FEM für Dynamik

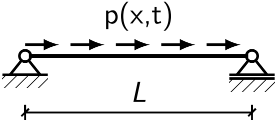
Kapitel 3: Bewegungsgleichung der FEM

Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch

Department Maschinenbau und Produktion
Fakultät Technik und Informatik
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Dynamische Stab- und Balkenelemente

Dynamisches Stabelement:



mit $\mu = \rho \cdot A$ „spezifische Dichte“

Dynamische Verschiebungsdifferentialgleichung:

$$-EA\,u''(x,t) + \mu\ddot{u}(x,t) = p(x,t) \tag{1}$$

Multiplikation mit einer virtuellen Verschiebung v und Integration liefert:

$$\int_0^L -EA\,u''v\,dx + \int_0^L \mu\ddot{u}v\,dx = \int_0^L pv\,dx \tag{2}$$

Nach einmaliger partieller Integration über x:

$$\int_0^L EA\,u'v'\,dx + \int_0^L \mu\ddot{u}v\,dx = \int_0^L pv\,dx + \left[EAu'v\right]_0^L \tag{3}$$

Dynamische Stab- und Balkenelemente

Mit $N = EA\,u'$ folgt

$$\int_0^L EA\,u'v'\,dx + \int_0^L \mu \ddot{u} v\,dx = \int_0^L pv\,dx + [Nv]_0^L \tag{4}$$

Berechnung des Randterms für das obige Bsp.

$$[Nv]_0^L = \underbrace{N(L)}_{=0}\,v(L) - N(0)\,\underbrace{v(0)}_{=0} = 0$$

Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Dynamik:
(„schwache“ Form der DGL)

$$\int_0^L EA\,u'v'\,dx + \int_0^L \mu \ddot{u} v\,dx = \int_0^L pv\,dx + \underbrace{[Nv]_0^L}_{\text{allg. Fall}} \tag{5}$$

Dynamische Stab- und Balkenelemente

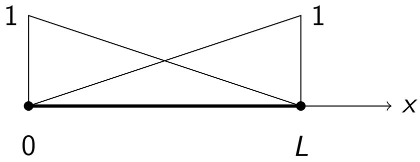
Semidiskreter FE-Ansatz:

$$u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \cdot \phi_i(x) \tag{6}$$

Verwendung derselben Ansatzfunktionen als virtuelle Verschiebungen:

$$v_h(x) = \phi_j(x) \qquad j = 1, \ldots, n \tag{7}$$

Verwendung linearer Ansatzfunktionen:



$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$$

$$\phi_2(x) = \frac{x}{L}$$

Dynamische Stab- und Balkenelemente

Einsetzen von Gl. (6) und (7) in Gl. (5) liefert:

$$\int_0^L EA \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\phi_i'(x)\phi_j'(x)\,dx + \int_0^L \mu \sum_{i=1}^{n} \ddot{u}_i(t)\phi_i(x)\phi_j(x)\,dx$$

$$= \int_0^L p\phi_j\,dx + [N\phi_j]_0^L \qquad j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

Zeitabhängige Konstanten können aus dem Integral gezogen werden:

$$\underbrace{\int_0^L EA \sum_{i=1}^{n} \phi_i'(x)\phi_j'(x)\,dx}_{\mathbf{K}}\ \underbrace{u_i(t)}_{\mathbf{u}(t)} + \underbrace{\int_0^L \mu \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx}_{\mathbf{M}}\ \underbrace{\ddot{u}_i(t)}_{\ddot{\mathbf{u}}(t)}$$

$$= \underbrace{\underbrace{\int_0^L p\phi_j\,dx}_{\mathbf{F_p}(t)} + \underbrace{[N\phi_j]_0^L}_{\mathbf{F_N}(t)}}_{\mathbf{F}(t)} \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9}$$

Dynamische Stab- und Balkenelemente

Aus Gl. (9) folgt die Bewegungsgleichung der FEM des ungedämpften Zug-Druck-Stabs:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{10}$$

Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad k_{ij} = \int_0^L EA\,\phi_i'(x)\phi_j'(x)\,dx$$

(Konsistente) Massenmatrix:

$$\mathbf{M} = \mu L\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad m_{ij} = \int_0^L \mu\,\phi_i(x)\phi_j(x)\,dx$$

Übung: Berechnen Sie die Elemente der Massenmatrix.

