

Technische Mechanik III

Prof. Dr. rer. nat. Markus Scholle

21. Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Kinematik	7
1.1	Kinematik der Massenpunkte	7
1.1.1	Grundbegriffe	7
1.1.2	Kartesische Koordinaten	11
1.1.3	Polarkoordinaten	12
1.1.4	Zylinderkoordinaten	16
1.1.5	Kugelkoordinaten	18
1.1.6	Natürliche Koordinaten	20
1.2	Kinematik der starren Körper	25
1.2.1	Position und Orientierung	25
1.2.2	Geschwindigkeiten	26
1.2.3	Beschleunigungen	27
1.2.4	Kinematik eines kleinen Volumenelementes	27
1.2.5	Momentanpol einer Bewegung	28
2	Dynamik des Massenpunktes	31
2.1	Die Newtonschen Axiome	31
2.1.1	Galileisches Trägheitsprinzip (Erstes Newtonsches Axiom)	31
2.1.2	Newtonsches Bewegungsgesetz (Zweites Newtonsches Axiom)	31
2.1.3	Reaktionsprinzip (Drittes Newtonsches Axiom)	31
2.2	Kräfte	32

2.2.1	Eingeprägte Kräfte und Zwangskräfte	32
2.2.2	Schwerkraft	32
2.2.3	Federkräfte	33
2.2.4	Reibungskräfte	33
2.2.5	Lorentz-Kraft	35
2.3	Beispiele für Bewegungen	35
2.3.1	Schwerependel	35
2.3.2	Gebremster Fall eines Körpers	37
2.4	Massenpunktsysteme	41
2.4.1	Massenpunktsysteme	41
2.4.2	Impulssatz	43
2.4.3	Schwerpunktsatz	46
2.4.4	Drehimpulssatz (Drallsatz)	47
2.4.5	Energiesatz	50
3	Lagrangesche Mechanik	59
3.1	Das Fermatsche Prinzip	59
3.1.1	Der Rettungsschwimmer	59
3.1.2	Das Feuerwehrauto	61
3.1.3	Fermatsches Prinzip	62
3.2	Hamiltonsches Prinzip	62
3.3	Euler-Lagrange-Gleichungen	63
3.4	Beispiele	66
3.4.1	Masse-Feder-Schwinger	66
3.5	Geführte Bewegungen	68
3.5.1	Kinematik der Führung	68
3.5.2	Dynamik mit Führung	69
3.6	Ritzsches Verfahren	72
3.6.1	Frequenzverschiebung beim Schwerependel	73

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	5
4 Dynamik starrer Körper	77
4.1 Impuls, Drehimpuls und Energie	77
4.1.1 Impuls	77
4.1.2 Drehimpuls	78
4.1.3 Kinetische Energie	79
4.1.4 Potentielle Energie	81
4.2 Trägheitsmomente	82
4.3 Bewegungsgleichungen	86
4.3.1 Allgemeine Bewegung	86
4.3.2 Mehrachsige Rotation ohne äußere Momente	87
4.3.3 Einachsige Rotation	87
A Ausgewählte Differentialgleichungen	91
A.1 Ungedämpfte harmonische Schwingung	91
A.2 Fallbewegung unter Stokes–Reibung	93
B Mathematische Herleitungen	97
B.1 Zur Bewegung des starren Körpers	97
B.1.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen	97

Kapitel 1

Kinematik

Ziel der Kinematik ist die Beschreibung der zeitlichen Änderung der Konfiguration eines mechanischen Systems. Dabei kann es sich gleichsam um die Bewegung eines einzelnen Massepunktes, die Bewegung vieler Massenpunkte, die Änderung der Lage und Orientierung eines starren Körpers, die Deformation eines Festkörpers oder gar um die Strömung einer Flüssigkeit handeln. Abhängig von der Art des mechanischen Systems sind unterschiedliche mathematische Mittel einzusetzen, um Konfigurationsänderungen des Systems zu erfassen. Für die *Technische Mechanik III* sind der einzelne Massenpunkt, das System von Massenpunkten und der starre Körper Gegenstand der Betrachtung.

Demgegenüber ist es nicht die Aufgabe der Kinematik, die den Konfigurationsänderungen zugrunde liegenden Ursachen für zu erklären. Dies ist vielmehr die Aufgabe der *Dynamik*.

1.1 Kinematik der Massenpunkte

1.1.1 Grundbegriffe

Unter einem Massenpunkt versteht man einen Körper, dessen Ausdehnung sehr klein ist gegenüber der Länge seiner Bahn, die er während seiner Bewegung zurücklegt. Dann ist die Vorstellung gerechtfertigt, die Masse des Körpers sei im Wesentlichen in einem einzigen Punkt konzentriert. Ob die Idealvorstellung des Massenpunkts gerechtfertigt ist, hängt also nicht an der absoluten Größe des Körpers. So würde intuitiv die Erde als großen und ein Streichholz als kleinen Körper ansehen. Betrachtet man aber die Bahn der

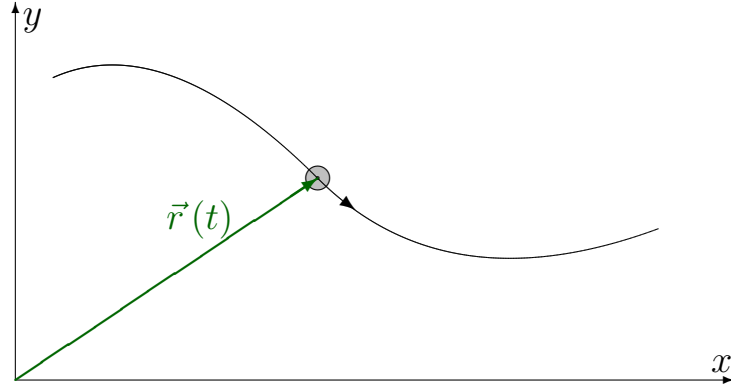


Abbildung 1.1: Ortsvektor und Bahnkurve eines Massenpunktes.

Erde um die Sonne, so ist der Bahnradius ($1 \text{ AE} \approx 150000000 \text{ km}$) wesentlich größer als der Erdradius ($\approx 6400 \text{ km}$), so dass in diesem Zusammenhang die Erde durchaus als Massenpunkt behandelt werden kann. Dagegen ist bei einem Streichholz, welches senkrecht auf eine Unterlage gestellt auf dieser umkippt, die Länge der Bahn mit der Größe des Objekts vergleichbar. Die Behandlung als Massenpunkt wäre hier unzulässig.

Um die momentane Position eines Massenpunktes zu einem gegebenen Zeitpunkt t festzulegen, bedarf es im dreidimensionalen Raum eines Ortsvektors \vec{r} , an dessen Spitze sich, vom Koordinatenursprung aus gesehen, der Massenpunkt befindet. Da sich die Position des Massenpunktes mit fortlaufender Zeit ändert, ist \vec{r} eine Funktion von t , also $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Unter der *Bahn* des Massenpunktes versteht man die Gesamtheit aller Positionen $\vec{r}(t)$, die dieser mit fortlaufender Zeit durchläuft, siehe Abb. 1.1.

Unter der *Geschwindigkeit* $\vec{v}(t)$ versteht man die Änderung der Position pro Zeiteinheit. In Bild 1.2 ist dargestellt, wie diese Größe zu konstruieren ist. Offenbar ist $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ der Vektor, der von der aktuellen Position des Massenpunktes zum Zeitpunkt t aus zu dessen künftiger Position zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ zeigt. Um auf die Geschwindigkeit zu kommen, ist dieser noch durch die verstrichene Zeit $t + \Delta t$ zu dividieren, wie in Abb. 1.2 dargestellt. Der so konstruierte Vektor gibt die mittlere Geschwindigkeit in dem betrachteten Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ wieder. Die *momentane* Geschwindigkeit ergibt sich, wenn man nun noch den Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$ bildet. Somit erhält man die Geschwindigkeit durch Differentiation des Ortsvektors nach der Zeit, also

$$\vec{v}(t) := \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t) , \quad (1.1)$$

wobei hier und im folgenden die Ableitung nach der Zeit stets mit einem

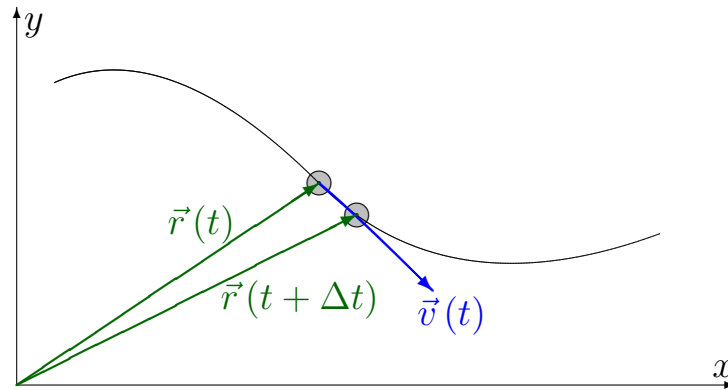


Abbildung 1.2: Zur Berechnung der Geschwindigkeit eines Massenpunktes.

Punkt gekennzeichnet wird. Die Geschwindigkeit ist per Definition ein Vektor. Dessen Richtung liegt stets tangential zur Bahnkurve und kennzeichnet somit die aktuelle Bewegungsrichtung. Dessen Betrag

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{\vec{r}}^2} \quad (1.2)$$

hingegen heißt *Bahngeschwindigkeit*, manchmal auch Tempo oder Schnelligkeit genannt und kennzeichnet die pro Zeiteinheit zurückgelegte Bogenlänge entlang der Bahnkurve. Betrag und Richtung von \vec{v} charakterisieren zusammen den aktuellen Bewegungszustand des Massenpunktes.

Von großem Interesse, vor allem für die Dynamik, ist die zeitliche Änderung des Bewegungszustandes. Diese als *Beschleunigung* bezeichnete Größe erhält man, wie in Abb. 1.3 dargestellt, durch Bildung des Differenzvektors $\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ der Geschwindigkeiten zu zwei nahe beieinander liegenden Zeitpunkten und anschließender Division durch die verstrichene Zeit Δt , also

$$\frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}.$$

Dies liefert die mittlere Beschleunigung im Zeitintervall Δt . Die momentane Beschleunigung resultiert durch Bildung des Grenzwerts $\Delta t \rightarrow 0$ und führt so auf eine Differentiation nach der Zeit, also

$$\vec{a}(t) := \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t). \quad (1.3)$$

Im Gegensatz zur Geschwindigkeit, welche in tangentialer Richtung zur Bahnkurve orientiert ist, unterliegt die Richtung der Beschleunigung im Allgemeinen keinen Einschränkungen und kann somit je nach Art der Bewegung in eine beliebige Richtung zeigen.

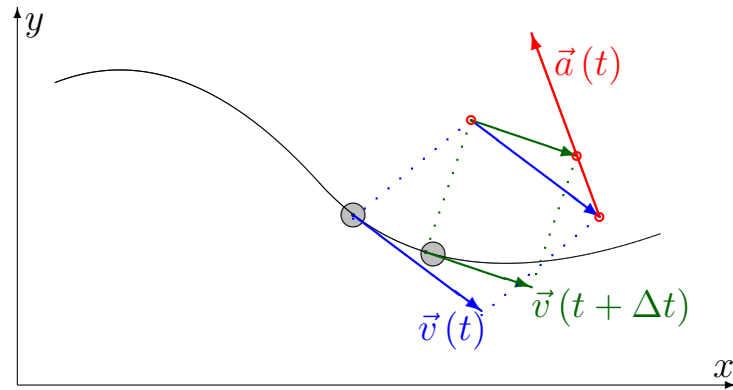


Abbildung 1.3: Graphische Veranschaulichung zur Berechnung der Beschleunigung eines Massenpunktes. Zur besseren Übersichtlichkeit werden die beiden Geschwindigkeitsvektoren zu einem Punkt abseits der Bahnkurve parallelverschoben, um dort den Beschleunigungsvektor zu konstruieren.

Von Bedeutung ist auch die Zeitableitung der Bahngeschwindigkeit

$$a_{\text{Bahn}} := \frac{d}{dt} |\vec{v}(t)| = \frac{d}{dt} |\dot{\vec{r}}(t)| ,$$

die sog. *Bahnbeschleunigung*. Diese skalare Größe ist im allgemeinen nicht mit dem Betrag der Beschleunigung identisch, sondern hängt mit der vektoriellen Beschleunigung wie folgt zusammen:

$$a_{\text{Bahn}} = \frac{d}{dt} |\vec{v}| = \frac{d}{dt} \sqrt{\vec{v}^2} = \frac{2\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{2\sqrt{\vec{v}^2}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \vec{a}$$

Da nun $\vec{v}/|\vec{v}|$ der Richtungsvektor der Tangenten an die Bahnkurve ist, stellt sich somit heraus, dass a_{Bahn} die Tangentialkomponente der Beschleunigung ist. Sie wird deshalb auch *Tangentialbeschleunigung* genannt und gibt Auskunft darüber, ob der Massenpunkt auf seiner Bahn schneller oder langsamer wird. Im Gegensatz dazu steht die stets senkrecht zur Bahntangenten gerichtete *Normalbeschleunigung*

$$\vec{a}_{\perp} := \vec{a} - a_{\text{Bahn}} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

für eine reine Richtungsänderung der Bewegung.

Die dritte Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit, also

$$\vec{j} := \frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{\vec{a}} = \ddot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

heißt Ruck¹. Dieser wird allerdings nur recht selten betrachtet, da die Bewe-

¹Quelle: Wikipedia

gungsgleichungen der Dynamik Ableitungen des Ortsvektors bis zur zweiten Ordnung enthalten.

Obige Definitionen und Aussagen gelten allgemein, d.h. für jedes beliebige Koordinatensystem. Die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems sollte stets individuell im Hinblick auf die jeweilige Problemstellung erfolgen. Die vier am häufigsten verwendeten Koordinatensysteme werden im folgenden behandelt, nachdem zuvor eine allgemeine Betrachtung vorgenommen worden ist.

1.1.2 Kartesische Koordinaten

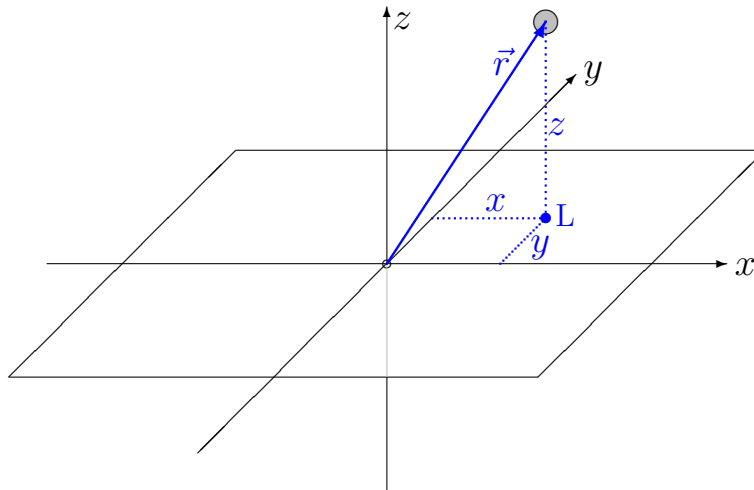


Abbildung 1.4: Kartesische Koordinaten

Bei der Beschreibung eines Systems in Kartesischen Koordinaten werden zunächst drei zueinander senkrechte Richtungen im Raum als x -, y - und z -Richtung ausgezeichnet, wie in Abb. 1.4 dargestellt. Fällt man von der aktuellen Position \vec{r} des zu betrachtenden Massenpunktes das Lot auf die xy -Ebene, so ergibt sich aus dessen Länge die Koordinate z . Vom Lotpunkt L aus kann wiederum das Lot auf die x - bzw. y -Achse gefällt werden, um so die Koordinaten y und x zu gewinnen. Somit wird der Ortsvektor \vec{r} durch die drei Koordinaten x, y und z als

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (1.4)$$

dargestellt, wobei \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z die in die drei Koordinatenrichtungen wei-

senden Einheitsvektoren sind, also

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Bildung der Zeitableitung ergibt sich unter Beachtung der zeitlichen Unveränderlichkeit der Einheitsvektoren die Geschwindigkeit des Massenpunktes als

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z, \quad (1.5)$$

so dass jede Komponente des Geschwindigkeitsvektors aus der Zeitableitung der jeweiligen Koordinaten resultiert. Analog ermittelt sich die Beschleunigung des Massenpunktes als

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z. \quad (1.6)$$

Die Bahngeschwindigkeit ergibt sich als

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

und die Bahnbeschleunigung lautet

$$a_{\text{Bahn}} = \frac{d}{dt} |\vec{v}| = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

1.1.3 Polarkoordinaten

Bei ebenen, also zweidimensionalen Bewegungen, kann die aktuelle Position des Massenpunktes auch durch den Abstand r vom Ursprung und durch die Richtung des Ortsvektors, gegeben durch dessen Winkel φ zur x -Achse, charakterisiert werden, vergl. Abb. 1.5a.

Um nun einen beliebigen Vektor in dem Koordinatensystem darzustellen, sind zwei Einheitsvektoren erforderlich. Hierzu verwendet man den vom Ursprung zum Massenpunkt weisenden Einheitsvektor \vec{e}_r und den dazu senkrecht stehenden Einheitsvektor \vec{e}_φ , vergl. Abb. 1.5b. Drückt man den Vektor \vec{e}_r durch die im vorigen Abschnitt eingeführten Kartesischen Einheitsvektoren aus, so gelangt man zur Linearkombination

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \quad (1.7)$$

was durch die Beziehungen $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \cos \varphi$ und $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = \sin \varphi$ begründet ist. Der Vektor \vec{e}_φ lässt sich am einfachsten dadurch konstruieren, dass er mit der

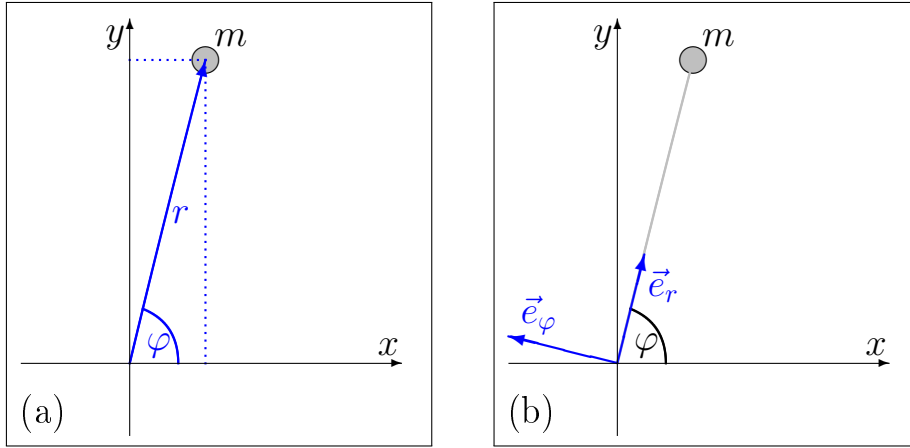


Abbildung 1.5: Polarkoordinaten (a) und zugeordnete Einheitsvektoren (b).

x -Achse einen um 90° größeren Winkel einschließt als \vec{e}_r . Somit muss man in (1.7) lediglich φ durch $\varphi + 90^\circ$ ersetzen um

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \quad (1.8)$$

zu erhalten. Beide Vektoren \vec{e}_r und \vec{e}_φ bilden eine *orthonormale Basis*, d.h. sie erfüllen die Identitäten

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r &= 1, \\ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi &= 1, \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi &= 0, \end{aligned}$$

was sich später als nützlich erweisen wird. Insbesondere lassen sich alle Vektoren als Linearkombinationen dieser beiden Basisvektoren darstellen. Am einfachsten darstellbar ist der Ortsvektor, welcher laut Abb. 1.7 als

$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

zu schreiben ist. Nun ist durch Zeitableitung die Geschwindigkeit gemäß

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r \quad (1.9)$$

zu berechnen. Dabei ist unbedingt zu beachten, dass der Basisvektor $\dot{\vec{e}}_r$, der ja immer dem Massenpunkt folgt (vergl. Abb. 1.7b), zeitlich veränderlich ist. Durch Einsetzen dessen Definition (1.7) und Berücksichtigung von (1.17) folgt

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d}{dt} (\cos \varphi) \vec{e}_x + \frac{d}{dt} (\sin \varphi) \vec{e}_y = \dot{\varphi} [-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y] = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (1.10)$$

und somit, nach Einsetzen in (1.11)

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (1.11)$$

für die Geschwindigkeit. Die beiden Komponenten der Geschwindigkeit werden oft auch als *Radialgeschwindigkeit* $v_r = \dot{r}$ und *Azimutalgeschwindigkeit* oder Umfangsgeschwindigkeit $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ bezeichnet. Die Größe $\omega = \dot{\varphi}$ heißt auch *Winkelgeschwindigkeit*.

Als Bahngeschwindigkeit ergibt sich dann

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{v_r^2 + r^2\omega^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Nochmalige Zeitableitung von (1.11) liefert die Beschleunigung als

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi, \quad (1.12)$$

wobei wiederum $\dot{\vec{e}}_r$ gemäß (1.13) zu ersetzen und zusätzlich

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d}{dt}(-\sin\varphi)\vec{e}_x + \frac{d}{dt}(\cos\varphi)\vec{e}_y = -\dot{\varphi}[\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y] = -\dot{\varphi}\vec{e}_r \quad (1.13)$$

zu berücksichtigen ist, um die Beschleunigung wie gefordert als Linearkombination

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = [\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2]\vec{e}_r + [r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}]\vec{e}_\varphi, \quad (1.14)$$

der Einheitsvektoren \vec{e}_r und \vec{e}_φ schreiben zu können. Die hier vorkommenden Terme tragen ebenfalls eigene Bezeichnungen, nämlich

- *Radialbeschleunigung* \ddot{r} = Beschleunigung, die allein auf der Änderung des Abstands vom Ursprung beruht,
- *Zentripetalbeschleunigung* $-r\dot{\varphi}^2 = -r\omega^2$ = zum Ursprung hin gerichtete Beschleunigung, die auf der Bahnkrümmung beruht,
- *Coriolis-Beschleunigung* $2\dot{r}\dot{\varphi} = 2\dot{r}\omega$ = Beschleunigung, die auf das Zusammenwirken von Radial- und Azimutalbewegung zurückzuführen ist,
- *Euler-Beschleunigung* $r\ddot{\varphi} = r\dot{\omega}$ = allein auf der Änderung der Winkelgeschwindigkeit basierende Beschleunigung.

Die Bahnbeschleunigung lautet schließlich

$$a_{\text{Bahn}} = \frac{d}{dt}|\vec{v}| = \frac{\dot{r}\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}}.$$

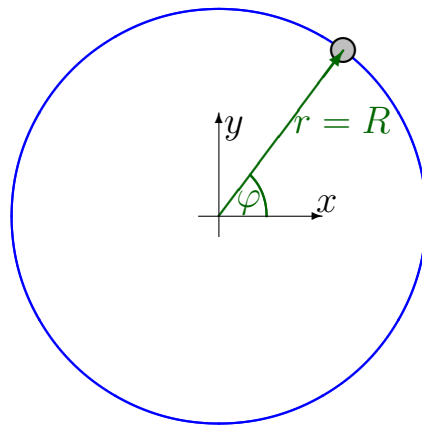


Abbildung 1.6: Kreisbahn.

Beispiel: Gleichförmige Kreisbewegung

Eine Kreisbewegung zeichnet sich, sofern man wie in Abb. 1.6 den Kreismittelpunkt als Koordinatenursprung wählt, durch einen konstanten Abstand $r = R$ vom Koordinatenursprung aus. Daher erweisen sich Polarkoordinaten für die Beschreibung einer solche Bewegung als besonders sinnvoll, da sich diese in der Form

$$\begin{aligned} r &= R = \text{const} \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned}$$

darstellen lässt mit dem Azimutalwinkel φ als einzige Variable. Im Gegensatz dazu lautet die Beschreibung in Kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi(t) \\ y &= R \sin \varphi(t) \end{aligned}$$

mit zwei Variablen. Obige Form stellt eine allgemeine Kreisbewegung dar. Unter einer *gleichförmigen Kreisbewegung* versteht man eine solche, bei welcher der Azimutalwinkel linear mit der Zeit zunimmt, also

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t$$

gilt. In diesem Fall berechnet sich die Geschwindigkeit durch Einsetzen in Gl. (1.11) als

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \omega_0 R \vec{e}_\varphi,$$

woraus sich eine konstante Bahngeschwindigkeit

$$|\vec{v}| = \omega_0 R$$

ergibt. Aus (1.14) resultiert die Beschleunigung als

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = [\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2] \vec{e}_r + [r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}] \vec{e}_\varphi = -\omega_0^2 R \vec{e}_r.$$

1.1.4 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten gelten als die natürliche Erweiterung der Polarkoordinaten für räumliche Bewegungen.

