Übungsaufgaben für Technische Mechanik III/Technische Dynamik

Prof. Dr. rer. nat. Markus Scholle

21. Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Kinematik und Dynamik der Massenpunkte

1.1 Kinematik des Massenpunkts

1.1.1 Kinematik einer Bewegung in Kartesischen Koordinaten (fallender harmonischer Oszillator)

Die Bewegung eines Massenpunktes sei in Kartesischen Koordinaten x, y wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} x(t) &:= x_0 \cos(\omega_0 t) \\ y(t) &:= -\frac{a}{2}t^2 \end{aligned}$$

Dabei seien x_0, a und ω_0 positive Konstanten. Berechnen Sie

a) die Geschwindigkeit und die Bahngeschwindigkeit,

b) die Beschleunigung.

Lösung:

a) Die Kartesischen Komponenten der Geschwindigkeit ergeben sich durch erste Ableitung als

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t)\,, \\ \dot{y}(t) &= -at\,.\end{aligned}$$

Daraus berechnet sich die Bahngeschwindigkeit als

$$|\vec{v}| = \sqrt{\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + a^2 t^2}\,.$$

b) Die Beschleunigung ergibt sich als zweite Ableitung, also als

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t)\,, \\ \ddot{y}(t) &= -a\,.\end{aligned}$$

1.1.2 Kinematik einer Bewegung in Kartesischen Koordinaten (Logarithmische Spirale)

Die ebene Bewegung eines Massenpunktes sei in Kartesischen Koordinaten x, y wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}x(t) &:= \exp(-At)\cos(\omega_0 t) \\ y(t) &:= \exp(-At)\sin(\omega_0 t)\end{aligned}$$

Dabei seien A und ω_0 positive Konstanten. Berechnen Sie

a) die Geschwindigkeit und die Bahngeschwindigkeit,

b) die Beschleunigung.

Lösung:

a) Die Geschwindigkeit $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$ ergibt sich durch erste Ableitung, also

$$\begin{aligned}v_x(t) = \dot{x}(t) &= -\exp(-At)\,[A\cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t)]\,, \\ v_y(t) = \dot{y}(t) &= \exp(-At)\,[\omega_0 \cos(\omega_0 t) - A\sin(\omega_0 t)]\,,\end{aligned}$$

während die Bahngeschwindigkeit deren Betrag ist, d.h.

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \exp(-At)\sqrt{A^2\left[\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right] + \omega_0^2\left[\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)\right]} \\ &= \sqrt{A^2 + \omega_0^2}\exp(-At)\end{aligned}$$

b) Für die Beschleunigung $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$ müssen die zweiten Ableitungen ermittelt werden, also

$$\begin{aligned}a_x(t) = \ddot{x}(t) &= \exp(-At)\left[\left(A^2 - \omega_0^2\right)\cos(\omega_0 t) + 2A\omega_0 \sin(\omega_0 t)\right]\,, \\ a_y(t) = \ddot{y}(t) &= \exp(-At)\left[\left(A^2 - \omega_0^2\right)\sin(\omega_0 t) - 2A\omega_0 \cos(\omega_0 t)\right]\,,\end{aligned}$$

1.1.3 Kinematik einer Bewegung

Die Bewegung eines Massenpunktes werde in Kartesischen Koordinaten x, y beschrieben. Von diesen sei nur die zeitliche Entwicklung der x–Koordinate als

$$x(t) = l\left[1+\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}t\right]^{\frac{3}{2}}$$

bekannt mit gegebenen Konstanten l und v_0. Dabei ist v_0 zugleich der während der gesamten Bewegung konstante Wert der Bahngeschwindigkeit, d.h. $|\vec{v}| = v_0$.

a) Rekonstruieren Sie $y = y(t)$ aus obigen Angaben.

b) Berechnen Sie die Beschleunigung der Bewegung.

Lösung:

a) Die Bahngeschwindigkeit ist hier in Kartesischen Koordinaten durch

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \sqrt{\left(l\frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}\left[1+\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}t\right]^{\frac{1}{2}}\right)^2+\dot{y}^2} = \sqrt{\frac{v_0^2}{2}\left[1+\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}t\right]+\dot{y}^2}$$

gegeben. Dies ist einer konstanten Geschwindigkeit v_0 gleichzusetzen, was nach Auflösen nach $\dot{y}$ unmittelbar

$$\dot{y} = \pm\sqrt{v_0^2-\frac{v_0^2}{2}\left[1+\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}t\right]} = \pm\sqrt{\frac{v_0^2}{2}\left[1-\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}t\right]} = \pm\frac{v_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}t}$$

liefert. Die gesuchte Funktion $y(t)$ ergibt sich durch Integration nach der Zeit schließlich als

$$y(t) = y_0 \mp l\left[1-\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}t\right]^{\frac{3}{2}}$$

mit verbleibender Integrationskonstante y_0.

b) Die Komponenten der Beschleunigung $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x+\ddot{y}\vec{e}_y$ ermittelt man durch Bildung der zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{v_0}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[1+\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}t\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v_0^2}{6l\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}t}}\\ \ddot{y} &= \pm\frac{v_0}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[1-\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}t\right]^{\frac{1}{2}} = \mp\frac{v_0^2}{6l\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}v_0}{3l}t}}\end{aligned}$$

1.1.4 Kinematik einer Bewegung in Polarkoordinaten

Die Die Bewegung eines Massenpunktes werde in Polaroordinaten r, φ beschrieben. Von diesen sei nur die zeitliche Entwicklung der radialen Koordinate r als

$$r(t) = \frac{v_0 t_1}{\pi} \sin\left(\pi \frac{t}{t_1}\right) \tag{1}$$

bekannt mit gegebenen Konstanten t_1 und v_0. Dabei ist v_0 zugleich der während der gesamten Bewegung konstante Wert der Bahngeschwindigkeit, d.h. $|\vec{v}| = v_0$.

a) Rekonstruieren Sie $\varphi = \varphi(t)$ aus obigen Angaben und der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$.

b) Stellen Sie die Bewegung alternativ in Kartesischen Koordinaten x, y dar.

c) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

Lösung:

a) Gegeben ist r, gesucht ist φ, wobei die Information über die Bahngeschwindigkeit $|\vec{v}|$ zu beachten ist. Die Formel, die diese drei Größen miteinander verknüft, lautet

$$|\vec{v}| = \left|\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2},$$

woraus man nach quadrieren und Berücksichtigen von $|\vec{v}| = v_0$ zunächst

$$v_0^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{2}$$

erhält. Als nächstes kann (1) verwendet werden, wobei außerdem noch deren Ableitung

$$\dot{r} = \frac{v_0 t_1}{\pi} \cos\left(\pi \frac{t}{t_1}\right) \frac{\pi}{t_1} = v_0 \cos\left(\pi \frac{t}{t_1}\right)$$

benötigt wird. Einsetzen in (2) liefert dann

$$v_0^2 = v_0^2 \cos^2\left(\pi \frac{t}{t_1}\right) + \frac{v_0^2 t_1^2}{\pi^2} \sin^2\left(\pi \frac{t}{t_1}\right) \dot{\varphi}^2,$$

was sich wiederum nach $\dot{\varphi}^2$ auflösen lässt

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1 - \cos^2\left(\pi \frac{t}{t_1}\right)}{\sin^2\left(\pi \frac{t}{t_1}\right)} \frac{\pi^2}{t_1^2} = \frac{\sin^2\left(\pi \frac{t}{t_1}\right)}{\sin^2\left(\pi \frac{t}{t_1}\right)} \frac{\pi^2}{t_1^2} = \frac{\pi^2}{t_1^2}$$

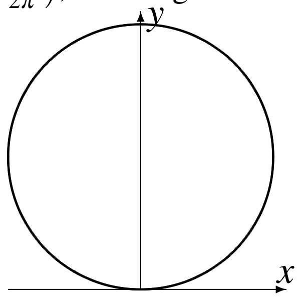
und nach Ziehen der Wurzel zur simplen Form $\dot{\varphi} = \pm\pi/t_1$ führt. Damit ergibt sich der Azimutalwinkel per Integration zu $\varphi = \pm\pi t/t_1 + C$ mit Integrationskonstante C, die sich unter Berücksichtigung der Randbedingung $\varphi(0) = 0$ zu $C = 0$ ergibt. Als Resultat folgt also

$$\varphi(t) = \pm\pi \frac{t}{t_1}.$$

b) Mit bekannten Umrechnungsformeln ergibt sich:

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos\varphi = \frac{v_0 t_1}{\pi}\sin\left(\pi\frac{t}{t_1}\right)\cos\left(\pi\frac{t}{t_1}\right) = \frac{v_0 t_1}{2\pi}\sin\left(2\pi\frac{t}{t_1}\right) \\ y(t) &= r\sin\varphi = \pm\frac{v_0 t_1}{\pi}\sin^2\left(\pi\frac{t}{t_1}\right) = \pm\frac{v_0 t_1}{2\pi}\left[1-\cos\left(2\pi\frac{t}{t_1}\right)\right] \end{aligned}$$

1. [c)] Es handelt sich beim Ergebnis aus Teil (b) um die Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius $\frac{v_0 t_1}{2\pi}$ um den Mittelpunkt $\left(0, \pm\frac{v_0 t_1}{2\pi}\right)$, hier dargestellt für positives Vorzeichen:



1.1.5 Kinematik einer Bewegung in Polarkoordinaten

Die Bewegung eines Massenpunktes sei in Polarkoordinaten r, φ wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} r(t) &:= \sqrt{d^2 + v_0^2 t^2} \\ \varphi(t) &:= \arctan\left(\frac{v_0}{d}t\right) \end{aligned}$$

Dabei seien v_0 und d positive Konstanten. Berechnen Sie

a) die Geschwindigkeit und die Bahngeschwindigkeit,

b) die Beschleunigung.

c) Rechnen Sie obige Darstellung in Kartesische Koordinaten um und fertigen Sie eine Skizze der Bewegung.

Lösung:

a) In Polarkoordinaten berechnet sich die Geschwindigkeit über die Formel

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\,,$$

in welche lediglich die entsprechenden Ausdrücke für $\dot{r}$ und $\dot{\varphi}$ einzusetzen sind. Im vorliegenden Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{v_0^2 t}{\sqrt{d^2 + v_0^2 t^2}}\,, \\ \dot{\varphi} &= \frac{v_0 d}{d^2 + v_0^2 t^2}\,, \end{aligned}$$

was letztlich zur Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{v_0}{\sqrt{d^2 + v_0^2 t^2}} \left[v_0 t \vec{e}_r + d \vec{e}_\varphi \right]$$

führt. Die Bahngeschwindigkeit ist der Betrag dieses Vektors, also

$$v = |\vec{v}| = \frac{v_0}{\sqrt{d^2 + v_0^2 t^2}} \sqrt{(v_0 t)^2 + d^2} = v_0 \,.$$

Die Bahngeschwindigkeit ist somit konstant!

b) Für die Beschleunigung kann man in Polarkoordinaten die fertige Formel

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left[\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \right] \vec{e}_r + \left[2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \right] \vec{e}_\varphi$$

verwenden. Der Rest ist reine Rechenarbeit! Die benötigten zweiten Ableitungen lauten zunächst

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{v_0^2 d^2}{\sqrt{d^2 + v_0^2 t^2}^{\,3}} \,, \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{2 d v_0^3 t}{\left(d^2 + v_0^2 t^2 \right)^2} \,, \end{aligned}$$

was nach Einsetzen in obige Formel schließlich zu

$$\vec{a} = \vec{0}$$

führt. Die Bewegung ist also geradlinig–gleichförmig, was aufgrund der Darstellung in Polarkoordinaten nicht ohne weiteres erkennbar war!

c) Die Umrechnung in Kartesische Koordinaten erfolgt am besten über die Beziehungen

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \,, \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x} \right) . \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der gegebenen Bewegung, also

$$\begin{aligned} r(t) &:= \sqrt{d^2 + (v_0 t)^2} \\ \varphi(t) &:= \arctan\left(\frac{v_0 t}{d} \right) \end{aligned}$$

legt die Identifikation

$$\begin{aligned} x(t) &= d \\ y(t) &= v_0 t \end{aligned}$$

nahe, was offensichtlich obiges Gleichungssystem erfüllt. Die Bahnkurve der Bewegung ist also eine vertikale Gerade, welche die x–Achse im Punkt $x = d$ schneidet. Die Bewegung verläuft mit konstanter Geschwindigkeit v_0 parallel zur y–Achse.

1.1.6 Eindimensionale Bewegung in mehreren Abschnitten

Ein Kraftfahrzeug auf gerader Bahn hat zur Zeit $t = t_0 = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit v_0. Es erfährt zunächst eine mit der Zeit linear abnehmende Beschleunigung vom Anfangswert $a = a_0 > 0$ bis zum Wert $a = 0$ zum Zeitpunkt $t = t_1$. Anschließend legt es den Weg s_2 gleichförmig (also mit konstanter Geschwindigkeit) zurück und wird in einem dritten Bewegungsabschnitt mit $a = a_3 < 0$ abgebremst, bis es zum Stillstand kommt.

a) Nach welcher Zeit kommt das Fahrzeug zum Stillstand?

b) An welcher Stelle kommt das Fahrzeug zum Stillstand?

c) Man stelle die Bewegung grafisch durch das entsprechende Beschleunigungs–, Geschwindigkeits– und Weg–Zeit–Diagramm dar.

