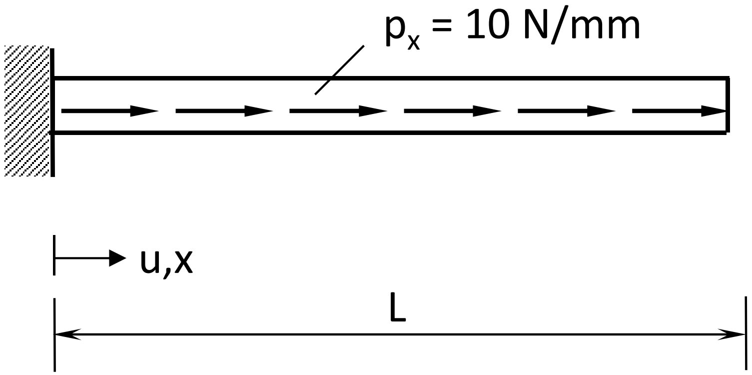
Spezielle Hinweise zum 3D-Vernetzen

- Einfache Geometrien
  - möglichst HEXA-Elemente verwenden
  - HEXA8-Elemente bevorzugen (statt HEXA27- oder HEXA20-Elemente)
  - PENTA-Elemente nur zum Auffüllen
  - mind. 2 HEXA8-Elemente über die Dicke bei dünnwandigen Bauteilen
- Komplexe Geometrien
  - TET10-Elemente verwenden (mit automatischem Vernetzer)
  - TET4-Elemente vermeiden
  - 1-2 TET10-Elemente über die Dicke bei dünnwandigen Bauteilen

Der Fehler der finiten Elemente

Neue Interpretation: Die FE-Lösung ist zwar eine Näherungslösung, sie ist jedoch die exakte Lösung eines anderen Lastfalls!

<u>Beispiel:</u>



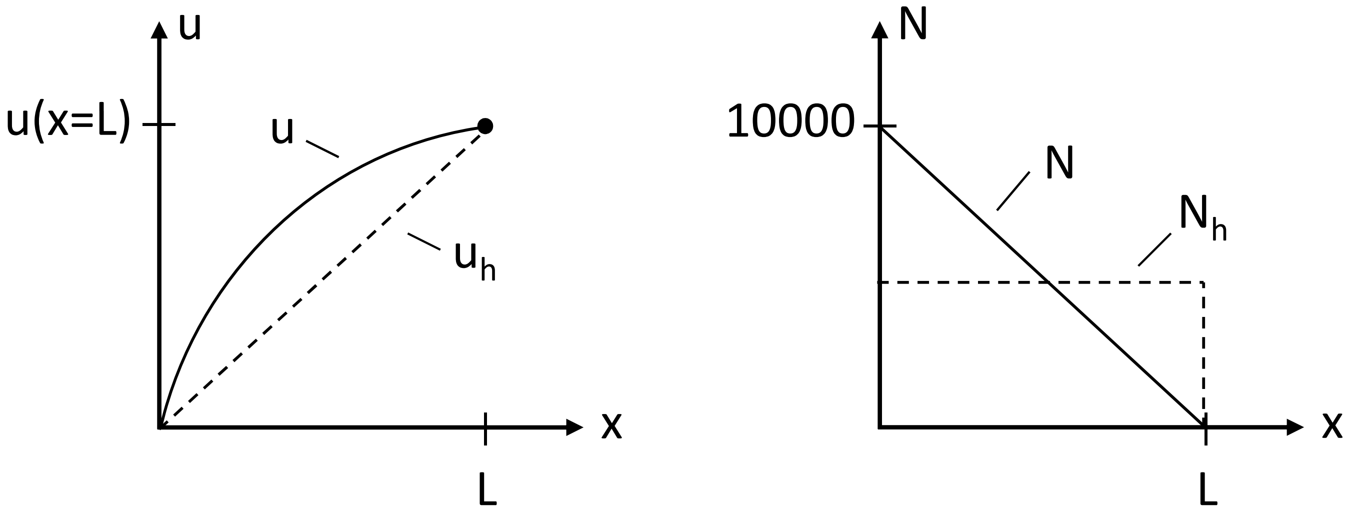
$E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2
$A = 30$ mm^2
$L = 1000$ mm

DGL: $-EAu'' = p_x$
RB: $u(x=0) = 0$; $N(x=L) = 0$ mit $N = EAu'$

Exakte Lösung: $u(x) = p/EA \cdot (-x^2/2 + xL)$
FE-Lösung (1 El.): $u_h(x) = p/EA \cdot xL/2$

Der Fehler der finiten Elemente

Vergleich exakte Lösung / FE-Lösung:



$u(x) = p/EA \cdot (-x^2/2 + xL)$
$u_h(x) = p/EA \cdot xL/2$

$N(x) = 10000 - 10x$
$N_h(x) = 5000$

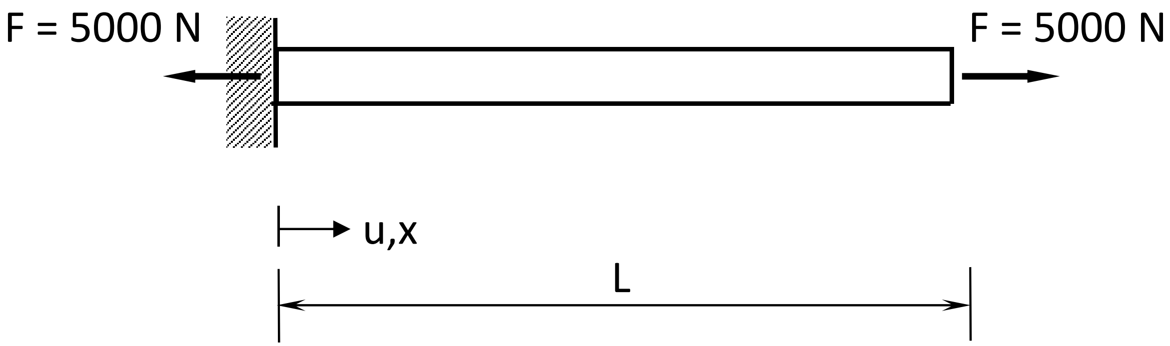
Der Fehler der finiten Elemente

Einsetzen der FE-Lösung in die DGL und den Randoperatoren:

$-EAu_h'' = 0$

$EAu'(x) = pl/2 = 5000 \Rightarrow N(x=0) = N(x=L) = 5000$

Die FE-Lösung ist somit die <u>exakte Lösung</u> des folgendes Lastfalls:



Der Fehler der finiten Elemente

Anmerkungen:

- Der FE-Lastfall ist offenbar im Gleichgewicht (gilt immer)
- Der FE-Lastfall entspricht den äquivalenten Knotenkräften (gilt nur bei 1D-Problemen)
- Bei 2D- oder 3D-Problemen erhält man den FE-Lastfall ebenfalls durch Einsetzen der FE-Lösung in die DGL und Randoperatoren
- Dieser besteht in der Regel dann aus Flächen- bzw. Volumenlasten sowie Kantenlasten und entspricht somit nicht den äquivalenten Knotenkräften

Der Fehler der finiten Elemente

Bsp. Scheibe:

- Elementweises Einsetzen der FE-Lösung in die Gleichgewichtsbedingungen liefert Elementlasten, vgl. Kap. 3, S.14:

$$\frac{\partial \sigma_{h,xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{h,yx}}{\partial y} = -p_{h,x}$$

$$\frac{\partial \tau_{h,xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{h,yy}}{\partial y} = -p_{h,y}$$

- Einsetzen in die Cauchy-Formel liefert Kantenlasten, vgl. Kap. 3, S.15:

$$\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_h$$

- FE-Lastfall aus Berechnung von p_h und t_h über alle Elemente und Kanten

Beispiele zum FE-Lastfall

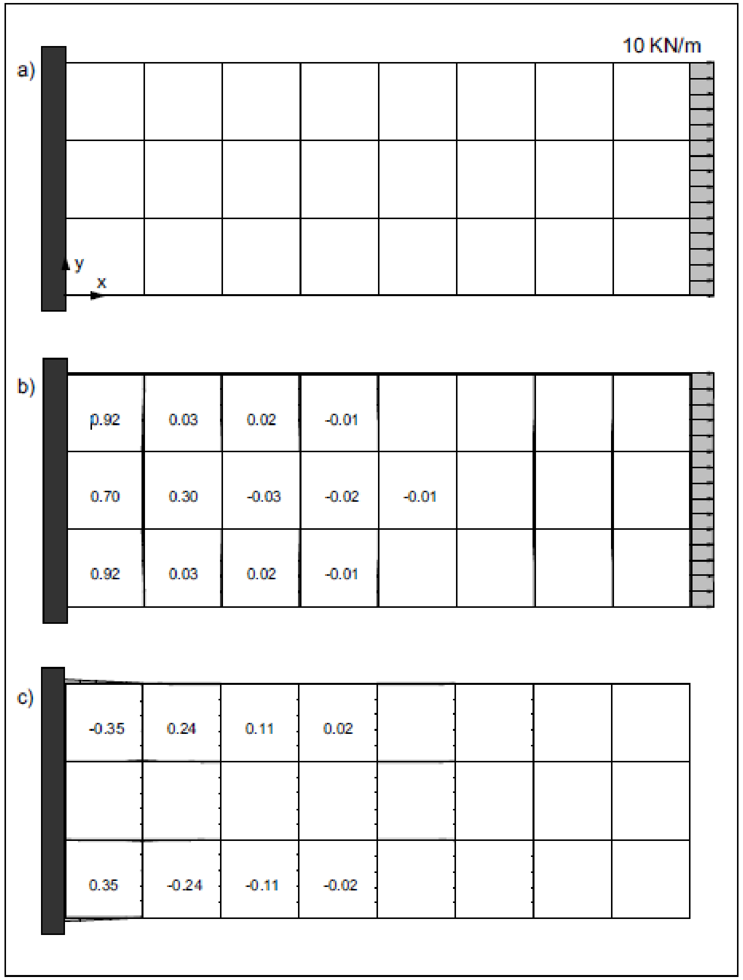


Abb. 5.1: Beispiel Zugscheibe: a) Originallastfall, b) FE-Lastfall (horizontaler Anteil), c) FE-Lastfall (vertikaler Anteil)