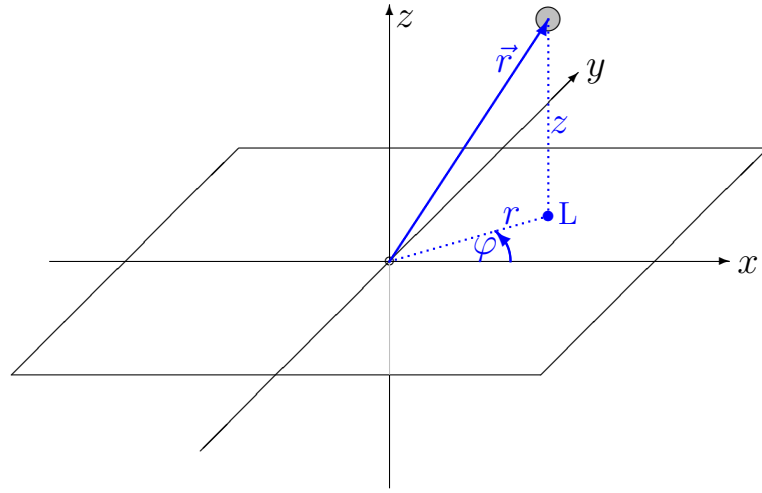


Abbildung 1.7: Zylinderkoordinaten

Im Gegensatz zu den Kartesischen Koordinaten, bei welchen die Position eines Punktes durch drei Längenangaben bestimmt wird, benutzt man bei Zylinderkoordinaten zwei Längen und einen Winkel. Gemäß Abb. 1.7 wird hierbei zunächst genau im Kartesischen Fall die z -Koordinate durch Fällen des Lots vom Massenpunkt auf die xy -Ebene festgelegt. Die Position des Lotpunktes in der xy -Ebene kann dann wiederum in Polarkoordinaten r und φ angegeben werden.

Aufgrund dieser Festsetzung kann der auf den Massenpunkt m weisende Ortsvektor durch

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \quad (1.15)$$

dargestellt werden, wobei die beiden Einheitsvektoren \vec{e}_r und \vec{e}_z wie bisher definiert sind. Für einen beliebigen Vektor \vec{u} ergibt sich demgegenüber die Darstellung

$$\vec{u} = u_r\vec{e}_r + u_\varphi\vec{e}_\varphi + u_z\vec{e}_z \quad (1.16)$$

in allen zueinander senkrechten Raumrichtungen.

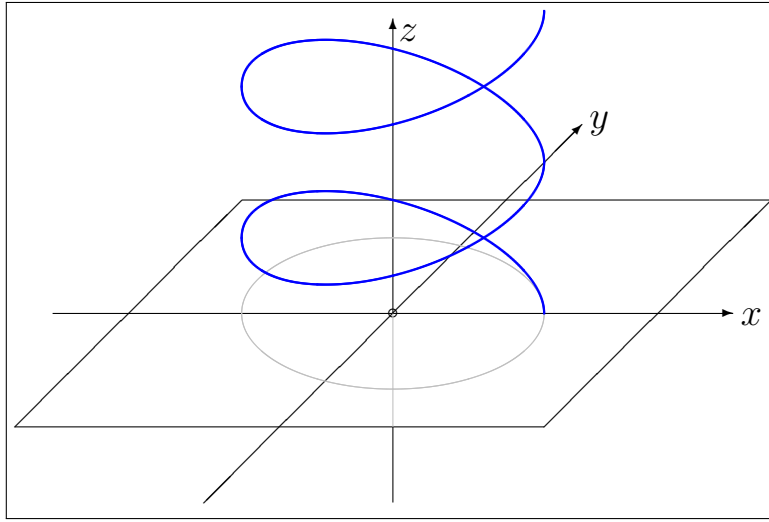


Abbildung 1.8: Schraubenbahn.

Für die Geschwindigkeit eines Massenpunktes gilt dann die Formel

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

und für die Beschleunigung dementsprechend

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = [\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2]\vec{e}_r + [r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}]\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Beispiel: Gleichförmige Schraubenbewegung

Eine gleichförmige Schraubenbewegung resultiert aus der Überlagerung einer gleichförmigen Kreisbewegung (Radius R) in der xy -Ebene,

$$\begin{aligned} r &= R, \\ \varphi &= \omega t, \end{aligned}$$

mit einer gleichförmigen linearen Bewegung in z -Richtung, also

$$z = v_0 t.$$

Die Bahnkurve dieser Bewegung ist in Abb. 1.8 skizziert. Als Geschwindigkeit berechnen wir

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \omega R \vec{e}_\varphi + v_0 \vec{e}_z,$$

während die Bahngeschwindigkeit den konstanten Wert

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\omega R)^2 + v_0^2}$$

annimmt. Für die Beschleunigung ergibt sich

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = -\omega^2 R \vec{e}_r$$

wie bei der gleichförmigen Kreisbewegung.

1.1.5 Kugelkoordinaten

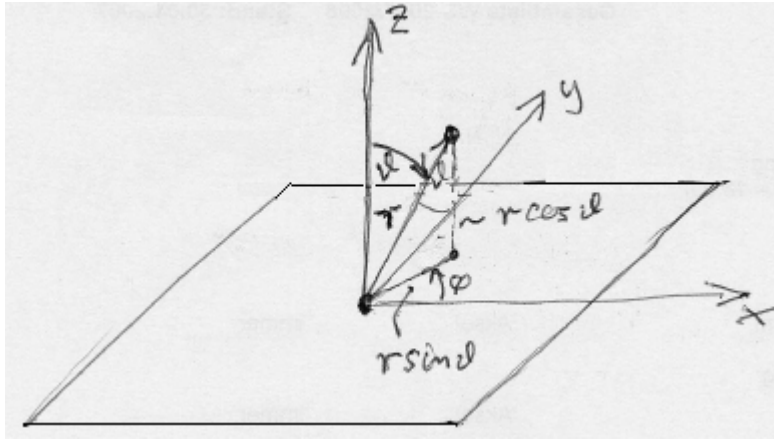


Abbildung 1.9: Kugelkoordinaten

Bei der Verwendung von Kugelkoordinaten wird die Position eines Raumpunktes durch eine Längen- und zwei Winkelangaben beschrieben. Zunächst bezeichnet r den Abstand des Raumpunktes vom Koordinatenursprung. Unter ϑ ist der Winkel zwischen der z -Achse und dem auf den Raumpunkt weisenden Ortsvektor zu verstehen. Der Winkel φ ist schließlich wie bei den im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Zylinderkoordinaten definiert, also als der Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors auf die xy -Ebene und der x -Achse. Durch Angabe von r , ϑ und φ ist somit jeder Punkt im Raum eindeutig festgelegt.

Die drei zugehörigen Einheitsvektoren \vec{e}_r , \vec{e}_ϑ und \vec{e}_φ werden wiederum so festgelegt, dass jeder der drei Vektoren in die Richtung weist, in der die jeweilige Koordinate zunimmt. Da insbesondere die Winkelkoordinate bei Polar-, Zylinder und Kugelkoordinaten gleich ist, ergibt sich auch ein identischer Einheitsvektor \vec{e}_φ , welcher durch die Gleichung (1.17) definiert ist, also

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y. \quad (1.17)$$

Demgegenüber ist der Einheitsvektor \vec{e}_r , welcher genau in Richtung des zu betrachtenden Raumpunktes weist, verschieden von dem gleichnamigen Vektor (1.7) für Polarkoordinaten, da letzterer nicht auf den Raumpunkt selbst

weist, sondern auf dessen Lotpunkt. Wenn man allerdings um die Länge $r \sin \vartheta$ in die durch (1.7) definierte Richtung geht und anschließend um $r \cos \vartheta$ in die z -Richtung, so erreicht man die Position des Massenpunktes, also

$$\vec{r} = r \sin \vartheta [\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y] + r \cos \vartheta \vec{e}_z = r [\sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z] . \quad (1.18)$$

Somit kann man den gesuchten Einheitsvektor, welcher in Richtung des Massenpunktes zeigt, als

$$\vec{e}_r = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z \quad (1.19)$$

identifizieren. Damit lässt sich (1.20) als

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad (1.20)$$

schreiben. Die beiden Einheitsvektoren \vec{e}_φ und \vec{e}_r sind gemäß

$$\begin{aligned} \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_r &= [-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y] \cdot [\sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z] \\ &= -\sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi = 0 \end{aligned}$$

zueinander orthogonal. Um weitere Vektoren darstellen zu können, wird neben den bereits definierten Einheitsvektoren \vec{e}_φ und \vec{e}_r der erforderliche dritte Einheitsvektor über das Kreuzprodukt als

$$\begin{aligned} \vec{e}_\vartheta &= \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r \\ &= [-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y] \times [\sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z] \\ &= \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \vartheta [\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi] \vec{e}_z \\ &= \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \vartheta \vec{e}_z \end{aligned}$$

definiert. Dieser ist per Definition orthogonal sowohl zu \vec{e}_φ als auch zu \vec{e}_r und ist vom Betrag $|\vec{e}_\vartheta| = |\vec{e}_\varphi| |\vec{e}_r| \sin(90^\circ) = 1$. Somit bilden die drei Einheitsvektoren \vec{e}_r , \vec{e}_ϑ und \vec{e}_φ eine orthonormale Basis, mit der beliebige Vektoren dargestellt werden können. Speziell für die Geschwindigkeit gilt

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r \quad (1.21)$$

Für die Zeitableitung von \vec{e}_r gilt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \left[\cos \vartheta \dot{\vartheta} \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi \dot{\varphi} \right] \vec{e}_x \\ &\quad + \left[\cos \vartheta \dot{\vartheta} \sin \varphi + \sin \vartheta \cos \varphi \dot{\varphi} \right] \vec{e}_y \\ &\quad - \sin \vartheta \dot{\vartheta} \vec{e}_z \\ &= \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi , \end{aligned} \quad (1.22)$$

und somit

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \quad (1.23)$$

Für die die Beschleunigung gilt dementsprechend zunächst

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \right) \\ &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\ddot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\dot{\vartheta}\dot{\vec{e}}_\vartheta \\ &\quad + \dot{r}\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\sin\vartheta\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nun müssen noch die Zeitableitungen der Einheitsvektoren durch Linearkombinationen der Einheitsvektoren ausgedrückt werden, wie dies für $\dot{\vec{e}}_r$ in (1.25) bereits geschehen ist. Dies ist zu ergänzen um

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_\vartheta &= \left[-\sin\vartheta\dot{\vartheta}\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi\dot{\varphi} \right] \vec{e}_x \\ &\quad + \left[-\sin\vartheta\dot{\vartheta}\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi\dot{\varphi} \right] \vec{e}_y \\ &\quad - \cos\vartheta\dot{\vec{e}}_z \\ &= -\dot{\vartheta}\vec{e}_r + \cos\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (1.25)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi} [\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y] \\ &= -\dot{\varphi} [\sin\vartheta\vec{e}_r + \cos\vartheta\vec{e}_\vartheta] \\ &= -\dot{\varphi}\sin\vartheta\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\vartheta\vec{e}_\vartheta, \end{aligned} \quad (1.26)$$

um schließlich zur gewünschten Form

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \right) \\ &= \left[\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 \right] \vec{e}_r \\ &\quad + \left[2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 \right] \vec{e}_\vartheta \\ &\quad + \left[2\dot{r}\sin\vartheta\dot{\varphi} + 2r\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + r\sin\vartheta\ddot{\varphi} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (1.27)$$

zu gelangen.

1.1.6 Natürliche Koordinaten

Die in den vorangegangenen Abschnitten gezeigten Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten können sich bei der Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes trotz größerer Komplexität des resultierenden Geschwindigkeits-

und Beschleunigungsvektors als vorteilhaft gegenüber den vermeindlich simplen Kartesischen Koordinaten erweisen, wenn diese der Bewegung besser angepasst sind. Eine optimale Anpassung ist gegeben, wenn eine Koordinatenlinie mit der Bahn des zu betrachtenden Massenpunktes übereinstimmt. In diesem Fall genügt zu Festlegung der aktuellen Position des Massenpunktes die Angabe einer Koordinate, nämlich der bis zum aktuellen Zeitpunkt t zurückgelegten Bogenlänge s , also

$$\vec{r} = \vec{r}(s) .$$

Dabei ist die Bahnkurve $\vec{r} = \vec{r}(s)$ allerdings in der Regel a priori unbekannt, es sei denn, man betrachtet z.B. eine auf einer Schiene geführte Bewegung. Abhängig von der aktuellen Position des Massenpunktes definieren wir drei zueinander orthogonale Einheitsvektoren, das sog. *begleitende Dreibein*, wie folgt: Als Tangentenvektor wird

$$\vec{t}(s) := \frac{d\vec{r}}{ds}$$

definiert. Dieser weist per Definition

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s}$$

stets in die aktuelle Bewegungsrichtung und hat wegen die Länge $|\vec{t}| = 1$, da im Limes $\Delta s \rightarrow 0$ kein Unterschied mehr besteht zwischen der Bogenlänge Δs zwischen zwei Positionen und der Länge der Sekante $\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)$.

Da folglich $\vec{t}(s)^2 = 1$ gilt, folgt weiterhin

$$0 = \frac{d}{ds} \vec{t}^2 = 2\vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} ,$$

und daraus wiederum, dass die Ableitung von \vec{t} nach s einen zu \vec{t} senkrechten Vektor liefert. Dessen Betrag ist die Krümmung der Bahnkurve an der gegenwärtigen Position des Massenpunktes,

$$\kappa := \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| , \quad (1.28)$$

während dessen Richtung den zweiten Basisvektor definiert,

$$\vec{n} := \frac{1}{\kappa} \frac{d\vec{t}}{ds} , \quad (1.29)$$

den sogenannten *Normalenvektor*. Man beachte, dass obige Definition eine nichtverschwindende Krümmung voraussetzt. Demgegenüber ist die Richtung der Normalen bei einer geradlinigen Bahn nicht eindeutig. In einem solchen Falle allerdings würde man ohnehin keine natürliche Koordinaten verwenden sondern Kartesische.

Der dritte Basisvektor ist wiederum durch das Kreuzprodukt der anderen beiden Basisvektoren als

$$\vec{b} := \vec{t} \times \vec{n}$$

gegeben und wird als *Binormalenvektor* bezeichnet. Somit kann jeder beliebige Vektor als Linearkombination der drei Einheitsvektoren \vec{t} , \vec{n} und \vec{b} dargestellt werden. Speziell für die Geschwindigkeit gilt

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \vec{t},$$

so dass \dot{s} bis auf das Vorzeichen der Betrag der Geschwindigkeit, also die Bahngeschwindigkeit ist. Die Beschleunigung berechnet sich als

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt} (\dot{s} \vec{t}) = \ddot{s} \vec{t} + \dot{s} \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \vec{t} + \kappa \dot{s}^2 \vec{n}$$

und wird so auf ganz natürliche Weise aufgeteilt in eine Tangentialbeschleunigung \ddot{s} , welche der zeitlichen Änderung der Bahngeschwindigkeit entspricht und eine Normalbeschleunigung $\kappa \dot{s}^2$, durch welche allein die zeitliche Änderung der Bewegungsrichtung erfasst wird. Ein beliebiger Vektor \vec{u} lässt sich wiederum als Linearkombination aller drei Basisvektoren darstellen, also

$$\vec{u} = u_t \vec{t} + u_n \vec{n} + u_b \vec{b}. \quad (1.30)$$

Um dessen Zeitableitung zu bestimmen, benötigen wir zunächst die Ableitungen aller drei Basisvektoren nach der Bogenlänge s . Aus (1.29) wissen wir bereits, dass

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n} \quad (1.31)$$

gilt. Für die anderen beiden Basisvektoren gewinnt man die entsprechenden Beziehungen, in dem man die Orthogonalitätsbeziehungen und die Normierungsbedingungen nach der Bogenlänge s ableitet. Speziell durch Ableiten von $\vec{n}^2 = 1$ und $\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$ gewinnt man

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} &= 0 \\ \vec{t} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} &= -\frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{n} = -\kappa \end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dass $d\vec{n}/ds$ als Linearkombination

$$\frac{d}{ds}\vec{n} = -\kappa\vec{t} + \gamma\vec{b} \quad (1.32)$$

darzustellen ist, wobei man die Torsion γ durch Bildung des Skalarproduktes obiger Gleichung mit \vec{b}

$$\gamma := \vec{b} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds}$$

gewinnt. Schließlich ergibt sich aus der Definition des Binormalenvektors dessen Ableitung nach der Bogenlänge unmittelbar als

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\vec{b} &= \frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} = \kappa\vec{n} \times \vec{n} + \vec{t} \times [-\kappa\vec{t} + \gamma\vec{b}] \\ &= \gamma\vec{t} \times \vec{b} = -\gamma\vec{n} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Die drei Identitäten (1.31, 1.32, 1.33) heißen *Frenetsche Formeln*. Mit deren Hilfe kann man die Zeitableitung des gemäß (1.30) gegebenen Vektors schließlich als

$$\dot{\vec{u}} = [\dot{u}_t - \kappa u_n \dot{s}] \vec{t} + [\dot{u}_n + (\kappa u_t + \gamma u_b) \dot{s}] \vec{n} + [\dot{u}_b + \gamma u_n \dot{s}] \vec{b}$$

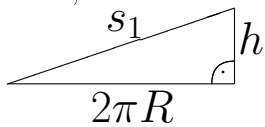
ermitteln.

Natürliche Koordinaten erweisen sich vor allem im Zusammenhang mit geführten Bewegungen als nützlich. Bei freien Bewegungen besteht ein gewisser Nachteil darin, dass die Bahnkurve der Bewegung a priori unbekannt ist und somit auch die Vektoren \vec{t} , \vec{n} und \vec{b} sowie die Krümmung κ und die Torsion γ .

Beispiel: Beschleunigte Schraubenbewegung

Wir betrachten erneut die Bewegung auf einer Schraubenbahn aus Abschnitt 1.1.4 und formulieren diese in natürlichen Koordinaten. Dabei wird allerdings der verallgemeinerte Fall einer tangential beschleunigten Bewegung zugelassen.

Die Geometrie der Schraubenbahn, sei durch den Radius R des aus der Projektion der Bahn auf die xy -Ebene resultierenden Kreises und durch den vertikalen Abstand h zwischen zwei Windungen festgelegt, siehe Abb. 1.10. Die Bogenlänge s_1 , die ein Massenpunkt beim Durchlaufen einer Windung zurücklegt, berechnet man am einfachsten, indem man die Windung abwickelt, und dadurch in eine lineare Rampe überführt. Dann erhält man:



$$s_1 = \sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}$$

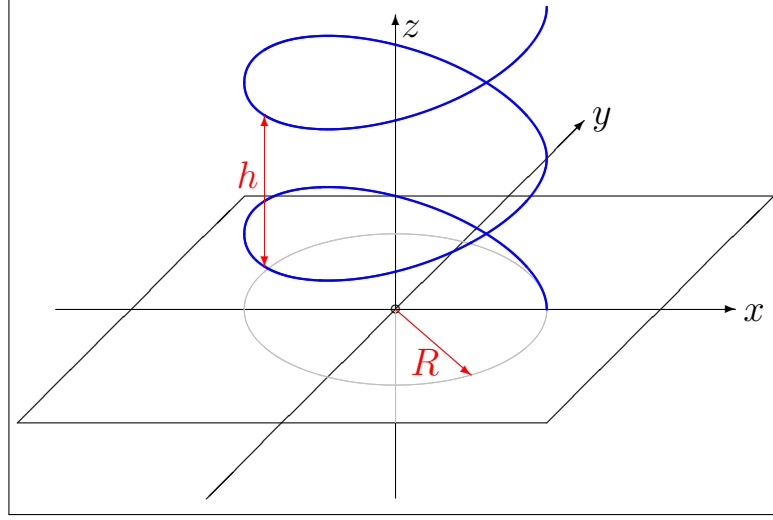


Abbildung 1.10: Schraubenbewegung.

Damit kann man die Abhängigkeit des Azimutalwinkels von der Bogenlänge als

$$\varphi = 2\pi \frac{s}{s_1} \quad (1.34)$$

angeben, während die Höhenkoordinate z mit der Bogenlänge über

$$z = h \frac{s}{s_1} \quad (1.35)$$

verknüpft ist. Der Achsabstand r ist konstant als

$$r = R \quad (1.36)$$

gegeben, und somit unabhängig von s . Die Gleichungen (1.34, 1.35) und (1.36) legen zusammen die Abhängigkeit des Ortvektors von der Bogenlänge als

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z = R\vec{e}_r + h\frac{s}{s_1}\vec{e}_z$$

fest. Daraus berechnet sich der Tangentenvektor als

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \frac{d\vec{r}}{ds} = R \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{h}{s_1} \vec{e}_z \\ &= \frac{2\pi R}{s_1} \vec{e}_\varphi + \frac{h}{s_1} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Dessen Ableitung nach der Bogenlänge

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{2\pi R}{s_1} \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{4\pi^2 R}{s_1^2} \vec{e}_r$$

ist mit $\kappa \vec{n}$ zu indentifizieren. Somit ergibt sich

$$\vec{n} = -\vec{e}_r$$

als Normalenvektor der Bahnkurve und

$$\kappa = \frac{4\pi^2 R}{s_1^2} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2}$$

als deren Krümmung. Der Binormalenvektor berechnet sich als

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \frac{2\pi R}{s_1} \vec{e}_z - \frac{h}{s_1} \vec{e}_\varphi.$$

Nunmehr lässt sich auch die Torsion der Bahnkurve berechnen als

$$\begin{aligned} \gamma &= \vec{b} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} = - \left[\frac{2\pi R}{s_1} \vec{e}_z - \frac{h}{s_1} \vec{e}_\varphi \right] \cdot \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} \\ &= \frac{2\pi h}{s_1^2} = \frac{2\pi h}{4\pi^2 R^2 + h^2}. \end{aligned}$$

1.2 Kinematik der starren Körper

1.2.1 Position und Orientierung

Im Gegensatz zu einem Massenpunkt, dessen Position durch einen Ortsvektor \vec{r} dargestellt wird, ist beim starren Körper außer der Position noch dessen *Orientierung* zu berücksichtigen. Außerdem ist ein ausgezeichneter Punkt des nunmehr ausgedehnten Körpers festzulegen, der durch den Ortsvektor dargestellt wird. Dies ist in der Regel der Schwerpunkt. Im zweidimensionalen Fall bedeutet dies also, dass neben den beiden Koordinaten, die den auf den Schwerpunkt des Körpers weisenden Ortsvektor \vec{r}_s definieren, ein zusätzlicher Winkel benötigt wird, der die Drehung des Körpers gegenüber einer festgelegten Referenzorientierung charakterisiert. Man benötigt somit drei anstatt zwei Koordinaten.

Der dreidimensionale Fall ist etwas komplizierter, da nunmehr eine Winkelangabe nicht mehr ausreicht, um die Orientierung eines Körpers zu charakterisieren. Eine elegante Möglichkeit eröffnet sich, wie in Abb. 1.11 gezeigt, durch die Einführung eines *Winkelvektors* $\vec{\varphi}$: Dessen Betrag $|\vec{\varphi}|$ bezeichnet

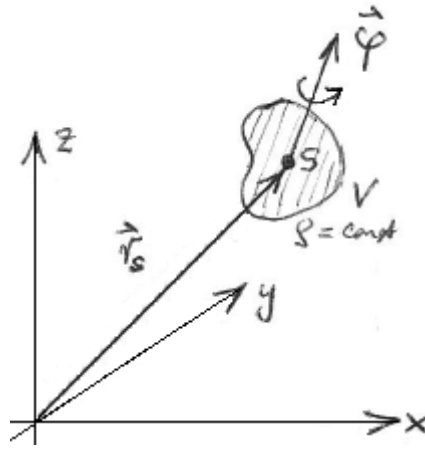


Abbildung 1.11: Position und Orientierung eines starren Körpers.

den Drehwinkel, während dessen Richtung die Drehachse anzeigt. Jede beliebige Änderung der Orientierung gegenüber einer Referenzorientierung lässt sich auf diese Weise beschreiben. Damit stehen im Dreidimensionalen die beiden Vektoren

$$\begin{aligned}\vec{r}_s &= \vec{r}_s(t) \\ \vec{\varphi} &= \vec{\varphi}(t)\end{aligned}$$

zur Verfügung um die gesamte Konfiguration, bestehend aus Schwerpunktsposition und Orientierung, zu beschreiben. Zerlegt man den Vektor $\vec{\varphi}$ in Kartesische Koordinaten, so nennt man die daraus resultierenden Winkel φ_x , φ_y und φ_z *Eulersche Winkel*.