Lösung:

a) Im ersten Abschnitt $0 \leq t \leq t_1$ gilt

$$\ddot{x}_I(t) = a_0 \left[1 - \frac{t}{t_1}\right] ,$$

was nach einer ersten Integration zu

$$\dot{x}_I(t) = a_0 \left[t - \frac{t^2}{2t_1}\right] + C_1$$

mit Integrationskonstante C_1 führt. Letztere ermittelt man aus der Anfangsbedingung $\dot{x}_I(0) = v_0$ als $C_1 = v_0$. Die zweite Integration liefert

$$x_I(t) = \frac{a_0}{2} \left[t^2 - \frac{t^3}{3t_1}\right] + v_0 t + C_2$$

mit Integrationskonstante C_2, welche, wenn wir die Festlegung machen, dass die Position des Fahrzeugs zum Zeitpunkt $t = 0$ der Nullpunkt sei, als $C_2 = 0$ wählen können. Somit gilt

$$x_I(t) = \frac{a_0}{2} \left[t^2 - \frac{t^3}{3t_1}\right] + v_0 t .$$

Im zweiten Abschnitt $t_1 \leq t \leq t_2$ (mit noch unbekanntem t_2) ist die konstante Geschwindigkeit gerade die Endgeschwindigkeit des ersten Abschnitts, d.h.

$$\dot{x}_{II}(t) = \dot{x}_I(t_1) = a_0 \left[t_1 - \frac{t_1^2}{2t_1}\right] + v_0 = \frac{a_0 t_1}{2} + v_0 ,$$

woraus per Integration sofort

$$x_{II}(t) = \dot{x}_I(t_1)\, t + C_3 = \left[\frac{a_0 t_1}{2} + v_0\right] t + C_3$$

mit weiterer Integrationskonstante C_3 folgt. Da die Bewegung stetig sein muss, gilt

$$x_{II}(t_1) = x_I(t_1) ,$$

woraus

$$\left[\frac{a_0 t_1}{2} + v_0\right] t_1 + C_3 = \frac{a_0 t_1^2}{3} + v_0 t_1$$

und damit der Wert der Integrationskonstanten als

$$C_3 = -\frac{a_0 t_1^2}{6}$$

folgt und damit

$$x_{II}(t) = \left[\frac{a_0 t_1}{2} + v_0\right] t - \frac{a_0 t_1^2}{6}\,.$$

Die noch unbekannte Zeit t_2 ergibt sich aus der Information, dass das Fahrzeug im zweiten Abschnitt die Strecke

$$s_2 = x_{II}(t_2) - x_{II}(t_1) = \left[\frac{a_0 t_1}{2} + v_0\right](t_2 - t_1)$$

zurücklegt, woraus

$$t_2 = t_1 + \frac{2 s_2}{a_0 t_1 + 2 v_0}$$

folgt. Die Bewegung im dritten Abschnitt $t_2 \leq t \leq t_3$ (mit wiederum unbekanntem t_3) geschieht mit konstanter (negativer) Beschleunigung, also

$$\ddot{x}_{III} = a_3\,,$$

was nach einmaliger Integration

$$\dot{x}_{III}(t) = a_3 t + C_4$$

mit Integrationskonstante C_4 impliziert. Aufgrund der Stetigkeit der Bewegung muss wiederum $\dot{x}_{III}(t_2) = \dot{x}_{II}(t_2)$ und damit

$$a_3 t_2 + C_4 = \frac{a_0 t_1}{2} + v_0$$

gelten, woraus sich die Integrationskonstante als $C_4 = a_0 t_1/2 - a_3 t_2 + v_0$ ergibt und damit

$$\dot{x}_{III}(t) = a_3 t + \frac{a_0 t_1}{2} - a_3 t_2 + v_0\,. \tag{3}$$

Zum Zeitpunkt t_3 kommt das Fahrzeug gemäß

$$0 = \dot{x}_{III}(t_3) = \frac{a_0 t_1}{2} + a_3(t_3 - t_2) + v_0$$

zum Stillstand, woraus sich schließlich die gesuchte Zeit als

$$\begin{aligned} t_3 &= t_2 - \frac{a_0 t_1 + 2 v_0}{2 a_3} \\ &= t_1 + \frac{2 s_2}{a_0 t_1 + 2 v_0} - \frac{a_0 t_1 + 2 v_0}{2 a_3} \end{aligned}$$

ergibt.

b) Zur Berechnung des Weges ist (3) ein weiteres Mal zu integrieren, was zu

$$x_{III}(t) = \frac{a_3}{2} t^2 + \left[\frac{a_0 t_1}{2} - a_3 t_2 + v_0\right] t + C_5$$

mit Integrationskonstante C_5 führt. Die Stetigkeit der Bewegung verlangt dann $x_{III}(t_2) = x_{II}(t_2)$ und somit

$$\frac{a_3}{2}t_2^2 + \left[\frac{a_0 t_1}{2} - a_3 t_2 + v_0\right] t_2 + C_5 = \left[\frac{a_0 t_1}{2} + v_0\right] t_2 - \frac{a_0 t_1^2}{6},$$

woraus C_5 als

$$C_5 = -\frac{a_0 t_1^2}{6} + \frac{a_3}{2}t_2^2$$

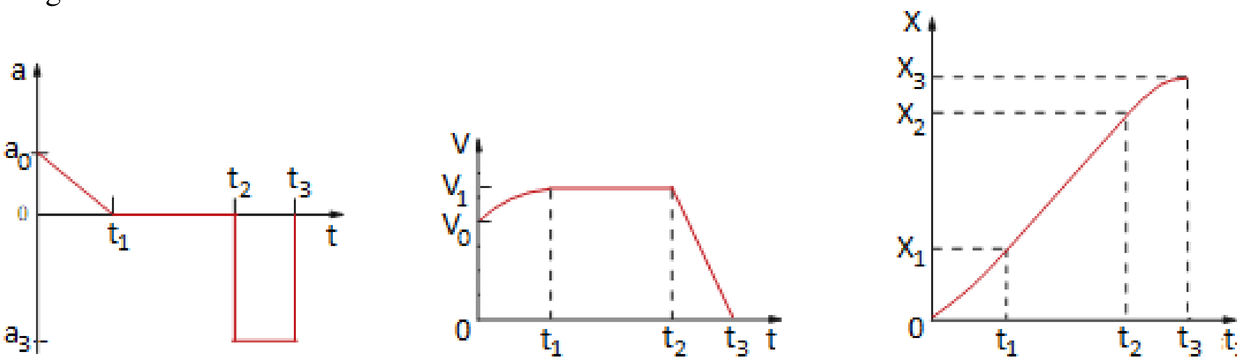
hervorgeht und damit

$$x_{III}(t) = \frac{a_3}{2}t^2 + \left[\frac{a_0 t_1}{2} - a_3 t_2 + v_0\right] t - \frac{a_0 t_1^2}{6} + \frac{a_3}{2}t_2^2$$

gilt. Die gesuchte Fahrstrecke ist nun (mit $a_0 t_1/2 - a_3 t_2 + v_0 = -a_3 t_3$)

$$\begin{aligned} x_3 = x_{III}(t_3) &= -\frac{a_3}{2}\left(t_3^2 - t_2^2\right) - \frac{a_0 t_1^2}{6} \\ &= s_2 + v_0 t_1 + \frac{a_0 t_1^2}{3} - \frac{(a_0 t_1 + 2v_0)^2}{8a_3}. \end{aligned}$$

c) Diagramme:



Dabei sind folgende zusätzliche Größen zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} v_1 = \dot{x}_I(t_1) &= \frac{a_0 t_1}{2} + v_0 \\ x_1 = x_I(t_1) &= \frac{a_0}{3}t_1^2 + v_0 t_1 \\ x_2 = x_1 + s_2 &= \frac{a_0}{3}t_1^2 + v_0 t_1 + s_2 \end{aligned}$$

1.1.7 Beobachtung eines Raketenstarts

Der Start einer Rakete, welche zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe heraus mit konstanter Beschleunigung a_0 senkrecht nach oben steigt, wird von einer Radarstation im Abstand l vom Startplatz aus beobachtet. Startplatz und Radarstation liegen auf einer Höhe.

a) Beschreiben sie die Bewegung der Rakete in Kartesischen Koordinaten. Fertigen Sie zuerst eine Skizze und wählen Sie als Koordinatenursprung die Position der Radarstation.

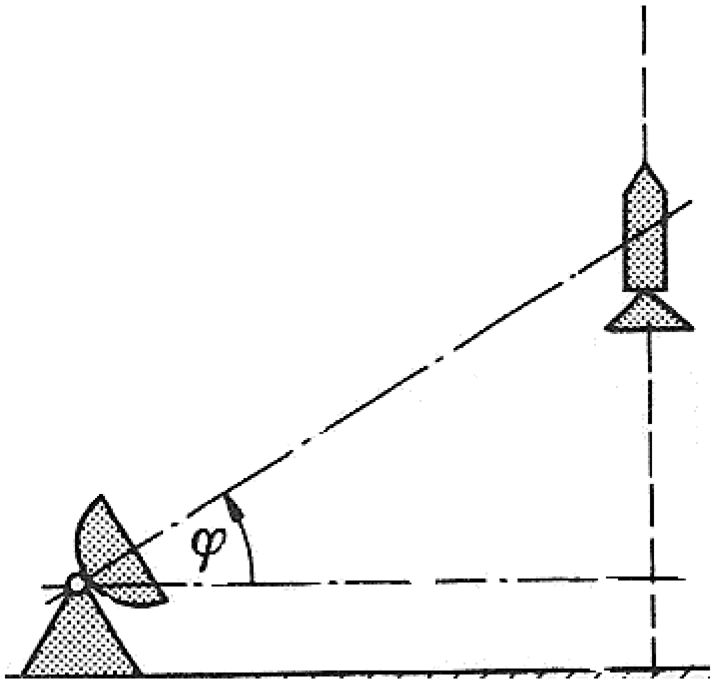
b) Das Radar ermittelt den Abstand r der Rakete von der Station und die vertikale Beobachtungsrichtung φ, also die Polarkoordinaten der aktuellen Position der Rakete. Berechnen Sie die Daten, die das Radar liefern sollte.

c) Wo und wann erreicht die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ein Maximum?

d) Falls das Radar ein Doppler–Radar ist, kann auch eine Geschwindigkeit gemessen werden. Um welche Geschwindigkeit handelt es sich und wie ändert sich diese mit der Zeit?

Lösung:

a) Skizze:



Dem senkrechten Aufstieg der Rakete wird durch

$$x = l = \text{const}$$

Rechnung getragen. Die Bewegung in y–Richtung erfolgt mit konstanter Beschleunigung a, also

$$\ddot{y} = a\,,$$

was nach zweimaliger Integration bezüglich der Zeit das Weg–Zeit–Gesetz

$$y(t) = \frac{a}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

mit Integrationskonstanten C_1 und C_2 liefert. Letztere ergeben sich aus den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ (Start vom Boden) und $\dot{y}(0) = 0$ (Start aus der Ruhe heraus) als $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$. Damit ist die Bewegung vollständig durch

$$\begin{aligned} x &= l \\ y &= \frac{a}{2}t^2 \end{aligned}$$

gegeben.

b) Die Umrechnung von Kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten erfolgt durch

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}\,, \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\,, \end{aligned}$$

was im vorliegenden Fall konkret auf

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{l^2 + a^2t^4/4}\,, \\
\varphi &= \arctan\left(\frac{a}{2l}t^2\right)\,,
\end{aligned}
$$

führt.

c) Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich als

$$
\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\arctan\left(\frac{a}{2l}t^2\right)\right] = \frac{\frac{a}{2l}2t}{1+\left(\frac{a}{2l}t^2\right)^2} = \frac{4lat}{4l^2+a^2t^4}\,.
$$

Um deren Maximum zu bestimmen, sind die Nullstellen deren Ableitung, also die Nullstellen von

$$
\omega = \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{4lat}{4l^2+a^2t^4}\right] = \frac{4la\left[4l^2-3a^2t^4\right]}{(4l^2+a^2t^4)^2}
$$

zu bestimmen. Als einzige Nullstelle ergibt sich

$$
t = t_1 = \sqrt[4]{\frac{4l^2}{3a^2}} = \sqrt{\frac{2l}{\sqrt{3}a}}\,.
$$

Zu diesem Zeitpunkt nimmt die Winkelgeschwindigkeit den Wert

$$
\omega(t_1) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2a}{\sqrt{3}l}}
$$

an. Die Kontrolle mittels zweiter Ableitung der Winkelgeschwindigkeit, ob wirklich ein Maximum vorliegt, ist entbehrlich: Da $\omega(0) = 0$ und $\omega(t) \to 0$ für $t \to \infty$ gilt, während $\omega(t_1) > 0$ ist, kann es sich nur um ein Maximum handeln! Die entsprechende Position kann entweder durch die Höhe

$$
y(t_1) = \frac{a}{2}t_1^2 = \frac{l}{\sqrt{3}}
$$

oder durch den Azimutalwinkel

$$
\varphi(t_1) = \arctan\left(\frac{y(t_1)}{l}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ
$$

angegeben werden.

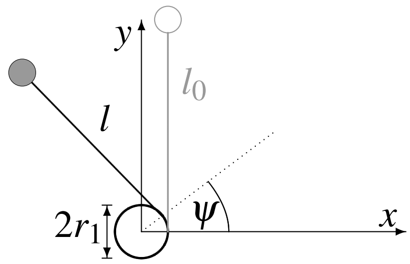
d) Die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten lautet

$$
\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi
$$

mit Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$ und Azimutalgeschwindigkeit $r\dot{\varphi}$. Mit dem Doppler–Effekt kann nur erstere gemessen werden, also

$$
\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{l^2+a^2t^4/4} = \frac{a^2t^3}{2\sqrt{l^2+a^2t^4/4}}\,.
$$

1.1.8 Bewegung mit kinematischer Bindung



Ein dünnes, undehnbares Seil, an dessen Ende ein Massenpunkt (Masse m) befestigt ist, wickelt sich um einen kreisrunden Pfosten (Radius r_1). Die aktuelle Position des Massenpunktes sei indirekt durch den Winkel $\psi = \psi(t)$ gegeben, unter dem der Kontaktpunkt des Seils mit der Mantelfläche ersacheint. Anfangs beträgt die Seillänge l_0.

a) Wie ändert sich die Seillänge $l = l\,(t)$ mit zunehmendem Winkel ψ?

b) Wie ergibt sich aus ψ die aktuelle Position des Massenpunktes in Polarkoordinaten r und φ?

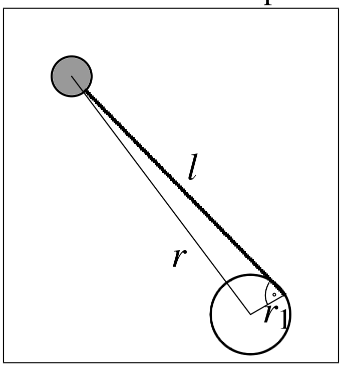
c) Ermitteln Sie den Geschwindigkeitsvektor in Polarkoordinaten und die Bahngeschwindigkeit.

d) Vereinfachen Sie obige Ergebnisse unter der Annahme, dass $\varepsilon := r_1/l_0 \ll 1$ ist und die Länge des Seils noch nicht wesentlich gegenüber der Anfangslänge reduziert ist.

Lösung:

a) Da die Abnahme der Seillänge gerade gleich der Bogenlänge des Winkels ψ, bezogen auf den Radius r_1 des Pfostens ist, gilt $l_0 - l = r_1\psi$ und somit $l = l_0 - r_1\psi$. Anschaulich: Nach genau einer Umdrehung büßt das Seil ein Stück der Länge $2\pi r_1$ ein.

b) Wir betrachten das Dreieck, welches aus dem Mittelpunkt, dem Ablösepunkt des Seils und der Position des Massenpunktes gebildet wird.