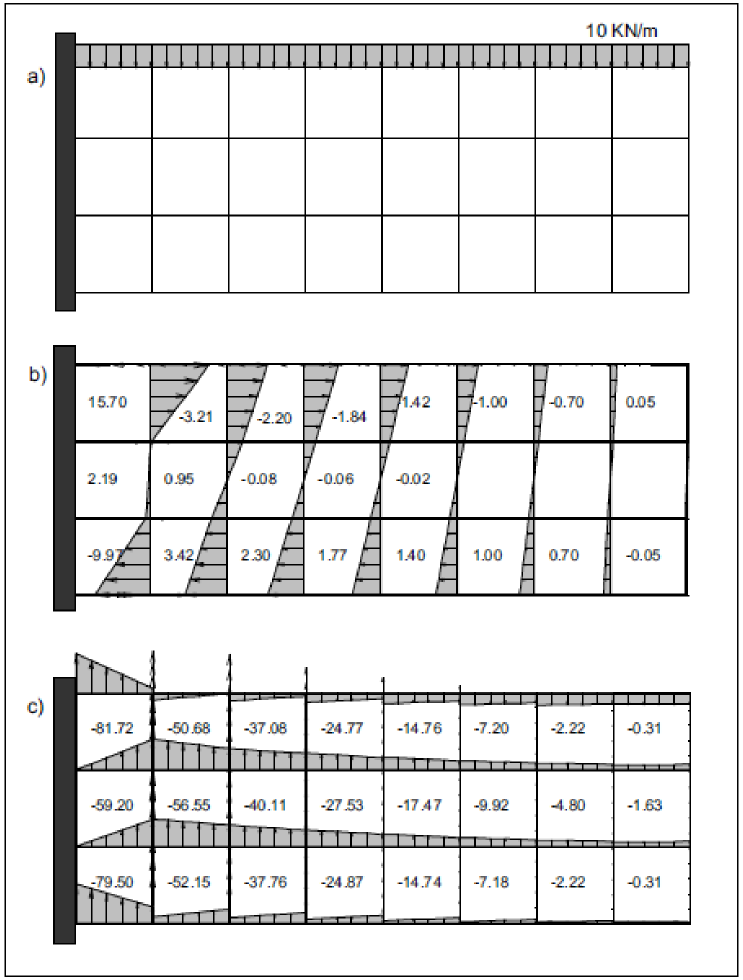


Abb. 5.2: Beispiel Kragscheibe: a) Originallastfall, b) FE-Lastfall (horizontaler Anteil), c) FE-Lastfall (vertikaler Anteil)

Beispiele zum FE-Lastfall

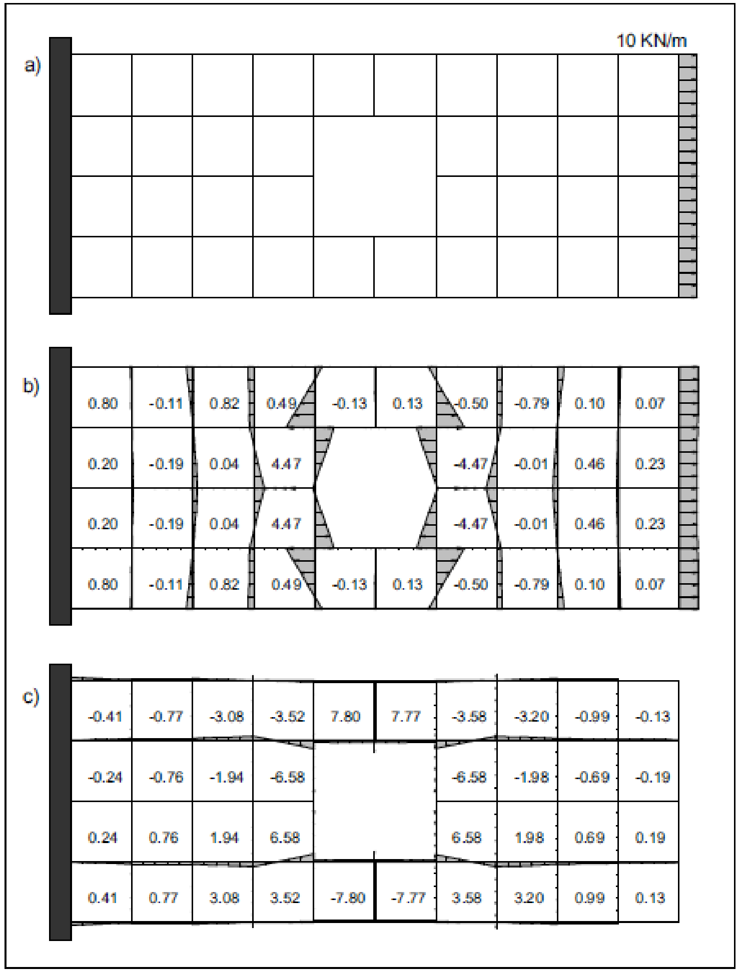


Abb. 5.3: Beispiel Zugscheibe mit Öffnung: a) Originallastfall, b) FE-Lastfall (horizontaler Anteil), c) FE-Lastfall (vertikaler Anteil)

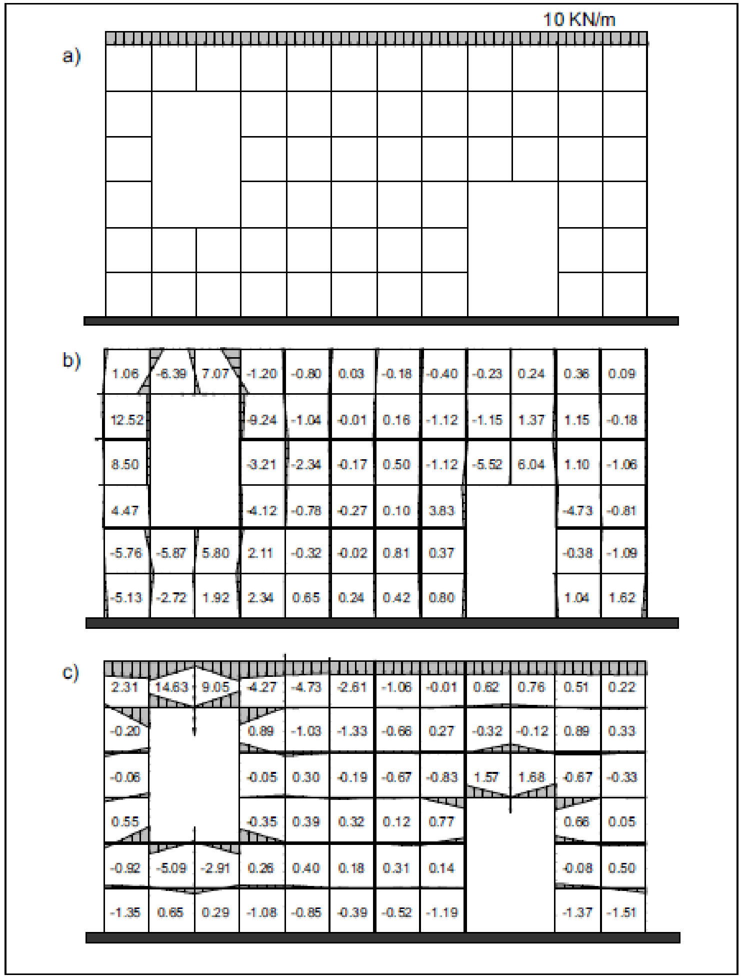


Abb. 5.4: Beispiel gegliederte Wandscheibe: a) Originallastfall, b) FE-Lastfall (horizontaler Anteil), c) FE-Lastfall (vertikaler Anteil)

Beispiele zum FE-Lastfall

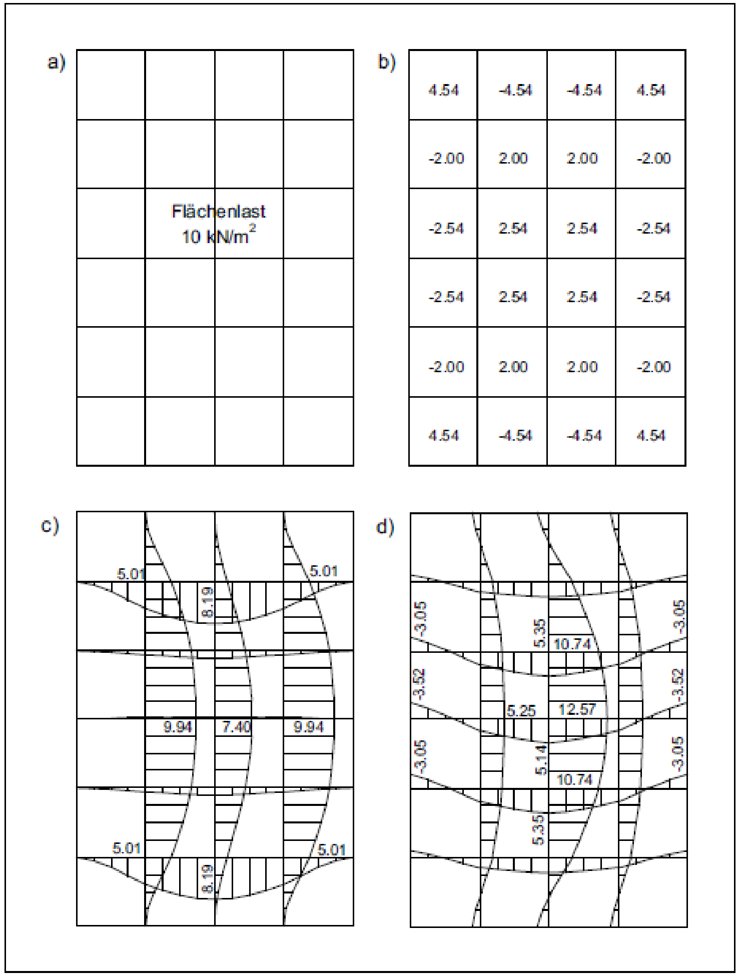


Abb. 5.6: Beispiel allseitig eingespannte Platte: a) Originallastfall, b) FE-Lastfall, Elementlasten p, c) Kirchhoffschub v_n, d) Momente m_n