1.2.2 Geschwindigkeiten

Wie gewohnt liefert die erste Ableitung die Geschwindigkeit. Dies gilt sowohl für die Schwerpunktsposition als auch für die Orientierung, so dass

$$\begin{aligned}\vec{v}_s &= \dot{\vec{r}}_s \\ \vec{\omega} &= \dot{\vec{\varphi}}\end{aligned}$$

die *Schwerpunktsgeschwindigkeit* und die *Winkelgeschwindigkeit* sind.

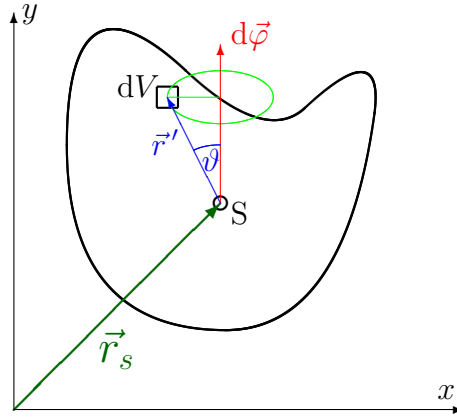


Abbildung 1.12: Zur Bewegung eines Volumenelements eines starren Körpers.

1.2.3 Beschleunigungen

Die zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned}\vec{a}_s = \dot{\vec{v}}_s &= \ddot{\vec{r}}_s \\ \vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} &= \ddot{\vec{\varphi}}\end{aligned}$$

von Schwerpunktposition und Orientierung heißen *Schwerpunktsbeschleunigung* und *Winkelbeschleunigung*.

1.2.4 Kinematik eines kleinen Volumenelementes

Wir schneiden aus dem Körper, wie in Abb. 1.12 gezeigt, ein kleines Volumenelement dV heraus. Dessen Position sei durch den Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_s + \vec{r}'$$

gegeben, wobei \vec{r}_s der Ortsvektor zum Schwerpunkt des Körpers und \vec{r}' die Position des Volumenelementes vom Schwerpunkt aus gesehen ist. Wir betrachten eine infinitesimale Verschiebung des Schwerpunktes $d\vec{r}_s$ und eine gleichzeitige infinitesimale Drehung $d\vec{\varphi}$.

Wie in Abb. 1.12 zu erkennen ist, bedeutet eine infinitesimale Drehung um eine durch einen Vektor $d\vec{\varphi}$ angezeigte Achse eine Bewegung auf einer Kreislinie mit dem Radius $|\vec{r}'| \sin \vartheta$. Die Bogenlänge der Bewegung ist damit durch $|\vec{r}'| \sin \vartheta |d\vec{\varphi}| = |d\vec{\varphi} \times \vec{r}'|$ gegeben. Da die Richtung der Drehbewegung zudem

sowohl senkrecht zur aktuellen Drehachse als auch zum Vektor \vec{r}' verläuft, ist tatsächlich $d\vec{\varphi} \times \vec{r}'$ die infinitesimale Verschiebung des betrachteten Volumenelements aufgrund der Drehung mit Drehwinkel $d\vec{\varphi}$. Diese Bewegung wird überlagert von der Verschiebung des Schwerpunktes $d\vec{r}_s$, welche jeden Punkt des Körper in gleicher Weise betrifft. Damit ist die infinitesimale Gesamtverschiebung des kleinen Volumenelements als

$$d\vec{r} = d\vec{r}_s + d\vec{\varphi} \times \vec{r}' = d\vec{r}_s + d\vec{\varphi} \times (\vec{r} - \vec{r}_s) \quad (1.37)$$

gegeben.

Eine Bewegung mit einer *finiten Drehung* um einen nicht mehr kleinen Winkel $\vec{\varphi}$ besitzt dagegen eine deutlich kompliziertere Form und soll daher hier nicht weiter erläutert werden. Wir bemerken außerdem, dass die obige Form für eine infinitesimale Drehung nicht nur für einen Ortsvektor, sondern für jeden beliebigen Vektor gilt. Ein Vektor \vec{u} , der einer infinitesimalen Drehung um $d\vec{\varphi}$ ausgesetzt wird, erfährt somit eine Änderung von

$$d\vec{u} = d\vec{\varphi} \times \vec{u}. \quad (1.38)$$

Die Geschwindigkeit des Volumenelements gewinnt man aus obiger Formel (1.37) als

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_s}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times (\vec{r} - \vec{r}_s) = \vec{v}_s + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_s) \quad (1.39)$$

und dessen Beschleunigung durch nochmalige Zeitableitung als

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_s + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r} - \vec{r}_s) + \vec{\omega} \times \left(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_s \right) \\ &= \vec{a}_s + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{r}_s) + \vec{\omega} \times (\vec{v}_s + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_s) - \vec{v}_s) \\ &= \vec{a}_s + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{r}_s) + [(\vec{r} - \vec{r}_s) \cdot \vec{\omega}] \vec{\omega} - \vec{\omega}^2 (\vec{r} - \vec{r}_s). \end{aligned} \quad (1.40)$$

1.2.5 Momentanpol einer Bewegung

Im Rahmen der bisher verwendeten Darstellung der Konfiguration eines starren Körpers durch Schwerpunktposition und (vektoriellen) Drehwinkel ist eine beliebige Bewegung des Körpers als Überlagerung von Translationsbewegung des Schwerpunkts mit einer Drehbewegung aufzufassen. In Abb. 1.13 ist dies anhand der Bewegung eines dreieckigen Objekts dargestellt, bei der allerdings der Punkt P in der Spitze des Objekts keine Bewegung erfährt, so dass man dessen Bewegung alternativ auch als reine Drehung um den

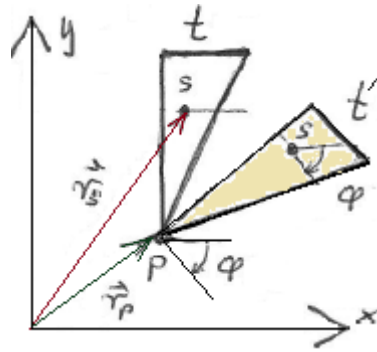


Abbildung 1.13: Momentanpol bei Körper mit dreieckigem Querschnitt.

Punkt P auffassen kann. Ein solcher, für den Moment ruhender Punkt heißt *Momentanpol* der Bewegung.

Bei einer gegebenen Bewegung kann ein Momentanpol P ganz allgemein mit Hilfe der Gleichung (1.39) aufgespürt werden, denn für diesen muss

$$\vec{0} = \vec{v}_P = \vec{v}_s + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_s) \quad (1.41)$$

gelten, woraus sich der Ortsvektor \vec{r}_P , der auf den Momentanpol zeigt, ermitteln lässt bis auf ein Vielfaches der Drehachse $\vec{\omega}$. Die Momentanpolachse muss nicht unbedingt durch einen Punkt des Körpers verlaufen, sondern kann sich auch ganz außerhalb der Grenzen des Körpers befinden².

Da der Schwerpunkt aus rein kinematischer Sicht kein besonders ausgezeichneter Punkt ist, kann in Gleichung (1.41) der Ortsvektor \vec{r}_s auch durch die Position eines beliebigen körperfesten Punktes und \vec{v}_s durch dessen Geschwindigkeit ersetzt werden. Wählt man einen Punkt \vec{r}_1 aus, dessen momentane Bewegungsrichtung bekannt ist, so geht aus

$$\vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_1) = -\vec{v}_1$$

hervor, dass der Momentanpol vom Punkt \vec{r}_1 aus gesehen auf einer Linie senkrecht zu der durch \vec{v}_1 gegebenen Bewegungsrichtung (und senkrecht zur Drehachse) zu finden ist. Nimmt man einen zweiten Punkt \vec{r}_2 hinzu, so ist eine zweite Gerade definiert, so dass der Schwerpunkt beider Geraden den Momentanpol kennzeichnet. Als Beispiel für eine solche geometrische Konstruktion des Momentanpols betrachten wir einen Stab (Länge l) der unter der Wirkung der Schwerkraft an einer Wand abrutscht, s. Abb. 1.14.

Da sowohl im Kontaktpunkt A zur Wand als auch im Kontaktpunkt B zum Boden die Bewegungsrichtung jeweils parallel zur Führung ist, ergibt sich der

²Dies gilt im Übrigen ja auch für den Schwerpunkt!

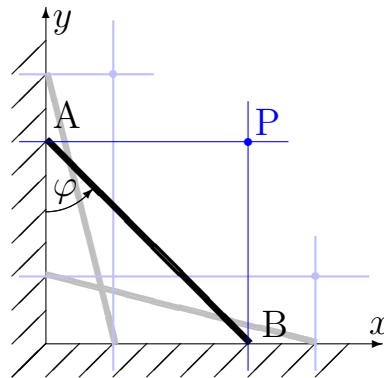


Abbildung 1.14: Konstruktion des Momentanpols.

Momentanpol P als Schnittpunkt der beiden Normalen. Es ist unschwer zu erkennen, dass sich die Position des Momentanpols während der Bewegung verändert.

Verwendet man anstelle des Körperschwerpunkts den Momentanpol als Bezugspunkt, so liegt der Vorteil darin, dass die Bewegung vom Momentanpol aus gesehen eine reine Drehbewegung ist. Bei einigen Bewegungen erweist es sich allerdings als nachteilig, dass der Momentanpol zu jedem Zeitpunkt eine andere Position einnehmen kann.

Kapitel 2

Dynamik des Massenpunktes

2.1 Die Newtonschen Axiome

Die Newtonschen Axiome bilden die Grundlage der Dynamik. Alle anderen Gesetzmäßigkeiten können aus ihnen hergeleitet werden.

2.1.1 Galileisches Trägheitsprinzip (Erstes Newtonsches Axiom)

Ein freier Massenpunkt, der keinerlei äußerem Einfluss durch Kräfte unterliegt, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig fort, d.h.

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}_0 = \text{const.}$$

2.1.2 Newtonsches Bewegungsgesetz (Zweites Newtonsches Axiom)

Sobald ein Massenpunkt einer resultierenden Kraft $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \neq 0$ ausgesetzt ist, erfährt er eine Beschleunigung, d.h. eine Änderung seines Bewegungszustandes gemäß

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

2.1.3 Reaktionsprinzip (Drittes Newtonsches Axiom)

Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind gleich groß und entgegengesetzt (actio=reactio), d.h. die Kraft \vec{F}_{21} , die ein Körper 1 auf einen

Körper 2 ausübt, steht mit der Kraft \vec{F}_{12} , welche umgekehrt der Körper 2 auf den Körper 1 ausübt im Zusammenhang

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

2.2 Kräfte

2.2.1 Eingeprägte Kräfte und Zwangskräfte

Die im zweiten Newtonschen Axiom vorkommende Gesamtkraft \vec{F} setzt sich gemäß

$$\vec{F} = \vec{F}_e(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \vec{F}_z$$

additiv aus zwei grundlegend verschiedenen Anteilen zusammen, nämlich der Summe aller *eingepprägten Kräfte* $\vec{F}_e(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ und der Summe aller *Zwangskräfte* \vec{F}_z . Während die eingepprägten Kräfte in der Regel durch Position und Geschwindigkeit des betreffenden Massenpunktes von vornherein festgelegt sind und eventuell noch in definierter Weise von der Zeit abhängen, sind Zwangskräfte diejenigen Schnittreaktionen, die durch eine starre Führung des Massenpunktes (Seil oder Führungsschiene) hervorgerufen werden und stets normal zur Führung orientiert sind. Die Richtungen der Zwangskräfte sind somit durch die Geometrie festgelegt, während deren Beträge selbst als Unbekannte zu behandeln sind, die sich erst durch Lösen der aus dem zweiten Axiom resultierenden Newtonschen Bewegungsgleichungen bewerten lassen.

2.2.2 Schwerkraft

Die Schwerkraft zählt zu den einfachsten eingepprägten Kräften, da sie am Erdboden in guter Näherung als

$$\vec{F}_G = m\vec{g}$$

mit $|\vec{g}| \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ und Richtung zum Erdmittelpunkt angegeben werden kann und somit konstant ist, also weder vom Ort noch von der Geschwindigkeit und auch nicht explizit von der Zeit abhängt.

Auf größeren Längenskalen ist die Schwerkraft durch das Newtonsche Gravitationsgesetz gegeben, welches sich in Kugelkoordinaten mit Erdmittelpunkt als Koordinatenursprung als

$$\vec{F}_G = -mg \frac{R^2}{r^2} \vec{e}_r$$

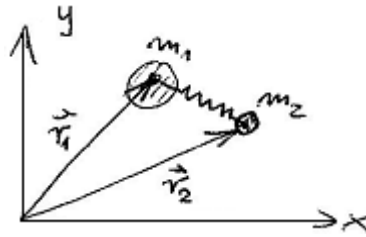


Abbildung 2.1: Zur Federkraft.

schreiben lässt mit Erdradius R . Die Schwerkraft somit ortsabhängig. Dies spielt beispielsweise für die Raumfahrt eine wichtige Rolle.

2.2.3 Federkräfte

Eine zwischen zwei Massenpunkten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 gespannte Feder (s. Abb. 2.1) vermittelt eine eingeprägte Kraft, deren Betrag proportional zur Verlängerung der Feder gegenüber deren entspannten Länge l ist, also

$$|\vec{F}_{21}| = c ||\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - l|$$

mit Federkonstante c . Die Richtung der Kraft ist parallel zum Verbindungsvektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vom Punkt \vec{r}_1 zum Punkt \vec{r}_2 . Beachtet man außerdem, dass eine gespannte Feder eine attraktive Wechselwirkung vermittelt, so lautet die Formel für die Federkraft, die auf den Punkt \vec{r}_2 ausgeübt wird

$$\vec{F}_{21} = -c [|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - l] \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}.$$

2.2.4 Reibungskräfte

Reibungskräfte wirken stets der aktuellen Bewegung entgegen, also

$$\frac{\vec{F}_R}{|\vec{F}_R|} = -\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}.$$

Der Betrag der Kraft richtet sich nach dem jeweiligen *Reibungsgesetz*. Vor allem die folgenden drei Reibungsgesetze treten verbreitet in Erscheinung:

Coulomb–Reibung oder trockene Reibung tritt an Kontaktflächen zwischen Festkörpern in Erscheinung und folgt dem Gesetz

$$|\vec{F}_R| = \mu N$$

mit Reibungskoeffizient μ und der zwischen den Körpern herrschenden Normalkraft N . Der Betrag der Coulomb–Reibung hängt insbesondere nicht von der Geschwindigkeit ab. Die Coulomb–Reibung selbst, also

$$\vec{F}_R = -\mu N \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|},$$

hängt allerdings von der Richtung der Geschwindigkeit ab.

Stokes–Reibung oder Schmiermittelreibung ist eine Folge der inneren Reibung in einer Flüssigkeit, mit der der zu betrachtende Körper in Kontakt steht. Diese Art von Reibung tritt nicht nur in geschmierten Festkörperkontakten auf, sondern auch bei der Bewegung von ganz in einer Flüssigkeit eingetauchten Körpern. Diese Reibung hängt linear von der Geschwindigkeit ab, d.h.

$$|\vec{F}_R| = k |\dot{\vec{r}}|,$$

mit problemabhängiger Konstante k . Vektoriell lässt sich die Stokes–Reibung somit einfach als

$$\vec{F}_R = -k |\dot{\vec{r}}| \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = -k \dot{\vec{r}}$$

schreiben. Diese Gesetzmäßigkeit gilt nur solange die Strömung in der betreffenden Flüssigkeit laminar bleibt.

Newton–Reibung oder Luftreibung erfährt ein Körper, der sich durch ein Fluid (Flüssigkeit oder Gas) bewegt, sofern die dadurch im Fluid hervorgerufene Strömung turbulent ist. Das daraus resultierende Reibungsgesetz lautet

$$|\vec{F}_R| = k |\dot{\vec{r}}|^2$$

und ist somit zum Quadrat der Geschwindigkeit proportional. Die Proportionalitätskonstante k wird oft als $\varrho c_w A$ geschrieben, wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit, A die Querschnittsfläche des Körpers und c_w der formabhängige Luftwiderstandsbeiwert des Körpers ist.

Alle drei Reibungsgesetze können in der einheitlichen Form

$$|\vec{F}_R| = k |\dot{\vec{r}}|^n$$

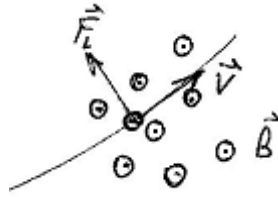


Abbildung 2.2: Lorentz-Kraft auf ein elektrisch negativ geladenes Teilchen in einem Magnetfeld.

bzw.

$$\vec{F}_R = -k \left| \dot{\vec{r}} \right|^{n-1} \dot{\vec{r}}$$

geschrieben werden mit $n = 0$ für Coulomb-Reibung (und $k = \mu N$), $n = 1$ für Stokes-Reibung sowie $n = 2$ für Newton-Reibung.

2.2.5 Lorentz-Kraft

Ein sich in einem Magnetfeld mit Flussdichte \vec{B} bewegendes, mit elektrischer Ladung q geladener behafteter Körper erfährt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q \dot{\vec{r}} \times \vec{B}.$$

Diese eingeprägte Kraft ist wie eine Reibungskraft geschwindigkeitsabhängig, weist im Gegensatz zu einer solchen aber stets senkrecht zur Bewegungsrichtung (s. Abb. 2.2) und verursacht somit keine Bahnbeschleunigung sondern lediglich eine Ablenkung des Körpers.

2.3 Beispiele für Bewegungen

2.3.1 Schwerependel

Als Schwerependel oder auch mathematisches Pendel bezeichnet man ein System, bei dem ein Massenpunkt einem undeformbaren masselosen Seil angebracht ist, dessen oberes Ende fixiert ist, vergl. Abb. 2.3.

Da die Bewegung des Pendelkörpers aufgrund des kinematischen Zwangs durch das Seil auf einem Kreisbogen stattfindet, bieten sich Polarkoordinaten zur Beschreibung der Bewegung an, wobei als Ursprung der Aufhängepunkt

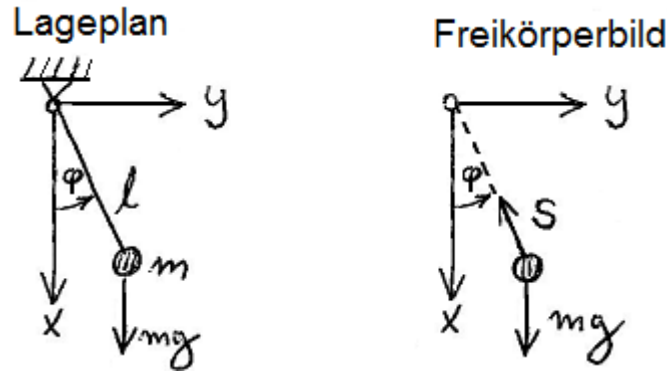


Abbildung 2.3: Schwerependel: Lageplan und Freikörperbild

gewählt wird. In dieser Beschreibung ist der Winkel φ die einzige zeitlich veränderliche Größe, während der Abstand vom Ursprung konstant der Seillänge entspricht, d.h. $r = l$. Wir betrachten zunächst Lageplan in Abb. 2.3 und schneiden frei. Aus dem resultierenden Freikörperbild ergeben sich alle auf den Pendelkörper wirkenden Kräfte, namentlich dessen Gewichtskraft $mg\vec{e}_x$ und die Seilkraft $\vec{S} = -S\vec{e}_r$. Erstere ist eine eingeprägte Kraft und somit bekannt, letztere eine Zwangskraft, welche aus dem durch das Seil verursachten kinematischen Zwang resultiert und dessen Betrag S zunächst unbekannt ist. Im Gegensatz zur Statik ergeben die beiden Kräfte in der Summe jedoch nicht Null, sondern verursachen gemäß der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$mg\vec{e}_x - S\vec{e}_r = m\ddot{\vec{r}}$$

eine Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$. Letztere hat laut (1.14) unter Berücksichtigung der kinematischen Bindung $r = l$ die Form

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= [\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2] \vec{e}_r + [r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}] \vec{e}_\varphi \\ &= -l\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r + l\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi,\end{aligned}$$

so dass die Newtonsche Bewegungsgleichung insgesamt

$$mg\vec{e}_x - S\vec{e}_r = -ml\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r + ml\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

lautet. Diese Vektorgleichung lässt sich, wie gewohnt, in ihre Komponenten zerlegen, wobei man hier sinnvollerweise in radiale Richtung (\vec{e}_r -Richtung, „ \searrow “) und azimutale Richtung (\vec{e}_φ -Richtung, „ \nearrow “) zerlegt, also

$$\begin{aligned}\searrow: \quad mg \cos \varphi - S &= -ml\dot{\varphi}^2, \\ \nearrow: \quad -mg \sin \varphi &= ml\ddot{\varphi}.\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem aus zwei Gleichungen für zwei unbekannte Funktionen $\varphi(t)$ und $S(t)$ lässt sich in die Form

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \quad (2.1)$$

$$S = mg \cos \varphi + ml\dot{\varphi}^2 \quad (2.2)$$

bringen unter Verwendung der Abkürzung

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Die Seilkraft S kann aus (2.2) ermittelt werden, nachdem man durch Lösen von (2.1) die Funktion $\varphi(t)$ bestimmt hat. Allerdings stellt die Lösung der Differentialgleichung (2.1) eine nicht zu unterschätzende Herausforderung dar, da diese von zweiter Ordnung und nichtlinear ist. Wie sich diese Differentialgleichung exakt lösen lässt, wird später in Abschnitt (...) behandelt.

Wir begnügen uns vorerst mit einer für kleine Auslenkungen gültigen Näherungslösung: Für kleine Winkel lässt sich nämlich

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

approximieren. Damit vereinfacht sich die Differentialgleichung (2.1) zu

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

und damit zur 'klassischen' ungedämpften Schwingungs-Differentialgleichung. Deren Lösung wird im Anhang A.1 systematisch konstruiert. Sie lautet

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

wobei φ_0 und $\dot{\varphi}_0$ Auslenkungswinkel und Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ sind.

2.3.2 Gebremster Fall eines Körpers

Ein Objekt mit Masse m in einem fluiden Medium (Gas oder Flüssigkeit) wird, wie in Abb. 2.4 fallengelassen. Dabei ist es neben seiner Gewichtskraft $F_G = mg$ auch einer geschwindigkeitsabhängigen Reibungskraft

$$F_R = k |\dot{x}|^{n-1} \dot{x}$$

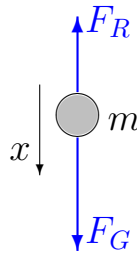


Abbildung 2.4: Gewichts- und Reibungskraft beim gebremsten Fall

ausgesetzt, wobei je nach Parametern des betrachteten Problems der Exponent n den Wert $n = 1$ (Stokes-Reibung, z.B. Kirsche in Wasser) oder $n = 2$ (Newton-Reibung, z.B. Fallschirmspringer) annehmen kann. Dank des eindimensionalen Charakters des Problems benötigen wir keine vektorielle Betrachtung, sondern charakterisieren die Position des Objekts durch dessen zurückgelegte Fallstrecke $x = x(t)$. Da außerdem keine Zwangsbedingungen zu berücksichtigen sind, entfällt das Freischneiden, d.h. Abb. 2.4 stellt bereits das Freikörperbild des Problems dar. Das zweite Newtonsche Axiom lautet dann

$$\Downarrow: \quad F_G - F_R = m\ddot{x},$$

was nach Einsetzen der Kräfte und einfachen Umformungen zur Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} |\dot{x}|^{n-1} \dot{x} = g$$

führt. Geht man ferner von einer stets nach unten gerichteten Bewegung aus, können die Betragsstriche im Reibungsterm entfallen, d.h. $|\dot{x}| = \dot{x}$. Ferner kann man obige Differentialgleichung alternativ als Gleichung für die Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ in der Form

$$\dot{v} + \frac{k}{m} v^n = g \tag{2.3}$$

einer Differentialgleichung erster Ordnung schreiben. Hierfür steht die sog. *Trennung der Variablen* als Lösungsverfahren zur Verfügung: Zu diesem Zweck formen wir zunächst die Dgl nach

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^n \tag{2.4}$$

um und verfahren mit den Infinitesimalen dv und dt so, als wären es gewöhnliche Größen, um alle Terme mit v oder dv auf eine Seite und alle Terme mit

t oder dt auf die andere Seite zu bringen, um so schließlich die Form

$$\frac{dv}{v_\infty^n - v^n} = \frac{k}{m} dt \quad (2.5)$$

zu erhalten mit der Abkürzung

$$v_\infty := \left(\frac{mg}{k} \right)^{1/n}. \quad (2.6)$$

Die Integration von (2.5) in den Grenzen von $t = 0$ bis t liefert schließlich

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{v_\infty^n - v^n} = \frac{k}{m} t$$

und damit die Lösung der Differentialgleichung in impliziter Form. Im Folgenden berücksichtigen wir die Anfangsbedingung $v(0)$ für einen ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassenen Körper. Um obiges Integral zu lösen, müssen die beiden Fälle $n = 1$ und $n = 2$ unterschieden werden. Im Falle der Stokes-Reibung $n = 1$ folgt

$$\frac{k}{m} t = \int_0^{v(t)} \frac{dv}{v_\infty - v} = -\ln \left(1 - \frac{v(t)}{v_\infty} \right),$$

was sich nach $v(t)$ auflösen lässt und zum Ergebnis

$$v(t) = v_\infty \left[1 - \exp \left(-\frac{k}{m} t \right) \right] \quad (2.7)$$

führt. Dieses Ergebnis kann man anstatt mit der Methode der Trennung der Variablen, da die betreffende Differentialgleichung linear ist, auch mit der Methoden des charakterischen Polynoms („Exponentialansatz“) lösen, wie im Anhang A.2 gezeigt wird.