Da dieses rechtwinklig ist, hängt die gesuchte Polarkoordinate r mit r_1 und l über den Satz des Pythagoras zusammen, also

$$r^2 = l^2 + r_1^2 = (l_0 - r_1\psi)^2 + r_1^2\,, \tag{4}$$

oder, explizit nach r aufgelöst:

$$r = \sqrt{l^2 + r_1^2} = \sqrt{(l_0 - r_1\psi)^2 + r_1^2} \tag{5}$$

Der Azimutalwinkel φ ist die Summe aus dem Winkel ψ und demjenigen Winkel in dem oben beschriebenen Dreieck, welcher an den Mittelpunkt angrenzt. Dann folgt

$$\frac{l}{r_1} = \tan(\varphi - \psi)\,,$$

was, aufgelöst nach φ zum Ergebnis

$$\begin{aligned} \varphi &= \psi + \arctan\left(\frac{l}{r_1}\right) \\ &= \psi + \arctan\left(\frac{l_0}{r_1} - \psi\right) \end{aligned}$$

führt.

c) Der Geschwindigkeitsvektor lautet in Polarkoordinaten ganz allgemein

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \,. \tag{6}$$

Aus der kinematischen Bindung (7) folgt durch Ableiten

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{l^2+r_1^2} = \frac{2l\dot{l}}{2\sqrt{l^2+r_1^2}} = -\frac{r_1 l}{r}\dot{\psi}\,, \tag{7}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\psi + \arctan\left(\frac{l}{r_1}\right)\right] = \dot{\psi} + \frac{1}{1+\left(\frac{l}{r_1}\right)^2}\frac{\dot{l}}{r_1} = \frac{l^2}{l^2+r_1^2}\dot{\psi} = \frac{l^2}{r^2}\dot{\psi}\,, \tag{8}$$

was nach Einsetzen in (9) dann zum Resultat

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -\frac{r_1 l}{r}\dot{\psi}\vec{e}_r + \frac{l^2}{r}\dot{\psi}\vec{e}_\varphi = \frac{l}{r}\dot{\psi}\left[l\vec{e}_\varphi - r_1\vec{e}_r\right] \tag{9}$$

$$= \dot{\psi}\frac{l_0 - r_1\psi}{\sqrt{(l_0-r_1\psi)^2+r_1^2}}\left[(l_0-r_1\psi)\vec{e}_\varphi - r_1\vec{e}_r\right] \tag{10}$$

führt. Die Bahngeschwindigkeit ist der daraus resultierende Betrag

$$|\vec{v}| = \dot{\psi}\frac{l}{r}\sqrt{l^2+r_1^2} = l\dot{\psi} = (l_0 - r_1\psi)\,\dot{\psi}\,.$$

d) Zunächst ist es erforderlich, alle Größen in Abhängigkeit von ε wie folgt zu schreiben:

(i) $l = l_0\left[1 - \frac{r_1}{l_0}\psi\right] = l_0\left[1-\varepsilon\psi\right]$

(ii) $r = \sqrt{l^2+r_1^2} = \sqrt{l_0^2\left[1-\varepsilon\psi\right]^2 + r_1^2} = l_0\sqrt{\left[1-\varepsilon\psi\right]^2 + \frac{r_1^2}{l_0^2}} = l_0\sqrt{1-2\varepsilon\psi+\varepsilon^2\left[1+\psi^2\right]}$

(iii) $\varphi = \psi + \arctan\left(\frac{1}{\varepsilon} - \psi\right)$

(iv) $\vec{v} = \dot{\psi}\frac{l}{r}\left[l\vec{e}_\varphi - r_1\vec{e}_r\right] = l_0\dot{\psi}\frac{1-\varepsilon\psi}{\sqrt{1-2\varepsilon\psi+\varepsilon^2\left[1+\psi^2\right]}}\left[(1-\varepsilon\psi)\vec{e}_\varphi - \varepsilon\vec{e}_r\right]$

(v) $|\vec{v}| = l\dot{\psi} = l_0\left[1-\varepsilon\psi\right]\dot{\psi}$

Im nächsten Schritt muss zunächst entschieden werden, bis zu welcher Potenz von ε zu entwickeln ist. Dabei gilt der Grundsatz „so wenig wie möglich, aber so viel wie nötig“, d.h. man muss sich darüber im Klaren sein, ab welcher Potenz der Effekt, den zu beschreiben es gilt, bemerkbar wird. Im vorliegenden Beispiel geht die gesamte Bewegung im Limes $\varepsilon \to 0$ in eine reine Kreisbewegung mit unveränderlichem Radius l_0 über. Um den hier relevanten Effekt, nämlich die Abnahme der Seillänge und die damit verbundene Spiralbewegung minimalistisch erfassen zu können, darf bei der Gleichung für die Seillänge,

$$l = l_0\left[1-\varepsilon\psi\right]\,,$$

kein Term gestrichen werden, d.h. eine Entwicklung bis zur ersten Potenz ε^1 ist erforderlich. Als Konsequenz sind auch alle weiteren Größen bis zur ersten Potenz zu entwickeln, während ab der zweiten Ordnung ε^2 und höher der Rotstift angesetzt wird. Für den Radius bedeutet das

$$r = l_0\sqrt{1-2\varepsilon\psi+\varepsilon^2\left[1+\psi^2\right]} \approx l_0\sqrt{1-2\varepsilon\psi} \approx l_0\left[1-\varepsilon\psi\right]\,,$$

wobei im letzten Schritt die Taylor–Entwicklung $\sqrt{1+\delta} \approx 1 + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{8}\delta^2 + \cdots$ der Wurzelfunktion mit anschließender Streichung aller quadratischen und höheren Terme berücksichtigt worden ist. Das bedeutet, dass in führender Ordnung Seillänge l und Radius r nicht voneinander zu unterscheiden sind. Damit kann man die Geschwindigkeit auch durch

$$\vec{v} = \dot{\psi}\frac{l}{r}\left[l\vec{e}_\varphi - r_1\vec{e}_r\right] \approx \dot{\psi}\left[l\vec{e}_\varphi - r_1\vec{e}_r\right] = l_0\dot{\psi}\left[(1-\varepsilon\psi)\,\vec{e}_\varphi - \varepsilon\vec{e}_r\right]$$

gut approximieren. Demgegenüber liegt die Bahngeschwindigkeit mit

$$|\vec{v}| = l_0\,[1-\varepsilon\psi]\,\dot{\psi}$$

bereits in der gewünschten Form vor. Ein „Sorgenkind“ ist dagegen der Azimutalwinkel

$$\varphi = \psi + \arctan\left(\frac{1}{\varepsilon} - \psi\right),$$

da dieser keine Taylor–Entwicklung im klassischen Sinne zulässt. Hier muss zunächst eine alternative Form gefunden werden, aus welcher eine Potenzreihenentwicklung hervorgeht. Zunächst lösen wir nach dem Argument des Arcustangens auf,

$$\tan(\varphi-\psi) = \frac{1}{\varepsilon} - \psi = \frac{1-\varepsilon\psi}{\varepsilon},$$

und bilden den Kehrwert, welcher eine reguläre Entwicklung zulässt:

$$\cot(\varphi-\psi) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\psi} \approx \varepsilon\,[1+\varepsilon\psi+\cdots] \approx \varepsilon$$

Erneutes Auflösen nach φ führt schließlich zu

$$\varphi = \psi + \cot\varepsilon \approx \psi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\,.$$

1.2 Dynamik der Massenpunkte

1.2.1 Schiefer Wurf

Ein Massenpunkt mit der Masse m wird zur Zeit $t = 0$ vom Koordinatenursprung (Erdboden) aus unter einem Winkel α zur x–Achse mit einer Geschwindigkeit v_0 abgeworfen. Wenn wir den Luftwiderstand vernachlässigen, wirkt als einzige Kraft das Gewicht $G = mg$ in negativer z–Richtung.

a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen in Kartesischen Koordinaten? Ermitteln Sie deren Lösung.

b) Bestimmen Sie Wurfzeit, -weite und -höhe bei flachem Gelände (Erdboden=xy–Ebene).

c) Bei welchem Abwurfwinkel wird bei gegebener Abwurfgeschwindigkeit die größte Wurfweite erreicht?

Lösung:

a) Das zweite Newtonsche Axiom lautet vektoriell $m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z$. Division durch die Masse und Zerlegung in Kartesische Komponenten ergibt

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0\,, \\ \ddot{y} &= 0\,, \\ \ddot{z} &= -g\,. \end{aligned}$$

Offensichtlich findet aufgrund der Anfangsbedingungen (Wurfrichtung) die gesamte Bewegung in der xz–Ebene statt, d.h. es gilt $y = 0$ für alle Zeiten. Für die beiden übrigen Koordinaten können die Bewegungsgleichungen zweimal integriert werden, d.h.

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 t + C_2\,, && (11) \\ z(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + C_3 t + C_4\,, && (12) \end{aligned}$$

wobei die auftretenden Integrationskonstanten über die Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen. Diese lauten

$$\begin{aligned} x(0) &= 0\,, \\ z(0) &= 0\,, \\ \dot{x}(0) &= v_0 \cos\alpha\,, \\ \dot{z}(0) &= v_0 \sin\alpha\,, \end{aligned}$$

wobei wir mit den ersten beiden Bedingungen festgelegt haben, dass die Bewegung im Koordinatenursprung beginne. Die letzten beiden Bedingungen berücksichtigen Anfangsgeschwindigkeit und Wurfrichtung. Einsetzen von (11, 12) in diese Bedingungen liefert

$$\begin{aligned} C_2 &= 0\,, \\ C_4 &= 0\,, \\ C_1 &= v_0 \cos\alpha\,, \\ C_3 &= v_0 \sin\alpha\,, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos\alpha t\,, && (13) \\ z(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha t\,, && (14) \end{aligned}$$

als Endergebnis.

b) Der Wurf endet, sobald z erneut den Wert 0 annimmt, also

$$0 = z(t_1) = -\frac{g}{2}t_1^2 + v_0 \sin\alpha t_1 = t_1\left(v_0 \sin\alpha - \frac{g}{2}t_1\right)\,,$$

was als Wurfzeit

$$t_1 = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha$$

liefert und

$$x_1 = x(t_1) = \frac{v_0^2}{g} 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha) \qquad (15)$$

als Wurfweite. Die Wurfhöhe ist durch den Maximalwert von z festgelegt. Dieser wird zur Zeit t_m angenommen mit

$$0 = \dot{z}(t_m) = v_0 \sin\alpha - g t_m\,,$$

also bei der halben Wurfzeit $t_m = t_1/2$ und beträgt

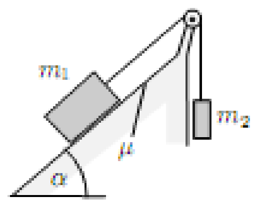
$$z_m = z(t_m) = z\left(\frac{t_1}{2}\right) = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha\,.$$

c) Die größte Wurfweite bei gegebener Abwurfgeschwindigkeit ermittelt man durch Bestimmung des Maximums von (15). Dieses wird offensichtlich für einen Abwurfwinkel von 45° erreicht und beträgt

$$x_{1,max} = \frac{v_0^2}{g}\,. \tag{16}$$

1.2.2 Bewegung unter trockener Reibung

Auf einer rauhen schiefen Ebene (Neigungswinkel α, Reibungszahl μ) wird, wie rechts gezeigt, eine Masse m_1 geführt, die durch ein Seil mit der Masse m_1 verbunden ist. Das Seil sei annähernd masselos und die Rolle besitze weder Reibung noch ein merkliches Trägheitsmoment.

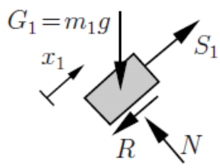


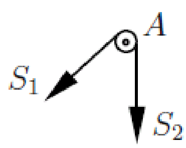
a) Wie groß sind die Beschleunigungen, wenn m_1 nach oben bzw. nach unten rutscht?

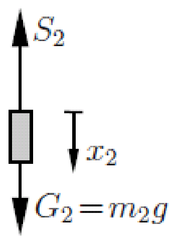
b) Wie groß ist die Seilkraft?

Lösung:

a) Zunächst wird angenommen, dass sich die Masse m_1 nach oben bewegt. Dazu teilen wir das Gesamtsystem in 3 Einzelsysteme auf, schneiden diese frei und stellen die Newtonschen Bewegungsgleichungen auf.

System 1:


System 2:


System 3:


Die Gleichungen für System 1 lauten

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= S_1 - R - G_1 \sin(\alpha)\,, \\ 0 &= N - G_1 \cos(\alpha)\,, \end{aligned}$$

wobei für die Reibkraft

$$R = N\mu$$

gilt. Für System 2 resultiert aus dem Momentengleichgewicht

$$\sum M_A = 0 = S_1 r - S_2 r \Rightarrow S_1 = S_2\,,$$

während sich für System 3

$$m_2\ddot{x}_2 = G_2 - S_2$$

ergibt. Mit kinematischer Bedingung $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$ folgt $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}$ und damit

$$\ddot{x} = g\frac{m_2 - m_1\left[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)\right]}{m_1 + m_2}$$

für die Rutschbewegung nach oben. Damit m_1 tatsächlich nach oben rutscht, muss $\ddot{x} > 0$ sein, d.h. $m_2 > m_1\left[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)\right]$.
Beim Rutschen nach unten dreht sich nur die Richtung von R um. Analog folgt dann

$$\ddot{x} = -g\frac{m_1\left[\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\right] - m_2}{m_1 + m_2}$$

mit $\ddot{a} < 0$, d.h. $m_2 < m_1\left[\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\right]$.

b) Unabhängig von der Bewegungsrichtung gilt

$$S = S_2 = S_1 = G_2 - m_2\ddot{x}_2 = m_2(g - \ddot{x})$$

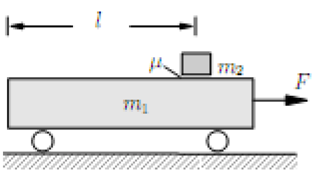
Durch Einsetzen der entsprechenden Beschleunigungen erhält man daraus beim Rutschen nach oben

$$S = \frac{m_1 m_2 g\left[1 + \sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)\right]}{m_1 + m_2}$$

und beim Rutschen nach unten erhält man

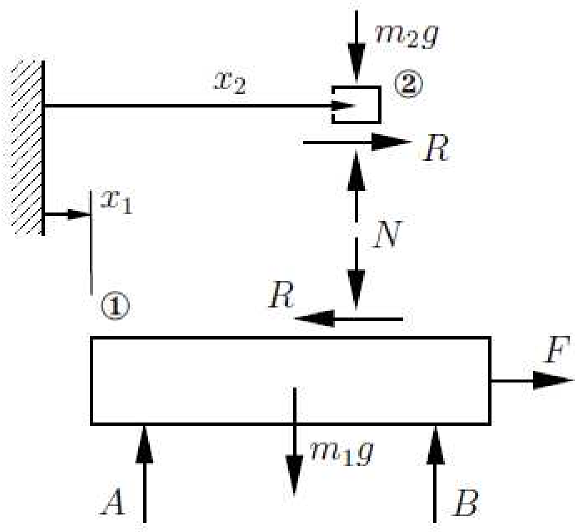
$$S = \frac{m_1 m_2 g\left[1 + \sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\right]}{m_1 + m_2}.$$

1.2.3 Zweikörperbroblem mit Reibung



Auf der Plattform eines Wagens der Masse m_1 liegt eine Kiste der Masse m_2. An dem ursprünglich stehenden Wagen greift eine Kraft F an, die ihn so stark beschleunigt, dass die Kiste rutscht (Reibungszahl μ). Nach welcher Zeit fällt die Kiste vom Wagen?

Aufteilung des Gesamtsystems in zwei Einzelsysteme und Aufstellen der Newtonschen Bewegungsgleichungen liefert



für System 1:

$$m_1\ddot{x}_1 = F - R$$

für System 2:

$$m_2\ddot{x}_2 = R$$

Durch Einsetzten des Coulombschen Reibungsgesetzes $R = \mu N = \mu m_2 g$ in die Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{F - \mu m_2 g}{m_1}\,, \\ \ddot{x}_2 &= \mu g\,, \end{aligned}$$

was nach zweifacher Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ schließlich

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{F - \mu m_2 g}{m_1} t\,, \\ \dot{x}_2 &= \mu g t\,, \\ x_1 &= \frac{F - \mu m_2 g}{m_1} \frac{t^2}{2}\,, \\ x_2 &= \mu g \frac{t^2}{2}\,, \end{aligned}$$

liefert. Die Kiste fällt vom Wagen, wenn gilt

$$x_1 - x_2 = l\,.$$

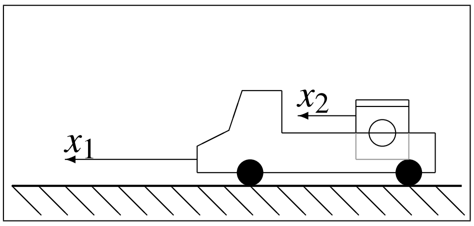
Einsetzten der Formeln liefert

$$\frac{F - \mu m_2 g}{m_1} \frac{T^2}{2} - \mu g \frac{T^2}{2} = l$$

und durch Umstellen der Formel nach T erhält man die Zeit, nach der die Kiste vom Wagen fällt als

$$T = \sqrt{\frac{2 l m_1}{F - \mu g (m_1 + m_2)}}\,.$$

1.2.4 Lieferwagen mit Waschmaschine



Ein Lieferwagen (Masse m_1, Anfangsgeschwindigkeit v_0) bremst mit konstanter Bremskraft F. Dabei verrutscht eine Waschmaschine (Masse m_2), die auf seiner Ladefläche steht, wobei trockene Reibung herrscht mit dynamischem Reibungskoeffizienten μ_d zwischen Waschmaschine und Ladefläche.

a) Schneiden Sie frei und stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für den Lieferwagen und die Waschmaschine auf. (Bewegung nur in x–Richtung!)