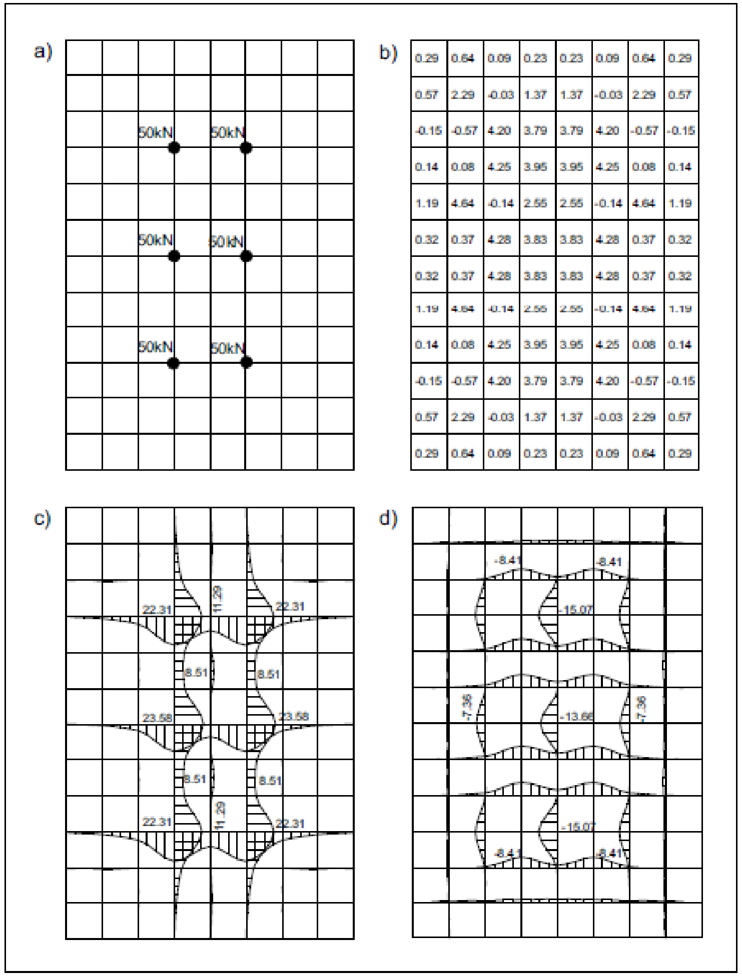


Abb. 5.7: Beispiel gelenkig gelagerte Platte: a) Lastfall SLW 30, b) FE-Lastfall, Elementlasten, c) Kirchhoffschub (positiv), d) Kirchhoffschub (negativ)

Beispiele zum FE-Lastfall

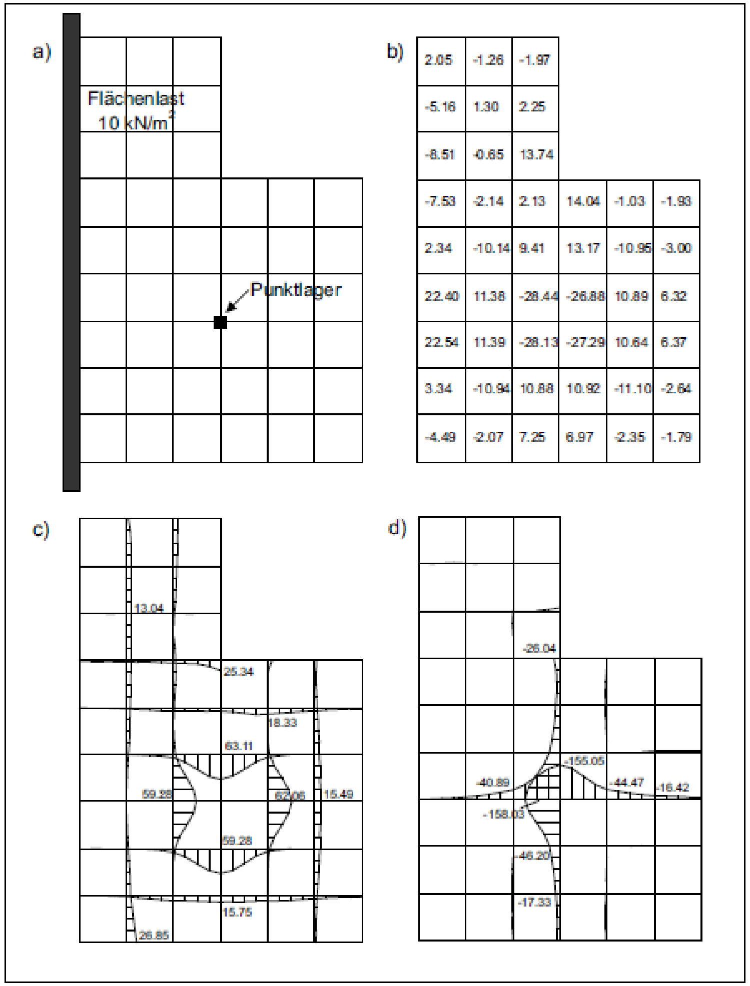


Abb. 5.8: Beispiel Kragplatte mit Punktlager: a) Originallastfall, b) FE-Lastfall, Elementlasten, c) Kirchhoffschub (positiv), d) Kirchhoffschub (negativ)

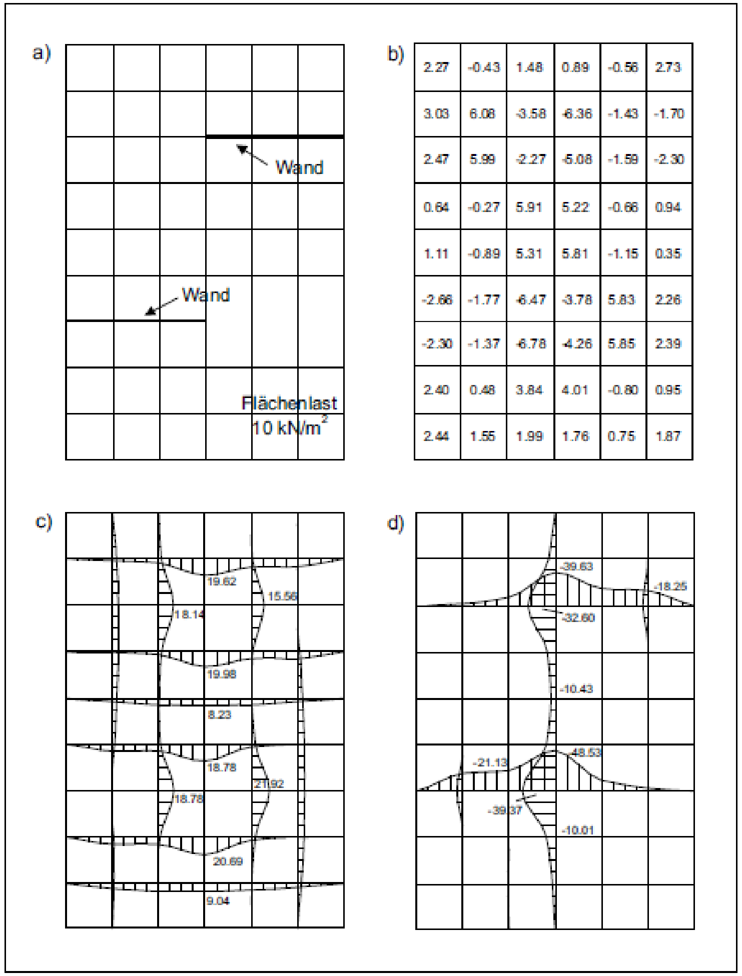


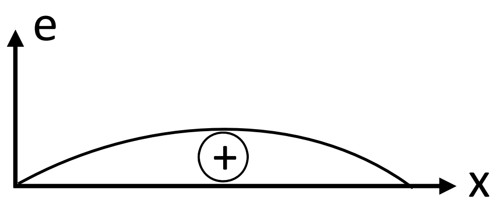
Abb. 5.9: Beispiel Platte mit Wänden: a) Originallastfall, b) FE-Lastfall, Elementlasten, c) Kirchhoffschub (positiv), d) Kirchhoffschub (negativ)

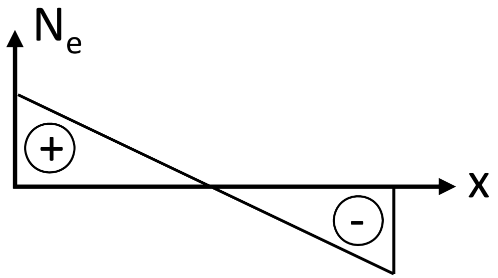
Fehleranalysis

Fehler in den Verschiebungen: $e := u - u_h$

Fehler in den Spannungen: $N_e := N - N_h$

Aus Linearität der DGL folgt: $N_e = EAe'$





Frage: Welches globale Fehlermaß ist zu verwenden?