Für Newton-Reibung $n = 2$ benutzen wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{1}{2v_\infty} \left[\frac{1}{v_\infty + v} + \frac{1}{v_\infty - v} \right],$$

um obiges Integral zu bestimmen und daraus

$$\frac{k}{m} t = \int_0^{v(t)} \frac{dv}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{1}{2v_\infty} \left[\ln \left(\frac{v_\infty + v(t)}{v_\infty} \right) - \ln \left(\frac{v_\infty - v(t)}{v_\infty} \right) \right] = \frac{1}{2v_\infty} \ln \left(\frac{v_\infty + v(t)}{v_\infty - v(t)} \right),$$

zu gewinnen. Multiplikation mit $2v_\infty$ und Anwendung von $\exp(\cdot)$ ergibt die Gleichung

$$\exp\left(\frac{2v_\infty k}{m}t\right) = \frac{v_\infty + v(t)}{v_\infty - v(t)},$$

welche nach Multiplikation mit dem Nenner $v_\infty - v(t)$ in die einfache lineare Gleichung

$$[v_\infty - v(t)] \exp\left(2\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right) = v_\infty + v(t)$$

übergeht, wobei gemäß (2.6) auch $v_\infty = \sqrt{mg/k}$ berücksichtigt wurde. Auflösung nach $v(t)$ ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{v(t)}{v_\infty} &= \frac{\exp\left(2\sqrt{gk/m}t\right) - 1}{\exp\left(2\sqrt{gk/m}t\right) + 1} = \frac{\exp\left(\sqrt{gk/m}t\right) - \exp\left(-\sqrt{gk/m}t\right)}{\exp\left(\sqrt{gk/m}t\right) + \exp\left(-\sqrt{gk/m}t\right)} \\ &= \frac{\sinh\left(\sqrt{gk/m}t\right)}{\cosh\left(\sqrt{gk/m}t\right)} = \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right) \end{aligned}$$

und somit als Endergebnis

$$v(t) = v_\infty \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right). \quad (2.8)$$

Vergleicht man nun die Ergebnisse für Stokes-Reibung (2.7) und Newton-Reibung (2.8) miteinander, so fällt auf, dass in beiden Fällen nach langer Zeit eine konstante Endgeschwindigkeit v_∞ erreicht wird, welche bei Stokes-Reibung $v_\infty = mg/k$ und bei Newton-Reibung $v_\infty = \sqrt{mg/k}$ beträgt. Die zeitliche Dynamik dieses Vorgangs, die man grob durch Angabe der Zeitkonstante (Kehrwert des Faktors vor t im Argument von \exp bzw. \tanh)

$$\tau = \begin{cases} m/k & , \text{ Stokes-Reibung} \\ \sqrt{m}/\sqrt{gk} & , \text{ Newton-Reibung} \end{cases}$$

charakterisieren kann, wird im Falle der Stokes-Reibung allerdings allein durch Masse und Reibungskonstante bestimmt, während bei Newton-Reibung auch die Schwerebeschleunigung eine Rolle spielt.

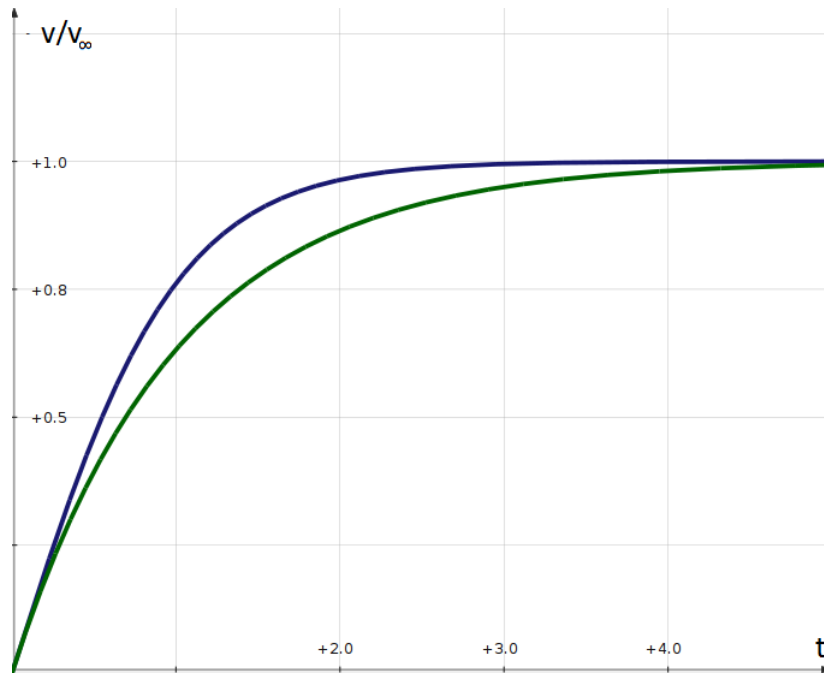


Abbildung 2.5: Darstellung des gebremsten Falls im v - t -Diagramm. Vergleich von Stokes-Reibung (grün) und Newton-Reibung (blau).

2.4 Systeme von Massenpunkten und zugehörige Bilanzen

2.4.1 Massenpunktsysteme

Wir betrachten zunächst das in Abb. 2.6 dargestellte System aus zwei miteinander wechselwirkenden Massenpunkten m_1 und m_2 , die durch eine Feder (Federkonstante C , entspannte Länge l_0) miteinander verbunden und gleichzeitig der Schwerkraft ausgesetzt sind. Das zweite Newtonsche Axiom impliziert hierfür Bewegungsgleichungen der Form

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -m_1 g \vec{e}_y + \vec{F}_{12}, \quad (2.9)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -m_2 g \vec{e}_y + \vec{F}_{21}, \quad (2.10)$$

wobei \vec{F}_{12} die Kraft ist, die der Körper (2) über die Feder auf den Körper (1) ausübt und umgekehrt \vec{F}_{21} die Kraft, die der Körper (1) auf den Körper (2) ausübt. Das dritte Newtonsche Axiom (Reaktionsprinzip) verlangt $\vec{F}_{12} =$

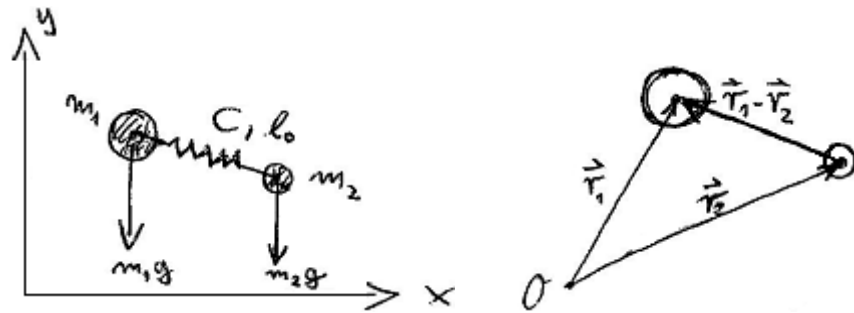


Abbildung 2.6: Zwei durch eine Feder miteinander gekoppelte fallende Massen. Lageplan und Ortsvektoren.

$-\vec{F}_{21}$. Im vorliegenden Fall einer Feder gilt speziell

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -C (|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l_0) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (2.11)$$

wobei $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ der Abstandsvektor ist, der vom Körper (2) aus auf den Körper (1) weist, vergl. Abb. 2.6.

Wir haben bei Systemen aus mehreren Massenpunkten also grundsätzlich zwischen *äußeren Kräften* (hier: Gewichtskräfte) und *inneren Kräften* oder besser *Wechselwirkungskräften* (hier: Federkraft) zu unterscheiden:

Äußere Kräfte wirken individuell auf den jeweiligen Massenpunkt m_i unabhängig von der Position der übrigen Massenpunkte. Äußere Kräfte können sowohl eingeprägte Kräfte \vec{F}_{ai} sein, die von Position \vec{r}_i und Bewegungszustand $\dot{\vec{r}}_i$ des betreffenden Massenpunktes und eventuell noch von der Zeit t abhängen, als auch Zwangskräfte \vec{F}_{zi} , also Reaktionen auf eine starre Führung, deren Richtung senkrecht zur Führung liegt und deren Betrag eine unabhängige Veränderliche ist.

Wechselwirkungskräfte \vec{F}_{ij} zwischen zwei Massenpunkten m_i und m_j können, wenn es sich um eingeprägte Kräfte handelt, von deren relativer Position $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ und von deren Relativbewegung $\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j$ abhängen. Wechselwirkungskräfte können auch Zwangskräfte \vec{F}_{zij} sein, die als Reaktionen auf eine starre Führung z.B. durch ein Seil oder eine Stange zwischen den Massenpunkten auftreten.

Im allgemeinen Fall eines aus N Massenpunkten bestehenden Systems lauten

die Bewegungsgleichungen somit

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{ai}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) + \vec{F}_{zi} + \sum_{j=1}^N \left[\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) + \vec{F}_{zij} \right], \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.12)$$

wobei die Wechselwirkungskräfte dem Reaktionsprinzip

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \quad (2.13)$$

$$\vec{F}_{zji} = -\vec{F}_{zij} \quad (2.14)$$

genügen müssen. Dies impliziert insbesondere auch $\vec{F}_{ii} = \vec{0}$ und $\vec{F}_{zii} = \vec{0}$, d.h. ein Massenpunkt kann nicht mit sich selbst wechselwirken.

Durch (2.12) ist der „worst case“ gegeben, also der höchstmögliche Komplexitätsgrad, den die Bewegungsgleichungen erreichen können. Die in diesem Skript diskutierten Beispiele sind wesentlich einfachere Spezialfälle hiervon.

2.4.2 Impulssatz

Wir bezeichnen die Größe $\vec{p}_i := m_i \dot{\vec{r}}_i$ als *Impuls* des i -ten Massenpunktes und

$$\vec{p} := \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (2.15)$$

als Gesamtimpuls des Systems. Bildet man nun die Summe der N Bewegungsgleichungen (2.12) und beachtet dabei $\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$, so folgt zunächst

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^N \left[\vec{F}_{ai} + \vec{F}_{zi} \right] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{zij} \right], \quad (2.16)$$

wobei hier die Argumente der Einfachheit halber weggelassen werden. Nun folgt für den letzten Term jedoch aus dem Reaktionsprinzip (2.13, 2.14)

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{zij} \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[-\vec{F}_{ji} - \vec{F}_{zji} \right] = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{zij} \right],$$

wobei im letzten Schritt die Namensgebung der Indizes i und j und die Summationsreihenfolge gegeneinander vertauscht wurde. In der Konsequenz muss also die Summe aller Wechselwirkungskräfte verschwinden, so dass (2.16) schließlich in den Impulssatz

$$\dot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^N \left[\vec{F}_{ai} + \vec{F}_{zi} \right], \quad (2.17)$$

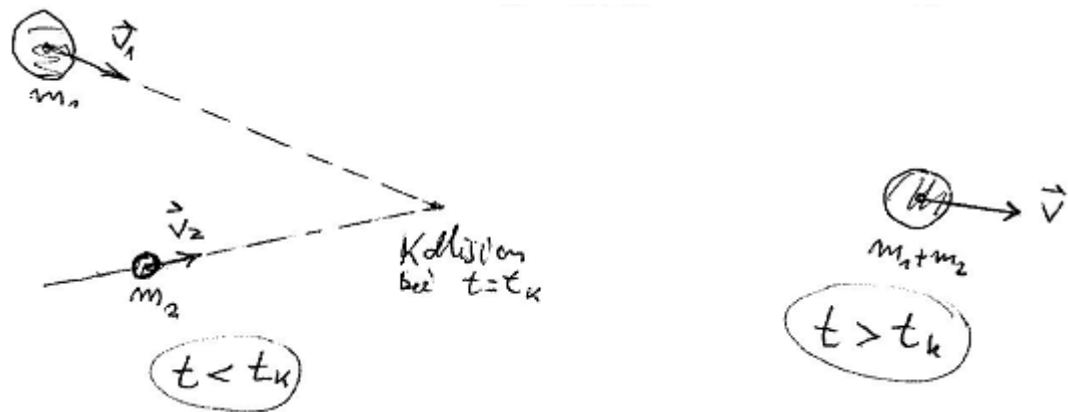


Abbildung 2.7: Vollständig inelastischer Stoß.

übergeht, welcher besagt, dass sich der Gesamtimpuls eines Massenpunktsystems nur aufgrund der Summe aller äußeren Kräfte ändert.

Im speziellen Fall, dass keine äußeren Kräfte vorhanden sind oder deren Summe Null ergibt, gilt *Impulserhaltung*

$$\dot{\vec{p}} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = \vec{p}_0 = \text{const.} \quad (2.18)$$

Der Impulserhaltungssatz ist ein sog. *erstes Integral der Bewegungsgleichungen*, da in ihm nur noch erste Ableitungen des Ortes vorkommen und keine zweiten, wie bei den ursprünglichen Bewegungsgleichungen. Wenn Impulserhaltung gilt, können Probleme zum Teil relevant vereinfacht werden, wie die folgenden Beispiele belegen:

Beispiele zur Impulserhaltung

1. Vollständig inelastischer Stoß

Zwei Körper mit Massen m_1 und m_2 und Geschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 kollidieren zu einem Zeitpunkt $t = t_K$ und verschmelzen miteinander zu einem Körper der Masse $m_1 + m_2$, welcher sich dann mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Da hier keine äußeren Kräfte im Spiel sind, gilt Impulserhaltung und somit

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{p} = (m_1 + m_2) \vec{v},$$

woraus sich die Geschwindigkeit \vec{v} nach dem Stoß als

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.19)$$

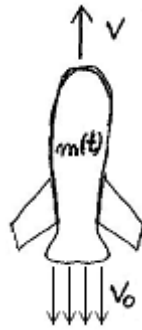


Abbildung 2.8: Zum Raketenprinzip.

ergibt.

Bemerkenswert ist hier, dass der detaillierte Kollisionsvorgang, welcher recht kompliziert sein kann, überhaupt keine Rolle spielt. Es ist ein großer Vorteil der Erhaltungssätze, dass nur über Anfangs- und Endzustand zu bilanzieren ist.

2. Herleitung der Raketenformel

Das Raketenprinzip beruht darauf, dass ein Flugkörper einen Teil seiner Masse mit einem möglichst hohem Impuls entgegen der Flugrichtung ausstößt, so dass aufgrund der Impulserhaltung ein entgegengesetzter Impuls auf die Rakete übergeht und so für einen Vorwärtsschub sorgt. Aus diesem Grundprinzip lässt sich leicht eine einfache Formel zur Berechnung der Endgeschwindigkeit der Rakete ableiten: Angenommen, die Rakete stößt in einem Zeitintervall Δt Materie der Masse Δm mit einer Relativgeschwindigkeit $-v_0$ (aus Sicht der Rakete) aus, was aus der Sicht eines am Boden ruhenden Beobachters einer Geschwindigkeit von $v - v_0$ entspricht, wenn v die Geschwindigkeit der Rakete ist. Letzere erhöht sich um Δv nach dem Ausstoß der Materie. Wenn keine äußeren Kräfte zu berücksichtigen sind, verlangt die Impulserhaltung die Gleichheit

$$(m + \Delta m) v = m (v + \Delta v) + \Delta m (v - v_0)$$

des Impulses der Rakete vor dem Ausstoß (Masse $m + \Delta m$) und der Summe der Impulse der Rakete nach dem Ausstoß einerseits und der ausgestoßenen Materie andererseits. Diese Gleichung lässt sich nach

$$\Delta v = v_0 \frac{\Delta m}{m}$$

auffösen. Im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ geht Δv in dv und Δm in $-dm$ (negative Masseänderung!) über, was nach Integration über den gesamten Flug

bei Annahme des Starts aus der Ruhe schließlich die Endgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} v_E &= \int_0^{v_E} dv = -v_0 \int_{m_A}^{m_E} \frac{dm}{m} = -v_0 [\ln(m_E) - \ln(m_A)] \\ &= v_0 \ln\left(\frac{m_A}{m_E}\right) \end{aligned}$$

liefert. Dieser Zusammenhang, den man als *Raketenformel* bezeichnet, stellt die Endgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Antriebsstrahls und vom Verhältnis von Anfangsmasse m_A zu Endmasse m_E dar. Demgegenüber spielen weder das Antriebsprinzip noch der genaue Ablauf des Raketenfluges eine Rolle.

2.4.3 Schwerpunktsatz

Die Gesamtmasse und der Schwerpunkt des Systems aus Massenpunkten sind bekanntlich durch

$$m = \sum_{i=1}^N m_i, \quad \vec{r}_s = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

gegeben. Dann lässt sich der mittels (2.15) definierte Impuls durch die Umformung

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right] = m \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right] = m \dot{\vec{r}}_s$$

als Produkt aus Gesamtmasse und Schwerpunktschwindigkeit darstellen. Der Impulssatz (2.17) nimmt dann die alternative Form

$$m \ddot{\vec{r}}_s = \sum_{i=1}^N \left[\vec{F}_{ai} + \vec{F}_{zi} \right] \quad (2.20)$$

an. Das bedeutet, dass sich der Schwerpunkt eines Systems so bewegt wie ein einzelner Massenpunkt mit der Gesamtmasse des Systems, der unter dem Einfluss der Summe aller äußeren Kräfte¹ steht.

¹inklusive aller Zwangskräfte

Speziell bei abgeschlossenen Systemen, auf welche keine äußeren Kräfte wirken, erfährt der Schwerpunkt keine Beschleunigung, so dass sich dessen Bewegung per Integration von (2.20) als geradlinig-gleichförmig im Sinne von

$$\vec{r}_s(t) = \vec{r}_{s0} + \vec{v}_{s0}t$$

herausstellt.

Begibt man sich in ein alternatives Bezugssystem, welches die gleiche Bewegung wie die des Schwerpunkts vollzieht (Galilei-Transformation), so kann man sogar den Fall

$$\vec{r}_s = \vec{0}$$

erreichen.

2.4.4 Drehimpulssatz (Drallsatz)

Wir bilden eine weitere Linearkombination der Newtonschen Bewegungsgleichungen (2.12), indem wir das Kreuzprodukt des Ortsvektors \vec{r}_i mit der i -ten Gleichung bilden und dann erneut die Summe über alle i bilden:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times [\vec{F}_{ai} + \vec{F}_{zi}] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times [\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}] \quad (2.21)$$

Die einzelnen Terme lassen sich dabei noch etwas umformen: Die Summe auf der linken Seite kann man als Zeitableitung

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) - \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right]$$

einer Größe

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

schreiben, die man als *Drehimpuls* des Systems bezeichnet. Auf der rechten Seite finden wir Größen, die den aus der Statik bekannten Momenten entsprechen, nämlich das *Gesamtmoment der äußeren Kräfte* (inklusive äußerer Zwangskräfte)

$$\vec{M}_a = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times [\vec{F}_{ai} + \vec{F}_{zi}]$$

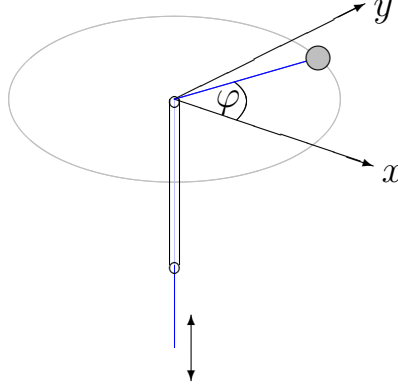


Abbildung 2.9: Kreis- und Spiralbewegung.

und das Gesamtmoment der Wechselwirkungskräfte, welches man mit $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ und $\vec{F}_{zij} = -\vec{F}_{zji}$ auch in der Form

$$\vec{M}_{WW} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times [\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{zij}] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times [\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{zij}]$$

schreiben kann. Man beachte dabei, dass zwar das dritte Newtonsche Axiom das Verschwinden der Summe aller Wechselwirkungskräfte fordert, jedoch die Summe \vec{M}_{WW} aller Wechselwirkungsmomente (innere Momente) trotzdem von Null verschieden sein können, wenn die Wechselwirkungskräfte zwischen zwei Massenpunkten nicht in Richtung der Verbindungsline der Massenpunkte gerichtet sind.

Insgesamt schreibt sich der Drehimpulssatz in der Form

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}_a + \vec{M}_{WW}. \quad (2.22)$$

Im speziellen Fall nicht vorhandener äußerer und innerer Momente erweist sich der Drehimpuls als Erhaltungsgröße, d.h. $\vec{L} = \vec{L}_0 = \text{const.}$

Beispiele zur Drehimpulserhaltung

1. Kreis- und Spiralbewegung

Befestigt man einen Körper der Masse m an einem Seil, welches, wie in Abb. 2.9 gezeigt, durch ein Rohr hindurchgeführt wird, so hat man die Möglichkeit, durch Herausziehen oder Nachgeben des Seils am unteren

Rohrende den Körper nach einmaligem Anstoßen in eine Kreisbewegung mit gewähltem Radius bzw. in eine Spiralbewegung bei zeitlich veränderlichem Radius zu zwingen, sofern die Bewegung schnell genug ist, damit die Seilkraft wesentlich größer als die Gewichtskraft wird. In Polarkoordinaten dargestellt gilt dann wie gewohnt

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\vec{e}_r \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

für Ortsvektor und Geschwindigkeit, wobei jedoch $r = r(t)$ durch die kinematische Führung des Seils von außen vorgegeben wird, während der Winkel $\varphi = \varphi(t)$ die aus den Bewegungsgleichungen zu ermittelnde Unbekannte ist. Wenn wir den Körper nun freischneiden, stellen wir fest, dass die Seilkraft \vec{S} stets in negative \vec{e}_r -Richtung zeigt und das daraus resultierende Moment $\vec{r} \times \vec{S}$ bezüglich des Ursprungs verschwindet. Da sonst keine Kraft und damit kein weiteres Moment zu berücksichtigen ist, ist das System momentenfrei, so dass die Voraussetzungen für Drehimpulserhaltung gegeben sind, d.h.

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = mr\vec{e}_r \times [\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi] = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z = \vec{L}_0 = \text{const},$$

wobei \vec{L}_0 per

$$\vec{L}_0 = mr_0^2\omega_0\vec{e}_z$$

aus den anfänglichen Daten $r_0 = r(0)$, $\omega_0 = \dot{\varphi}(0)$ der Bewegung ergibt. Damit hat man durch Auflösen obiger Gleichung die Möglichkeit, die aktuelle Winkelgeschwindigkeit als

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \left(\frac{r_0}{r(t)}\right)^2 \omega_0$$

in Abhängigkeit vom aktuellen Radius $r(t)$ der Bewegung darzustellen. Wenn beispielsweise das Seil auf die halbe Länge verkürzt wird, vervierfacht sich die Kreisfrequenz der Bewegung. Dabei ist irrelevant, ob das Seil schnell oder langsam eingezogen wird, d.h. letztlich sind nur Anfangs- und Endzustand entscheidend.

2. Keplersche Flächenregel (2. Keplersches Gesetz der Planetenbewegung)
- ...
- ... (wird ergänzt!)

2.4.5 Energiesatz

Definition: Das Skalarprodukt $P = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ einer auf einen Massenpunkt wirkenden Kraft mit dessen Geschwindigkeit nennt man die *Leistung* der betreffenden Kraft.