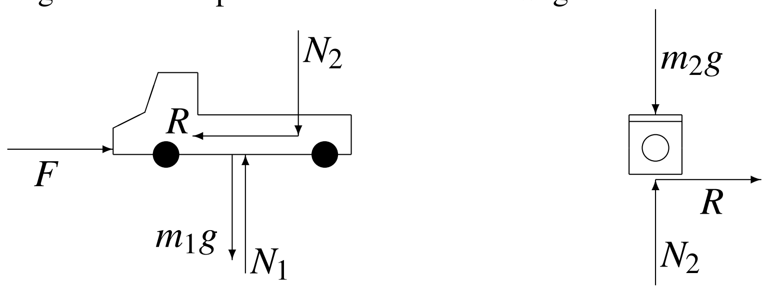
b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen aus (a) für die Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v_0$ und $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = v_0$.

c) Bestimmen Sie Dauer des Bremsvorgangs und Bremsweg bis zum Stillstand des Fahrzeugs.

d) Wie lang ist (theoretisch) die Strecke auf der Ladefläche, welche die Waschmaschine während des Bremsvorgangs rutscht?

Lösung:

a) Es ergeben sich folgende Freikörperbilder für den Lieferwagen und die Waschmaschine:



Daraus erhalten wir die Bewegungsgleichungen in x–Richtung:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= R - F \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -R \end{aligned}$$

Allerdings ist es noch erforderlich, die Reibungskraft zu ermitteln: Diese ist laut Coulombschem Reibungsgesetz durch $R = \mu_d N_2$ gegeben, wobei sich die Normalkraft N_2 wiederum gleich der Gewichtskraft der Waschmaschine ist (statisches Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung, da keine Bewegung in dieser Richtung stattfindet!), also $N_2 = m_2 g$. Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= \mu_d m_2 g - F \,, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -\mu_d m_2 g \,. \end{aligned}$$

b) Es handelt sich bei den in (a) ermittelten Bewegungsgleichungen um solche mit einer konstanten Beschleunigung, die außerdem entkoppelt sind. Somit können beide Gleichungen durch je zweimalige Integration nach der Zeit gelöst werden:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mu_d m_2 g - F}{2m_1} t^2 + C_1 t + C_2 \,, \\ x_2 &= -\frac{\mu_d g}{2} t^2 + C_3 t + C_4 \,. \end{aligned}$$

Die dabei zu berücksichtigenden Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3, C_4 werden durch Einsetzen der Lösungen in die vier Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v_0$ und $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = v_0$ bestimmt. Nach einigen Rechenschritten folgt schließlich

$$\begin{aligned} x_1 &= v_0 t - \frac{F - \mu_d m_2 g}{2m_1} t^2 \\ x_2 &= v_0 t - \frac{\mu_d g}{2} t^2 \end{aligned}$$

als Endergebnis.

c) Der Stillstand des Fahrzeugs zum Zeitpunkt $t = t_B$ ist gegeben durch

$$0 = \dot{x}_1 (t_B) = v_0 - \frac{F - \mu_d m_2 g}{m_1} t_B \,,$$

was, aufgelöst nach der gesuchten Bremszeit t_B zu

$$t_B = \frac{v_0 m_1}{F - \mu_d m_2 g}$$

führt. Der Bremsweg berechnet sich dann als

$$l_B = x_1 (t_B) = v_0 t_B - \frac{F - \mu_d m_2 g}{2m_1} t_B^2 = \frac{v_0^2 m_1}{2 \left[F - \mu_d m_2 g \right]} \,.$$

d) Hier muss man aufpassen! Während des Bremsvorgangs legt die Waschmaschine einen Weg von $x_2(t_B)$ im Koordinatensystem des *äußeren Beobachters* zurück. Gesucht ist jedoch die Verschiebung *relativ zum Fahrzeug*, also die Differenz

$$l_W = x_2(t_B) - x_1(t_B) = v_0 t_B - \frac{\mu_d g}{2} t_B^2 - v_0 t_B + \frac{F - \mu_d m_2 g}{2m_1} t_B^2 = \frac{v_0^2 m_1 [F - \mu_d (m_1 + m_2) g]}{2[F - \mu_d m_2 g]^2} .$$

1.2.5 Elektrisch geladenes Teilchen unter Lorentzkraft und Reibung

Ein elektrisch geladenes Partikel mit Masse m und Ladung q ist sowohl einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$ (elektrische Kraft: $q\vec{E}$) als auch einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ (Lorentzkraft: $q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$) sowie einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft $\vec{F}_R = -k\dot{\vec{r}}$ ausgesetzt

a) Fertigen Sie eine Skizze an, aus welcher die Richtungen der drei Kräfte auf das Teilchen in Bezug zu dessen Bewegungsrichtung ersichtlich sind (Lageplan=Freikörperbild).

b) Stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen vektoriell und zerlegt in Kartesischen Komponenten auf. Betrachten Sie dabei nur eine ebene Bewegung in der xy–Ebene.

c) Benutzen Sie den Lösungsansatz

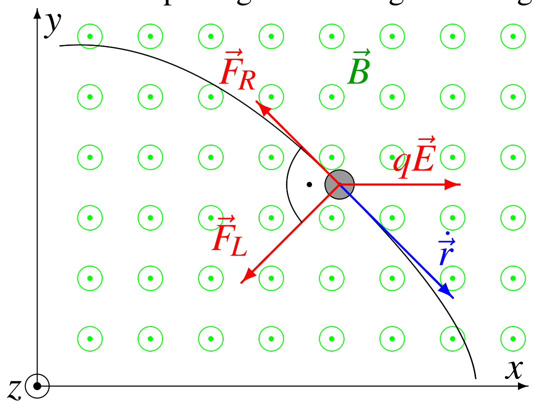
$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= u_\infty + u_1 \exp(-\gamma t) \\ v_y = \dot{y} &= v_\infty + v_1 \exp(-\gamma t) \end{aligned}$$

um eine Lösung der Bewegungsgleichungen für die Geschwindigkeit zu finden. Ermitteln Sie insbesondere den Wert von γ (Hinweis: Dieser ist komplex!)

d) Zeigen Sie, dass sich nach ausreichend langer Zeit stets eine konstante Geschwindigkeit einstellt. Schätzen Sie diese Zeit grob ab.

Lösung:

a) Für einen elektrisch positiv geladenen Körper ergibt sich folgender Lageplan:



b) Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten vektoriell

$$m\ddot{\vec{r}} = qE_0 \vec{e}_x + qB_0 \dot{\vec{r}} \times \vec{e}_z - k\dot{\vec{r}},$$

und zerlegt in Kartesischen Komponenten

$$\begin{aligned}
\rightarrow: \; m\ddot{x} &= qE_0 + qB_0\dot{y} - k\dot{x}\,, \\
\uparrow: \; m\ddot{y} &= -qB_0\dot{x} - k\dot{y}\,, \\
\odot: \; m\ddot{z} &= -k\dot{z}\,.
\end{aligned}$$

Die dritte Gleichung hat offensichtlich $z = 0$ als Lösung. Damit ist es zulässig, sich auf ebene Bewegungen in der xy–Ebene zu beschränken.

c) Mit dem Lösungsansatz

$$\begin{aligned}
v_x = \dot{x} &= u_\infty + u_1 \exp(-\gamma t) \\
v_y = \dot{y} &= v_\infty + v_1 \exp(-\gamma t)
\end{aligned}$$

nehmen die Newtonschen Bewegungsgleichungen nach Termsortierung die Form

$$\begin{aligned}
\rightarrow: \; 0 &= [\gamma m u_1 + qB_0 v_1 - k u_1] \exp(-\gamma t) + qE_0 + qB_0 v_\infty - k u_\infty \\
\uparrow: \; 0 &= [\gamma m v_1 - qB_0 u_1 - k v_1] \exp(-\gamma t) - qB_0 u_\infty - k v_\infty
\end{aligned}$$

an, was nur erfüllbar ist, wenn die konstanten Terme und die Terme mit Exponentialfaktor getrennt voneinander verschwinden. Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
k u_\infty - qB_0 v_\infty &= qE_0\,, \\
qB_0 u_\infty + k v_\infty &= 0\,, \\
(\gamma m - k)\, u_1 + qB_0 v_1 &= 0\,, \\
qB_0 u_1 - (\gamma m - k)\, v_1 &= 0\,,
\end{aligned}$$

dessen erste beiden Gleichungen sich nach

$$\begin{aligned}
u_\infty &= \frac{kqE_0}{k^2 + q^2 B_0^2} \\
v_\infty &= -\frac{qB_0}{k} u_\infty = -\frac{q^2 E_0 B_0}{k^2 + q^2 B_0^2}
\end{aligned}$$

auflösen lassen. Die dritte und die vierte Gleichung, also

$$\begin{aligned}
-(k - \gamma m)\, u_1 + qB_0 v_1 &= 0\,, \\
qB_0 u_1 + (k - \gamma m)\, v_1 &= 0\,,
\end{aligned}$$

bilden zusammen ein homogenes Gleichungssystem für die beiden Unbekannten u_1 und v_1. Löst man die erste Gleichung nach $v_1 = (k - \gamma m)\, u_1 / (qB_0)$ auf und setzt dies in die zweite ein, so ergibt sich

$$\left[qB_0 + \frac{(\gamma m - k)^2}{qB_0} \right] u_1 = 0\,,$$

so dass entweder $u_1 = 0$ sein muss, was jedoch nicht mit beliebigen Anfangsbedingungen vereinbar wäre oder der Ausdruck in der eckigen Klammer muss, verschwinden, also

$$(\gamma m - k)^2 = -q^2 B_0^2\,.$$

Dies ist aber eine Gleichung für die Konstante γ, welche sich explizit als

$$\gamma = \frac{k}{m} \pm \mathrm{i} \frac{qB_0}{m}$$

schreiben lässt. Damit ist eine Lösung gefunden, die noch u_1 als verbleibende (komplexe!) unbekannte Konstante enthält. Letztere muss sich aus den Anfangsbedingungen ergeben.

d) Der Exponentialfaktor $\exp(-\gamma t)$ lässt sich mit dem in (c) gefundenen Resultat als

$$\exp(-\gamma t) = \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\exp\left(\mp \mathrm{i}\frac{qB_0}{m}t\right)$$

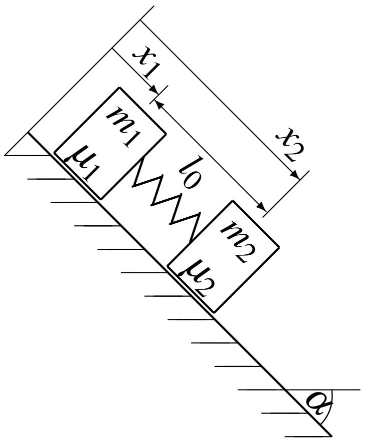
schreiben, wobei der zweite Faktor eine Schwingung mit Amplitude 1 beschreibt. Der erste Faktor ist jedoch eine abklingende Exponentialfunktion, die mit fortschreitender Zeit schnell gegen Null strebt. Es verbleibt nach dem Abklingen nur noch die stationäre Lösung

$$\dot{x} = v_x \quad \to \quad u_\infty = \frac{kqE_0}{k^2 + q^2B_0^2}$$
$$\dot{y} = v_y \quad \to \quad v_\infty = -\frac{qB_0}{k}u_\infty$$

für die Geschwindigkeit, also eine gleichförmige geradlinige Bewegung. Die „typische" Zeit, innerhalb derer die überlagerte Schwingungsbewegung abklingt, ist durch den Kehrwert des Faktors vor dem t gegeben, also durch

$$\frac{m}{k}.$$

1.2.6 Zwei Massen mit Feder auf schiefer Ebene unter Reibung



Zwei durch eine Feder (Federkonstante C) verbundene Körper mit Massen m_1 und m_2 werden auf eine um den Winkel α geneigte Ebene gelegt. Angetrieben durch deren Gewichtskraft rutschen beide Körper aus der Ruhe heraus die Ebene hinunter, gebremst durch trockene Reibung mit verschiedenen Reibungskoeffizienten $\mu_2 < \mu_1$ und wechselseitig beeinflusst durch die Feder.
Die aktuellen Positionen werden durch $x_1 = x_1(t)$ bzw. $x_2 = x_2(t)$ beschrieben mit Anfangspositionen $x_1(0) = x_0$ und $x_2(0) = x_0 + l_0$. Dabei ist l_0 so gewählt, dass die Feder zum Beginn der Bewegung entspannt ist.
Der Einfachheit halber wird angenommen, dass sich beide Massen stets in positive x–Richtung bewegen.

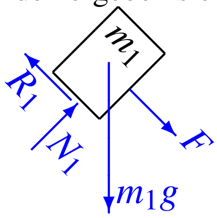
a) Stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen beider Körper auf. Lösen Sie diese aber vorerst nicht!

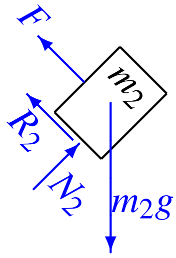
b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt x_s des Systems auf und zeigen Sie, dass dieser einer konstant beschleunigten Bewegung $x_s(t) = x_{s0} + at^2/2$ folgt. Wie groß ist die Beschleunigung a?

c) Gewinnen Sie aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen eine Differentialgleichung für die Differenz $u(t) = x_2(t) - x_1(t)$ der Positionen beider Massen. Zeigen Sie, dass deren Lösung eine harmonische Schwingung der Form $u(t) = u_0 + u_1\cos(\omega t)$ ist und bestimmen Sie u_0, u_1 und ω.