Ein Ausdruck wie $\int_0^L (N - N_h)\, dx = 0$ ist offenbar nicht zielführend

Fehleranalysis

Einführung der sog. Energienorm: $\|u\|_E := \sqrt{\int_0^L \frac{N^2}{EA}\,dx}$

Fehler in der Energienorm somit: $\|e\|_E := \sqrt{\int_0^L \frac{(N-N_h)^2}{EA}\,dx}$

Anmerkungen

- In der Praxis ist der Fehler in der Energienorm meist nicht berechenbar, da die exakte Lösung nicht bekannt ist
- Stattdessen wird der Fehler nur noch abgeschätzt

  $\Rightarrow$ „A posteriori Fehlerschätzung“

Fehleranalysis

Verwendung der Differenz aus dem Originallastfall und dem FE-Lastfall:

$R := p - p_h$ (Fehlerlasten im Elementinnern: R = „<u>R</u>esidual“)

$J := t - t_h$ (Fehlerlasten an den Kanten: J = „<u>J</u>umps“)

Formel zur Fehlerabschätzung:

$$\|e\|_E^2 \leq \sum_{El.} \left\{ c_1 h^2 \|R\|^2 + c_2 h \|J\|^2 \right\} = \sum_{El.} \eta_E^2$$

h = Elementdurchmesser; c_1, c_2 = (unbekannte) Konstanten

<u>Strategien:</u>

h-Adaption: Verfeinere das Netz lokal dort, wo η_E groß ist

p-Adaption: Erhöhe den Polynomgrad lokal dort, wo η_E groß ist

Beispiele zur h-Adaption

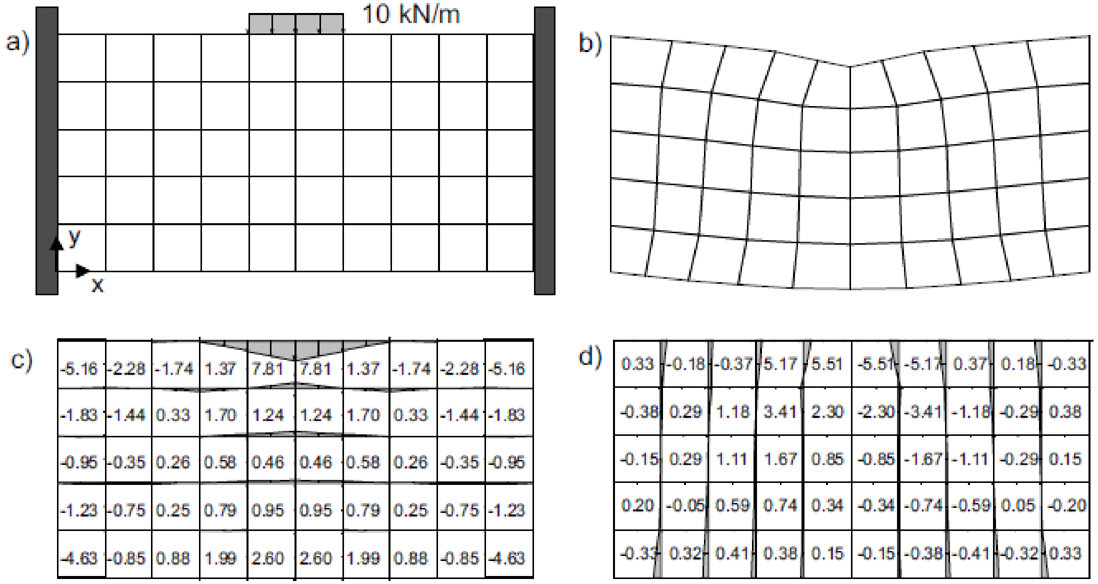
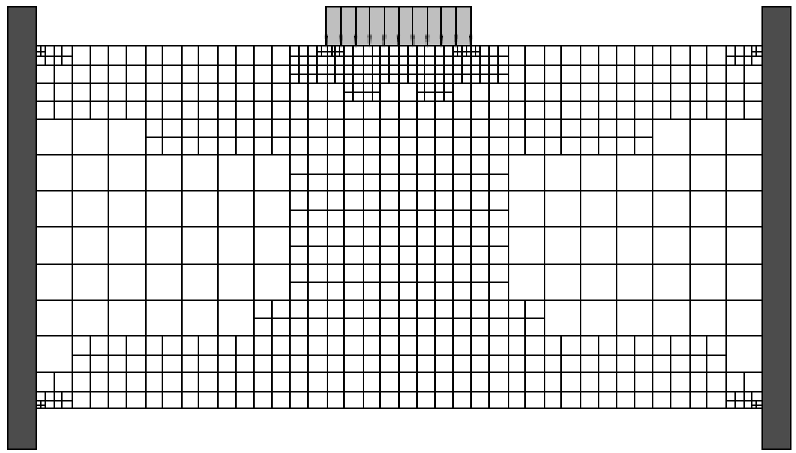


Abb. 3.2: Eingespannter Biegeträger: a) System und Belastung, b) Deformation, c) FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ (vertikaler Teil), d) FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ (horizontaler Teil)

Ergebnis der h-Adaption:



Beispiele zur h-Adaption

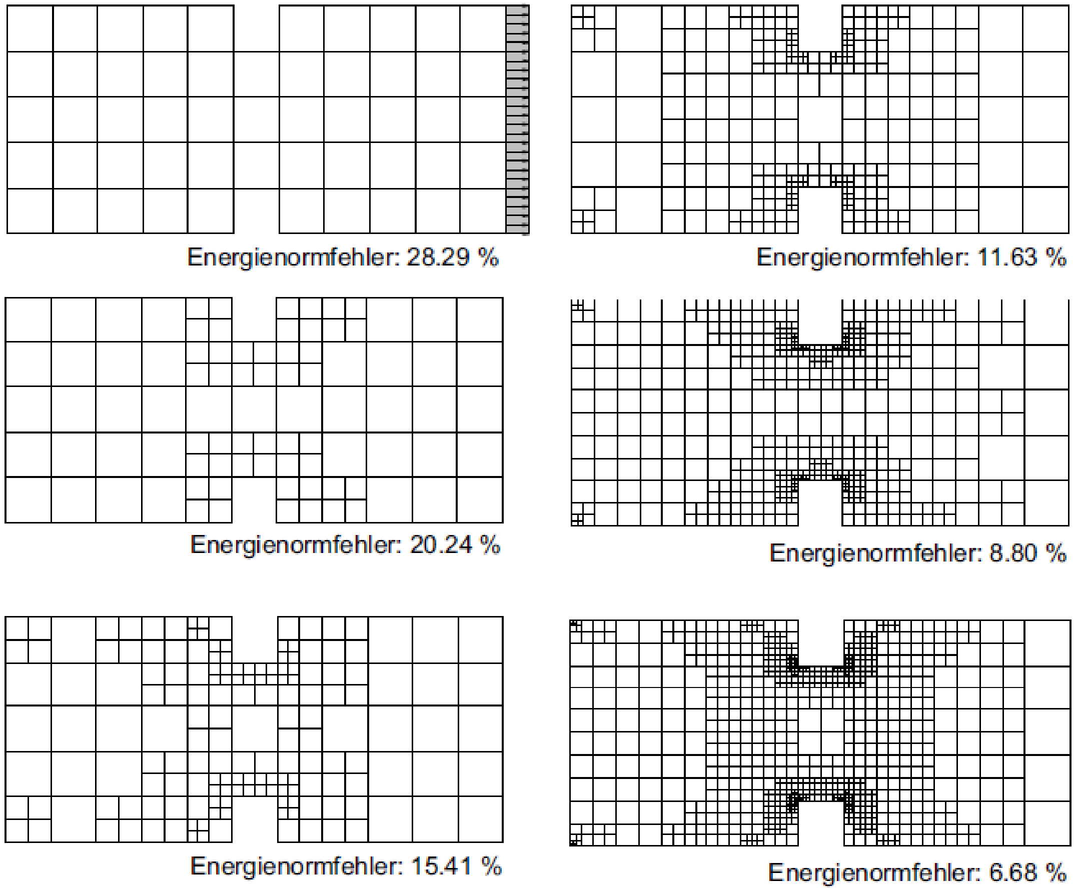
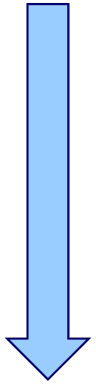


Abb. 5.18: Adaptive Netzverfeinerung für eine Zugscheibe mit Einkerbungen



Iteratives Wiederholen der h-Adaptionsstrategie

Fehleranalysis

Weitere Ansätze zur Fehlerabschätzung:

Mittelwertbildung der Spannungssprünge als ‘quasi-exakte‘-Lösung:

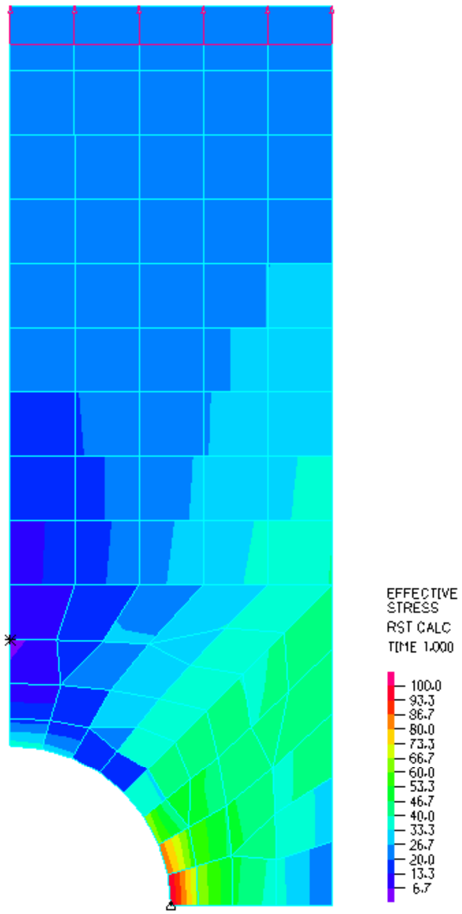
$$\|e\|_E \approx \sqrt{\int_0^L \frac{(N_h^* - N_h)^2}{EA}\, dx}$$ mit N^*_h als gemittelte Spannung