Bildet man nun das Skalarprodukt der Newtonschen Bewegungsgleichung (2.12) des i -ten Massenpunktes mit dessen Geschwindigkeit, also

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{ai}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{F}_{zi} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_{j=1}^N \left[\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{F}_{zij} \cdot \dot{\vec{r}}_i \right],$$

($i = 1, \dots, N$) so entfällt zunächst die Leistung $\vec{F}_{zi} \cdot \dot{\vec{r}}_i$ der Zwangskräfte, da diese grundsätzlich senkrecht zur Bewegungsrichtung und damit zum Geschwindigkeitsvektor orientiert sind. Bildet man außerdem die Summe aller Gleichungen, so verschwindet auch die Leistung der Summe aller inneren Zwangskräfte, da mit Indextausch $i \leftrightarrow j$ und unter Berücksichtigung des Reaktionsprinzips

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{zij} \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\vec{F}_{zij} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{F}_{zji} \cdot \dot{\vec{r}}_j \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{zij} \cdot (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) = \vec{0}$$

folgt. Übrig bleibt also die Gleichung

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ai}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \cdot (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j), \quad (2.23)$$

zu der allein die Leistungen der eingepägten Kräfte beitragen. Wir betrachten die aus der Kettenregel der Differentiation folgende Identität $\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right)$, welche sich problemlos auch auf dreidimensionale Vektoren übertragen lässt und dann

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\vec{r}}_i^2}{2} \right)$$

lautet, und definieren die Größe

$$T_i := \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2$$

als *kinetische Energie* des i -ten Massenpunktes. Dementsprechend versteht man unter

$$T := \sum_{i=1}^N T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

die gesamte kinetische Energie des Massensystems. Außerdem versteht man unter

$$\begin{aligned} P_a &:= \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ai}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \cdot \dot{\vec{r}}_i \\ P_{ww} &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \cdot (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \end{aligned}$$

die Gesamtleistung aller eingepägten äußeren Kräfte bzw. Wechselwirkungskräfte. Damit nimmt (2.23) die markante Form

$$\dot{T} = P_a + P_{ww} \quad (2.24)$$

einer Bilanzgleichung für die kinetische Energie an, welche besagt, dass sich die kinetische Energie des Systems aufgrund der Leistung der eingepägten Kräfte, und zwar sowohl der äußeren Kräfte als auch der Wechselwirkungskräfte ändert. Dies ist die allgemeinste Form des Energiesatzes.

Unter bestimmten Bedingungen kann man die Leistungen in (2.24) als zeitliche Änderungen einer anderen Form von Energie interpretieren. Für die Leistung einer einzelnen Kraft muss dazu

$$\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{d}{dt} U(\vec{r}) \quad (2.25)$$

erfüllt sein, wobei die skalare Funktion $U(\vec{r})$ als *Potential* oder *potentielle Energie* der Kraft \vec{F} bezeichnet wird. In Kartesischen Koordinaten kann man (2.25) unter Beachtung der Kettenregel auch in der Form

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} = -\frac{d}{dt} U(x, y, z) = -\frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z}$$

schreiben. Damit diese Identität für beliebige Bewegungen \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} erfüllt ist, muss zwingend

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}$$

gelten, oder, vektoriell geschrieben

$$\vec{F} = -\text{grad}U = -\nabla U. \quad (2.26)$$

Es ist keinesfalls selbstverständlich, dass ein solches Potential existiert. Bereits eine Abhängigkeit der Kraft von der Geschwindigkeit, wie bei Reibungskräften oder bei der Lorentz-Kraft, zieht die Nichtexistenz eines Potentials nach sich. Kräfte, die ein Potential besitzen, nennt man *konservative Kräfte*. Die Gewichtskraft, Federkräfte und Anziehungskräfte zwischen elektrischen Ladungen sind Beispiele für konservative Kräfte.

Wenn nun in einem Massenpunktsystem alle eingprägten Kräfte konservativ sind, d.h.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ai} &= -\nabla U_i(\vec{r}_i) , \\ \vec{F}_{ij} &= -\nabla V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) ,\end{aligned}$$

so kann man die Leistung der eingprägten Kräfte gemäß (2.25) auch als

$$\begin{aligned}P_a &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ai} \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N U_i(\vec{r}_i) = -\dot{U}_a \\ P_{ww} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\dot{U}_{ww}\end{aligned}$$

schreiben mit der gesamten potentiellen Energie

$$U_a := \sum_{i=1}^N U_i(\vec{r}_i)$$

der äußeren Kräfte und derjenigen der Wechselwirkungskräfte

$$U_{ww} := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) .$$

In diesem Fall kann die Bilanz (2.24) für die kinetische Energie umgeschrieben werden in

$$\frac{d}{dt} [T + U_a + U_{ww}] = 0 ,$$

was offensichtlich integrabel ist und somit den Erhaltungssatz

$$T + U_a + U_{ww} = E = \text{const}$$

für die gesamte mechanische Energie, bestehend aus potentieller und kinetischer Energie, liefert.

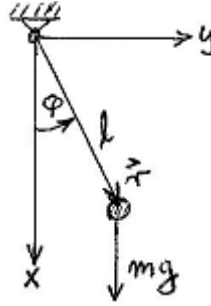


Abbildung 2.10: Lageplan des Schwerependels.

Beispiele

1. Schwerependel

In Abschnitt 2.3.1 wurde das Schwerependel bereits mit Hilfe der Newtonschen Bewegungsgleichungen behandelt. Die in diesem Zusammenhang auftretende Differentialgleichung (2.1) konnte jedoch mit konventionellen analytischen Methoden nicht gelöst werden. Eine Alternative bietet die Behandlung des Problem mit dem Energiesatz an: Hier tritt die Gewichtskraft $m\vec{g}$ als einzige eingeprägte Kraft in Erscheinung, während die Seilkraft als Zwangskraft keinen Beitrag zur Energiebilanz liefert. Die kinetische Energie lautet unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung $r = l$ in Polarkoordinaten

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2} [\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi]^2 = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2,$$

während sich die potentielle Energie der Gewichtskraft aus der Bedingung (2.26) ergibt, welche hier

$$m\vec{g} = mg\vec{e}_x = -\nabla U$$

lautet und durch

$$U = -mgx + U_0$$

mit Integrationskonstante U_0 erfüllt wird. Da wir hier mit Polarkoordinaten arbeiten, muss allerdings noch die Ersetzung $x = l \cos \varphi$ vorgenommen werden, also

$$U = -mgl \cos \varphi + U_0.$$

Da alle Voraussetzungen für Energieerhaltung erfüllt sind, gilt

$$T + U = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi + U_0 = E = \text{const.} \quad (2.27)$$

Die Konstante E kann aus dem Anfangszustand berechnet werden. Lässt man beispielsweise das Pendel bei einem Anfangswinkel $\varphi(0) = \varphi_0$ aus der Ruhe ($\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$) los, so berechnet sich die anfängliche Energie als

$$E = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}(0)^2 - mgl \cos \varphi(0) + U_0 = U_0 - mgl \cos \varphi_0,$$

welche zugleich die Energie zu jedem Zeitpunkt der Bewegung ist. Einsetzen in (2.27) liefert dann

$$\frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 - mgl [\cos \varphi - \cos \varphi_0] = 0, \quad (2.28)$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung. Im Gegensatz dazu ist die aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen hervorgehende Differentialgleichung (2.1) von zweiter Ordnung. Auflösung nach der Winkelgeschwindigkeit ergibt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \pm \sqrt{2}\omega_0 \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0},$$

wobei hier, wie in Abschnitt 2.3.1 die Abkürzung $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ benutzt wird. Das Vorzeichen richtet sich nach der Bewegungsrichtung des Pendels. Für die erste Phase der Bewegung vom rechten Startpunkt bis zum linken Umkehrpunkt gilt das negative Vorzeichen. Durch Trennung der Variablen kann obige Differentialgleichung prinzipiell gelöst werden. Man erhält

$$-\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\cos \varphi' - \cos \varphi_0}} = \sqrt{2}\omega_0 \int_0^t dt' = \sqrt{2}\omega_0 t$$

und damit das Bewegungsgesetz des Pendels in Form

$$t = t(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\cos \varphi' - \cos \varphi_0}}, \quad (2.29)$$

anstatt in der gewohnten Form $\varphi = \varphi(t)$. Leider gibt es für den Integranden keine durch elementare Funktionen darstellbare Stammfunktion. Es handelt sich um ein sog. elliptisches Integral, welches mit Hilfe des Computers zu lösen ist. In Abb. 2.11 ist das Bewegungsgesetz für eine Amplitude von $\varphi_0 = \pi/3$, also 60° , dargestellt zusammen mit der

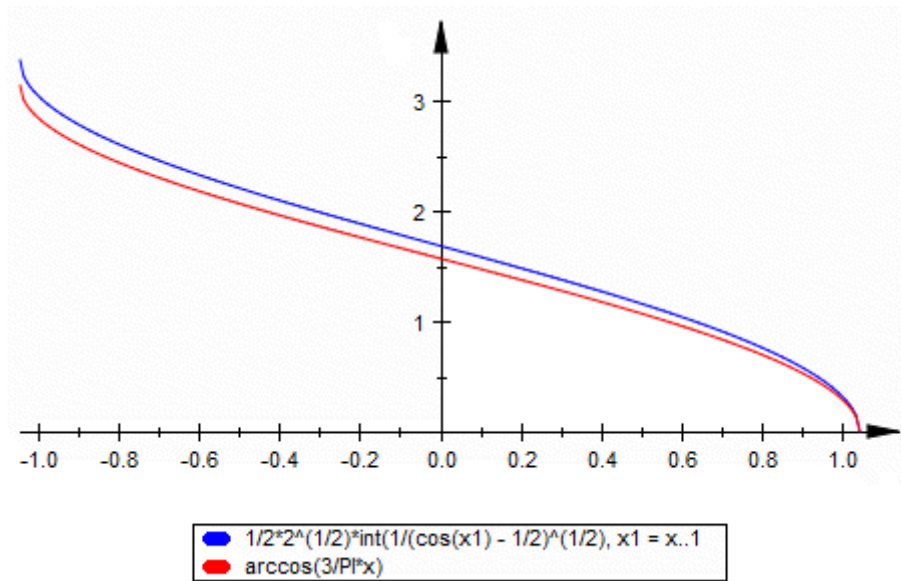


Abbildung 2.11: Bewegung des Schwebpendels (blau) bei einer Auslenkung von 60° im Vergleich zur Näherungslösung (rot). Auf der Abzisse ist der Auslenkungswinkel φ aufgetragen, auf der Ordinate $\omega_0 t$.

in Abschnitt 2.3.1 gefundenen Näherungslösung $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$. Der Vergleich zeigt, dass weniger die Form der Bewegung verschieden ist sondern vielmehr die Schwingungsdauer des Pendels bei der exakten Lösung gegenüber der Näherungslösung für kleine Auslenkungen verlängert ist. Aus (2.29) kann man die Schwingungsdauer T als

$$T = 2t(-\varphi_0) = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\cos \varphi' - \cos \varphi_0}}$$

berechnen. Die folgende Tabelle zeigt die relative Schwingungsdauer $T/T_0 = \omega_0 T / (2\pi)$ für verschiedene Auslenkungen:

φ_0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\omega_0 T}{2\pi}$	1.0174	1.0400	1.0732	1.1803	1.3729

Eine weitere Größe die nunmehr problemlos zu berechnen ist, ist die Seilkraft. Diese ergibt sich laut (2.2) als

$$S = mg \cos \varphi + ml \dot{\varphi}^2,$$

wobei wir nunmehr das Quadrat $\dot{\varphi}^2$ der Winkelgeschwindigkeit mit Hilfe von (2.28) als Funktion des Winkels φ darstellen und schließlich mit

$$S = mg \cos \varphi + 2mg [\cos \varphi - \cos \varphi_0] = mg [3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0]$$

die Seilkraft als Funktion der Position φ angeben können.

2. Energieverlust beim vollständig inelastischen Stoß

Wir betrachten erneut den in Abb. 2.7 gezeigten Stoßvorgang, bei dem zwei sich kräftefrei bewegende Körper mit Massen m_1 und m_2 mit anfänglichen Geschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 bei der Kollision zu einem Gesamtkörper der Masse $m_1 + m_2$ verschmelzen, welcher sich aufgrund der Impulserhaltung gemäß (2.19) mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

bewegt. Im Gegensatz zum Impuls bleibt bei diesem Vorgang die Energie nicht erhalten: Bei Abwesenheit äußerer Kräfte ist ausschließlich kinetische Energie vorhanden, die vor dem Stoß $E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2$ beträgt und danach $E' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)^{-1}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)^2$. Die Differenz

$$\begin{aligned} \Delta E &= E - E' = \frac{(m_1 + m_2)(m_1\vec{v}_1^2 + m_2\vec{v}_2^2) - (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \\ &= \frac{m_2m_1\vec{v}_1^2 + m_1m_2\vec{v}_2^2 - 2m_1m_2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{2(m_1 + m_2)} \\ &= \frac{m_1m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

ist für $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ immer positiv (der Fall $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ ist uninteressant, da es sich um keinen Stoß handelt), d.h. ein vollständig inelastischer Stoß bedeutet stets den Verlust mechanischer Energie. Dies zeigt, dass beim Stoßvorgang selbst Mechanismen wirken müssen, die mechanische Energie aufzehren und in andere Energieformen umwandeln. Dies können Reibungsmechanismen oder Verformungsvorgänge sein, aber auch Veränderungen der inneren Konfiguration wie sie beispielsweise beim Einfang eines Neutrons durch einen Atomkern hervorgerufen werden. Da jedoch der für den Energieverlust verantwortliche Mechanismus gar nicht in obige Berechnung eingeht, gilt der gemäß (2.30) ausgewiesene Energieverlust beim inelastischen Stoß universell, d.h. unabhängig von den Details des Stoßvorgangs.

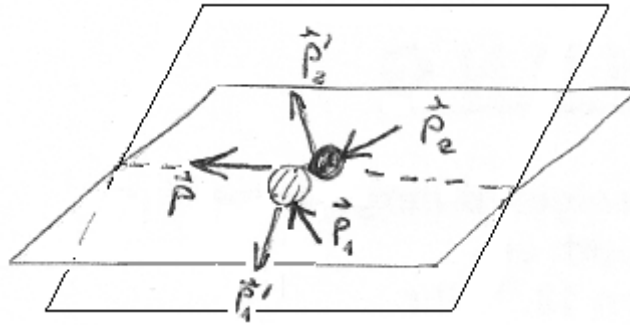


Abbildung 2.12: Elastischer Stoß.

3. Elastischer Stoß

Unter einem (vollständig) elastischen Stoß versteht man einen Stoßvorgang zwischen zwei Objekten mit Massen m_1 und m_2 und anfänglichen Geschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 , bei dem nicht nur der Impuls sondern auch die mechanische Energie erhalten bleibt. Im Gegensatz zu dem zuvor behandelten vollständig inelastischen Stoß bleiben die beiden Stoßpartner nach dem Stoß nicht zusammen, sondern bewegen sich mit in der Regel unterschiedlichen Geschwindigkeiten in unterschiedliche Richtungen, d.h. für deren Geschwindigkeitsvektoren nach dem Stoß gelte $\vec{v}_1' \neq \vec{v}_2'$. Zu erfüllen sind Impuls- und Energieerhaltung, d.h.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{p} = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2', \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = E = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^2, \quad (2.32)$$

wobei \vec{p} den konstanten Gesamtimpuls und E die konstante Gesamtenergie bezeichnet. Dieses Gleichungssystem aus einer vektoriellen und einer skalaren Gleichung reicht jedoch allein noch nicht aus, um die beiden vektoriellen Unbekannten \vec{v}_1' und \vec{v}_2' eindeutig festzulegen. Das liegt daran, dass außer den beiden Erhaltungssätzen außerdem gewisse Details des Stoßvorgangs eine gewichtige Rolle spielen, die etwa mit der Form der stoßenden Körper, deren Orientierung und mit der Lage des Berührungspunkts beim Stoß zusammenhängen. Es ist insbesondere möglich, dass, wie in Abb. 2.12 gezeigt, die Geschwindigkeitsvektoren \vec{v}_1' und \vec{v}_2' nach dem Stoß in einer anderen Ebene liegen als die Geschwindigkeitsvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 vor dem Stoß. Die Impulsbilanz (2.31) verlangt lediglich, dass der Gesamtimpuls \vec{p} in Richtung der Schnittlinie beider Ebenen liegt. Der allgemeine elastische Stoß ist somit ein dreidimensionaler Vorgang.

Eine gravierende Vereinfachung ergibt sich für den Spezialfall $\vec{p} = \vec{0}$,

da dann aus (2.31) sofort

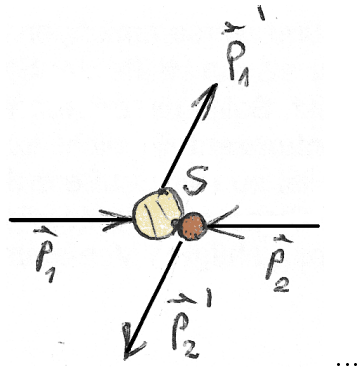
$$\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 = -m_1 \vec{v}_1 = -\vec{p}_1 \quad (2.33)$$

$$\vec{p}_2' = m_2 \vec{v}_2' = -m_1 \vec{v}_1' = -\vec{p}_1' \quad (2.34)$$

folgt und somit nur zwei der vier Impulsvektoren \vec{p}_1 , \vec{p}_2 , \vec{p}_1' und \vec{p}_2' linear unabhängig sind, so dass man den Vorgang in einer Ebene und somit zweidimensional behandeln kann. Nun bedeutet $\vec{p} = \vec{0}$ lediglich, dass der Impuls der Schwerpunktbewegung verschwindet, was aber durch einen Wechsel des Bezugssystems (Galilei-Transformation), also aus der Sicht eines sich mit dem Schwerpunkt mitbewegenden Beobachters immer erreicht werden kann. Das Bezugssystem des sich mitbewegenden Beobachters nennt man *Schwerpunktsystem*. Durch einsetzen von $\vec{v}_2 = -m_1 \vec{v}_1 / m_2$ und $\vec{v}_2' = -m_1 \vec{v}_1' / m_2$ in die Energiebilanz (2.32) erhält man

$$\frac{m_1}{2} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \vec{v}_1^2 = \frac{m_1}{2} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \vec{v}_1'^2,$$

woraus sofort $|\vec{v}_1'| = |\vec{v}_1|$ folgt, so dass sich folglich der Betrag der Geschwindigkeit des Körpers 1 durch den Stoß nicht ändert. Gleiches gilt natürlich analog für den Körper 2, also $|\vec{v}_2'| = |\vec{v}_2|$. Damit bleibt zugleich nicht nur die Gesamtenergie des Systems erhalten, sondern es findet — zumindest im Schwerpunktsystem — kein Energieübertrag von einem zum anderen Körper statt.



4. Vorbeiflug einer Raumsonde an einem Planeten

...

Kapitel 3

Lagrangesche Beschreibung der Mechanik

Da Variationsprobleme obgleich sie mathematisch keineswegs anspruchsvoller sind als der Umgang mit Differentialgleichungen, ein den meisten Lesern ungewohntes Denken abverlangen, soll in diesem Kapitel ein an anhand einfacher Beispiele motivierter Zugang zur Variationsrechnung vermittelt werden. Dabei hilft das Fermatsche Prinzip, obgleich dieses zunächst nichts mit der Mechanik zu tun hat, sondern den Strahlengang in optischen Systemen beschreibt. Im Gegensatz zum Hamiltonschen Prinzip in der Mechanik ist jedoch das Fermatsche Prinzip anschaulich leichter zu vermitteln. Der anschließende Übergang von der Optik zur Mechanik aufgrund der mathematischen Analogie sollte dann kein gravierendes Verständnisproblem darstellen.

3.1 Eine Einführung in die Variationsrechnung — Das Fermatsche Prinzip

3.1.1 Der Rettungsschwimmer

Ein an Land stehender Rettungsschwimmer (R) versucht auf schnellstem Wege zu einem Nichtschwimmer (N) zu gelangen, der zu ertrinken droht (s. Bild 3.1). Dabei ist allerdings zu beachten, dass er sich an Land mit einer um den Faktor n höheren Geschwindigkeit bewegen kann als im Wasser. Gäbe es keinen Geschwindigkeitsunterschied, so wäre die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten R und N, also die beide Punkte verbindende Gerade, zugleich auch die schnellste. Da aber die Geschwindigkeit im Wasser

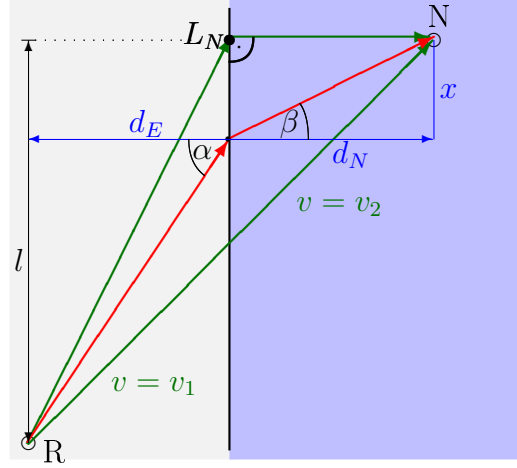


Abbildung 3.1: Ausgangssituation für den Rettungsschwimmer und drei mögliche Rettungswege.

vermindert ist, ist es möglicherweise günstiger, den Weg durch das Wasser zu minimieren. Dazu müsste der Rettungsschwimmer zuerst zum Punkt L_N laufen, bei welchem das Lot vom Nichtschwimmer aus auf die Küstenlinie trifft, um anschließend die kleinstmögliche Strecke d_N schwimmend zurücklegen zu müssen. Beide möglichen Wege, also der kürzeste Gesamtweg und der kürzeste Weg durch Wasser, sind in Bild 3.1 grün gekennzeichnet.

Der tatsächlich schnellste Weg aber, in Bild 3.1 rot gekennzeichnet, liegt zwischen den beiden zuvor genannten, wie im folgenden gezeigt wird: Steuert der Rettungsschwimmer zunächst einen Punkt der Küstenlinie mit Abstand x vom Lotpunkt L_N des Nichtschwimmers an, so legt er zunächst eine Strecke $\sqrt{d_E^2 + (l - x)^2}$ laufend zurück, wobei d_E seinen anfänglichen Abstand von der Küstenlinie und l den Abstand seines eigenen Lotpunktes L_R von dem des Nichtschwimmers, L_N , bezeichnet. Der Rest der Strecke, also $\sqrt{d_N^2 + x^2}$, ist schwimmend mit einer Geschwindigkeit v_0 zurückzulegen, so dass die Zeit bis zum Erreichen des Ziels

$$t = t(x) = \frac{1}{nv_0} \sqrt{d_E^2 + (l - x)^2} + \frac{1}{v_0} \sqrt{d_N^2 + x^2}$$

beträgt. Die Auffindung derjenigen Position x , für welche t minimal wird, entspricht mathematisch einer Extremwertbestimmung, also

$$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_0} \left[-\frac{1}{n} \frac{l - x}{\sqrt{d_E^2 + (l - x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{d_N^2 + x^2}} \right],$$

was sich durch Einführung der beiden Hilfswinkel α und β (s. Bild 3.1) kompakter als

$$0 = \frac{1}{v_0} \left[-\frac{1}{n} \sin \alpha + \sin \beta \right]$$

schreiben lässt, oder noch besser als

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n. \quad (3.1)$$

3.1.2 Das Feuerwehrauto

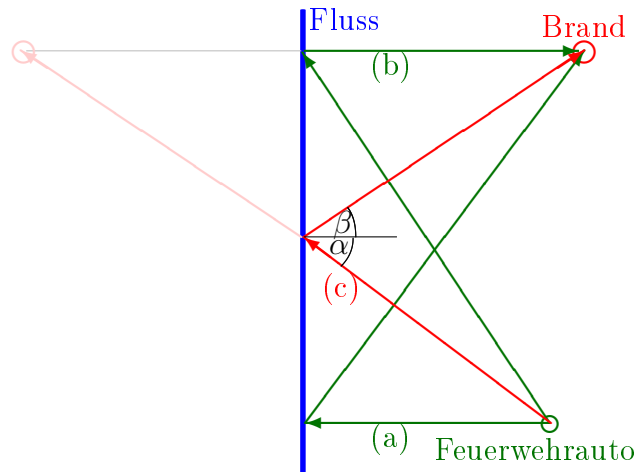


Abbildung 3.2: Ausgangssituation für das Feuerwehrteam und drei mögliche Wege für das Auto.

Ein Team von Feuerwehrleuten soll einen Brand löschen. Zuvor muss jedoch der leere Tank des Feuerwehrautos mit Wasser aufgefüllt werden, was an einem nahegelegenen Fluss geschehen kann (s. Bild 3.2). Dabei wird angenommen, dass sich das Feuerwehrauto mit gegebener Geschwindigkeit (v_0) durch jede Stelle des ebenen Geländes bewegen kann. Welche Stelle am Flussufer sollten die Feuerwehrleute ansteuern, damit so wenig Zeit wie möglich verloren wird? Diese Fragestellung lässt sich noch leichter zu beantworten als die vorangegangene, indem man sich die Position des zu löschenden Brandes am Flußlauf gespiegelt vorstellt. In diesem Fall ist das Erreichen der gespiegelten Position mit gleichem Zeitaufwand verbunden wie das Erreichen des tatsächlichen Brandes. Da aber bekannter Weise die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten die gerade Linie ist, ergibt sich der gesuchte Punkt als Schnittpunkt des Flußlaufs mit der Verbindungsline zwischen Ausgangsposition des

Feuerwehrautos und der gespiegelten Position des Brandes. Insbesondere impliziert diese Betrachtung die Gleichheit

$$\alpha = \beta$$

der beiden Winkel.