Lösung:

a) Nach Freischneiden ergeben sich





als Freikörperbilder. Daraus ergeben sich unter Berücksichtigung von $F = C\,(x_2 - x_1 - l_0)$ für die Federkraft und $R_1 = \mu_1 N_1$ für die Reibungskraft die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \nearrow: &\quad N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0 \\ \searrow: &\quad C\,(x_2 - x_1 - l_0) - \mu_1 N_1 + m_1 g \sin\alpha = m_1 \ddot{x}_1 \end{aligned} \tag{17}$$

für den ersten und

$$\begin{aligned} \nearrow: &\quad N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0 \\ \searrow: &\quad -C\,(x_2 - x_1 - l_0) - \mu_2 N_2 + m_2 g \sin\alpha = m_2 \ddot{x}_2 \end{aligned} \tag{18}$$

für den zweiten Körper. Aus den jeweils ersten Gleichungen (17, 17) ergibt sich die Normalkraft als $N_{1,2} = m_{1,2}\, g \cos\alpha$, was nach Einsetzen in die jeweils zweiten Gleichungen und kleinen Umformungen auf

$$\ddot{x}_1 = g\left[\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha\right] + \frac{C}{m_1}\,(x_2 - x_1 - l_0) \tag{19}$$

$$\ddot{x}_2 = g\left[\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha\right] - \frac{C}{m_2}\,(x_2 - x_1 - l_0) \tag{20}$$

führt. Dieses Gleichungssystem ist gekoppelt.

b) Der Schwerpunktsatz hat die Form einer Newtonschen Bewegungsgleichung, in welcher nur die äußeren Kräfte vorkommen, nicht jedoch die Wechselwirkungskräfte. Folglich ergibt sich

$$\searrow: \quad m_1 g \sin\alpha + m_2 g \sin\alpha - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = m \ddot{x}_s$$

mit $m = m_1 + m_2$. Mittels (17, 17) können die beiden Normakräfte erneut gemäß $N_{1,2} = m_{1,2}\, g \cos\alpha$ ersetzt werden, so dass man nach Umformung schließlich

$$\ddot{x}_s = g \sin\alpha - \frac{m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2}{m_1 + m_2}\, g \cos\alpha$$

erhält. Durch Einsetzen des Lösungsansatzes $x_s(t) = x_{s0} + at^2/2$ erkennt man, dass dieser die Bewegung korrekt beschreibt für

$$a = g \sin\alpha - \frac{m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2}{m_1 + m_2}\, g \cos\alpha$$

oder anders gesagt: Die Schwerpunktsbewegung entspricht der Bewegung eines einzelnen Körpers auf der Ebene, dessen Reibungskoeffizient

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2}{m_1 + m_2}$$

beträgt.

c) Eine Gleichung für $u = x_2 - x_1$ lässt sich ganz einfach durch Bildung der Differenz der beiden Bewegungsgleichungen (19) und (20) gewinnen:

$$\ddot{u} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = g\left[\mu_1 - \mu_2\right]\cos\alpha - \left[\frac{C}{m_2} + \frac{C}{m_1}\right](u - l_0)$$

Diese lässt sich auf die standardisierte Form

$$\ddot{u} + C\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}u = g\left[\mu_1 - \mu_2\right]\cos\alpha + Cl_0\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

einer inhomogenen Dgl. zweiter Ordnung bringen. Mit dem Lösungsansatz $u(t) = u_0 + u_1\cos(\omega t)$ und der daraus folgenden Relativbeschleunigung $\ddot{u} = -\omega^2 u_1\cos(\omega t)$ gewinnt man

$$-\omega^2 u_1\cos(\omega t) + C\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\left[u_0 + u_1\cos(\omega t)\right] = g\left[\mu_1 - \mu_2\right]\cos\alpha + Cl_0\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2},$$

was sich leicht sortieren lässt nach Termen mit $\cos(\omega t)$ und konstanten Resttermen zu

$$\left[C\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} - \omega^2\right]u_1\cos(\omega t) = g\left[\mu_1 - \mu_2\right]\cos\alpha + C\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}(l_0 - u_0)$$

führt. Diese Gleichung muss für alle Zeiten t gelten, weshalb die rechte Seite und der Klammerausdruck unabhängig voneinander verschwinden müssen. Das impliziert zunächst

$$\begin{aligned} \omega^2 &= C\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, \\ u_0 &= l_0 + \frac{m_1 m_2\left[\mu_1 - \mu_2\right]}{C(m_1 + m_2)}g\cos\alpha. \end{aligned}$$

Es bleibt noch die Konstante u_1 zu bestimmen. Diese ergibt sich aus den gegebenen Anfangsbedingungen $x_1(0) = x_0$ und $x_2(0) = x_0 + l_0$ und der daraus folgenden Anfangsbedingung $u(0) = x_2(0) - x_1(0) = l_0$ für die Relativposition, also

$$l_0 = u(0) = u_0 + u_1\cos(0) = u_0 + u_1$$

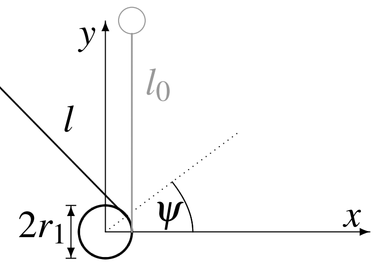
schließlich zu

$$u_1 = l_0 - u_0 = -\frac{m_1 m_2\left[\mu_1 - \mu_2\right]}{C(m_1 + m_2)}g\cos\alpha.$$

1.3 Erhaltungssätze

1.3.1 Spiralbewegung

Ein dünnes Seil, an dessen Ende ein Massenpunkt (Masse m) befestigt ist, wickelt sich um einen kreisrunden Pfosten (Radius r_1), vergl. Aufgabe 1.1.8. Bei diesem Vorgang seien Schwerkraft und Reibung bedeutungslos. Anfangs (bei $t = 0$) sind Position und Bewegungszustand durch die anfängliche Seillänge l_0, $\psi(0) = 0$ und $\dot{\psi}(0) = \Omega_0$ gegeben.



a) Stellen Sie $\dot{\psi}$ als Funktion der durch ψ gegebenen aktuellen Position unter Verwendung eines hier gültigen Erhaltungssatzes dar. Verwenden Sie dabei die Ergebnisse aus Aufgabe 1.1.8.

b) Wie groß ist $\dot{\psi}$, wenn die Seillänge gegenüber der anfänglichen Seillänge halbiert ist?

c) Lösen Sie die unter (a) hergeleitete Differentialgleichung für den Winkel $\psi = \psi(t)$.

d) Vergleichen Sie mit dem Beispiel aus der Vorlesung, bei dem das Seil durch ein Rohr in z–Richtung hindurch eingezogen wurde. Erklären Sie den Unterschied.

Lösung:

a) Da durch das Seil eine starre Führung des Massenpunktes gegeben ist, ist mit der Seilkraft als Zwangskraft keinerlei Leistung verbunden. Da es zudem keine weiteren zu berücksichtigen Kräfte gibt, gilt Energieerhaltung. Eine potentielle Energie ist nicht vorhanden, so dass die kinetische Energie T während der gesamten Bewegung konstant bleibt, was letztlich zur Folge hat, dass auch die Bahngeschwindigkeit $|\vec{v}|$ konstant bleiben muss. Letztere berechnet sich gemäß Aufgabe 1.1.8 nach der Formel

$$|\vec{v}| = (l_0 - r_1\psi)\,\dot{\psi}\,,$$

so dass aus der Energieerhaltung insgesamt

$$(l_0 - r_1\psi)\,\dot{\psi} = v_0 \tag{21}$$

folgt. Die Konstante Bahngeschwindigkeit v_0 berechnet sich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen aus der Anfangsgeschwindigkeit als

$$v_0 = (l_0 - r_1\psi(0))\,\dot{\psi}(0) = l_0\Omega_0\,.$$

Damit lässt sich die Differentialgleichung (21) nach $\dot{\psi}$ auflösen:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \dot{\psi} = \frac{l_0\Omega_0}{l_0 - r_1\psi}\,, \tag{22}$$

b) Wenn die Seillänge gegenüber der anfänglichen Seillänge halbiert ist, also $l_0 - r_1\psi = l_0/2$ gilt, resultiert gemäß (22)

$$\dot{\psi} = \frac{l_0\Omega_0}{l_0 - r_1\psi} \to \frac{l_0\Omega_0}{l_0/2} = 2\Omega_0\,.$$

c) Die Differentialgleichung (22) lässt sich durch Trennung der Variablen wie folgt lösen:

$$\int\limits_0^{\psi} [l_0 - r_1\tilde{\psi}]\,\mathrm{d}\tilde{\psi} = l_0\Omega_0 \int\limits_0^{t} \mathrm{d}\tilde{t}\,.$$

Nach Auswertung der Integrale liegt die Lösung in impliziter Form

$$l_0\psi - \frac{1}{2}r_1\psi^2 = l_0\Omega_0 t$$

vor, die sich hier als quadratische Gleichung für ψ herausstellt, welche in Standardform

$$\psi^2 - \frac{2l_0}{r_1}\psi + \frac{2l_0\Omega_0}{r_1}t = 0$$

geschrieben werden kann. Die Anwendung der bekannten Lösungsformel ergibt die beiden Lösungen

$$\psi = \frac{l_0}{r_1} \pm \sqrt{\left(\frac{l_0}{r_1}\right)^2 - \frac{2l_0\Omega_0}{r_1}t}\,,$$

von denen nur diejenige mit dem negativen Vorzeichen vor der Wurzel zu der Anfangsbedingung $\psi(0) = 0$ passt. Somit ist

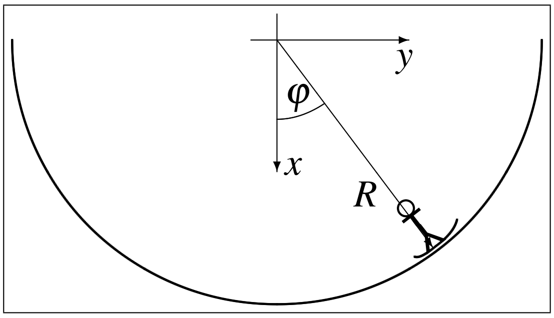
$$\psi(t) = \frac{l_0}{r_1}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2r_1\Omega_0}{l_0}t}\right]$$

das Endresultat.

d) Beim Beispiel aus der Vorlesung, bei dem das Seil durch ein Rohr in z–Richtung hindurch eingezogen wurde, wird durch das Einziehen des Seils eine Leistung erbracht, was eine Erhöhung der kinetischen Energie und als Konsequenz eine noch schnellere Winkelgeschwindigkeit zur Folge hat. Dafür bleibt der Drehimpuls erhalten. Beim vorliegenden Fall dagegen wirkt aufgrund der azentrischen Lage des Seils ein Drehmoment, welches dem System Drehimpuls entzieht.

1.3.2 Snowboardfahrer in einer Half–Pipe

Ein Snowboardfahrer (Masse m) durchfährt den tiefsten Punkt einer Half–Pipe zur Zeit $t = 0$ mit Bahngeschwindigkeit v_0 im Abstand R vom Koordinatenursprung (s. Skizze). Seine Bewegung ist dabei azimutal (d.h. in Umfangsrichtung der Half–Pipe). Es wirkt die Schwerkraft (Schwerebeschleunigung g), während Reibung bei der gesamten Bewegung vernachlässigbar sei.



a) Welche Bahngeschwindigkeit hat der Snowboardfahrer an einer beliebigen, durch den Winkel φ gegebenen Position?
Hinweis: Man meide die Newtonschen Bewegungsgleichungen und nutze stattdessen einen der 'Erhaltungssätze'.

b) Wie groß muss die anfängliche Bahngeschwindigkeit v_0 sein, damit der Snowboardfahrer gerade den rechten Rand der Half–Pipe erreicht, diese aber noch nicht verlässt?

c) Ermitteln Sie die Normalkraft (Zwangskraft), die auf den Snowboardfahrer wirkt als Funktion dessen aktueller Position, d.h. $F_N = F_N(\varphi)$.
Hinweis: Hier kommen Sie um die Newtonschen Bewegungsgleichungen nicht herum.

Lösung:

a) Aufgrund der Reibungsfreiheit wirkt hier nur die konservative Schwerkraft. Somit gilt hier Energieerhaltung, also

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(-R\cos\varphi) + U_0 = E = \text{const}\,, \tag{23}$$

wobei sich E aus dem Anfangszustand bei $t = 0$ als

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR + U_0 \tag{24}$$

ergibt. Einsetzen von (24) in (23) und Auflösen nach der gesuchten Größe v liefert schließlich

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gR\,[1-\cos\varphi]}\,.$$

b) Wir betrachten den Fall, dass der Snowboardfahrer gerade den rechten Rand der Half–Pipe (= Winkelposition $\varphi = \pi/2$) gerade zum Stillstand kommt, also

$$0 = v = \sqrt{v_0^2 - 2gR\,[1-\cos(\pi/2)]} = \sqrt{v_0^2 - 2gR}\,,$$

woraus sofort

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

für die anfängliche Bahngeschwindigkeit folgt.

c) Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet in vektorieller Form

$$m\ddot{\vec{r}} = mg\vec{e}_x - F_N\vec{e}_r\,,$$

wobei für die Beschleunigung in Polarkoordinaten auf die fertige Formel

$$\ddot{\vec{r}} = \left[\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right]\vec{e}_r + \left[2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right]\vec{e}_\varphi$$

zurückgegriffen werden kann. Unter Berücksichtigung von $r = R$ vereinfacht sich dies zu

$$\ddot{\vec{r}} = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi\,,$$

was nach Einsetzen in die Newtonsche Bewegungsgleichung zu

$$-mR\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + mR\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi = mg\vec{e}_x - F_N\vec{e}_r$$

führt. Bildet man das Skalarprodukt dieser Gleichung mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_r$, so gewinnt man die gesuchte Größe als

$$F_N = mg\vec{e}_x\cdot\vec{e}_r + mR\dot{\varphi}^2\,,$$

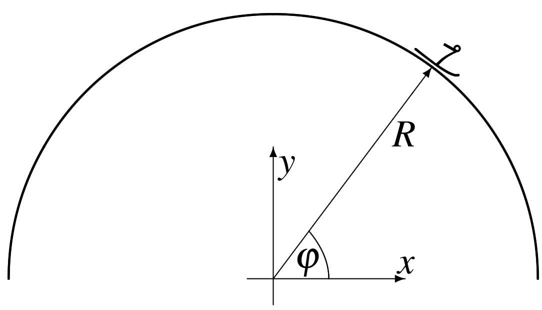
wobei allerdings noch die geometrische Beziehung $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_r = \cos\varphi$ und die kinematische Beziehung $\dot{\varphi} = \omega = v/R$ zu berücksichtigen sind, was schlussendlich mit dem Ergebnis aus (a) das Resultat

$$F_N = mg\cos\varphi + m\frac{v^2}{R} = m\frac{v_0^2}{R} + [3\cos\varphi - 2]\,mg$$

liefert.

1.3.3 Skifahrer auf einem Hügel

Ein Skifahrer (Masse m) fährt eine halbkugelförmige Bergkuppe (Radius R) herunter. Er startet zum Zeitpunkt $t = 0$ am Gipfel ($\varphi = \pi/2$), annähernd aus der Ruhe heraus. Die Reibung sei während der gesamten Fahrt vernachlässigbar.



a) Welche Bahngeschwindigkeit erreicht der Skifahrer an einer beliebigen, durch den Winkel φ gegebenen Position?
Hinweis: Man verwende vorzugsweise einen der 'Erhaltungssätze'.

b) Ermitteln Sie die auf den Skifahrer wirkende Normalkraft (Zwangskraft) als Funktion dessen aktueller Position, d.h. $F_N = F_N(\varphi)$.
Hinweis: Newtonsche Bewegungsgleichungen.

c) Bei einem bestimmten Winkel $\varphi = \varphi_1$ verschwindet die in (b) ermittelte Normalkraft F_N. Bestimmen Sie φ_1. Was bedeutet $F_N(\varphi_1) = 0$ physikalisch?