Anmerkungen

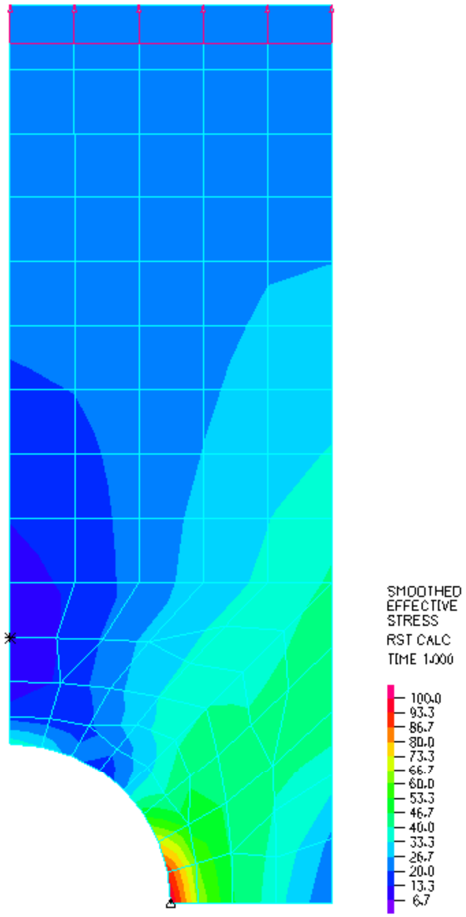
- Liefert in der Praxis oftmals sehr gute Ergebnisse, allerdings nur Verbesserung in den Spannungen möglich, nicht aber in Verschiebungen
- Leicht zu Implementieren in FE-Software
- Mathematische Begründung oftmals kompliziert oder nicht möglich

Beispiele zur Mittelwertbildung

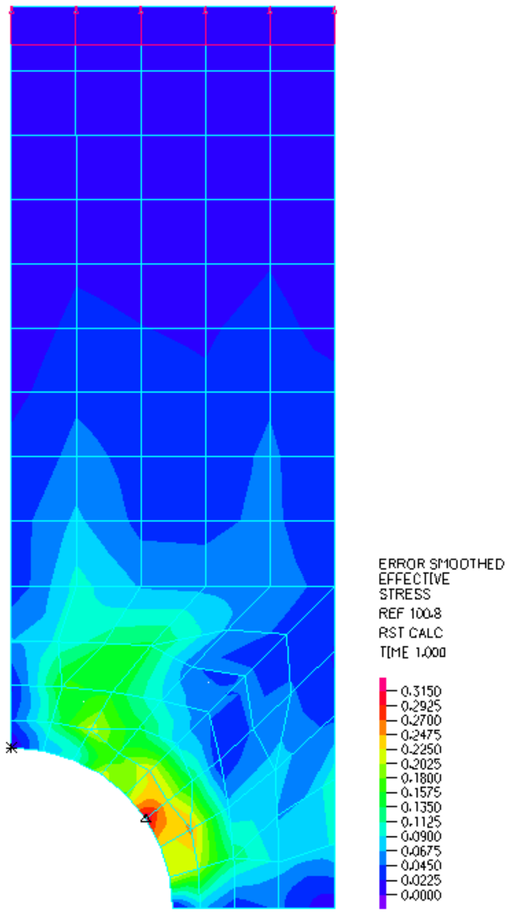
FE-Spannungen:



gemittelte FE-Spann.:



Differenzspannungen:

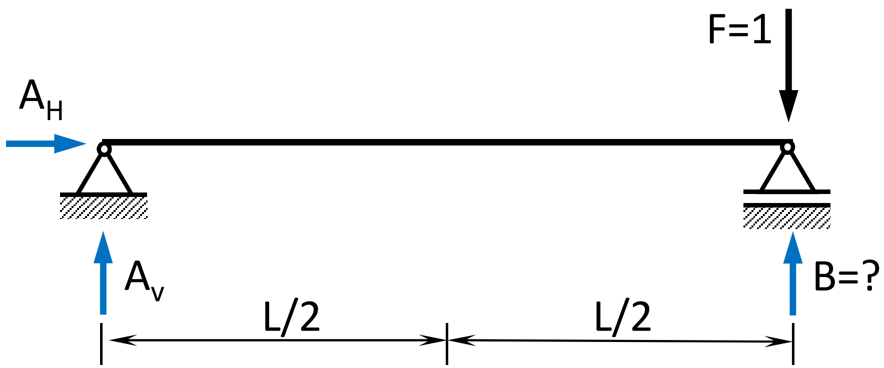


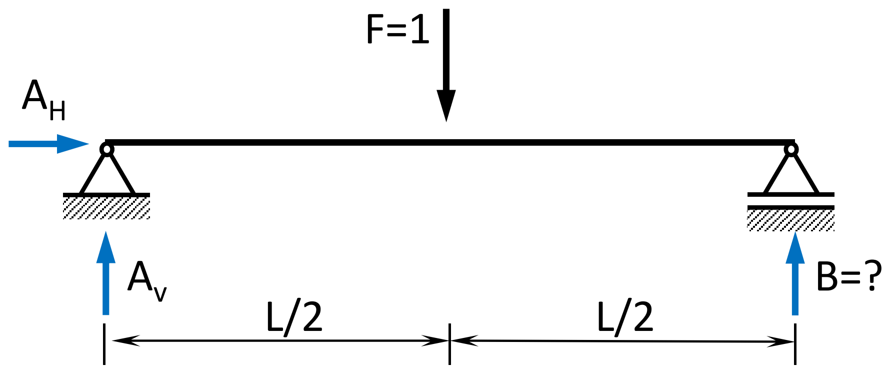
Genauigkeit beliebiger Zielgrößen

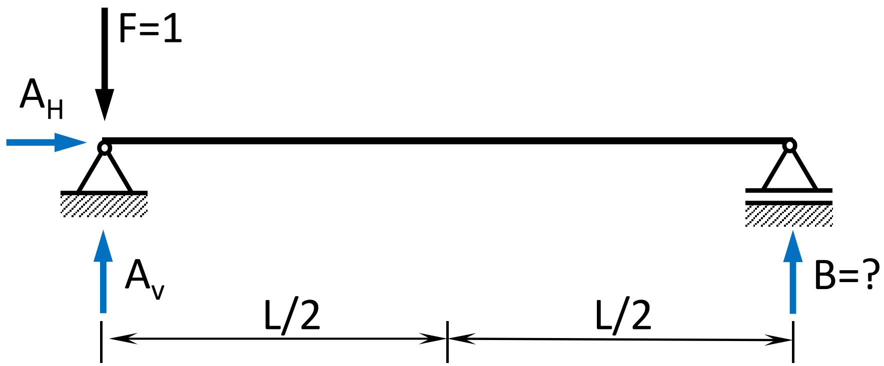
- Die bisherigen Überlegungen gehen davon aus, den Fehler in der Energienorm, d.h. bezüglich eines globalen Fehlermaß, zu verbessern
- Der Fehler in der Energienorm sagt jedoch nichts über den lokalen Fehler, z.B. für die Verschiebung oder die Spannung, an einer bestimmten Stelle der Struktur aus
- In jüngerer Zeit gibt es daher ein neues Fehlerkonzept, welches die Genauigkeit einer beliebigen (lokalen) Zielgröße erhöht
- Mathematischer Hintergrund dieses neuen Konzepts ist das altbewährte Konzept der Einflussfunktionen (siehe folgende Folien)

Einflussfunktionen in der Statik

Ein Gedankenexperiment:







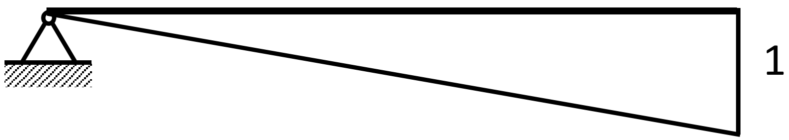
Berechne die Lagerkraft B in Abhängigkeit der Position von F

Einflussfunktionen in der Statik

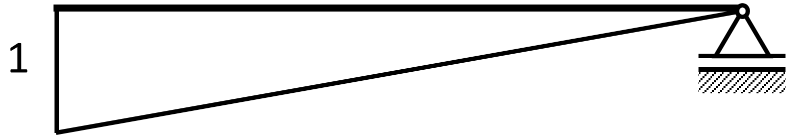
Frage: Gibt es eine Funktion, welche die Größe von B in Abhängigkeit der Position von F darstellt?