3.1.3 Fermatsches Prinzip

Die beiden geometrischen Gesetzmäßigkeiten, die sich wie oben gezeigt aus Zeitminimierungsaufgaben ergeben haben, stimmen identisch mit dem aus der geometrischen Optik bekannten Brechungsgesetz für Lichtstrahlen durch Grenzflächen und mit dem Reflexionsgesetz an einer spiegelnden Fläche überein. Diese Übereinstimmung fiel bereits im 18. Jh. dem französischen Mathematiker Pierre de Fermat auf, der daraufhin sein bekanntes Prinzip zum Strahlengang des Lichts in optischen Systemen formulierte: *Bei vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt folgt das Licht stets demjenigen Strahlengang, der sich von allen denkbaren alternativen Strahlengängen durch eine Minimierung der Laufzeit des Lichtes auszeichnet.*

Offensichtlich verhält sich der Rettungsschwimmer aus 3.1.1 genauso wie ein Lichtstrahl, der von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium eintritt. Auf diese Weise kann *Snellius'sche Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \tag{3.2}$$

direkt aus dem Fermatschen Prinzip hergeleitet werden. Ebenso ist die Bedingung $\alpha = \beta$ für die Feuerwehrleute in 3.1.2 nichts anderes als das aus der Optik bekannte *Reflexionsgesetz*. Tatsächlich kann die gesamte geometrische Optik auf das Fermatsche Prinzip zurückgeführt werden.

3.2 Übertragung auf die Mechanik: Das Hamiltonsche Prinzip

Es stellt sich die Frage, ob auch die Gesetze der Mechanik aus einem Variationsprinzip hergeleitet werden können. Zumindest für Systeme mit ausschließlich konservativen Kräften ist dies mit dem Hamiltonschen Prinzip gelungen.

Wir betrachten ein konservatives System mit N Bewegungsfreiheitsgraden, dessen Konfiguration durch sog. *generalisierte Koordinaten* $q_i = q_i(t)$ gegeben sei. Diese können beispielsweise Längen- oder Winkelangaben sein. Die bisher betrachteten Kartesischen Koordinaten sind ebenso wie Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten Spezialfälle von generalisierten Koordinaten. Wir benötigen ferner die Kenntnis der gesamten kinetischen Energie

$$T = T(q_i, \dot{q}_i)$$

des Systems sowie diejenige der gesamten potentiellen Energie

$$U = U(q_i) .$$

Damit ist es möglich, eine Funktion

$$L(q_i, \dot{q}_i) := T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i)$$

zu definieren, die sog. *Lagrangefunktion*. Wir setzen schließlich voraus, dass Anfangskonfiguration $q_i(t_1)$ und Endkonfiguration $q_i(t_2)$ des zu betrachteten Systems zu den jeweiligen Zeitpunkten t_1 und t_2 fest vorgegeben seien. Der reale Prozess $q(t)$, der innerhalb des vorgegebenen Zeitintervalls abläuft, ist dann durch das *Hamiltonsche Prinzip*

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt = \text{Extremum}$$

gegenüber anderen, fiktiven, oder wie man üblicherweise sagt: virtuellen Prozessen ausgezeichnet. Man müsste also — bildlich gesprochen — alle denkbaren Prozesse mit vorgegebenem Anfangs- und Endzustand in obiges Variationsproblem einsetzen und nach einem Extremum Ausschau halten, um zu beurteilen welcher der real stattfindende Prozess ist. Da es für den Prozessablauf aber unendlich viele Möglichkeiten gibt, ist natürlich nicht machbar. Stattdessen werden, wie im folgenden gezeigt, die notwendigen Bedingungen für die Erfüllung des Hamiltonschen Prinzips in Form von vertrauten Differentialgleichungen hergeleitet.

Das Hamiltonsche Prinzip hat den Status eines Axioms, welches an die Stelle des zweiten Newtonschen Axioms tritt.

3.3 Euler–Lagrange–Gleichungen

Üblicherweise findet man Extrema, indem man die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt. Dies gilt zumindest für einfache Funktionen, also Abbildungen, die einer Zahl eine andere Zahl zuordnen. Das Hamiltonsche Prinzip

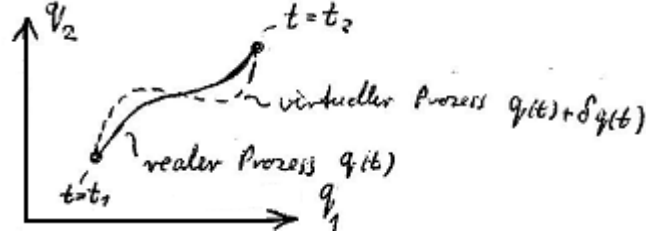


Abbildung 3.3: Realer und virtueller Prozess mit festem Anfangs- und Endzustand.

beinhaltet jedoch eine Abbildung, die N Funktionen $q_i(t)$ eine Zahl zuordnet. Eine solche Abbildung nennt man ein *Funktional* und deren Ableitung eine *Funktionalableitung*. Da die Funktionalanalysis bzw. die Variationsrechnung nicht Bestandteil der standardmäßigen Ingenieurmathematik ist, ist im Folgenden eine ausführliche Herleitung erforderlich.

Wir nehmen an, dass durch $q_i(t)$ der durch das Hamiltonsche Prinzip ausgezeichnete reale Prozess gegeben sei und addieren hierzu nun eine beliebige Variation $\delta q_i(t)$, die zu einem virtuellen Prozess $q_i(t) + \delta q_i(t)$ führt, der nicht durch das Hamiltonsche Prinzip ausgezeichnet ist, wie in Abb. 3.3 exemplarisch für den Fall zweier Freiheitsgrade $N = 2$ dargestellt. Laut Voraussetzung sind Anfangs- und Endzustand nicht zu variieren, d.h.

$$\delta q_i(t_1) = 0, \quad (3.3)$$

$$\delta q_i(t_2) = 0. \quad (3.4)$$

Wir beschränken uns ferner auf beliebig kleine Variationen und entwickeln die Lagrangefunktion für den virtuellen Prozess nach Taylor, d.h.

$$\begin{aligned} & L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) \\ &= L(q_i, \dot{q}_i) + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] + \dots \\ &= L(q_i, \dot{q}_i) + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] + \dots, \end{aligned} \quad (3.5)$$

wobei außerdem im letzten Schritt die Produktregel der Differentiation angewendet worden ist. Die vernachlässigten Terme sind mindestens quadratisch in den Variationen δq_i und somit beliebig klein gegenüber den führenden Termen. Bildet man nun das Integral von (3.5) über das gesamte Zeitintervall

zwischen t_1 und t_2 , so entfällt

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} = 0$$

aufgrund des Verschwindens der Variation am Anfangs- und Endzeitpunkt gemäß (3.3, 3.4). Übrig bleibt dagegen eine Gleichung der Form

$$I_{\text{virt}} = I_{\text{real}} + I_{\text{Var}} + I_{\text{Rest}} , \quad (3.6)$$

wobei die Abkürzungen

$$\begin{aligned} I_{\text{virt}} &:= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) dt \\ I_{\text{real}} &:= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt \\ I_{\text{Var}} &:= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt \end{aligned}$$

für eine bessere Übersichtlichkeit sorgen und unter I_{Rest} alle nicht berücksichtigten Restterme zusammengefasst sind. Nun ist das dem realen Prozess zugeordnete Integral I_{real} extremal, d.h. minimal oder maximal.

1. Falls ein Minimum vorliegt, muss $I_{\text{virt}} > I_{\text{real}}$, also $I_{\text{virt}} - I_{\text{real}} = I_{\text{Var}} + I_{\text{Rest}} > 0$ und somit $I_{\text{Rest}} > -I_{\text{Var}}$ gelten. Daraus wiederum folgt $I_{\text{Var}} \geq 0$, denn würde man $I_{\text{Var}} \leq 0$ annehmen, so würde aus $I_{\text{Rest}} > -I_{\text{Var}}$ zwangsläufig $I_{\text{Rest}} > |I_{\text{Var}}|$ folgen. Da aber I_{Rest} quadratisch von der Variation abhängt, I_{Var} jedoch nur linear, hat eine Verkleinerung der Variation um den Faktor M zur Folge, dass sich I_{Rest} um den Faktor M^2 verkleinert, I_{Var} dagegen nur um den Faktor M , so dass obige Ungleichung in $I_{\text{Rest}} > M |I_{\text{Var}}|$ übergeht. Da wir M beliebig groß wählen können, muss zwingend $I_{\text{Var}} = 0$ gelten, damit obige Ungleichung gültig bleibt. Den Fall $I_{\text{Var}} > 0$ kann man wiederum dadurch ausschließen, dass man das Vorzeichen der Variation δq_i umkehrt, also $\delta q_i \rightarrow -\delta q_i$. Dann kehrt sich nämlich auch das Vorzeichen von I_{Var} um, so dass der Fall $I_{\text{Var}} > 0$ auf den bereits ausgeschlossenen Fall $I_{\text{Var}} < 0$ zurückgeführt werden kann.

2. Im Falle eines Maximums, also $I_{\text{virt}} < I_{\text{real}}$ und damit $I_{\text{virt}} - I_{\text{real}} = I_{\text{Var}} + I_{\text{Rest}} < 0$, gilt $-I_{\text{Rest}} > I_{\text{Var}}$. Hier führt die Annahme $I_{\text{Var}} \geq 0$ auf die Ungleichung $-I_{\text{Rest}} > |I_{\text{Var}}|$ und die Verkleinerung der Variation um den Faktor M auf die modifizierte Ungleichung $-I_{\text{Rest}} > M |I_{\text{Var}}|$. Damit diese auch für beliebig große Faktoren M gültig bleibt, muss $I_{\text{Var}} = 0$ ein. Die alternative Annahme $I_{\text{Var}} < 0$ kann durch Vorzeichenumkehr $\delta q_i \rightarrow -\delta q_i$ bei der Variation wieder auf den bereits ausgeschlossenen Fall $I_{\text{Var}} > 0$ zurückgeführt werden.

Die Konsequenz aus obigen Erwägungen ist, dass zwingend

$$I_{\text{Var}} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0$$

als notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt sein muss. Da allerdings die Variation δq_i abgesehen von der Festlegung (3.3, 3.4) vollkommen beliebig gewählt werden kann, folgt das Verschwinden der Ausdrücke in den eckigen Klammern. Der Beweis erfolgt indirekt: Falls auch nur einer der Terme in eckigen Klammern für ein bestimmtes i nicht Null ergibt, so kann man die zugeordnete Variation δq_i so wählen, dass diese zu jedem Zeitpunkt das gleiche Vorzeichen besitzt. Dann aber ergäbe obiges Integral einen positiven Wert, was ein Widerspruch darstellt. Somit ist die Gegenannahme falsch und die Behauptung

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

bewiesen. Dies ist ein System von N Differentialgleichungen von maximal zweiter Ordnung für N unbekannte Funktionen $q_i(t)$. Man nennt diese Gleichungen die *Euler–Lagrange–Gleichungen* des Systems. Diese sind äquivalent zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen, was hier jedoch nicht bewiesen werden soll.

3.4 Beispiele

3.4.1 Masse–Feder–Schwinger

Wir betrachten eine an einer Feder (Federkonstante C , entspannte Federlänge l_0) hängende Masse m als Beispiel für ein einfaches System mit nur einem kinematischen Freiheitsgrad $q_1 = x$, indem wir nur die longitudinale Bewegung in vertikaler Richtung betrachten, siehe Lageplan in Abb. 3.4.

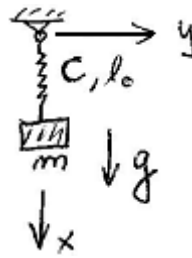


Abbildung 3.4: Lageplan eines Masse–Feder–Schwinger unter Einfluss der Schwerkraft.

Zur Aufstellung der Lagrangfunktion werden kinetische und potentielle Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 \\ U &= -mgx + \frac{C}{2} (x - l_0)^2 \end{aligned}$$

benötigt, der Rest ist „Kochrezept“, angefangen mit der Lagrangfunktion

$$L(x, \dot{x}) = T - U = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + mgx - \frac{C}{2} (x - l_0)^2. \quad (3.8)$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= mg - C(x - l_0) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \end{aligned}$$

ermittelt sich die Euler–Lagrange–Gleichung als

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = mg - C(x - l_0) - m\ddot{x},$$

was man auch zu

$$m\ddot{x} = mg - C(x - l_0)$$

umformen kann. Man erkennt, dass diese Gleichung identisch mit der Newtonschen Bewegungsgleichung ist.

Obige Gleichung lässt sich durch die Substitution

$$X := x - l_0 - \frac{g}{\omega_0^2}$$

und mit der Abkürzung

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{C}{m}}$$

auf die Form

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

gebracht werden. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist bekannt und wird in Anhang A.1 ausführlich behandelt.

3.5 Geführte Bewegungen

3.5.1 Kinematik der Führung

Zahlreiche Bewegungen verlaufen nicht frei, sondern geführt, beispielsweise durch Seile oder Schienen. Dabei sorgt die jeweilige Führung für einen *kinematischen Zwang*, also eine definierte Beziehung zwischen den Koordinaten der Bewegung, welcher mathematisch mit einer Funktion F der generalisierten Koordinaten als

$$F(q_i, t) = 0 \tag{3.9}$$

geschrieben werden kann. Durch diese wird implizit diejenige Fläche oder Kurve im Raum definiert, auf welcher sich Massenpunkte bewegen können. Als Beispiel betrachten wir eine ebene Bewegung auf einer Kreislinie mit Radius r_0 um einen Mittelpunkt (x_0, y_0) . In Kartesischen Koordinaten lautet die Darstellung des Kreises

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_0^2,$$

was man auch auf die Form (3.9) bringen kann als

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_0^2 = 0.$$

Durch Vergleich ergibt sich die Funktion F somit als

$$F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_0^2.$$

Die Wahl der Funktion F ist meist nicht eindeutig. Im vorliegenden Fall kann man den Kreis alternativ auch in der Form $|y - y_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 - r_0^2}$ schreiben und somit $\tilde{F}(x, y) = |y - y_0| - \sqrt{(x - x_0)^2 - r_0^2}$ anstelle obiger Funktion F verwenden. Selbstverständlich aber wählt man immer eine möglichst einfache Darstellung, so dass man das zuvor definierte F dem \tilde{F} vorziehen würde.

Auch die Wahl der Koordinaten spielt hier eine Rolle. Eine Kreisbewegung um den Koordinatenurprung würde man sinnvollerweise eher in Polarkoordinaten r und φ darstellen, da hier die kinematische Zwangsbedingung einfach $r = r_0$ lautet, was man wiederum als $r - r_0 = 0$ in die Form (3.9) bringen und somit

$$F(r) = r - r_0$$

als die Führung festlegende Funktion definieren kann.

Die Tatsache, dass die Funktion F in (3.9) sogar explizit von der Zeit abhängen könnte, trägt der Möglichkeit Rechnung, dass die starre Führung im allgemeinen Fall sogar beweglich und damit zeitlich veränderlich sein kann.

3.5.2 Dynamik mit Führung

Wir wissen bereits, dass eine starre Führung bei Abwesenheit von Reibung auf den sich bewegenden Massenpunkt Zwangskräfte ausübt, die senkrecht zur Führung und damit senkrecht zur Bewegungsrichtung wirken. Solche Kräfte leisten keine Arbeit und treten daher in keiner Form von Energie in Erscheinung. Damit aber enthält die Lagrangefunktion der freien Bewegung, also die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie, keinerlei Information über die Führung der Bewegung, welche durch eine Nebenbedingung der Form (3.9) festgelegt sei. Folgende Ergänzung

$$L(q_i, \dot{q}_i, \lambda, t) := T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i) + \lambda F(q_i, t) \quad (3.10)$$

liefert dagegen eine Lagrangefunktion, die der kinematischen Führung Rechnung trägt. Die neu eingeführte Unbekannte $\lambda = \lambda(t)$ heißt *Lagrange-Multiplikator*. Dessen physikalische Bedeutung wird geklärt, indem wir die Euler–Lagrange–Gleichungen berechnen: Der Übersichtlichkeit halber benutzen wir

$$L_0(q_i, \dot{q}_i) := T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i)$$

als Abkürzung für die Lagrangefunktion der freien Bewegung, die ohne die kinematische Führung stattfände. Dann lauten die Euler–Lagrange–Gleichungen (3.7) für die Lagrangefunktion (3.10)

$$\delta q_i : 0 = \frac{\partial L_0}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} \right) + \lambda \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad (3.11)$$

$$\delta \lambda : 0 = F(q_i, t). \quad (3.12)$$

Die letzte Gleichung (3.12), die sich aus der Variation bezüglich λ ergibt, ist die Reproduktion der kinematischen Zwangsbedingung, welche somit tatsächlich im Rahmen der Variation berücksichtigt wird. Die übrigen Gleichungen

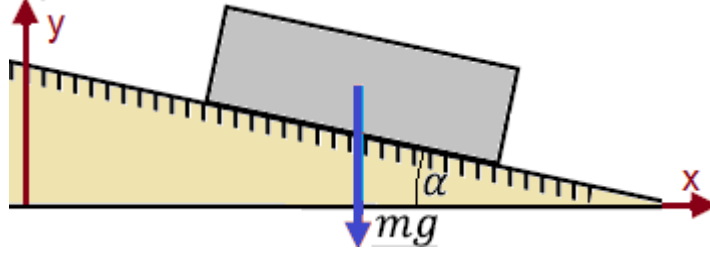


Abbildung 3.5: Körper auf schiefer Ebene.

(3.11) sind gegenüber denjenigen für die freie Bewegung um einen zusätzlichen Term

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad (3.13)$$

erweitert. Dieser stellt eine Kraft dar, die zusätzlich zu den bereits vorhandenen eingprägten Kräften wirkt. Es müsste sich nach unserem bisherigem Verständnis also um die Zwangskraft handeln, die von der starren Führung ausgeht. Dass dies tatsächlich der Fall ist, erkennt man am besten unter Verwendung kartesischer Koordinaten: Dann nämlich sind

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}$$

die drei Kartesischen Komponenten des Gradienten der Funktion F . Da die kinematische Zwangsbedingung $F(x, y, z) = 0$ mathematisch gesehen die Bewegung des Massenpunktes auf eine Iso-Fläche der Funktion F festlegt, zeigt der Gradient von F genau senkrecht zu der Fläche, innerhalb derer die Bewegung stattfindet, so dass die Richtung der durch (3.13) gegebenen Zwangskraft in der Tat senkrecht zur Bewegung gerichtet ist, wie es sein soll. Der Betrag der Zwangskraft dagegen berechnet sich als

$$|\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

und ist daher eine Unbekannte, die sich erst durch Lösen der Gleichungen (3.11) ergibt. Auch dies stimmt mit der Beschreibung der Dynamik durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen überein.

Als einfaches Beispiel betrachten wir einen Körper (Masse m), der eine um den Winkel α gegen die Horizontale geneigte schiefe Ebene unter dem Einfluss der Schwerkraft hinabgleitet (Abb. 3.5). Für diesen gilt:

$$\begin{aligned}
T(\dot{x}, \dot{y}) &= \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] , \\
U(y) &= mgy , \\
F(x, y) &= y + (\tan \alpha) x - h ,
\end{aligned}$$

wobei h die Höhe des Körperschwerpunktes bezeichnet, wenn dieser in der Position $x = 0$ mit der Bewegung startet. Die Lagrangefunktion des Systems lautet dann

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \lambda) = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] - mgy + \lambda [y + (\tan \alpha) x - h] .$$

Die Euler–Lagrange–Gleichungen berechnen sich daraus gemäß (3.7) als

$$\delta x : 0 = -m\ddot{x} + \lambda \tan \alpha , \quad (3.14)$$

$$\delta y : 0 = -m\ddot{y} - mg + \lambda , \quad (3.15)$$

$$\delta \lambda : 0 = y + (\tan \alpha) x - h . \quad (3.16)$$

Leitet man die dritte Gleichung (3.16) zweimal nach der Zeit ab, so lässt sich $\ddot{y} = -(\tan \alpha) \ddot{x}$ gewinnen und in die Gleichung (3.15) einsetzen, welche nun

$$0 = m(\tan \alpha) \ddot{x} - mg + \lambda$$

lautet. Bildet man die Summe aus dieser und aus der zuvor mit $\tan \alpha$ multiplizierten Gleichung (3.14), so ergibt sich

$$0 = -mg + (1 + \tan^2 \alpha) \lambda = -mg + \frac{\lambda}{\cos^2 \alpha}$$

und daraus die Lösung für den Lagrange–Multiplikator

$$\lambda = mg \cos^2 \alpha .$$

Setzt man diese in die übrigen beiden Gleichungen ein, so ergeben sich die einfachen Gleichungen

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= mg \cos \alpha \sin \alpha , \\
m\ddot{y} &= -mg \sin^2 \alpha ,
\end{aligned}$$

welche sich sofort zweimal integrieren lassen zu

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}g \cos \alpha \sin \alpha t^2 , \\
y &= y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}g \sin^2 \alpha t^2 .
\end{aligned}$$

Die vier Integrationskonstanten ergeben sich aus den Anfangsbedingungen als $x_0 = 0$, $y_0 = h$, $v_{x0} = v_{y0} = 0$, also

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}g \cos \alpha \sin^2 \alpha t^2, \\y &= h - \frac{1}{2}g \sin^2 \alpha t^2.\end{aligned}$$

Die Zwangskraft (Normalkraft) ist laut (3.11, 3.12) als $\vec{F}_z = \lambda \tan \alpha \vec{e}_x + \lambda \vec{e}_y$ gegeben. Deren Betrag ist somit

$$F_z = \left| \vec{F}_z \right| = \lambda \sqrt{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\lambda}{\cos \alpha} = mg \cos \alpha.$$

3.6 Ritzsches Verfahren

Durch die bisherige Prozedur, das Aufstellen der Lagrangefunktion und die anschließende Ermittlung der Euler–Lagrange–Gleichungen, benutzen wir das Hamiltonsche Prinzip lediglich als elegantes Mittel zum Zweck, um letztlich die Newtonschen Gleichungen auf einem anderen Weg, nämlich über Energieausdrücke, zu gewinnen. Das Hamiltonsche Prinzip hat als alternative mathematische Formulierung der Dynamik aber auch einige Vorzüge, von denen bisher kein Gebrauch gemacht worden ist. Dies soll nun nachgeholt werden.

Sucht man nach einer direkten Lösung des Hamiltonschen Prinzips, so steht man zunächst vor einer vermeindlich unlösbaren Aufgabe: Unter allen denkbaren Prozessverläufen ist derjenige zu finden, für welchen das Integral über die Lagrangefunktion ein Extremum oder einen Sattelpunkt annimmt. Das bedeutet ja nichts anderes, als dass man *alle* Funktionen, die zu der gegebenen Anfangs- und Endkonfiguration passen, ausprobieren müsste. Da es unendlich viele Funktionen gibt, ist dies kein praktikabler Weg.

Wenn man allerdings mit einer Näherungslösung zufrieden ist, so probiert man nicht alle Funktionen aus, sondern nur einige „hoffnungsvolle Kandidaten“, d.h. man konstruiert einen Ansatz für die Bewegung, dessen qualitative Form aus Vorüberlegungen und Vorwissen motiviert ist und lässt bei dem Ansatz eine gewisse Zahl M von Parametern offen, die im Rahmen der Variation angepasst so werden, dass das Hamiltonsche Prinzip bestmöglich erfüllt wird. Da hier nur noch M freie Parameter in Erscheinung treten, führt dies auf ein algebraisches Gleichungssystem für diese Parameter.

Das Ritzsche Verfahren lässt sich nur schwer theoretisch vermitteln. Deshalb wird es im Folgenden an einem Beispiel demonstriert:

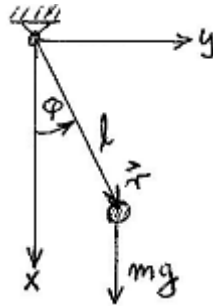


Abbildung 3.6: Schwerependel.