Dynamische Stab- und Balkenelemente

Alternative Massenmatrizen:

- „lumped“ Massenmatrix
  Idee: Aufteilen der Gesamtmasse auf die Knoten

$$\mathbf{M}_L = \mu L \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- Mittelwert aus **M** und einer diagonal gleichmäßig verteilten Massenmatrix (wird in Nastran verwendet)

$$\mathbf{M}_N = \mu L \begin{bmatrix} 5/12 & 1/12 \\ 1/12 & 5/12 \end{bmatrix}$$

Dynamische Stab- und Balkenelemente

Beobachtung

Die Summe der Elemente der Massenmatrix bezüglich einer Raumrichtung (x, y, z) entspricht stets der Gesamtmasse des Elements

Beweisskizze:

$$\mathbf{M} = \mu L \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = \mu \int_0^L \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 \end{bmatrix} dx$$

Jeder FE-Ansatz besitzt die "Partition of Unity"-Eigenschaft:

$$\sum_i \phi_i = 1$$

Somit folgt für die Summe der Matrizenelemente:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &= 1 \\ (\phi_1 + \phi_2)^2 &= 1 \\ \phi_1^2 + \phi_2^2 + 2\phi_1\phi_2 &= 1 \end{aligned}$$

Dynamische Stab- und Balkenelemente

Analoge Vorgehensweise liefert für die dynamische Balken-DGL

$$EI\,w^{IV}(x,t) + \mu\ddot{w}(x,t) = p(x,t) \tag{11}$$

die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{Ku}(t) + \mathbf{M\ddot{u}}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{12}$$

mit folgender Steifigkeitsmatrix und konsistenter Massenmatrix:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ & & 12 & 6L \\ sym. & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \frac{\mu L}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ & & 156 & 22L \\ sym. & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Strukturdynamische 2D- und 3D-Elemente

Grundgleichungen der 2D- und 3D-Elastizitätstheorie:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{u} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \tag{14}$$

$$\mathbf{d}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{p} \tag{15}$$

Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Dynamik (2D und 3D):

$$\int_V \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}\, dV + \int_V \rho\, \ddot{\mathbf{u}}^T \cdot \delta\mathbf{u}\, dV = \int_V \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p}\, dV + \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t}\, dS \tag{16}$$

Mit

$\delta\boldsymbol{\epsilon}$ = virtuelle Dehnungen

$\delta\mathbf{u}$ = virtuelle Verschiebungen

$\mathbf{t}$ = Randlasten

Strukturdynamische 2D- und 3D-Elemente

Semi-diskreter FE-Ansatz:

$$\mathbf{u}_h = \phi^T(x, y, z) \cdot \mathbf{U}(t) \tag{17}$$

Zweimalige Differentiation nach t ergibt

$$\ddot{\mathbf{u}}_h = \phi^T(x, y, z) \cdot \ddot{\mathbf{U}}(t) \tag{18}$$

Verwendung derselben Ansatzfunktionen als virtuelle Verschiebungen:

$$\delta\mathbf{u}_h = \boldsymbol{\phi}^T(x, y, z) \tag{19}$$

Aus Gl. (13) folgt somit

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_h = \mathbf{d} \cdot \delta\mathbf{u}_h = \mathbf{d} \cdot \phi^T =: \mathbf{D} \tag{20}$$

Strukturdynamische 2D- und 3D-Elemente

Für die Spannungen ergibt sich aus Gl. (14)

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{E} \cdot \epsilon_h = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{u}_h = \mathbf{E} \cdot \underbrace{\mathbf{d} \cdot \phi^T}_{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \tag{21}$$

Einsetzen von Gl. (17)-(21) in Gl. (16) liefert:

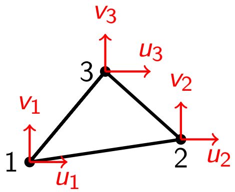
$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_V \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\, dV}_{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{U} + \underbrace{\int_V \rho \cdot \phi \cdot \phi^T\, dV}_{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{U}} \\ &= \underbrace{\int_V \phi \cdot \mathbf{p}\, dV + \int_\Gamma \phi \cdot \mathbf{t}\, dS}_{\mathbf{F}} \end{aligned} \tag{22}$$

Somit folgt die Bewegungsgleichung der FEM zu:

$$\mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{23}$$

Strukturdynamische 2D- und 3D-Elemente

Beispiel TRIA3-Element (CST-Element):



$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_2 & 0 \\ \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 \\ 0 & \phi_2 \\ 0 & \phi_3 \end{bmatrix}$$

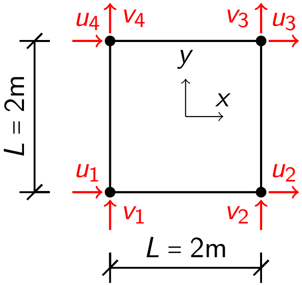
FE-Ansatz:

$$\mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} u_h(x,y,t) \\ v_h(x,y,t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}^T(x,y) \cdot \mathbf{U}(t)$$

Weitere strukturmechanische 2D- und 3D-Elemente mit Bewertungen siehe Skript "Modellierung mit FEM", Kapitel 4, Folien 6-9.

Strukturdynamische 2D- und 3D-Elemente

Übung: Berechnen Sie die konsistente Massenmatrix **M** des dargestellten QUAD4-Elements mit linearen Ansatzfunktionen in x- und y-Richtung für eine konstante Dichte ρ und eine konstante Scheibendicke t.



$$\phi_1(x, y) = 1/4 \cdot (1 - x)(1 - y)$$
$$\phi_2(x, y) = 1/4 \cdot (1 + x)(1 - y)$$
$$\phi_3(x, y) = 1/4 \cdot (1 + x)(1 + y)$$
$$\phi_4(x, y) = 1/4 \cdot (1 - x)(1 + y)$$

Einfluss der Dämpfung

Bewegungsgleichung mit Dämpfungsmatrix:

$$\mathbf{KU}(t) + \mathbf{C\dot{U}}(t) + \mathbf{M\ddot{U}}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{24}$$

Häufig verwendetes Dämpfungsmodell: „Rayleigh-Dämpfung“

$$\mathbf{C} = \alpha \cdot \mathbf{M} + \beta \cdot \mathbf{K} \qquad (\alpha,\ \beta = \text{Rayleigh-Parameter}) \tag{25}$$

Die Rayleigh-Parameter können aus folgender Formel berechnet werden (Herleitung erfolgt in Kap. 4):

$$D_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \tag{26}$$

Mit

D_i : Lehr'sches Dämpfungsmaß der i.-ten Eigenform

ω_i : Eigenkreisfrequenz der i.-ten Eigenlösung

Einfluss der Dämpfung

Anmerkungen zur Rayleigh-Dämpfung

1. Für jede Eigenkreisfrequenz ergibt sich ein anderer Dämpfungsgrad.
2. Die Rayleigh-Parameter können aus dem Dämpfungsgrad zweier interessierender Eigenfrequenzen bestimmt werden.
3. In der Praxis werden hierfür in der Regel die ersten beiden relevanten Eigenfrequenzen verwendet.
4. Der massenproportionale Term $\alpha \cdot \mathbf{M}$ kann physikalisch als äußere Dämpfung interpretiert werden und wirkt besonders intensiv auf die unteren Eigenfrequenzen.
5. Der steifigkeitsproportionale Term $\beta \cdot \mathbf{K}$ kann als Werkstoffdämpfung interpretiert werden und wirkt besonders intensiv auf die höheren Eigenfrequenzen.

Übung: Beispiel an der Tafel zur Berechnung der Rayleigh-Parameter.