$\Rightarrow$ Dies ist die sogenannte Einflussfunktion

Einflussfunktion für die Lagerkraft B:



Einflussfunktion für die Lagerkraft A_V:



Einflussfunktionen in der Statik

Konstruktionsvorschrift für Einflussfunktionen für Lagerkräfte:

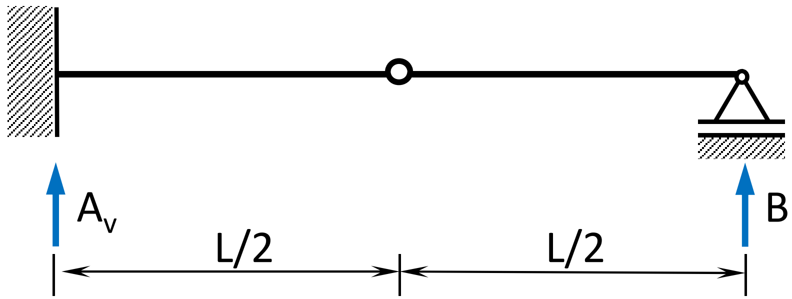
Die Einflussfunktion einer Lagerkraft entspricht der Verformungsfigur, die entsteht, wenn die zugehörige Lagerfessel entfernt wird und eine zur Lagerkraft entgegengesetzte Verschiebung von Eins aufgebracht wird

- Bei statisch bestimmten Tragwerken entsteht eine stückweise kinematische Kette
- Bei statisch unbestimmten Tragwerken entsteht eine Biegelinie, die aus gegebenen Randbedingungen berechnet werden kann

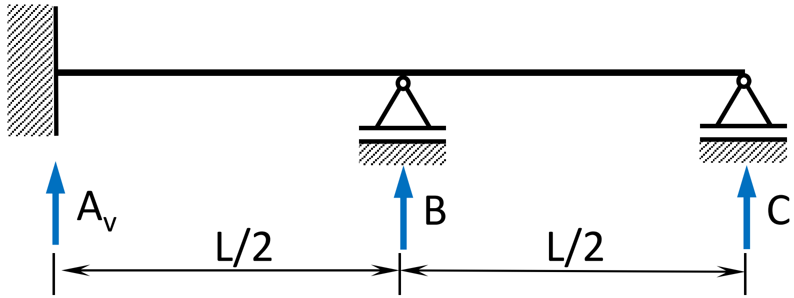
Einflussfunktionen in der Statik

Übungsaufgaben:

Zeichnen Sie EL-A_v und EL-B für das folgende Tragwerk:



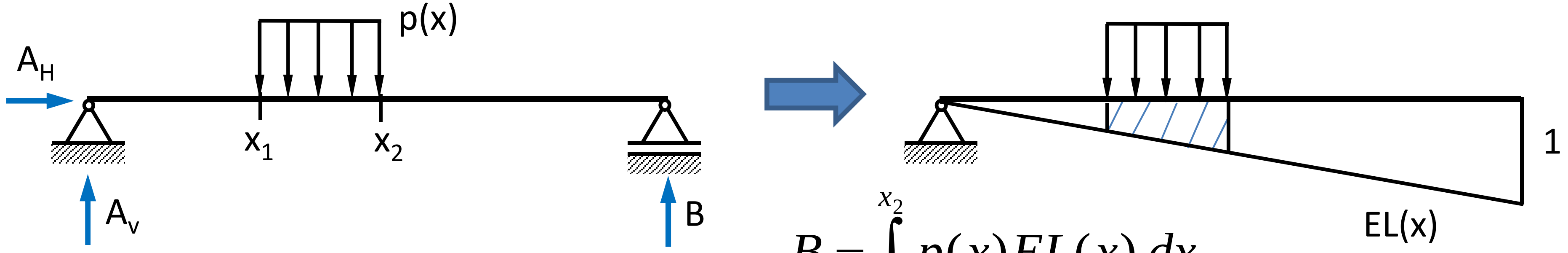
Skizzieren Sie EL-B und EL-C für das folgende Tragwerk:



Einflussfunktionen in der Statik

Anmerkungen:

- Große praktische Bedeutung haben Einflussfunktionen bei der statischen Analyse von bewegenden Lasten („Wanderlasten“), wie z.B. im Brücken- oder Kranbau
- Einflussfunktionen können auch bei Linienlasten verwendet werden, in dem Fall ist über die Breite der Linienlast zu integrieren:



$$B = \int_{x_1}^{x_2} p(x) EL(x)\, dx$$

Einflussfunktionen in der Statik

Konstruktionsvorschrift für Einflussfunktionen beliebiger Größen:

EL für Verschiebungen:

- Die Einflussfunktion entspricht der Biegelinie w(x), wenn eine Belastung von F=1 in Richtung der gesuchten Verschiebung aufgebracht wird

EL für Spannungen:

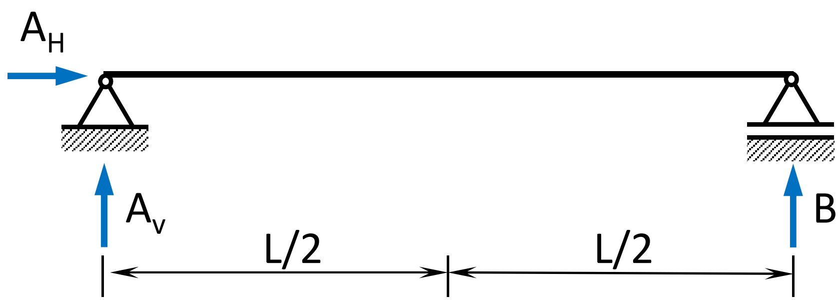
- Die Einflussfunktion entspricht der Biegelinie w(x) (bzw. der kinematischen Kette bei statisch bestimmten Systemen), wenn ein zur Spannung konjugiertes Gelenk eingebaut und an dieser Stelle eine Gelenkspreizung von Eins aufgebracht wird

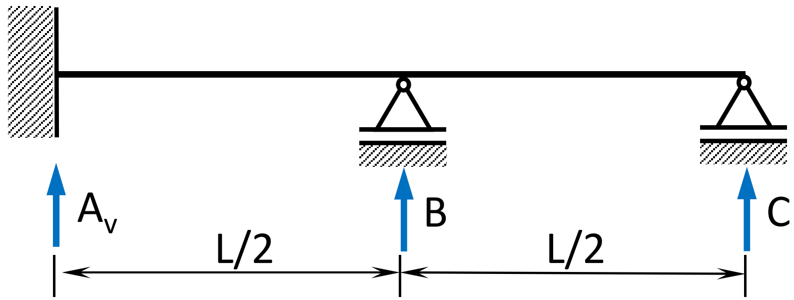
Einflussfunktionen in der Statik

Beispiele:

Gesucht ist jeweils die EL an den Stellen x = L/4, x = L/2 und x = L3/4

- für die Verschiebung
- für die Querkraft und das Biegemoment





⇒ Lösung an der Tafel

Berechnung von Einflussfunktionen mit der FEM

Wir verwenden die mathematische Notation aus Kap. 2, S. 9-15

Das (primale) FE-Problem lautet

$$a(u_h, v_h) = p(v_h)$$

Es bezeichnen nun z die Einflussfunktion und Q(u) die Zielgröße („Q=Quantity“)

Das (duale) FE-Problem zur Berechnung von z_h lautet

$$a(z_h, v_h) = Q(v_h)$$

Trick (von Tottenham 1970, wiederentdeckt erst Ende der 90‘er): Setze $v_h = u_h$

$$p(z_h) = a(u_h, z_h) = a(z_h, u_h) = Q(u_h)$$

Berechnung von Einflussfunktionen mit der FEM

Somit ergibt sich:

$$\boxed{Q(u_h) = p(z_h) = \int p \cdot z_h \, dx}$$

Interpretation:

- Jede (lokale) Zielgröße der FE-Lösung $Q(u_h)$ kann alternativ aus der auf dem selben Netz ermittelten Einflussfunktionen z_h berechnet werden
- Die Genauigkeit jeder Zielgröße ist damit direkt mit der Genauigkeit der auf dem selben Netz darstellbaren Einflussfunktion verknüpft
- Selbst wenn die Einflussfunktion niemals ausgerechnet wird, besteht dieser innere fundamentale Zusammenhang zwischen $Q(u_h)$ und z_h

Einige Thesen

- Verschiebungen sind in der Regel genauer als Spannungen, weil …
- Lagerkräfte sind der in Regel genauer als Spannungen, weil …
- Integrale Spannungen bzw. Spannungsresultierende sind in der Regel genauer als jeder Punktwert einer Spannung, weil …

… die zugehörige Einflussfunktion genauer dargestellt werden kann und bereits auf einem recht groben Netz ausreichend genau ist!

Beispiele zu Einflussfunktionen

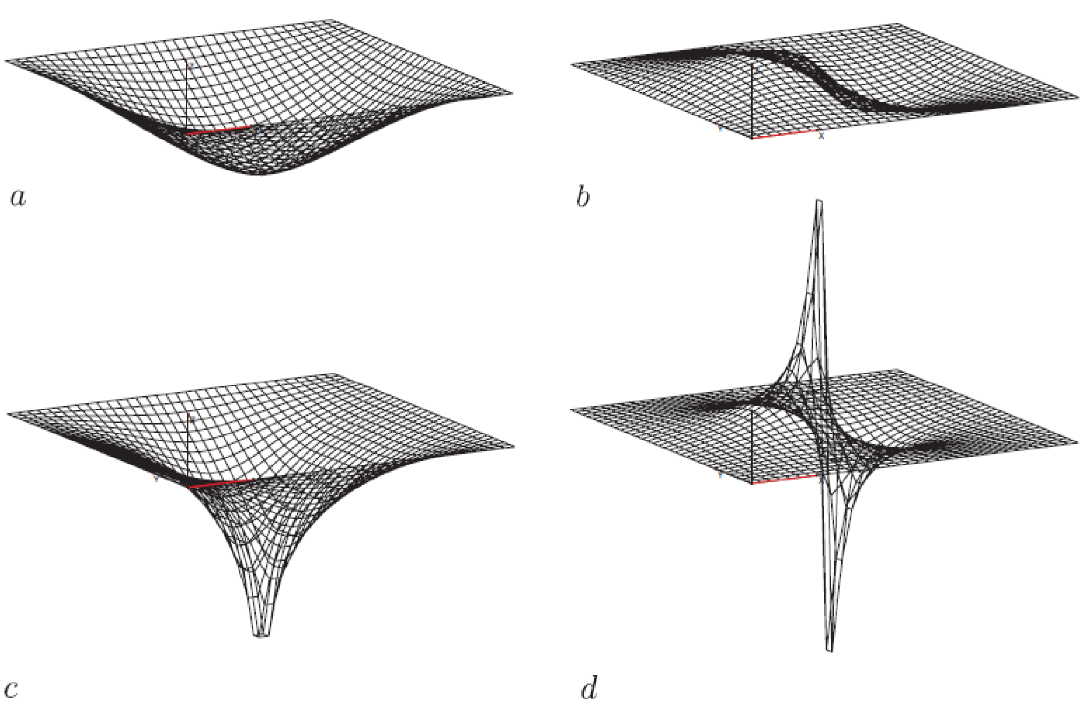


Fig. 1.51. Influence functions for a) the deflection w, b) the slope $w_{,x}$, c) the bending moment m_{xx}, and d) the shear force q_x at the center of the slab