Lösung:

a) Aufgrund der Reibungsfreiheit wirkt hier nur die konservative Schwerkraft. Somit gilt hier Energieerhaltung, also

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin\varphi + U_0 = E = \text{const}\,, \tag{25}$$

wobei sich E aus dem Anfangszustand R bei $t = 0$ als

$$E = 0 + mgR + U_0 \tag{26}$$

ergibt. Einsetzen von (26) in (25) und Auflösen nach der gesuchten Größe v liefert

$$v = \sqrt{2gR\,[1 - \sin\varphi]}\,.$$

b) Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet in vektorieller Form

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_y + F_N\vec{e}_r\,,$$

wobei für die Beschleunigung in Polarkoordinaten auf die fertige Formel

$$\ddot{\vec{r}} = \left[\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right]\vec{e}_r + \left[2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right]\vec{e}_\varphi$$

zurückgegriffen werden kann. Unter Berücksichtigung von $r = R$ vereinfacht sich dies zu

$$\ddot{\vec{r}} = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi\,,$$

was nach Einsetzen in die Newtonsche Bewegungsgleichung zu

$$-mR\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + mR\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi = -mg\vec{e}_y + F_N\vec{e}_r$$

führt. Bildet man das Skalarprodukt dieser Gleichung mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_r$, so gewinnt man die gesuchte Größe als

$$F_N = mg\vec{e}_y \cdot \vec{e}_r - mR\dot{\varphi}^2\,,$$

wobei allerdings noch die geometrische Beziehung $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_r = \sin\varphi$ und die kinematische Beziehung $\dot{\varphi} = \omega = v/R$ zu berücksichtigen sind, was schlussendlich mit dem Ergebnis aus (a) das Resultat

$$F_N = mg\sin\varphi - m\frac{v^2}{R} = [3\sin\varphi - 2]\,mg$$

liefert.

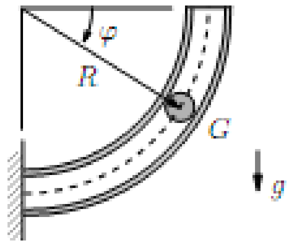
c) Die Normalkraft verschwindet bei Erreichen des Winkels

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41.8^\circ\,,$$

was bedeutet, dass an dieser Position der Skifahrer die Führung verlässt und abhebt.

1.3.4 Kugel in Rohrkrümmer

In einem eingespannten Rohrkrümmer (Radius R) rutscht eine Kugel (Gewicht $G = mg$) reibungsfrei aus der Ruhe von oben hinab.

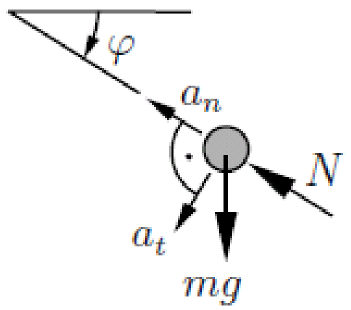


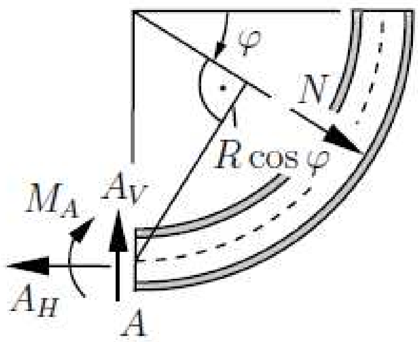
1. Man bestimme die Lagerreaktionen an der Einspannstelle in Abhängigkeit von der aktuellen Lage φ der Kugel.

2. Für welche φ ergeben sich extremale Werte?

Lösung:

1. Aufteilen des Gesamtsystems in 2 Einzelsysteme und aufstellen der Newtonschen Bewegungsgleichungen





System1: System2:
System1

$$
\begin{aligned}
ma_t &= mg\cos(\varphi) \\
ma_n &= N - mg\sin(\varphi)
\end{aligned}
$$

Mit $a_t = R\ddot{\varphi}$, $a_n = R\dot{\varphi}^2$und $\ddot{\varphi}d\varphi = \dot{\varphi}d\dot{\varphi}$folgt aus der 1. Gleichung durch Integration

$$
\int_0^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}d\dot{\varphi} = \int_0^{\varphi} \frac{g}{R}\cos(\varphi)\,d\varphi \rightsquigarrow \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{R}\sin(\varphi)
$$

Die 2. Gleichung liefert damit die Normalkraft

$$
N_{(\varphi)} = mg\sin(\varphi) + mR\dot{\varphi}^2 = 3G\sin(\varphi)
$$

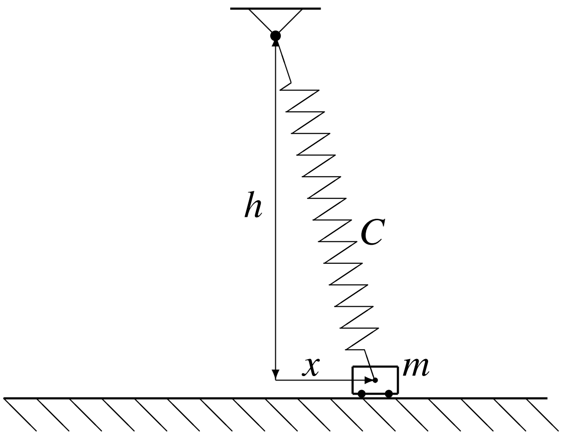
2. System 2

$$
\begin{aligned}
0 &= N\sin(\varphi) - A_V \Rightarrow A_V = 3G\sin^2(\varphi) \\
0 &= N\cos(\varphi) - A_H \Rightarrow A_H = -\frac{3}{2}G\sin(2\varphi) \\
0 &= NR\cos(\varphi) + M_A \Rightarrow M_A = -\frac{3}{2}GR\sin(2\varphi)
\end{aligned}
$$

Das Einspannmoment M_A und die Horizontalkraft A_H nehmen ihr Maximum an, wenn die Kugel bei $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist. Die Vertikalkraft A_V wird am größten für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} M_{Amax} &= -\frac{3}{2}GR \\ A_{Hmax} &= \frac{3}{2}G \\ A_{Vmax} &= 3G \end{aligned}$$

1.3.5 Transversales Federpendel



Ein in horizontaler Richtung frei beweglicher Körper der Masse m ist mit einer Feder der Steifigkeit C verbunden, deren anderes Ende an einem um h höher liegenden Punkt befestigt ist (s. Skizze links). Im Nullpunkt sei die Feder vollkommen entspannt. Das Pendel wird dann bis zu einer maximalen Position x_0 ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Die darauf folgende Schwingungsbewegung verlaufe ohne nennenswerte Reibungsverluste.

a) Ermitteln Sie die Federkraft und die potentielle Energie der Feder in Abhängigkeit von der aktuellen x–Position des Körpers.

b) Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung (nur x–Richtung!) auf und überlegen Sie, warum diese nicht so leicht lösbar ist.

c) Stellen Sie die Geschwindigkeit des Körpers in Abhängigkeit von dessen aktueller x–Position dar. Nutzen Sie hierzu einen der Erhaltungssätze. Welche maximale Geschwindigkeit erreicht der Körper beim Passieren des Nullpunkts?

Lösung:

a) Laut Vorlesung gilt:

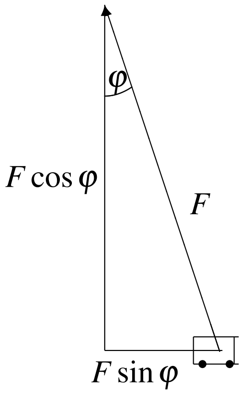
$$\begin{aligned} \vec{F} &= -C\,(r-h)\,\vec{e}_r\,, \\ U &= \frac{1}{2}C\,(r-h)^2\,, \end{aligned}$$

für die Federkraft und die potentielle Energie der Feder, wobei sich r wegen der Zwangsbedingung $y = h$ als $r = \sqrt{h^2+x^2}$ ergibt, was somit zu

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -C\left(\sqrt{h^2+x^2}-h\right)\vec{e}_r\,, \\ U &= \frac{1}{2}C\left(\sqrt{h^2+x^2}-h\right)^2 = C\left(h^2+\frac{x^2}{2}-h\sqrt{h^2+x^2}\right) \end{aligned}$$

führt.

b) Für die gesuchte Bewegungsgleichung ist von der Federkraft die horizontale Komponente zu bilden, also



so dass sich

$$m\ddot{x} = -|\vec{F}|\sin\varphi = -C\left(\sqrt{h^2+x^2}-h\right)\sin\varphi$$

ergibt, wobei laut Lageplan $\sin\varphi = x/r = x/\sqrt{h^2+x^2}$ gilt. Damit lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung in x–Richtung

$$m\ddot{x} = -Cx\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}\right).$$

Da diese sowohl von zweiter Ordnung als auch nichtlinear ist, sind die Chancen, mit konventionellen Mitteln eine Lösung zu finden, gering.

c) Da weder Reibung noch andere nichtkonservative Kräfte wirken, gilt Energieerhaltung, also

$$T+U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + C\left(h^2+\frac{x^2}{2}-h\sqrt{h^2+x^2}\right) = E = \text{const}, \tag{27}$$

wobei die Energie E aus dem Anfangszustand ($x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=0$) resultiert, d.h.

$$E = 0 + C\left(h^2+\frac{x_0^2}{2}-h\sqrt{h^2+x_0^2}\right).$$

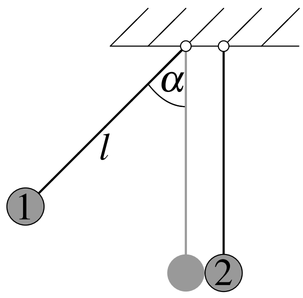
Durch Auflösen des Energieerhaltungssatzes (27) nach der Geschwindigkeit erhält man nun die gesuchte Beziehung

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{C}{m}}\sqrt{x_0^2-x^2+2h\left(\sqrt{h^2+x^2}-\sqrt{h^2+x_0^2}\right)}$$

in Abhängigkeit von der aktuellen x–Position des Körpers. Die maximale Geschwindigkeit, die der Körper beim Passieren des Nullpunkts erreicht, ergibt sich durch Einsetzen von $x=0$ in obige Formel, also

$$v_{max} = \sqrt{\frac{C}{m}}\sqrt{x_0^2+2h\left(h-\sqrt{h^2+x_0^2}\right)}.$$

1.3.6 Teilelastischer Stoß zwischen Schwerependeln



Ein Schwerependel mit Länge l und Masse m wird bei einer Auslenkung α losgelassen. Bei Erreichen des Scheitelpunkts kollidiert es mit einem zweiten, in Ruhe befindlichen Pendel gleicher Masse und gleicher Pendellänge. Der Stoß beider Pendelkörper verlaufe teilelastisch mit positiver Stoßzahl $k < 1$.

a) Welche Geschwindigkeit haben die Pendelkörper unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Stoß?

b) Welche maximalen Auslenkungen erreichen die Pendel nach dem Stoß?

Lösung:

a) Ausgehend davon, dass die Beschleunigungsphase des Pendels 1 ohne Reibungsverluste verlaufe, kann man zunächst den Energieerhaltungssatz zur Berechung der Scheitelpunktsgeschwindigkeit unmittelbar vor dem Stoß heranziehen. Dieser besagt, dass für die Gesamtenergie

$$\frac{m}{2}\vec{v}_1^2 + mg\,[l - l\cos\varphi_1] = E = \text{const}$$

gilt und somit durch den Vergleich von Anfangszustand $\varphi_1 = -\alpha$, $\vec{v}_1 = \vec{0}$ mit dem Zustand unmittelbar vor der Kollision $\varphi_1 = 0$, $\vec{v}_1 = \vec{v}_{1S}$ die gesuchte Größe durch Auflösung der Gleichung

$$\frac{m}{2}\vec{v}_{1S}^2 = mgl\,[1 - \cos\alpha] \tag{28}$$

ermittelbar ist als

$$v_{1S} = |\vec{v}_{1S}| = \sqrt{2gl\,[1 - \cos\alpha]}\,.$$

Demgegenüber ist die Scheitelpunktsgeschwindigkeit des zweiten Pendelkörpers per Aufgabenstellung $v_{2S} = 0$. Der Stoßvorgang kann als gerader zentrischer Stoß aufgefasst werden, so dass Impulserhaltung (eindimensional) und Stoßhypothese zu erfüllen sind, also

$$\begin{aligned} mv'_{1S} + mv'_{2S} &= mv_{1S}\,, \\ v'_{2S} - v'_{1S} &= k\,(v_{1S} - 0)\,. \end{aligned}$$

Division der ersten Gleichung durch m und Bildung der Summe aus beiden Gleichungen führt zu

$$v'_{2S} = \frac{1+k}{2}v_{1S} = (1+k)\sqrt{\frac{gl}{2}\,[1 - \cos\alpha]}\,,$$

während die Differenz beider Gleichungen zu

$$v'_{1S} = (1-k)\sqrt{\frac{gl}{2}\,[1 - \cos\alpha]}$$

führt. Im vollelastischen Fall $k = 1$ bedeutet dies, dass das Pendel 1 vollständig zum Stillstand kommt, während das Pendel 2 ausschlägt. Für $k < 0$ jedoch bewegen sich beide Pendel nach dem Stoß nach rechts.

b) Nach entsprechender, für beide Pendel unterschiedlicher Zeit werden die Maximalausschläge α_1 und α_2 erreicht. Diese berechnen sich erneut mit dem Energieerhaltungssatz, also durch Auflösung der Gleichung (28) nach dem Winkel bei gegebener Scheitelpunktsgeschwindigkeit. Dies ergibt

$$\alpha_{1,2} = \arccos\left(1 - \frac{v_{1,2S}^2}{2gl}\right) = \arccos\left(1 - \frac{1}{4}\left[1 \mp k\right]^2\left[1 - \cos\alpha\right]\right)$$

als Ergebnis. Umgekehrt bietet sich hier die Möglichkeit, durch Messung der Pendelausschläge die Stoßzahl k experimentell zu bestimmen.

2 Kinematik und Dynamik starrer Körper

2.1 Kinematik

2.1.1 KFZ–Testfahrt

Vor einer Testfahrt wird bei einem Kraftfahrzeug am rechten Hinterrad (Radius R) ein Beschleunigungssensor zwischen Reifen und Felge im Achsabstand r angebracht.

a) Ermitteln und skizzieren Sie die Bahnkurve, die der Sensor während einer geradlinigen Testfahrt durchläuft.

b) Angenommen, das Fahrzeug bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0. Wie kann man aus der Beschleunigung a, die der Sensor registriert, auf die Geschwindigkeit v_0 schließen? Wie muss der Sensor dazu angebracht sein?