3.6.1 Frequenzverschiebung beim Schwerependel

Dieses System ist schon zweimal behandelt worden: Mit Newtonschen Bewegungsgleichungen im Kap. 2.3.1, die auf eine mit konventionellen Methoden nicht lösbare nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung führten, für welche jedoch zumindest die Näherungslösung

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t) \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l}}\end{aligned}\tag{3.17}$$

für kleine Amplituden $\hat{\varphi}$ gefunden werden konnte und mit dem Energiesatz in Kap. 2.4.5, was zu einer impliziten Lösung mit einem elliptischen Integral führte. Da es zwar eine exakte Lösung gibt, diese aber recht unpraktikabel ist, suchen wir nach einer verbesserten Näherungslösung. Da wir bereits wissen, dass sich die Schwingungsfrequenz des Pendels bei größeren Amplituden verändert, modifizieren wir die Näherungslösung (3.17), indem wir die feste Frequenz ω_0 durch eine variable Frequenz ω ersetzen, also

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega t) .\tag{3.18}$$

Dieser Ansatz hat zwei Parameter $\hat{\varphi}$ und ω . Da aber das Hamiltonsche Prinzip feste Anfangs- und Endwerte für φ zu festen Zeiten t_1 und t_2 verlangt, darf die Frequenz ω nicht variiert werden. Daher werden wir ω vorgeben und die Amplitude $\hat{\varphi}$ als zu variierenden Parameter wählen. Obgleich die reale Pendelschwingung keine harmonische Form besitzt, können wir nun bei gegebener Frequenz diejenige Amplitude $\hat{\varphi}$ bestimmen, für die das Hamiltonsche Prinzip mit dem Ansatz (3.18) bestmöglich erfüllt ist.

Hierzu benötigt man zuerst kinetische und Potentielle Energie, wie sich aus

Kap. 2.4.5 bereits bekannt sind, also

$$\begin{aligned} T &= \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2, \\ U &= U_0 - mgl \cos \varphi, \end{aligned}$$

wobei wir der Einfachheit halber $U_0 = 0$ setzen. Daraus ergibt sich die Lagrange-funktion als

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Das Hamiltonsche Prinzip wird nun zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 betrachtet, an denen die Position des Pendels bekannt ist. Dafür kommen, da ja die Amplitude $\hat{\varphi}$ unbekannt ist, nur zwei Nulldurchgänge in Frage. Wir wählen

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{\pi}{2\omega}, \\ t_2 &= +\frac{\pi}{2\omega}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Ritzschen Ansatzes (3.18) und mit Substitution $\tau = \omega t$ folgt schließlich

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} L(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \right] dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \left[\frac{ml^2}{2} (-\hat{\varphi}\omega \sin(\omega t))^2 + mgl \cos(\hat{\varphi} \cos(\omega t)) \right] dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{ml^2 \hat{\varphi}^2 \omega}{2} \sin^2 \tau + \frac{mgl}{\omega} \cos(\hat{\varphi} \cos \tau) \right] d\tau \\ &= \frac{ml^2 \hat{\varphi}^2 \omega}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \tau d\tau + \frac{mgl}{\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\hat{\varphi} \cos \tau) d\tau, \end{aligned}$$

wobei sich die hier verbleibenden Integrale als

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \tau \, d\tau = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\hat{\varphi} \cos \tau) \, d\tau = \pi J_0(\hat{\varphi})$$

ergeben. Die Funktion $J_0(\hat{\varphi})$ ist nicht durch andere, elementare Funktionen darstellbar. Es handelt sich um die sog. *Bessel-Funktion nullter Ordnung*. Für nicht allzu große Amplituden besteht die Möglichkeit, $J_0(\hat{\varphi})$ per Taylor-Entwicklung näherungsweise als

$$\begin{aligned} J_0(\hat{\varphi}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\hat{\varphi} \cos \tau) \, d\tau \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{\hat{\varphi}^2}{2} \cos^2 \tau + \frac{\hat{\varphi}^4}{24} \cos^4 \tau - \dots \right] d\tau \\ &= 1 - \frac{\hat{\varphi}^2}{4} + \frac{\hat{\varphi}^4}{96\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos(2\tau)]^2 d\tau - \dots \\ &= 1 - \frac{\hat{\varphi}^2}{4} + \frac{\hat{\varphi}^4}{64} - \dots \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) \, dt = \frac{\pi m l^2 \hat{\varphi}^2 \omega}{4} + \pi \frac{m g l}{\omega} J_0(\hat{\varphi}) ,$$

was bedeutet, dass das Integral über die Lagrangefunktion am letztlich eine einfache Funktion des zu variierenden Parameters $\hat{\varphi}$. Extrema oder Sattelpunkte findet man somit, indem nach Nullstellen der ersten Ableitung gesucht wird, also

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\hat{\varphi}} \left[\frac{\pi m l^2 \hat{\varphi}^2 \omega}{4} + \pi \frac{m g l}{\omega} J_0(\hat{\varphi}) \right] \\ &= \pi m l \left[\frac{l \hat{\varphi} \omega}{2} + \frac{g}{\omega} J'_0(\hat{\varphi}) \right] , \end{aligned}$$

woraus der Zusammenhang

$$\omega^2 = -2 \frac{g}{l} \frac{J'_0(\hat{\varphi})}{\hat{\varphi}} = -2 \omega_0^2 \frac{J'_0(\hat{\varphi})}{\hat{\varphi}}$$

zwischen Frequenz und Amplitude folgt. Für moderate, d.h. nicht allzu große Amplituden kann man von obiger Taylor-Entwicklung Gebrauch machen, um die einfache Beziehung

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 \left[1 - \frac{1}{8} \hat{\varphi}^2 \right]$$

als erste Korrektur der Schwingungsfrequenz für moderate Amplituden zu erhalten. Da auch eine exakte Lösung zur Verfügung steht, kann man mit obiger Näherungsformel vergleichen:

$\hat{\varphi}$	$\frac{\pi}{36} = 5^\circ$	$\frac{\pi}{18} = 10^\circ$	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ (exakt)	$-4,7595 \cdot 10^{-4}$	$-1,9036 \cdot 10^{-3}$	$-1,7111 \cdot 10^{-2}$	$-0,1528$
$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ (Ritz)	$-4,7593 \cdot 10^{-4}$	$-1,9033 \cdot 10^{-3}$	$-1,7086 \cdot 10^{-2}$	$-0,1505$
$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ (Ritz+Taylor)	$-4,7608 \cdot 10^{-4}$	$-1,9057 \cdot 10^{-3}$	$-1,7284 \cdot 10^{-2}$	$-0,1684$

Dabei erkennt man eine bemerkenswerte Übereinstimmung!

Kapitel 4

Dynamik starrer Körper

Strenggenommen ist ein starrer Körper ein System aus vielen Massenpunkten, die durch starre Bindungen miteinander gekoppelt sind und somit ein Spezialfall der in [2.4](#) behandelten Dynamik darstellen. Es bedarf daher keiner neuen Axiome, sondern nur einer Anwendung der bekannten drei Newtonschen Axiome.

Um allerdings den Aufwand bei der Herleitung der die Dynamik des starren Körpers beschreibenden Gleichungen gering zu halten, greifen wir auf die elegante Methodik der in [Kap. 3](#) entwickelten Lagrangeschen Beschreibung der Mechanik zurück. Hierzu benötigen wir lediglich die kinetische und die potentielle Energie eines starren Körpers.

4.1 Impuls, Drehimpuls und Energie

Ein starrer Körper ist prinzipiell nichts anderes als ein System aus unendlich vielen Massenpunkten. Daher können wir auf viele Ergebnisse aus [Kap. 2.4](#) zurückgreifen. Zusammen mit der kinematischen Beziehung ([1.39](#)) aus [Kap. 1.2.4](#) können Impuls, Drehimpuls und Energie leicht berechnet werden.

4.1.1 Impuls

Schneidet man, wie in [Abb. 4.1](#) dargestellt, aus dem Körper ein kleines Volumenelement dV heraus, so besitzt dieses den Impuls $d\vec{p} = \rho dV \vec{v}$. Andererseits wissen wir aus ([1.39](#)), wie sich die Geschwindigkeit des Volumenelements

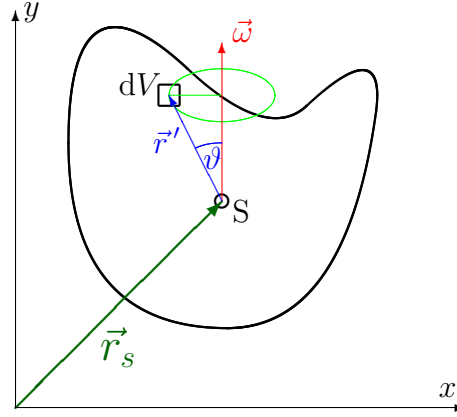


Abbildung 4.1: Volumenelement eines starren Körpers.

durch Schwerpunktgeschwindigkeit \vec{v}_s und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ergibt, so dass man

$$d\vec{p} = \varrho dV \vec{v} = \varrho [\vec{v}_s + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_s)] dV$$

als Impulsbeitrag des Volumenelements findet. Der Gesamtimpuls des Körpers folgt nun aus der Integration über das Volumen als

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \iiint_V \varrho [\vec{v}_s + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_s)] dV \\ &= \iiint_V \varrho dV \vec{v}_s + \vec{\omega} \times \iiint_V \varrho (\vec{r} - \vec{r}_s) dV \\ &= m \vec{v}_s \end{aligned}$$

und berechnet sich somit wie bei einem Massenpunkt. Weder die Form des Körpers noch dessen Rotationsbewegung haben darauf einen Einfluss.

4.1.2 Drehimpuls

Der Drehimpuls $d\vec{L}$ eines kleinen Volumenelements kann bei bereits bekanntem Impuls $d\vec{p}$ als

$$\begin{aligned} d\vec{L} &= \vec{r} \times d\vec{p} = \varrho \vec{r} \times [\vec{v}_s + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_s)] dV \\ &= \varrho [\vec{r} \times \vec{v}_s + (\vec{r}_s + \vec{r}') \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] dV \\ &= \varrho [\vec{r} \times \vec{v}_s + \vec{r}_s \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{r}'^2 \vec{\omega} - (\vec{r}' \cdot \vec{\omega}) \vec{r}'] dV \end{aligned}$$

angegeben werden, wobei erneut $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_s$ als Abkürzung verwendet wurde. Der gesamte Drehimpuls des Körpers ergibt sich durch Integration über das

Volumen als

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \iiint_V \varrho [\vec{r} \times \vec{v}_s + \vec{r}_s \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + r'^2 \vec{\omega} - (\vec{r}' \cdot \vec{\omega}) \vec{r}'] dV \\
 &= \iiint_V \varrho \vec{r} dV \times \vec{v}_s + \vec{r}_s \times \left[\vec{\omega} \times \iiint_V \varrho (\vec{r} - \vec{r}_s) dV \right] \\
 &\quad + \iiint_V \varrho [r'^2 \vec{\omega} - (\vec{r}' \cdot \vec{\omega}) \vec{r}'] dV \\
 &= m \vec{r}_s \times \vec{v}_s + \iiint_V \varrho [r'^2 \vec{\omega} - (\vec{r}' \cdot \vec{\omega}) \vec{r}'] dV
 \end{aligned}$$

als Summe aus dem Term $\vec{L}_B = m \vec{r}_s \times \vec{v}_s$, der bereits als Drehimpuls des Massenpunktes bekannt ist und im Folgenden als Bahndrehimpuls bezeichnet wird und einem weiteren Term, der auf der Eigenrotation $\vec{\omega}$ des Körpers beruht und als *Eigendrehimpuls* oder *Spin* \vec{L}_S bezeichnet wird. Letzterer lässt sich in Kartesischen Koordinaten ($\vec{r}' = (x, y, z)$, $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$) als

$$\vec{L}_S = \iiint_V \varrho \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dV \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

schreiben, oder, mit der Definition des (*Massen-*)*Trägheitsmomententensors*

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} := \iiint_V \varrho \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dV \quad (4.1)$$

in der kompakten Form

$$\vec{L}_S = \underline{J} \vec{\omega}.$$

Der Trägheitsmomententensor ist eine Eigenschaft des Körpers, die auf dessen Masseverteilung und Geometrie basiert. Für einfache Körper ist diese Größe tabelliert. Somit ergibt sich der gesamte Drehimpuls als

$$\vec{L} = m \vec{r}_s \times \vec{v}_s + \underline{J} \vec{\omega}.$$

4.1.3 Kinetische Energie

Die kinetische Energie des Volumenelements dV ergibt sich als

$$dT = \frac{\varrho dV}{2} \vec{v}^2 = \frac{\varrho}{2} dV [\vec{v}_s + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_s)]^2 = \frac{\varrho}{2} [\vec{v}_s^2 + 2 \vec{v}_s \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') + (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2] dV.$$

Die gesamte kinetische Energie des starren Körpers ist die Summe der kinetischen Energien aller kleinen Volumenelemente, was letztlich auf die Integrale

$$\begin{aligned}
 T &= \iiint_V \frac{\varrho}{2} \left[\vec{v}_s^2 + 2\vec{v}_s \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') + (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 \right] dV \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_V \varrho dV \vec{v}_s^2 + \vec{v}_s \cdot \left[\vec{\omega} \times \iiint_V \varrho (\vec{r} - \vec{r}_s) dV \right] + \iiint_V \frac{\varrho}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 dV
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

führt. Das erste Integral ergibt die Gesamtmasse, also

$$\iiint_V \varrho dV = m,$$

das zweite verschwindet unter der Berücksichtigung der Definition des Massenschwerpunktes

$$\iiint_V \varrho [\vec{r} - \vec{r}_s] dV = \iiint_V \varrho \vec{r} dV - m\vec{r}_s = \vec{0}$$

und das dritte schließlich, dank Benutzung folgender trickreicher Umformung

$$\begin{aligned}
 (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r}') \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \cdot [\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] \\
 &= \vec{\omega} \cdot [\vec{r}'^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}') \vec{r}'] = \vec{r}'^2 \vec{\omega}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}')^2 \\
 &= \vec{\omega} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \vec{\omega}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

lässt sich in der Form

$$\iiint_V \frac{\varrho}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 dV = \frac{1}{2} \vec{\omega} \underline{J} \vec{\omega}$$

schreiben. Zusammenfassend ergibt sich mit $\vec{v}_s = \dot{\vec{r}}_s$ und $\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$ für die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_s^2 + \frac{1}{2} \dot{\vec{\varphi}} \underline{J} \dot{\vec{\varphi}}, \tag{4.4}$$

welche sich somit aus einem translatorischen Anteil, auch *Translationsenergie* genannt, und einem rotatorischen Anteil, der *Rotationsenergie* zusammensetzt.

Im Allgemeinfall ist die tensorielle Darstellung $\dot{\vec{\varphi}} \underline{J} \dot{\vec{\varphi}}$ erforderlich, da sich die Rotationsachse des Körpers zeitlich ändern kann. Von großer Bedeutung ist der Spezialfall einer zeitlich unveränderlichen Drehachse, also

$$\dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi} \vec{e},$$

wobei \vec{e} ein zeitlich konstanter Einheitsvektor im Raum ist. Die Rotationsenergie berechnet sich dann als

$$\frac{1}{2} \vec{e} \underline{J} \vec{e} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$$

mit einem skalaren Trägheitsmoment

$$J = \vec{e} \underline{J} \vec{e}, \quad (4.5)$$

so dass die gesamte kinetische Energie dann als

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_s^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 \quad (4.6)$$

gegeben ist. Dies vereinfacht die Dynamik des Systems ganz erheblich. Eine zeitlich konstante Drehachse liegt vor, wenn dies durch eine entsprechende Lagerung des Körpers erzwungen wird. Bei einer freien Rotation dagegen könnte die Drehachse zeitlich veränderlich sein. Welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit auch bei einer freien Bewegung die Drehachse konstant bleibt, wird in Abschnitt 4.3 erläutert.

4.1.4 Potentielle Energie

Die potentielle Energie eines Körpers hängt von den auf ihn wirkenden Kräften und Momenten ab, genauer gesagt von der Arbeit, die durch Kräfte und Momente bei einer Positionsänderung bzw. bei einer Drehung des Körpers geleistet wird. Allgemein ist die potentielle Energie eine Funktion der Schwerpunktposition und der Orientierung, also

$$U = U(\vec{r}_s, \vec{\varphi}).$$

Exemplarisch seien zwei Beispiele genannt:

1. Körper im homogenen Schwerfeld

Wir betrachten erneut den in Abb. 4.1 gezeigten Körper und ein aus diesem herausgeschnittenes kleines Volumenelement dV , welches als

Massenpunkt zu behandeln ist. Dessen potentielle Energie im Schwerfeld beträgt dann

$$dU = dm \, gy = \varrho gy dV ,$$

was nach Integration über das gesamte Körpervolumen

$$U = \iiint_V \varrho gy dV = mg \frac{\iiint_V y dV}{m} = mgy_s$$

ergibt, wobei y_s die y -Position des Massenschwerpunkts des Körpers bezeichnet. Die potentielle Energie hängt somit von der Schwerpunktposition ab. Eine Abhängigkeit von der Orientierung des Körpers besteht indes nicht.

2. Spiralfeder oder Torsionsfeder (hier: 2D)

Eine Spiralfeder oder Torsionsfeder erzeugt bei Auslenkung aus einer durch einen Winkel $\varphi = 0$ gegebenen Ruhelage ein Rückstellmoment der Größe

$$M = -C\varphi = -\frac{\partial}{\partial\varphi} \left[\frac{C}{2}\varphi^2 \right]$$

mit Federkonstante C . Die potentielle Energie der Feder lautet somit

$$U = U(\varphi) = \frac{C}{2}\varphi^2$$

und ist in diesem Fall abhängig von der Orientierung.

4.2 Trägheitsmomente, Tensoreigenschaft und Steinerscher Satz

Der durch (4.1) definierte Tensor ist per Definition eine Eigenschaft des zu betrachtenden Körpers, abhängig von dessen Dichte und dessen Form. Die Trägheitsmomente einiger einfacher Körper sind in einschlägigen Lehrbüchern tabelliert. Dennoch wird anhand eines ausgewählten Beispiels, nämlich eines homogenen Vollzylinders mit Masse m , Radius R und Höhe H , s. Abb. 4.2a, die Berechnung von Trägheitsmomenten demonstriert.

In Zylinderkoordinaten nimmt das Volumenelement für die Integration die Form

$$dV = r d\varphi dr dz$$

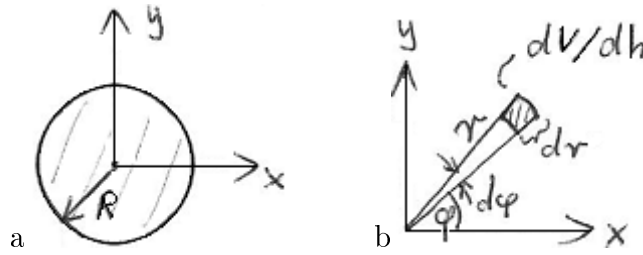


Abbildung 4.2: Zur Berechnung der Trägheitsmomente beim Vollzylinder.

an, s. Abb. 4.2b. Es ist außerdem noch $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ zu beachten. Damit folgt für die Trägheitsmomente 'straight forward'

$$\begin{aligned}
 J_{xx} &= \iiint_V \varrho (y^2 + z^2) dV = \varrho \int_{-H/2}^{+H/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r d\varphi dr dz \\
 &= \varrho \int_{-H/2}^{+H/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{2} - \frac{r^3}{2} \cos(2\varphi) + rz^2 \right] d\varphi dr dz \\
 &= 2\pi \varrho \int_{-H/2}^{+H/2} \int_0^R \left[\frac{r^3}{2} + rz^2 \right] dr dz = 2\pi \varrho \left[\frac{R^4 H}{8} + \frac{R^2 H^3}{24} \right] \\
 &= \frac{m}{12} [3R^2 + H^2] \\
 J_{yy} &= J_{xx} = \frac{m}{12} [3R^2 + H^2] \\
 J_{zz} &= \iiint_V \varrho (x^2 + y^2) dV = \varrho \int_{-H/2}^{+H/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r d\varphi dr dz \\
 &= 2\pi H \varrho \int_0^R r^3 dr = 2\pi H \varrho \frac{R^4}{4} = \frac{m}{2} R^2 \\
 J_{xy} &= J_{xz} = J_{yz} = 0
 \end{aligned}$$

Man nennt die drei Größen J_{xx} , J_{yy} und J_{zz} auch *axiale Trägheitsmomente*, während J_{xy} , J_{xz} und J_{yz} als *Deviationsmomente* bezeichnet werden. Wie alle Größen mit Tensorcharakter, beispielsweise Spannungen, Dehnungen und Scherungen, aber auch Flächenträgheitsmomente, zeichnen sich Trägheitsmomente durch das bekannte Transformationsgesetz bei Drehung des Koordinatensystems um einen Winkel aus. Vollzieht man beispielsweise, wie in

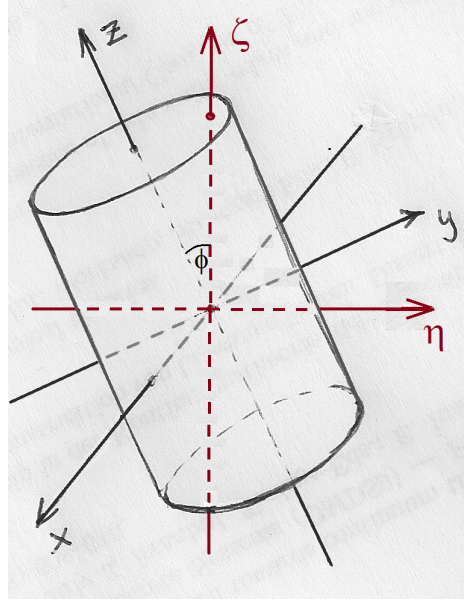


Abbildung 4.3: Zum Transformationsgesetz bei Drehung des Körpers.

Abb. 4.3 dargestellt, eine Drehung um den Winkel $-\phi$ um die x -Achse, so ergeben sich in dem neuen Koordinatensystem x, η, ζ die veränderten Trägheitsmomente

$$J_{\eta\eta} = \frac{J_{yy} + J_{zz}}{2} + \frac{J_{yy} - J_{zz}}{2} \cos(2\phi) - J_{yz} \sin(2\phi) , \quad (4.7)$$

$$J_{\zeta\zeta} = \frac{J_{yy} + J_{zz}}{2} - \frac{J_{yy} - J_{zz}}{2} \cos(2\phi) + J_{yz} \sin(2\phi) , \quad (4.8)$$

$$J_{\eta\zeta} = -\frac{J_{yy} - J_{zz}}{2} \sin(2\phi) + J_{yz} \cos(2\phi) . \quad (4.9)$$

Auf den Beweis der Tensoreigenschaft wird hier verzichtet. Da eine Drehung des Koordinatensystems um den Winkel $-\phi$ gleichbedeutend mit der Drehung des Körpers um den Winkel $+\phi$ ist, gibt obiges Gesetz die Abhängigkeit der Trägheitsmomente von der Orientierung des Körpers wieder, allerdings nur für den Spezialfall einer Drehung um die x -Achse. Betrachtet man eine allgemeine, durch einen Winkelvektor $\vec{\varphi}$ festgelegte Drehung des Körpers, so nimmt das Transformationsgesetz eine wesentlich kompliziertere Form an, auf deren explizite Angabe hier verzichtet wird. Wesentlich ist hier die Erkenntnis, dass der Trägheitsmomententensor von der aktuellen Orientierung des Körpers abhängt, d.h.

$$\underline{J} = \underline{J}(\vec{\varphi}) .$$

Im Gegensatz dazu ist das in (4.5) definierte und einer Rotation um eine

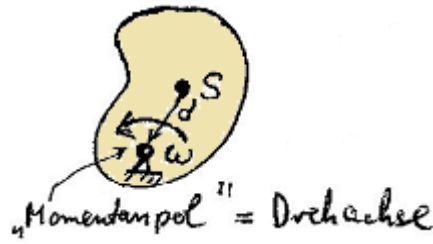


Abbildung 4.4: Zum Transformationsgesetz bei Drehung des Körpers.

festen Achse zugeordnete skalare Trägheitsmoment, welches mit Hilfe der Umformung (4.3) auch als

$$J = \iiint_V \varrho \left[\vec{r}'^2 - (\vec{e} \cdot \vec{r}')^2 \right] dV$$

geschrieben werden kann, unabhängig vom Drehwinkel φ , da sich, wie in Abb. 4.1 erkennbar, weder der Betrag des Vektors \vec{r}' noch dessen Komponente $\vec{e} \cdot \vec{r}'$ parallel zur Drehachse während der Drehung verändern.

Betrachtet man eine Rotation um eine Achse, die nicht durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft, sondern, wie in Abb. 4.4 dargestellt, von diesem einen Abstand d besitzt, so lässt sich diese Bewegung wieder formal auf eine Überlagerung einer Translationsbewegung des Schwerpunktes mit Bahngeschwindigkeit ωd (Kreisbewegung) mit einer Rotation um den Schwerpunkt S mit Winkelgeschwindigkeit ω auffassen. Die kinetische Energie des Körpers ergibt sich laut (4.6) als

$$T = \frac{1}{2} m (\omega d)^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} [J + m d^2] \omega^2,$$

was man auch als

$$T = \frac{1}{2} J' \omega^2$$

schreiben kann mit verändertem Trägheitsmoment

$$J' = J + m d^2. \quad (4.10)$$

Diese Beziehung, die Steinerscher Satz genannt wird, kann auch für die Berechnung des Trägheitsmoments für einen aus N tabellierten geometrischen Formen zusammengesetzten Körpers verwendet werden. In diesem Fall ist

$$J = \sum_{i=1}^N [J_i + m_i d_i^2],$$

wobei J_i das Trägheitsmoment des i -ten Körpers bezüglich dessen Schwerpunktes und d_i der Abstand dessen Schwerpunktes von der Drehachse ist.