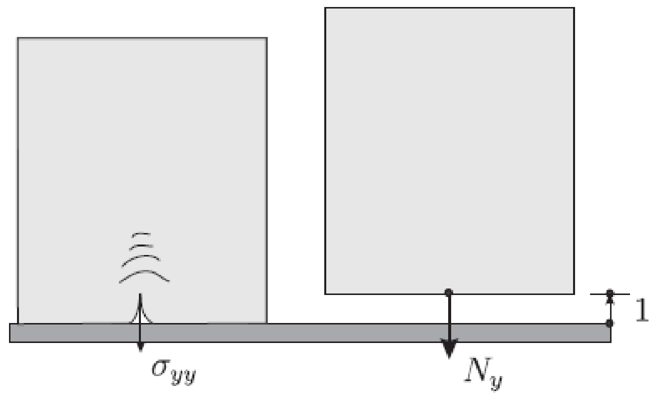


Fig. 1.54. Influence function for σ_{yy} and N_y

Beispiele auf S. 33-34, 36 aus Hartmann F, Katz C: Structural Analysis with Finite Elements, Springer, 2006

Beispiele zu Einflussfunktionen

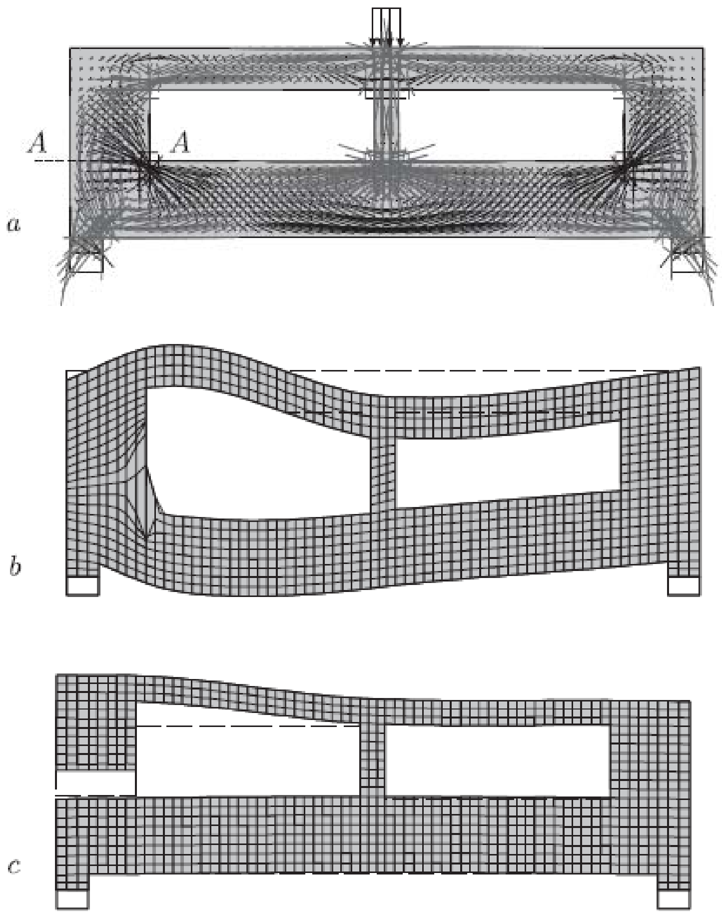


Fig. 1.53. Plate: **a)** system and loading; **b)** influence function for the stress σ_{yy} near the corner point; **c)** influence functions for the internal action N_y in cross-section A–A

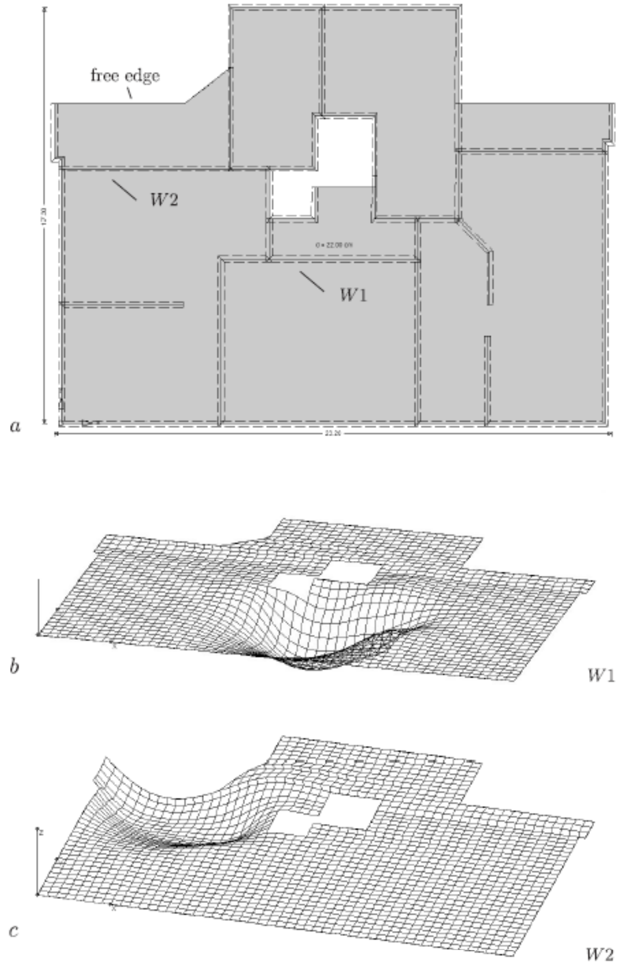


Fig. 1.67. Slab: **a)** plan view; **b)** influence function for the sum of the support reactions in wall $W1$; **c)** in wall $W2$

Fehleranalysis mit Einflussfunktionen

Startpunkt ist das duale Problem

$$Q(v) = a(z, v)$$

Setze v = e := u-u_h

$$Q(e) = a(z, u - u_h)$$

Erweiterung um die sog. Galerkin-Orthogonalität (Kap.2, S.18) liefert:

$$\begin{aligned} Q(e) &= a(z - z_h, u - u_h) \\ &\leq \|z - z_h\|_E \|u - u_h\|_E \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Fehler einer beliebigen Zielgröße kann aus dem Fehler in der Energienorm des dualen und des primalen Problems berechnet werden

Praxis: Verfeinere dort, wo der Fehler in der Einflussfunktion groß ist

Beispiele zu goal-oriented refinement

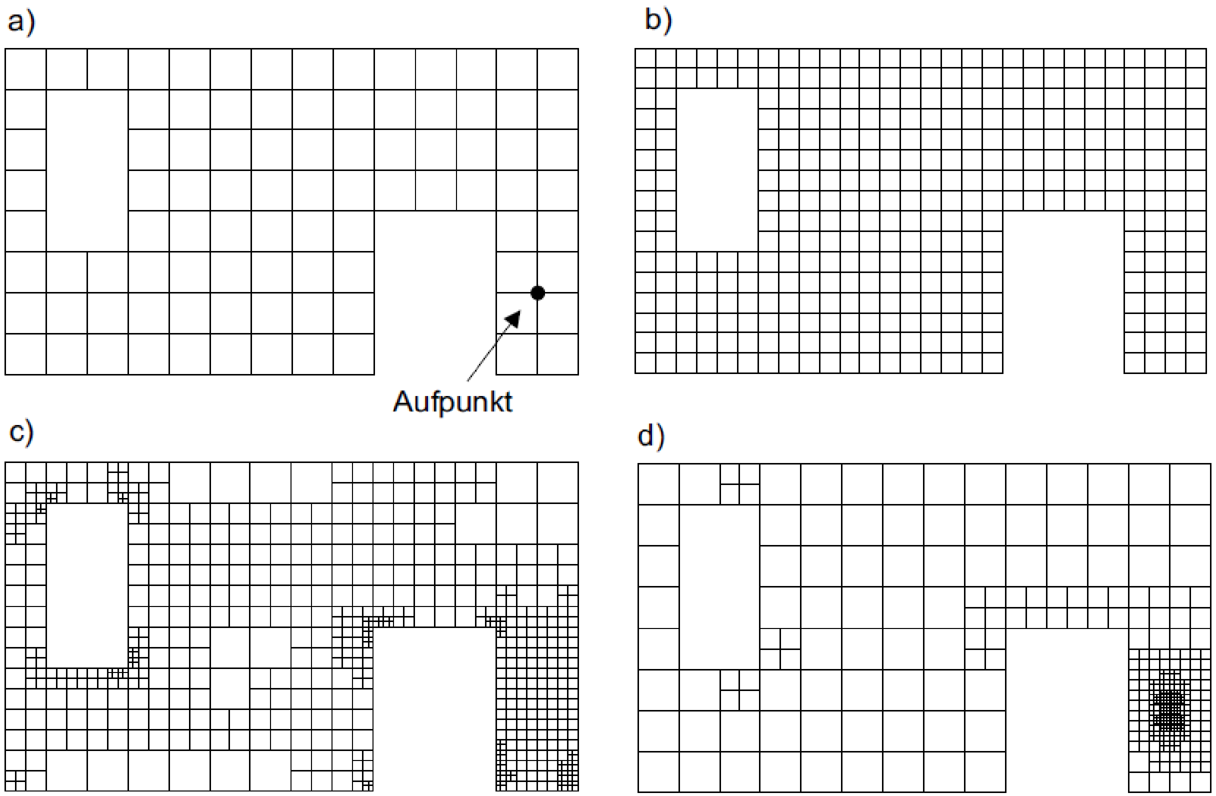


Abb. 5.20: Wandscheibe unter Windbelastung: a) Startnetz, b) gleichmäßige Verfeinerung, c) Fehlerschätzung in der Energienorm, d) lokale Fehlerschätzung

