2 Kinetik des Massenpunktes

2.1 NEWTONsches Bewegungsgesetz (Kräftesatz): Die Bewegung eines Massenpunktes unter der Wirkung von Kräften wird beschrieben durch

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}}\,,$$

mit $\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i$ und dem *Impuls*

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}\,.$$

Da die Masse konstant ist, kann das Bewegungsgesetz auch in der Form

$$\boxed{m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}} \qquad \textit{Masse} \times \textit{Beschleunigung} = \textit{Kraft}$$

ausgedrückt werden. Hieraus folgt z.B. für kartesische Koordinaten

$$ma_x = \sum F_x\,, \qquad ma_y = \sum F_y\,, \qquad ma_z = \sum F_z\,.$$

Anmerkungen:

- Das Bewegungesetz gilt in dieser Form nur in einem Inertialsystem (= absolut ruhendes System, vgl. auch Kapitel 8),
- Körper endlicher Abmessungen können als Massenpunkte aufgefasst werden, sofern ihre Abmessungen keinen Einfluss auf die Bewegung haben.

2.2 Impulssatz: Zeitliche Integration des Bewegungsgesetzes ergibt

$$\boxed{m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\mathrm{d}\bar{t}} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \widehat{\boldsymbol{F}}}$$

mit dem *Kraftstoß* (*Antrieb*) $\widehat{\boldsymbol{F}} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\mathrm{d}\bar{t}$. Wirken keine Kräfte ($\boldsymbol{F} = 0$), so bleibt der Impuls erhalten:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \text{const}\,.$$

2.3 Drehimpulssatz (Momentensatz): Vektorielle Multiplikation des Bewegungsgesetzes mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ liefert

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}^{(0)}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}^{(0)}}\,,$$

mit $\boldsymbol{L}^{(0)} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ = Drehimpuls (Drall) bezüglich des festen Punktes 0,
$\boldsymbol{M}^{(0)} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ = Moment bezüglich des festen Punktes 0.

Wirkt kein Moment ($\boldsymbol{M}^{(0)} = 0$), so bleibt der Drehimpuls erhalten:

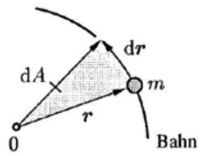
$$\boldsymbol{L}^{(0)} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \text{ const}\,.$$

Dann folgt mit

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

der *Flächensatz* (vgl. Seite 11)

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \text{const}\,.$$



2.4 Arbeitssatz: Wegintegration des Bewegungsgesetzes führt auf

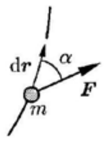
$$\boxed{\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{E_{k1} - E_{k0} = W}\,,$$

mit

kinetische Energie: $\quad E_k = \frac{1}{2}mv^2,$

Arbeit der Kraft $\boldsymbol{F}$: $\quad W = \int \mathrm{d}W = \int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},$

$\qquad \mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{F}|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\alpha.$



Anmerkungen:

- Kräfte, die senkrecht zum Weg stehen ($\alpha = \pi/2$), leisten keine Arbeit.
- Bei einer Drehbewegung gilt $\mathrm{d}W = \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$.

2.5 Energiesatz: Lassen sich die Kräfte gemäß

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\,\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z\right)$$

aus einem Potential E_p ableiten ($\widehat{=}$ *konservative Kräfte*), so ist die Arbeit wegunabhängig, d.h. durch die Potentialdifferenz gegeben:

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = E_{p0} - E_{p1}\,.$$

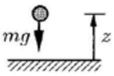
Damit folgt dann aus dem Arbeitssatz

$$\boxed{E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0} = \text{const}}\,.$$

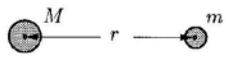
In Worten: *Für konservative Kräfte ist die Summe aus kinetischer Energie E_k und potentieller Energie E_p während der Bewegung konstant.*

2.6 Einige Potentiale

Gravitationspotential (nahe Erdoberfläche) $\quad E_p = mg\,z$

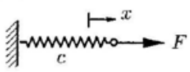


Gravitationspotential (allgemein) $\quad E_p = -f\,\frac{Mm}{r}$



Gravitationskonstante $\quad f = 6,673\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\,s^2}$

Federpotential $\quad E_p = \frac{1}{2}\,cx^2$



2.7 Leistung

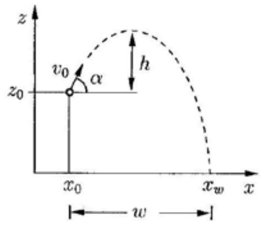
$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \qquad = \text{Leistung einer Kraft,}$$

$$P = \boldsymbol{M}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega} \qquad = \text{Leistung eines Momentes.}$$

2.8 Formeln zur Wurfbewegung

Bahnkurve (Wurfparabel):

$$z = z_0 - \frac{g}{2}\left(\frac{x - x_0}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + (x - x_0)\tan\alpha\,,$$



Wurfhöhe:

$$h = \frac{1}{2g}(v_0\sin\alpha)^2\,,$$

Wurfzeit:

$$t_w = \frac{v_0\sin\alpha}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gz_0}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right]\,,$$

Wurfweite:

$$w = v_0^2\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gz_0}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right]\,.$$

Sonderfall $z_0 = 0$:

$$t_w = \frac{2}{g}\,v_0\sin\alpha\,, \qquad w = \frac{1}{g}\,v_0^2\sin 2\alpha\,.$$