4.3 Bewegungsgleichungen

4.3.1 Allgemeine Bewegung

Für freie konservative Systeme kann die Dynamik des Systems über das Hamiltonsche Prinzip mit Lagrangefunktion

$$L(\vec{r}_s, \dot{\vec{r}}_s, \vec{\varphi}, \dot{\vec{\varphi}}) = T - U = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_s^2 + \frac{1}{2} \dot{\vec{\varphi}} \underline{J}(\vec{\varphi}) \dot{\vec{\varphi}} - U(\vec{r}_s, \vec{\varphi}) \quad (4.11)$$

festgelegt werden. Die aus dem Hamiltonschen Prinzip resultierenden Euler–Lagrange–Gleichungen sind aufgrund der komplizierten Abhängigkeit $\underline{J} = \underline{J}(\vec{\varphi})$ des Trägheitsmomententensors \underline{J} von der Orientierung $\vec{\varphi}$ des Körpers nicht leicht zu berechnen. Deren Ermittlung wird detailliert im Anhang [B.1.1](#) vorgenommen. Als Ergebnis erhält man

$$m \ddot{\vec{r}}_s = \vec{F}, \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{J} \dot{\vec{\varphi}}) + \dot{\vec{\varphi}} \times (\underline{J} \dot{\vec{\varphi}}) = \vec{M}, \quad (4.13)$$

wobei die Kartesischen Komponenten der resultierenden Kraft \vec{F} und des resultierenden Moments \vec{M} über die potentielle Energie als

$$F_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.14)$$

$$M_i = - \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.15)$$

gegeben sind. Dabei sind unter x_i die Kartesischen Komponenten der Schwerpunktposition \vec{r}_s und unter φ_i die Eulerschen Winkel zu verstehen. Offensichtlich ist [\(4.12\)](#) die Reproduktion des zweiten Newtonschen Axioms, was bedeutet, dass sich ein ausgedehnter Körper hinsichtlich seiner Schwerpunktsbewegung genauso verhält wie ein Massenpunkt, in dem die gesamte Masse m an der Position \vec{r}_s konzentriert ist. Dies ist insofern keine Überraschung, als dass dies genau die Aussage des in Abschnitt [2.20](#) hergeleiteten Schwerpunktsatzes ist. Diese Gleichung heißt weiterhin Newtonsche Bewegungsgleichung. Die zweite, als *Eulersche Bewegungsgleichung* bezeichnete Gleichung ist folgerichtig das Analogon zum zweiten Newtonschen Axiom für die Drehbewegung, welche auch als partielle Drehimpulsbilanz aufzufassen ist mit Eigendrehimpuls (Spin)

$$\vec{L}_s = \underline{J} \dot{\vec{\varphi}}.$$

Für den Fall, dass nichtkonservative Kräfte bzw. Momente wirken, ist eine Beschreibung mit einer Lagrangefunktion der Form (4.11) nicht mehr möglich und resultierende Kraft sowie resultierendes Moment nicht mehr durch eine potentielle Energie gemäß (4.14, 4.15) gegeben. Die Bewegungsgleichungen (4.12, 4.13) bleiben dennoch auch in diesem allgemeinen Fall gültig, was hier jedoch nicht bewiesen werden soll.

4.3.2 Mehrachsige Rotation ohne äußere Momente

Fehlen äußere Kräfte, so reduziert sich die Schwerpunktsbewegung laut (4.12) auf eine geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Im Gegensatz dazu geht die Bilanz (4.12) für den Eigendrehimpuls $\vec{L}_s = \underline{J}\vec{\omega}$ selbst bei vollkommener Abwesenheit äußerer Momente und Schnittmomente in die Gleichung

$$\dot{\vec{L}}_s + \vec{\omega} \times \vec{L}_s = \vec{0}, \quad (4.16)$$

über, wobei $\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$ zur besseren Übersichtlichkeit als Bezeichnung für die Winkelgeschwindigkeit gewählt wurde. Man erkennt, dass sogar für ein vollkommen sich selbst überlassenes System die Drehimpulserhaltung nicht unbedingt gegeben ist, bedingt durch „innere Momente“ $-\vec{\omega} \times \vec{L}_s$.

Eine genauere Analyse, welche in Anhang ?? zu finden ist, zeigt, dass sich sowohl die durch $\vec{\omega}$ gegebene momentane Drehachse als auch die Richtung des Drehimpulsvektors \vec{L}_s ständig ändern, wenn $\vec{\omega}$ und \vec{L}_s zu Beginn der Bewegung in verschiedene Richtungen weisen. Die daraus resultierende Bewegung, die als mehrachsige Rotation bezeichnet wird, ist recht kompliziert, s. ??.

4.3.3 Einachsige Rotation

Die Dynamik eines frei rotierenden Körpers vereinfacht sich erheblich, wenn keine „innere Momente“ $-\vec{\omega} \times \vec{L}_s$ vorhanden sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn Drehachse und Drehimpulsvektor $\vec{L}_s = \underline{J}\vec{\omega}$ zueinander parallel sind, also

$$\underline{J}\vec{\omega} = J\vec{\omega} \quad (4.17)$$

gilt mit entsprechendem skalarem Trägheitsmoment J . Obige Gleichung führt auf ein mathematisches Eigenwertproblem für den Tensor \underline{J} . Da solche Problemstellungen bereits im Zusammenhang mit anderen Tensoren (Spannungstensor, Deformationstensor, Flächenträgheitsmomententensor) auftraten, können die Ergebnisse auf die aktuelle Problemstellung übertragen werden: Es

existieren im Allgemeinfall genau drei zueinander senkrechte Richtungen, die sog. *Hauptrichtungen* des Tensors, welche $\vec{\omega}$ annehmen kann um die Bedingung (4.17) zu erfüllen. Man spricht in diesem Fall von einer *einachsigen Rotation*. Dementsprechend gibt es maximal drei voneinander verschiedene Werte J_1, J_2, J_3 , die das skalare Trägheitsmoment J annehmen kann, die sog. *Hauptträgheitsmomente*. Da die Eigenwerte eines Tensors zugleich Invarianten sind, d.h. Größen, die sich bei einer Drehung nicht verändern, hängt J in (4.17) nicht vom Drehwinkel φ ab. Dies bedeutet, dass die Eigenschaft (4.17) während der Bewegung erhalten bleibt und somit nicht nur zu einem bestimmten Zeitpunkt gilt sondern für die gesamte Bewegung.

Bei einachsiger Rotation vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (4.12, 4.13) somit zu

$$m\ddot{\vec{r}}_s = \vec{F}, \quad (4.18)$$

$$J\ddot{\varphi} = \vec{M}, \quad (4.19)$$

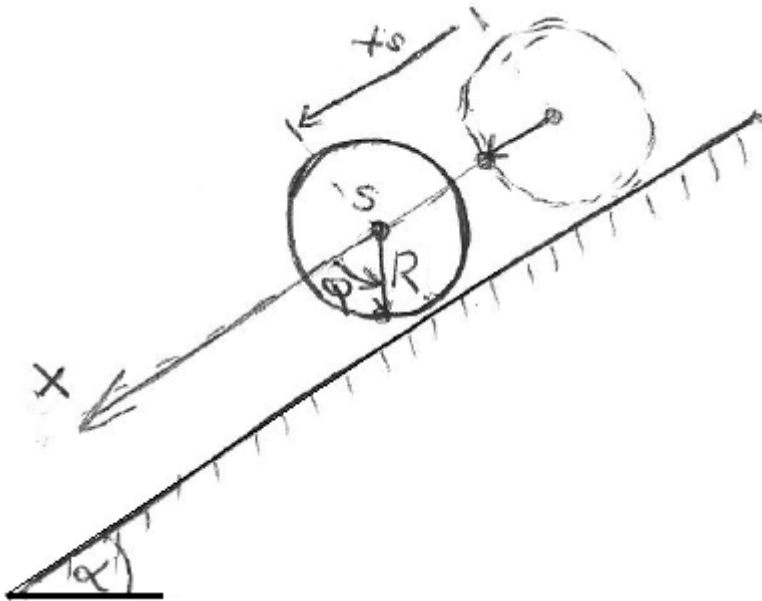
wobei allerdings zusätzlich vorauszusetzen ist, dass das Trägheitsmoment \vec{M} die Orientierung der Drehachse nicht verändert, wodurch die Bedingung (4.17), selbst wenn sie am Anfang der Bewegung erfüllt wäre, zu einem späteren Zeitpunkt zwangsläufig verletzt würde. Um dies zu verhindern, muss das Moment \vec{M} zu allen Zeiten parallel zur Drehachse gerichtet sein, so dass alle wesentlichen Vektoren $\vec{\varphi}, \vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}, \ddot{\vec{\varphi}}$ und \vec{M} die gleiche Richtung (oder die genaue Gegenrichtung) besitzen. Daher ist es möglich und sinnvoll, das Problem mathematisch eindimensional zu behandeln und die Gleichung (4.19) in skalarer Form

$$J\ddot{\varphi} = M \quad (4.20)$$

zu schreiben.

Eine Rotation um nur eine Achse kann natürlich auch durch eine entsprechende Lagerung des Körpers erzwungen werden, selbst wenn es sich dabei nicht um eine Hauptträgheitsachse handelt. In diesem Fall werden die „inneren Momente“ $-\vec{\omega} \times \vec{L}_s$ durch Lagerreaktionen kompensiert. In der Technik vermeidet man solche „Unwuchten“ aber, weil dies eine große Belastung und einen höheren Verschleiß der Lager bedeutet, so dass auch bei gelagerten Rotationsbewegungen die Drehachse meist eine Hauptträgheitsachse ist.

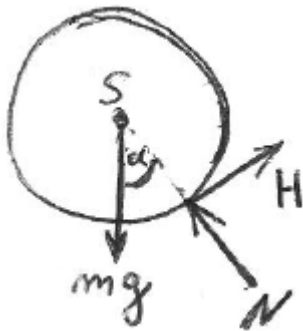
Als einfaches Beispiel für eine einachsige Rotation (in Kombination mit einer Translation) betrachten wir einen auf einer schiefen Ebene herabrollenden Zylinder:



Hier liegt eine simultane Bewegung zwischen der Translation, gegeben durch die Verschiebung x_s des Schwerpunkts, und der durch den Winkel φ gegebenen Drehung vor. Geht man von Schlupffreiheit aus, so ist zwischen beiden Bewegungen die kinematische Bindung

$$\varphi = \frac{x_s}{R} \quad (4.21)$$

zu beachten, welche sich unmittelbar aus der Definition des Winkels im Bogenmaß ergibt. Nach Freischneiden des Zylinders ergibt sich folgendes Freikörperbild,



aus welchem sich die Bewegungsgleichungen (bzw. statisches Gleichgewicht

für y -Richtung) als

$$\begin{aligned} \swarrow: \quad mg \sin \alpha - H &= m\ddot{x}_s, \\ \nwarrow: \quad N - mg \cos \alpha &= 0, \\ \widehat{S}: \quad HR &= J\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

ergeben. Multipliziert man die erste Gleichung mit R und addiert die dritte hinzu, so ergibt sich die Gleichung

$$mgR \sin \alpha = mR\ddot{x}_s + J\ddot{\varphi},$$

bei welcher zunächst die unbekannte Haftkraft H eliminiert worden ist. Nun muss noch die kinematische Bindung (4.21) berücksichtigt werden, um $\ddot{\varphi}$ durch \ddot{x}_s/R zu ersetzen, was schließlich zu

$$mgR \sin \alpha = \left[mR + \frac{J}{R} \right] \ddot{x}_s$$

führt. Hier erkennt man, dass eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung

$$\ddot{x}_s = \frac{mR^2}{mR^2 + J} g \sin \alpha$$

vorliegt, so dass die zweimalige Integration der Bewegungsgleichung schließlich auf

$$x_s(t) = \frac{mR^2}{mR^2 + J} g \sin \alpha \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$$

führt mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Anfangsposition x_0 .

Wie träge sich der Zylinder tatsächlich verhält, hängt nun von J und damit von dessen Beschaffenheit ab: Für einen Vollzylinder gilt $J = mR^2/2$ und damit $\ddot{x}_s = 2g \sin \alpha/3$, während ein Hohlzylinder gleicher Masse ein Trägheitsmoment von $J = mR^2$ besitzt, was zu einer kleineren Beschleunigung von $\ddot{x}_s = g \sin \alpha/2$. Das vergleichende herunterrollen lassen von Voll- und Hohlzylinder gehört zu den klassischen Experimenten der Mechanik!

Anhang A

Lösungen ausgewählter Differentialgleichungen

A.1 Ungedämpfte harmonische Schwingung

Die Differentialgleichung für den ungedämpften harmonischen Oszillator lautet

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (\text{A.1})$$

wobei die generalisierte Koordinate q sowohl eine Längen- als auch eine Winkelkoordinate oder allgemein eine Konfigurationskoordinate sein kann. Obige Dgl ist linear und homogen, was die Methode des *charakteristischen Polynoms* nahelegt. Diese funktioniert wie folgt:

1. Ansatz einer Exponentialform $q = \exp(\lambda t)$ und Einsetzen in die Dgl. Dies liefert im vorliegenden Fall die Gleichung

$$\lambda^2 \exp(\lambda t) + \omega_0^2 \exp(\lambda t) = 0,$$

aus welcher jedoch der Exponentialfaktor $\exp(\lambda t)$, da er nie Null wird, herausgekürzt werden kann. Es bleibt

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0,$$

so dass die Ermittlung der Lösung auf die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms in der noch offenen Größe λ zurückgeführt wird. Dieses nennt man das charakteristische Polynom. Dessen Nullstellen können

allerdings auch komplex sein, was beim vorliegenden Beispiel auch der Fall ist, denn

$$\lambda = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm \sqrt{-1} \omega_0 = \pm i \omega_0 ,$$

wobei unter i die imaginäre Einheit (mit $i^2 = -1$) zu verstehen ist.

2. Superposition aller gefundenen Lösungen.

Im vorliegenden Fall hat das charakteristische Polynom die beiden Nullstellen $\pm i \omega_0$, also ist durch

$$q(t) = A \exp(+i \omega_0 t) + B \exp(-i \omega_0 t) \quad (\text{A.2})$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben. Man beachte, dass die beiden Konstanten A und B , die sog. Integrationskonstanten, ebenfalls komplex sein können. Wichtig ist nur, dass die Lösung, die sich am Ende ergibt, reelwertig ist. Dies wird im folgenden Schritt erreicht:

3. Bestimmung der Integrationskonstanten durch Anfangsbedingungen.

Obige allgemeine Lösung beinhaltet eine Vielzahl von möglichen Bewegungen. Eine eindeutige Lösung liegt erst dann vor, wenn anfängliche Position und anfänglicher Bewegungszustand in der Form

$$q(0) = q_0 \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_0 \quad (\text{A.4})$$

vorgegeben werden. In diesem Fall liefert Einsetzen obiger allgemeiner Lösung (A.2) in die Anfangsbedingungen (A.3, A.4) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= q_0 , \\ i \omega_0 A - i \omega_0 B &= \dot{q}_0 , \end{aligned}$$

dessen Auflösung nach den zu bestimmenden Konstanten schließlich

$$\begin{aligned} A &= \frac{q_0}{2} + \frac{\dot{q}_0}{2i \omega_0} \\ B &= \frac{q_0}{2} - \frac{\dot{q}_0}{2i \omega_0} \end{aligned}$$

ergibt.

Damit ist die Lösung vollständig bestimmt. Nun kann man noch ein paar „Schönheitsumformungen“ vornehmen, um die kompakte Form

$$\begin{aligned} q(t) &= \left[\frac{q_0}{2} + \frac{\dot{q}_0}{2i\omega_0} \right] \exp(+i\omega_0 t) + \left[\frac{q_0}{2} - \frac{\dot{q}_0}{2i\omega_0} \right] \exp(-i\omega_0 t) \\ &= q_0 \frac{\exp(+i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)}{2} + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \frac{\exp(+i\omega_0 t) - \exp(-i\omega_0 t)}{2i} \\ &= q_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

zu erhalten. Dabei wurden die mathematischen Zusammenhänge

$$\cos(z) = \frac{\exp(+iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin(z) = \frac{\exp(+iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

zwischen den Trigonometrischen Funktionen und der komplexen Exponentialfunktion verwendet.

A.2 Fallbewegung eines Körpers unter Stokes-Reibung

Zu lösen ist die Dgl. (2.3) für den Fall $n = 1$, also

$$\dot{v} + \frac{k}{m}v = g. \quad (\text{A.5})$$

Hierbei handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung im Gegensatz zur Schwingungsdifferentialgleichung (A.1), welche homogen ist. Daher lässt sich (A.5) auch nicht unmittelbar mit einem Exponentialansatz der Form $q = \exp(\lambda t)$ lösen, wie dies im Abschnitt A.1 demonstriert worden ist. Die Linearität des Problems erlaubt es jedoch, das Gesamtproblem in zwei Teilprobleme zu zerlegen:

1. Zunächst sucht man eine *partikuläre Lösung* der Differentialgleichung, wobei meist ein Ansatz in Form der Inhomogenität recht vielversprechend ist. Im vorliegenden Fall ist die Inhomogenität von (A.5) eine Konstante, also liegt es nahe, nach einer konstanten Lösung

$$v = v_p = \text{const}$$

zu suchen. Tatsächlich ergibt sich durch Einsetzen in (A.5) $0 + kv_p/m = g$ und somit

$$v_p = \frac{mg}{k} \quad (\text{A.6})$$

als Lösung der Differentialgleichung. Damit ist jedoch zunächst nur eine von vielen Lösungen gefunden worden, welche zur Anfangsbedingung $v(0) = v_p$ passt. Gibt man dem fallenden Körper als Anfangsgeschwindigkeit also gerade die als Grenzggeschwindigkeit (2.6) identifizierte Geschwindigkeit $v_p = v_\infty$, so behält dieser seinen Bewegungszustand für alle Zeiten bei. Gibt man jedoch eine andere Anfangsbedingung vor, etwa $v(0) = 0$ (Fall aus der Ruhe heraus), so ist obige partikuläre Lösung (A.6) nicht die zu dem Problem passende. Dann ist es erforderlich, *alle* Lösungen der Differentialgleichung zu ermitteln, wie im folgenden Schritt gezeigt:

2. Dank der Linearität des Problems ist jede Kombination $v = v_p + v_h$ aus der gefundenen partikulären Lösung (A.6) mit einer Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\dot{v}_h + \frac{k}{m}v_h = 0, \quad (\text{A.7})$$

welche sich durch Streichung der Inhomogenität der ursprünglichen Dgl. (A.5) ergibt, wieder eine Lösung der zu lösenden Differentialgleichung (A.5). Somit ist (A.7) zu lösen, was genau mit der im vorherigen Abschnitt A.1 beschriebenen Methode des charakteristischen Polynoms funktioniert, also mit einem Exponentialansatz $v_h = \exp(\lambda t)$, was nach Einsetzen in (A.7) zunächst

$$\left[\lambda + \frac{k}{m} \right] \exp(\lambda t) = 0$$

und damit die Lösung $\lambda = -k/m$ für das charakterische Polynom und schließlich

$$v_h = A \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

als allgemeine Lösung von (A.7) mit Integrationskonstante A ergibt.

3. Die Gesamtlösung der Differentialgleichung (A.5) lautet also

$$v = v_p + v_h = \frac{mg}{k} + A \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

und kann nun an die entsprechende Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ für die Geschwindigkeit zu Beginn der Fallbewegung angepasst werden, also

$$v_0 = v(0) = \frac{mg}{k} + A,$$

woraus $A = v_0 - mg/k$ und damit schließlich

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) + \frac{mg}{k} \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right]$$

als Endergebnis folgt.

Anhang B

Mathematische Herleitungen

B.1 Zur Bewegung des starren Körpers

B.1.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Für konservative Systeme ergeben sich die Bewegungsgleichungen für einen starren Körper als Euler–Lagrange–Gleichungen zur Lagrangefunktion

$$L\left(\vec{r}_s, \dot{\vec{r}}_s, \vec{\varphi}, \dot{\vec{\varphi}}\right) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_s^2 + \frac{1}{2} \dot{\vec{\varphi}} J(\vec{\varphi}) \dot{\vec{\varphi}} - U(\vec{r}_s, \vec{\varphi}) ,$$

also als

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_s} \right) = \vec{0} , \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\varphi}}} \right) = \vec{0} . \quad (\text{B.2})$$

Die Terme im einzelnen lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_s} &= -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_s} = \vec{F} , \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_s} &= m \dot{\vec{r}}_s , \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\varphi}}} &= \frac{1}{2} J(\vec{\varphi}) \dot{\vec{\varphi}} + \frac{1}{2} \dot{\vec{\varphi}} J(\vec{\varphi}) = J(\vec{\varphi}) \dot{\vec{\varphi}} , \end{aligned}$$

wobei sich der vierte Term

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}}$$

nicht „straight forward“ berechnen lässt, da wir die detaillierte Abhängigkeit des Trägheitsmoments \underline{J} vom Winkel $\vec{\varphi}$ bisher nur für zweidimensionale Systeme betrachtet haben und somit im allgemeinen dreidimensionalen Fall gar nicht kennen. Allerdings wissen wir, dass sich eine infinitesimale Drehung eines beliebigen Vektors $\vec{\omega}$ um einen Winkel $\delta\vec{\varphi}$ als

$$\vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{\omega}$$

schreiben lässt. Außerdem nutzen wir aus, dass sich der Skalar $\vec{\omega} \underline{J} (\vec{\varphi} + \delta\vec{\varphi}) \vec{\omega}$ ebenso gut berechnen lässt, indem man, anstatt den Tensor \underline{J} um den Winkel $\delta\vec{\varphi}$ zu drehen, den Vektor $\vec{\omega}$ in die Gegenrichtung $-\delta\vec{\varphi}$ dreht, so dass

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \underline{J} (\vec{\varphi} + \delta\vec{\varphi}) \vec{\omega} &= [\vec{\omega} - \delta\vec{\varphi} \times \vec{\omega}] \underline{J} (\vec{\varphi}) [\vec{\omega} - \delta\vec{\varphi} \times \vec{\omega}] \\ &= \vec{\omega} \underline{J} (\vec{\varphi}) \vec{\omega} - 2 [\underline{J} (\vec{\varphi}) \vec{\omega}] \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{\omega}) + \dots \end{aligned}$$

gilt, wobei quadratische Terme in $\delta\vec{\varphi}$ vernachlässigt worden sind. Der zweite Term in der letzten Zeile ist ein Spatprodukt, also ein Konstrukt der Form $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Beim Spatprodukt können die drei Faktoren zyklisch getauscht werden, d.h. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$, so dass

$$\vec{\omega} \underline{J} (\vec{\varphi} + \delta\vec{\varphi}) \vec{\omega} = \vec{\omega} \underline{J} (\vec{\varphi}) \vec{\omega} - 2\delta\vec{\varphi} \cdot (\vec{\omega} \times [\underline{J} (\vec{\varphi}) \vec{\omega}]) + \dots$$

gilt und somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{\varphi}} \left[\frac{1}{2} \vec{\omega} \underline{J} (\vec{\varphi}) \vec{\omega} \right] - \frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial (\delta\vec{\varphi})} \left[\frac{1}{2} \vec{\omega} \underline{J} (\vec{\varphi} + \delta\vec{\varphi}) \vec{\omega} \right] \Big|_{\delta\vec{\varphi} \rightarrow \vec{0}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}} \\ &= -\vec{\omega} \times [\underline{J} (\vec{\varphi}) \vec{\omega}] - \frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}} = -\dot{\vec{\varphi}} \times [\underline{J} (\vec{\varphi}) \dot{\vec{\varphi}}] - \frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}}. \end{aligned}$$

Dabei ist die Größe

$$\vec{M} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}}$$

nichts anderes als das resultierende Moment, das auf den Körper wirkt. Zusammengefasst nehmen die Euler–Lagrange–Gleichungen (B.1, B.2) nun die Form

$$\begin{aligned} \vec{F} - \frac{d}{dt} (m\dot{\vec{r}}_s) &= \vec{0} \\ \vec{M} - \dot{\vec{\varphi}} \times [\underline{J} (\vec{\varphi}) \dot{\vec{\varphi}}] - \frac{d}{dt} (\underline{J} (\vec{\varphi}) \dot{\vec{\varphi}}) &= \vec{0} \end{aligned}$$

an, welche nach leichten Umformungen schließlich als (4.12, 4.13) zu schreiben sind.