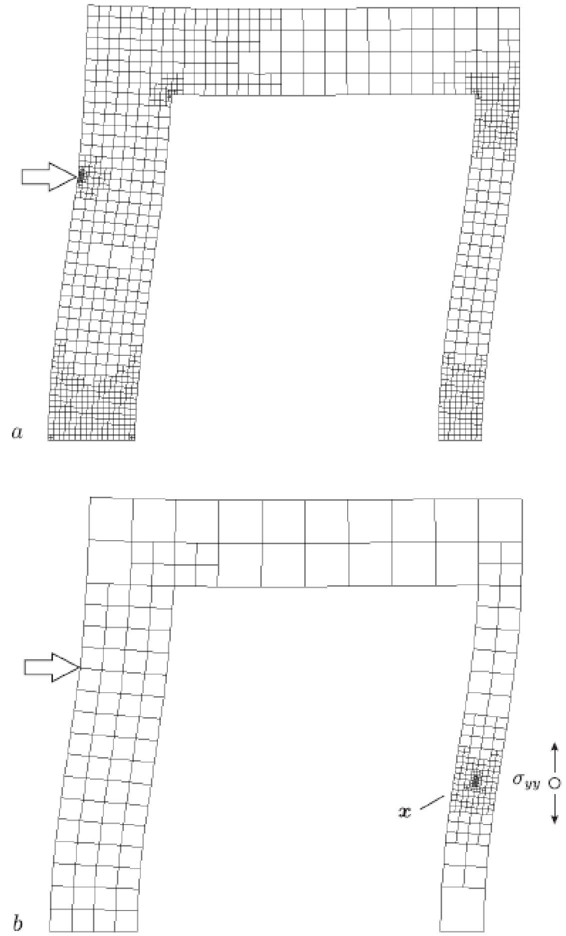


Fig. 1.107. Adaptive refinement **a)** standard refinement $\eta_p \leq \varepsilon_{TOL}$ **b)** goal oriented refinement $\eta_p \times \eta_G \leq \varepsilon_{TOL}$

Verifizierung vs. Validierung

- Als Verifizierung bezeichnet man den Prozess der Minimierung des numerischen Fehlers durch h- oder p-Adaption

„Are the equations solved correctly?“

- Als Validierung bezeichnet man die Überprüfung, ob überhaupt das richtige mathematische Modell gewählt wurde

„Are the right equations solved?“

Verifizierung vs. Validierung

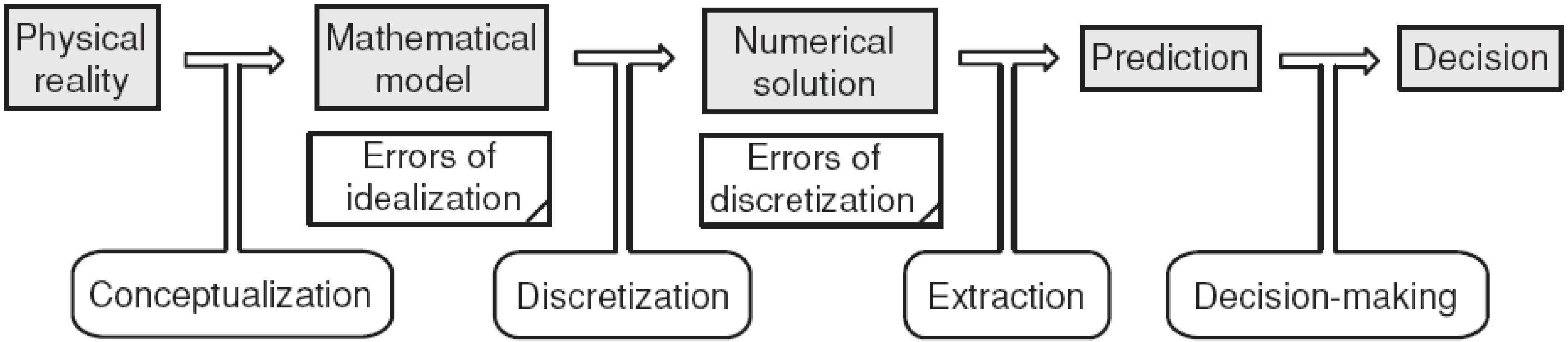


Figure 1.1 The main elements of numerical simulation and the associated errors.

Abbildungen auf S. 38/39 aus Babuska I, Szabo B: Introduction to Finite Element Analysis, Wiley, 2011

Verifizierung vs. Validierung

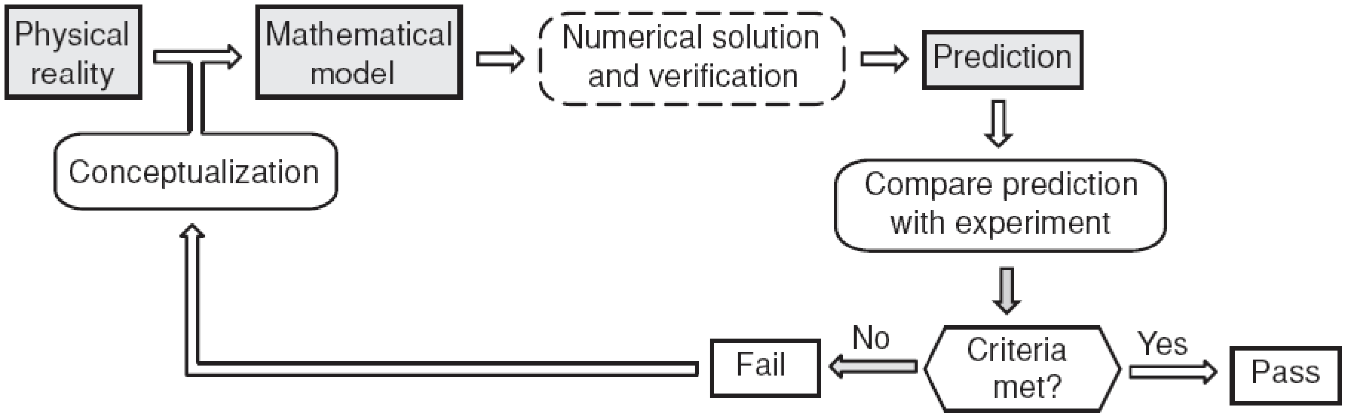


Figure 1.2 Validation.

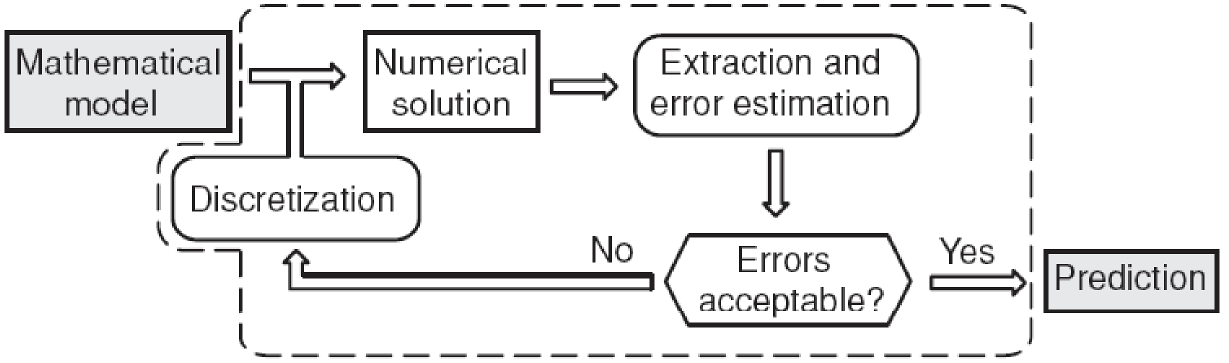


Figure 1.3 Verification of the numerical solution.

Spannungsnachweis vs. numerischer Fehler

Es bezeichne

S	Sicherheitsbeiwert
S_{erf}	erforderlicher Sicherheitsbeiwert
σ_{zul}	zulässige Spannung (meist aus Versuchen ermittelt)
σ	analytische Spannung
σ_{FE}	FE-Spannung

Spannungsnachweis: $$S := \frac{\sigma_{zul}}{\sigma} \geq S_{erf}$$

Spannungsnachweis vs. numerischer Fehler

Annahme: Der numerische Fehler liegt zwischen 0 und 100%:

$$\frac{\left|\sigma - \sigma_{FE}\right|}{\sigma} \leq \tau \quad \text{mit } 0 \leq \tau < 1$$

Umstellen der Formel ergibt:

$$\sigma \leq \frac{1}{1 - \tau}\sigma_{FE}$$

Einsetzen in Formel S.41 ergibt:

$$\boxed{\frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{FE}} \geq \frac{S_{erf}}{1 - \tau}}$$

$\Rightarrow$ Beträgt der numerische Fehler z.B. $\tau = 0{,}2$ (20%) ist die Sicherheit um den Faktor 1/0,8 = 1,25 (25%) zu erhöhen!