Lösung:

a) Zwischen dem Winkel φ zur x–Achse, durch welchen die Position des Sensors festgelegt wird und der zurückgelegten Fahrstrecke besteht die kinematische Bindung

$$R\left(\varphi - \varphi_0\right) = x\,,$$

wobei φ_0 der anfängliche Winkel ist. Vom äußeren Beobachter aus gesehen ermittelt sich die aktuelle Position des Sensors als

$$\begin{aligned} x_s &= x + r\cos\varphi = x + r\cos\left(\varphi_0 + \frac{x}{R}\right)\,, \\ y_s &= r\sin\varphi = r\sin\left(\varphi_0 + \frac{x}{R}\right)\,. \end{aligned}$$

Damit ist eine Parameterdarstellung $x_s = x_s\left(x\right)$, $y_s = y_s\left(x\right)$ der Bahnkurve gefunden. Es handelt sich um eine Zykloide (Rollkurve).

b) Bei Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gilt $x = v_0 t + x_0$ für das Fahrzeug. Die Bewegung, die der Sensor wahrnimmt, ergibt sich durch Einsetzen in das Ergebnis aus (a), also

$$\begin{aligned} x_s &= v_0 t + x_0 + r\cos\left(\varphi_0 + \frac{x_0}{R} + \frac{v_0}{R}t\right)\,, \\ y_s &= r\sin\left(\varphi_0 + \frac{x_0}{R} + \frac{v_0}{R}t\right)\,. \end{aligned}$$

Zweimaliges Ableiten nach der Zeit ergibt die Komponenten der Beschleunigung

$$\begin{aligned}\ddot{x}_s &= -\frac{rv_0^2}{R^2}\cos\left(\varphi_0+\frac{x_0}{R}+\frac{v_0}{R}t\right),\\ \ddot{y}_s &= -\frac{rv_0^2}{R^2}\sin\left(\varphi_0+\frac{x_0}{R}+\frac{v_0}{R}t\right),\end{aligned}$$

was nach Bildung des Betrages $a=\sqrt{\ddot{x}_s^2+\ddot{y}_s^2}$ zu

$$a=\frac{rv_0^2}{R^2}$$

führt. Auflösen nach der gesuchten Größe liefert also

$$v_0=\sqrt{\frac{r}{aR^2}}\,.$$

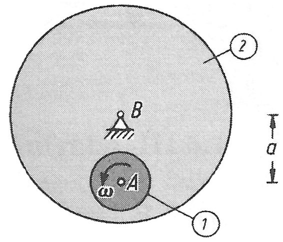
Die Richtung der Beschleunigung weist in radialer Richtung zur Radachse (Zentripetalbeschleunigung). Dementsprechend ist der Sensor anzubringen.

(Aufgaben werden ergänzt)

2.2 Dynamik

2.2.1 Starre Drehbewegung

Eine homogenen Kreisscheibe (1) (Masse m_1, Trägheitsmoment J_1) ist im Punkt A reibungsfrei drehbar mit einer homogenen Kreisscheibe (2) (Masse m_2, Trägheitsmoment J_2) verbunden, welche in B reibungsfrei drehbar gelagert ist. Die Scheibe (1) dreht sich zunächst mit der Winkelgeschwindigkeit ω, während die Scheibe (2) in Ruhe ist. Plötzlich blockiert das Lager in A, was eine starre Verbindung beider Scheiben zur Folge hat.



a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit Ω nach der Blockade.

b) Wie ändert sich die kinetische Energie bei diesem Vorgang?

Lösung:

a) Hier wird eine klassische „Vorher–nachher–Situation“ beschrieben, ohne dass der Ablauf des individuellen Vorgangs des Blockierens bekannt ist. Daher ist nach dem passenden Erhaltungssatz gefragt. Die Schwerpunktbewegung ändert sich offensichtlich während des Vorgangs, also scheidet auch die Impulserhaltung aus (Was sollte man damit auch anfangen können?). Die abrupte Blockade ist in Wirklichkeit ein „verkappter Reibungsvorgang“, also liegt hier auch keine Energieerhaltung vor (vergl. Teil b). Einzig Drehimpulserhaltung ist hier gegeben, da von Außen kein Moment wirkt und die zwischen den beiden Scheiben kurzfristig wirkenden (Reibungs-)Momente in der Summe Null ergeben (Schnittprinzip!). Vor der Blockade berechnet sich der Drehimpuls der Scheibe (1) (genauer gesagt: dessen Betrag) als

$$L_1=J_1\omega\,.$$

Dieser ist zugleich der Gesamtdrehimpuls. Nach der Blockade rotiert das aus zwei Scheiben bestehende Gesamtsystem mit der Winkelgeschwindigkeit Ω. Bei der Berechnung des Drehimpulses muss dann zuerst das Gesamtdrehmoment über den Satz von Steiner zu

$$J^* = J_2 + J_1 + m_1 a^2$$

ermittelt werden, bevor man auch den Gesamtdrehimpuls nach der Blockade als

$$L^* = J^*\Omega = \left[J_2 + J_1 + m_1 a^2\right]\Omega$$

angeben kann. Die Drehimpulserhaltung verlangt $L^* = L_1$ und somit

$$\left[J_2 + J_1 + m_1 a^2\right]\Omega = J_1 \omega\,,$$

was aufgelöst nach der gesuchten Größe schließlich

$$\Omega = \frac{J_1}{J_2 + J_1 + m_1 a^2}\omega$$

ergibt.

b) Der hier beschriebene Vorgang kann als das „Rotations–Analogon" zum vollständig inelastischen Stoß zweier Körper aufgefasst werden. Folglich muss hier Energie verloren gehen. Tatsächlich ergibt der Vergleich der kinetischen Energie vor der Blockade

$$E_1 = T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega^2$$

mit der kinetischen Energie nach der Blockade

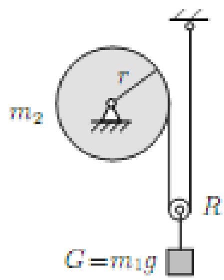
$$\begin{aligned} E^* &= T^* = \frac{1}{2}J^*\Omega^2 = \frac{1}{2}\left[J_2 + J_1 + m_1 a^2\right]\left[\frac{J_1}{J_2 + J_1 + m_1 a^2}\right]^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}J_1\omega^2\frac{J_1}{J_2 + J_1 + m_1 a^2}\,, \end{aligned}$$

einen Unterschied um den Faktor $J_1/J^* = J_1/\left[J_2 + J_1 + m_1 a^2\right]$, der immer kleiner als 1 ist. Der relative Energieverlust beträgt somit

$$\frac{E_1 - E^*}{E_1} = \frac{J_2 + m_1 a^2}{J_1 + J_2 + m_1 a^2}\,.$$

2.2.2 Abwickeln eines Seils von einer Walze

Auf eine homogene, zylindrische Walze (Masse m_2, Radius r) ist laut Abbildung rechts das linke Ende eines Seiles aufgewickelt. An dem Seil hängt über eine masselose Rolle R ein Gewicht $G = m_1 g$.



a) Wie groß ist die Geschwindigkeit von m_1 in Abhängigkeit vom Weg, wenn das System ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wird?

b) Bestimmen Sie die Seilkraft.

Lösung:

1. Obwohl dieses Problem auch problemlos mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen gelöst werden kann, liegt aufgrund der Aufgabenstellung eine Behandlung mit dem Energiesatz nahe. Die gesamte kinetische Energie berechnet sich aus der Summe der Rotationsenergie der Walze und der Translationsenergie der Masse m_1, also

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2\,,$$

wobei das Trägheitsmoment als $J = m_2r^2/2$ gegeben ist zwischen dem Drehwinkel φ der Walze und der zurückgelegten Fallstrecke x der Masse die kinematische Bindung

$$\varphi = \frac{2x}{r}$$

zu berücksichtigen ist. Damit kann man die kinetische Energie in Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit als

$$T = \frac{m_2r^2}{4}\left(\frac{2\dot{x}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 = \left[m_2 + \frac{m_1}{2}\right]\dot{x}^2$$

schreiben. Die potentielle Energie ist durch

$$U = U_0 - m_1gx$$

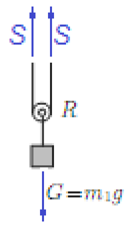
gegeben. Es gilt Energieerhaltung und somit

$$T + U = \left[m_2 + \frac{m_1}{2}\right]\dot{x}^2 + U_0 - m_1gx = E = \left[m_2 + \frac{m_1}{2}\right]0^2 + U_0 - m_1g0\,,$$

was nach der gesuchten Größe aufgelöst werden kann zu

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2m_1}{m_1 + 2m_2}gx}\,.$$

2. Zur Bestimmung der Seilkraft muss freigeschnitten werden:



Die Kräftebilanzierung in vertikaler Richtung ergibt dann

$$2S - m_1g = m_1\ddot{x}$$

und somit

$$S = m_1\left[g - \ddot{x}\right]\,.$$

Allerdings muss jetzt noch die Beschleunigung $\ddot{x}$ bestimmt werden. Dies ist am einfachsten durch Ableitung des Resultats aus (a) nach der Zeit zu leisten, also

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{2m_1}{m_1 + 2m_2}gx} = \sqrt{\frac{2m_1g}{m_1 + 2m_2}}\frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2m_1g}{m_1 + 2m_2}}\frac{\sqrt{\frac{2m_1}{m_1+2m_2}gx}}{2\sqrt{x}} = \frac{m_1g}{m_1 + 2m_2}\,,$$

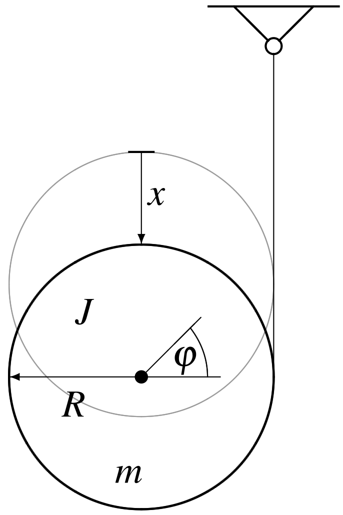
so dass schließlich

$$S = m_1\left[g - \frac{m_1g}{m_1 + 2m_2}\right] = \frac{m_1m_2g}{m_1 + 2m_2}$$

folgt.

2.2.3 Dynamik eines Jojos

Ein Jojo wird idealerweise modelliert durch eine Rolle mit Radius R, Masse m und Trägheitsmoment J, welche sich unter ihrem Eigengewicht durch Abwickeln eines dünnen Fadens nach unten senkt. Die Bewegung starte aus der Ruhe heraus und verlaufe ohne nennenswerte Reibungsverluste.



a) Welche kinematische Bindung (Zwangsbedingung) besteht zwischen der Absenkung x und dem Drehwinkel φ?

b) Drücken Sie die Absenkgeschwindigkeit $\dot{x}$ als Funktion der Absenkung x aus.

c) Ermitteln Sie die Seilkraft.

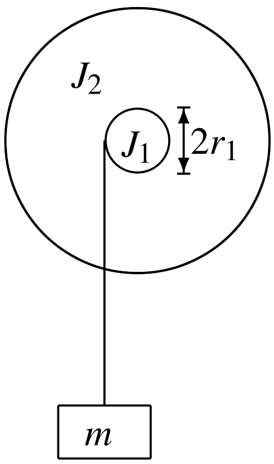
Lösung:

a) ...

b) ...

c) ...

2.2.4 Beschleunigte Drehbewegung



Ein mit einer frei drehbaren Welle (Radius r_1, Trägheitsmoment J_1) verbundenes Schwungrad (Trägheitsmoment J_2) wird über ein haftendes, sich abwickelndes Seil durch eine sich absenkende Masse m angetrieben.

a) Welche kinematische Bindung besteht zwischen dem Drehwinkel φ des Systems Welle/Schwungrad und der von der Masse m zurückgelegten Fallstrecke.

b) Schneiden Sie frei und stellen Sie die Bewegungsgleichungen für Welle/Schwungrad und Masse auf.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Lösung:

a) Da der Winkel im Bogenmaß per Definition das Verhältnis von Bogenlänge zu Radius ist, gilt folglich

$$\varphi = \frac{x}{r_1},$$

wobei x die Absenkung der Masse gegenüber der Ausgangsposition ist.

b) Zweckmäßig wird das Seil freigeschnitten, wobei S die Seilkraft bezeichne. Dann ergeben sich die Bewegungsgleichungen für die Masse und das System Schwungrad/Welle als

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - S \\ [J_1 + J_2]\,\ddot{\varphi} &= Sr_1 \end{aligned}$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit r_1 und Bildung der Summe beider Gleichungen kann die Unbekannte S eliminiert werden:

$$mr_1\ddot{x} + [J_1 + J_2]\,\ddot{\varphi} = mgr_1$$

Nun benötigen wir die kinematische Bindung aus Teil (a), um entweder φ durch x auszudrücken oder umgekehrt. Im Hinblick auf Teil (c) liegt letzteres nahe, also $x = r_1\varphi$, was zur Bewegungsgleichung

$$\left[J_1 + J_2 + mr_1^2\right]\ddot{\varphi} = mgr_1$$

führt.

c) Aus (b) folgt, dass die Winkelbeschleunigung gemäß

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgr_1}{J_1 + J_2 + mr_1^2}$$

konstant ist. Damit kann $\varphi(t)$ durch zweimalige Integration als

$$\varphi(t) = \frac{mgr_1}{2\left[J_1 + J_2 + mr_1^2\right]}t^2 + C_1 t + C_2$$

mit zwei Integrationskonstanten gewonnen werden. Die Anpassung an die Anfangsbedingungen liefert $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$ und somit

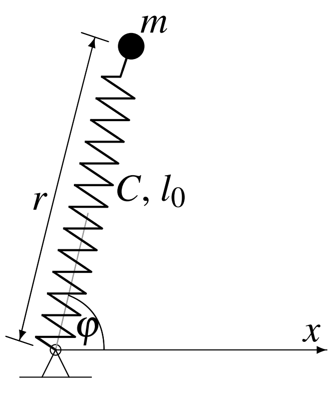
$$\varphi(t) = \frac{mgr_1}{2\left[J_1 + J_2 + mr_1^2\right]}t^2$$

als Endresultat. Die Lösung für $x(t)$ ergibt sich dann gemäß Aufgabenteil (a) durch $x(t) = r_1\varphi(t)$.

3 Lagrangeformalismus

3.1 Freie Bewegungen

3.1.1 Drehbares Federpendel



Am Ende einer drehbar gelagerten Feder (Steifigkeit C, entspannte Länge l_0) ist ein Massenpunkt (Masse m) befestigt. Dessen Position werde zweckmäßig in Polarkoordinaten, d.h. durch Angabe des Abstandes r vom Lagerpunkt und des Winkels φ, den der Ortsvektor des Massenpunkts mit der positiven x–Achse einschließt, beschrieben. Die Schwerkraft werde nicht berücksichtigt. Die freie Bewegung des Massenpunktes, eine Kombination aus Dreh- und Schwingungsbewegung, verlaufe ohne nennenswerte Reibungsverluste.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L = L(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ des Systems auf.

b) Ermitteln Sie die Euler–Lagrange–Gleichungen (Versuchen Sie aber bloß nicht, diese zu lösen!).

Lösung:

a) Die kinetische Energie des Systems berechnet sich als

$$T = \frac{m}{2}\vec{v}^2 = \frac{m}{2}\left[\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right]^2 = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right]$$

und beinhaltet sowohl die radiale Bewegung $\dot{r}$ als auch die azimutale Bewegung $r\dot{\varphi}$, während die potentielle Energie bei Vernachlässigung der Schwerkraft allein auf der Energie der Feder

$$U = \frac{C}{2}(r - l_0)^2$$

beruht und somit nur vom Abstand r vom Ursprung abhängt. Die Lagrangefunktion $L = L(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ lautet also

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = T(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) - U(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{C}{2}(r - l_0)^2 .$$

b) Die Euler–Lagrange–Gleichungen berechnen sich „straigth forward“ als

$$\begin{aligned}
\delta r: \quad 0 &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{r}) + mr\dot{\varphi}^2 - C(r - l_0) , \\
\delta \varphi: \quad 0 &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) .
\end{aligned}$$

Diese sind laut Aufgabenstellung nicht zu lösen, da es sich um eine recht komplizierte Bewegung, nämlich einer gekoppelten Schwingungs–Drehungs–Bewegung handelt. Die Aufgabe ist somit an dieser Stelle bereits gelöst, allerdings wird im folgenden noch eine kleine „Nachbehandlung“ vorgenommen: Die Kopplung beider Bewegungen manifestiert sich in dem Term $mr\dot{\varphi}^2$ in der ersten Gleichung (Zentrifugalkraft der Drehbewegung) und in dem Vorfaktor mr^2 („r–abhängiges Trägheitsmoment“) in der zweiten Gleichung. Die zweite Gleichung entspricht offensichtlich der Drehimpulserhaltung und lässt sich noch integrieren, wobei

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{const} = mr_0^2\omega_0$$

folgt, was sich wiederum nach

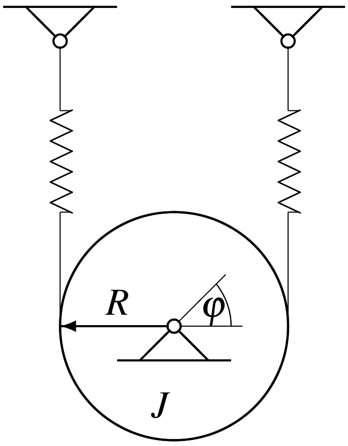
$$\dot{\varphi} = \frac{r_0^2\omega_0}{r^2}$$

auflösen und in die erste Euler–Lagrange–Gleichung einsetzen lässt, was zur Gleichung

$$m\ddot{r} = \frac{mr_0^4\omega_0^2}{r^3} - C(r - l_0)$$

führt. Damit ist das Problem zumindest etwas vereinfacht (eine Gleichung für eine Unbekannte), jedoch wird auf die weitere Behandlung obiger Dgl. verzichtet.

3.1.2 Drehpendel



Um eine drehbar gelagerte Rolle mit Radius R und Trägheitsmoment J wird ein Seil gelegt, an dessen Enden in senkrechter Richtung zwei an der Decke befestigte Federn mit Steifigkeit C angebracht sind. Beim Drehwinkel $\varphi = 0$ seien beide Federn entspannt. Es wird perfekte Seilhaftung und Reibungsfreiheit angenommen.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(\varphi, \dot{\varphi})$ des Systems auf.

b) Ermitteln Sie die Euler–Lagrange–Gleichung.

c) Lösen Sie die in (b) ermittelten Euler–Lagrange–Gleichung mit dem Ansatz $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t)$. Wie ist ω in Abhängigkeit von R, J und C zu wählen?

Lösung:

a) Die kinetische Energie des Systems berechnet sich als

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 ,$$

während die Potentielle Energie auf den beiden Federn beruht. Bei positivem Winkel φ ist die linke Feder entspannt (Seil kann nur Zug aufnehmen!), während die rechte Feder um $\Delta l = R\varphi$ verlängert wird und damit die Energie

$$U = \frac{1}{2} C \Delta l^2 = \frac{1}{2} C (R\varphi)^2 = \frac{1}{2} C R^2 \varphi^2$$

beinhaltet. Ist nun der Winkel φ negativ, wird die linke Feder um $\Delta l = R|\varphi|$ verlängert, während die rechte Feder entspannt ist. Dies führt auf die gleiche potentielle Energie wie im Fall eines positiven Winkels, so dass obige Formel für alle Winkel gültig ist! Dementsprechend lautet die Lagrangefunktion

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} C R^2 \varphi^2$$

b) Als Euler–Lagrange–Gleichung ergibt sich

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = -CR^2\varphi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\dot{\varphi}) ,$$

was sich auf die Form

$$J\ddot{\varphi} + CR^2\varphi = 0$$

bringen lässt.

c) Die Euler–Lagrange–Gleichung hat die Form einer klassischen Schwingungsgleichung. Daher ist zu erwarten, dass der Lösungsansatz

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t)$$

die Gleichung erfüllt, sofern ω der Eigenfrequenz des Schwingers entspricht. Zweimaliges Ableiten führt zu

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi_0 \cos(\omega t)$$

und Einsetzen in die Euler–Lagrange–Gleichung schließlich zu

$$\left[-\omega^2 J + CR^2\right] \varphi_0 \cos(\omega t) = 0$$

führt. Für $\varphi_0 = 0$ ist dies nur erfüllbar, wenn die eckige Klammer verschwindet, also

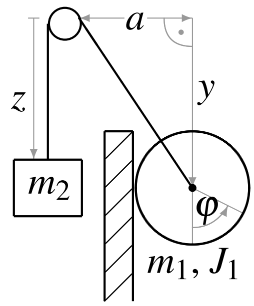
$$CR^2 - \omega^2 J = 0\,,$$

woraus man nach Umformung

$$\omega = \sqrt{\frac{CR^2}{J}}$$

gewinnt.

3.1.3 Lagrangeformalismus: Schwingungsfähiges System



Eine Rolle (Masse m_1, Massenträgheitsmoment J_1) wird an einer senkrechten Wand durch ein undehnbares Seil gehalten, welches über eine Umlenkrolle (vernachlässigbares Trägheitsmoment) an einem Gewicht (Masse m_2) befestigt ist. Für $t = 0$ sei die Ausgangskonfiguration durch $y = y_0$, $z = z_0$ und $\varphi = 0$ gegeben. Bei der Bewegung der Rolle herrsche Schlupffreiheit, während Verluste durch Reibung nicht zu berücksichtigen sind.

a) Drücken Sie die Absenkung z des Gewichts und den Drehwinkel φ der Rolle durch die generalisierte Koordinate y aus.

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L = L(y, \dot{y})$ des Systems auf.

c) Ermitteln Sie die Euler–Lagrange–Gleichung.

Lösung:

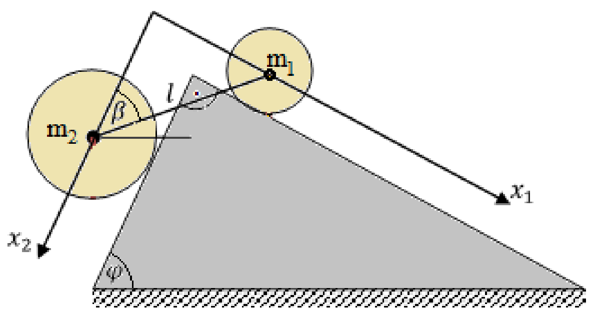
a) ...

b) ...

c) ...

3.2 Geführte Bewegungen

3.2.1 Zwei Rollen auf einem Keil



Zwei durch ein Seil der Länge l verbundene Rollen (Massen m_1, m_2, Radien r_1, r_2, Massenträgheitsmomente J_1, J_2) liegen auf einem rechtwinkligen Keil auf, dessen linke Flanke den Winkel φ gegen die Horizontale bildet. In dem gemäß der Skizze links dargestellten Koordinatensystem seien deren aktuelle Positionen durch x_1 bzw. x_2 festgelegt. Die Gesamtkonfiguration wird allein durch den Winkel β festgelegt.

a) Wie hängen die Positionen x_1 und x_2 vom Winkel β ab?

b) Ermitteln Sie kinetische und potentielle Energie und schließlich die Lagrangefunktion des Systems in Abhängigkeit von β und $\dot{\beta}$.

c) Stellen Sie die Euler–Lagrange–Gleichung des Systems auf. Verzichten Sie allerdings auf deren Lösung!

d) Betrachten Sie den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$, $r_1 = r_2 = r$, $J_1 = J_2 = mr^2/2$ sowie $\varphi = \pi/4$ und entwickeln Sie die Euler–Lagrange–Gleichung nach Taylor für kleine Auslenkungen von β aus dessen Ruhelage $\beta_0 = \pi/4$. Können Sie dann aus deren mathematischer Form der auf die Art der Bewegung schließen? (Anders gefragt: Hat die Euler–Lagrange–Gleichung Ähnlichkeit mit einer der in der Vorlesung behandelten Bewegungsgleichungen?)

Lösung:

a) Bei Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks aus Koordinatenursprung und den beiden Körperschwerpunkten liest man sofort

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin\beta \\ x_2 &= l \cos\beta \end{aligned}$$

ab.

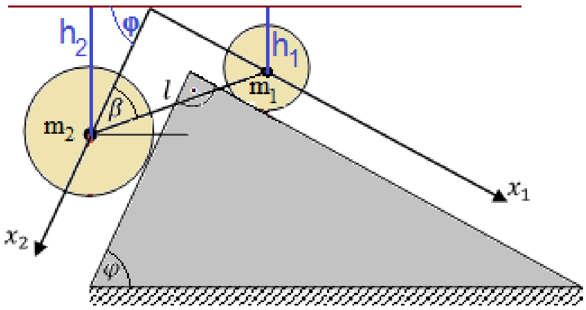
b) Bei angenommener Schlupffreiheit kann man die Winkelgeschwindigkeiten der Drehbewegungen beider Rollen gemäß $\dot{\varphi}_{1,2} = \dot{x}_{1,2}/r_{1,2}$ auf deren Schwerpunktsgeschwindigkeiten zurückführen. Die gesamte kinetische Energie ergibt sich als

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{J_1}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{J_2}{2}\dot{\varphi}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[m_1 + \frac{J_1}{r_1^2}\right]\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left[m_2 + \frac{J_2}{r_2^2}\right]\dot{x}_2^2 \\ &= \frac{l^2}{2}\left[m_1 + \frac{J_1}{r_1^2}\right]\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\beta\,(t)\right]^2 + \frac{l^2}{2}\left[m_2 + \frac{J_2}{r_2^2}\right]\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\beta\,(t)\right]^2 \\ &= \frac{l^2}{2}\left[m_1 + \frac{J_1}{r_1^2}\right]\left[\cos\beta\dot{\beta}\right]^2 + \frac{l^2}{2}\left[m_2 + \frac{J_2}{r_2^2}\right]\left[-\sin\beta\dot{\beta}\right]^2 \\ &= \frac{l^2}{2}\left[\left(m_1 + \frac{J_1}{r_1^2}\right)\cos^2\beta + \left(m_2 + \frac{J_2}{r_2^2}\right)\sin^2\beta\right]\dot{\beta}^2 \\ &= \frac{l^2}{4}\left[m_1 + m_2 + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \left(m_1 - m_2 + \frac{J_1}{r_1^2} - \frac{J_2}{r_2^2}\right)\cos(2\beta)\right]\dot{\beta}^2 \\ &= \frac{l^2}{4}\left[m_+ + m_-\cos(2\beta)\right]\dot{\beta}^2, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Abkürzungen

$$\begin{aligned} m_+ &= m_1 + m_2 + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} \\ m_- &= m_1 - m_2 + \frac{J_1}{r_1^2} - \frac{J_2}{r_2^2} \end{aligned}$$

benutzt worden sind, um alles ein wenig übersichtlicher zu gestalten. Für die potentielle Energie werden die vertikalen Abstände h_1 und h_2 zum Nullniveau (s. Bild)



benötigt. Aus gängigen trigonometrischen Beziehungen folgert man

$$\begin{aligned} h_2 &= x_2 \sin\varphi = l\cos\beta\sin\varphi \\ h_1 &= x_1 \cos\varphi = l\sin\beta\cos\varphi \end{aligned}$$

und damit die potentielle Energie als

$$U = -m_1 g h_1 - m_2 g h_2 = -gl\left[m_1 \sin\beta\cos\varphi + m_2\cos\beta\sin\varphi\right]$$

und schließlich die Lagrangefunktion des Systems als

$$L\left(\beta,\dot{\beta}\right) = \frac{l^2}{4}\left[m_+ + m_- \cos\left(2\beta\right)\right]\dot{\beta}^2 + gl\left[m_1\sin\beta\cos\varphi + m_2\cos\beta\sin\varphi\right]$$

in Abhängigkeit von β und $\dot{\beta}$.

c) Die Euler–Lagrange–Gleichung hierzu lautet

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial\beta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}}\right) \\ &= -l^2\frac{m_-}{2}\sin\left(2\beta\right)\dot{\beta}^2 + gl\left[m_1\cos\beta\cos\varphi - m_2\sin\beta\sin\varphi\right] \\ &\quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{l^2}{2}\left[m_+ + m_-\cos\left(2\beta\right)\right]\dot{\beta}\right) \end{aligned}$$

bzw. nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} &\frac{l^2}{2}\left[m_+ + m_-\cos\left(2\beta\right)\right]\ddot{\beta} - l^2\frac{m_-}{2}\sin\left(2\beta\right)\dot{\beta}^2 \\ &\qquad -gl\left[m_1\cos\beta\cos\varphi - m_2\sin\beta\sin\varphi\right] = 0 \end{aligned}$$

d) Für den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$, $r_1 = r_2 = r$, $J_1 = J_2 = mr^2/2$ sowie $\varphi = \pi/4$ geht die Bewegungsgleichung in

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{2}ml^2\ddot{\beta} - mgl\left[\cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi\right] \\ &= \frac{3}{2}ml^2\ddot{\beta} - mgl\cos\left(\beta+\varphi\right) \\ &= \frac{3}{2}ml^2\ddot{\beta} - mgl\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{3}{2}ml^2\ddot{\beta} + mgl\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

über. Eine Taylor–Entwicklung liefert für die Abweichung

$$\tilde{\beta} = \beta - \beta_0 = \beta - \frac{\pi}{4}$$

aus der Ruhelage die Approximationen

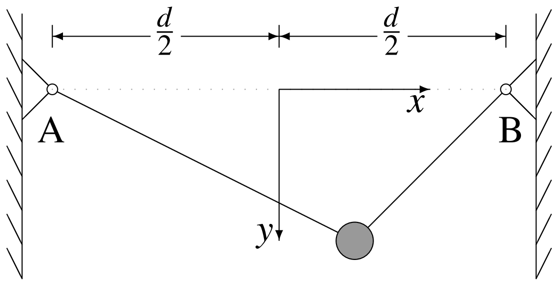
$$\begin{aligned}
\ddot{\beta} &= \ddot{\tilde{\beta}}, \\
\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\tilde{\beta} &\approx \tilde{\beta} - \frac{1}{6}\tilde{\beta}^3 + \cdots,
\end{aligned}$$

was unter Vernachlässigung höherer als linearer Terme schließlich zur genäherten Bewegungsgleichung

$$\ddot{\tilde{\beta}} + \frac{2g}{3l}\tilde{\beta} = 0$$

Es handelt sich um die Schwingungs–Dgl. mit Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3l}}$.

3.2.2 Perle auf einer dünnen Schnur



Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich reibungsfrei entlang einer dünnen Schnur, die zwischen zwei festen Punkten A und B gespannt ist. Dies zwingt den Massenpunkt zu einer Bewegung auf einer Ellipse der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

mit großer Halbachse a und kleiner Halbachse b.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \lambda)$ des Systems auf. Dabei sei λ der Lagrange–Multiplikator, durch welchen der Führung der Bewegung auf einer Ellipse Rechnung getragen wird.

b) Ermitteln Sie die Euler–Lagrange–Gleichungen.

c) Wie errechnen sich große und kleine Halbachse a und b der Ellipse, wenn Seillänge l und Abstand d zwischen den Punkten A und B gegebene Größen sind?

Lösung:

a) Für die Aufstellung der Lagrangefunktion benötigt man kinetische Energie, potentielle Energie und Zwangsbedingung in der Form

$$\begin{aligned}
T(\dot{x}, \dot{y}) &= \frac{m}{2}\dot{\vec{v}}^2 = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right], \\
U(y) &= -mgy, \\
F(x, y) &= \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1,
\end{aligned}$$

so dass die Lagrangefunktion insgesamt

$$\begin{aligned}
L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \lambda) &= T(\dot{x}, \dot{y}) - U(y) + \lambda F(x, y) \\
&= \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right] + mgy + \lambda\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\right]
\end{aligned}$$

lautet.

b) Die Euler–Lagrange–Gleichungen berechnen sich „straigth forward“ als

$$\begin{aligned}
\delta x: \quad 0 &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) + \frac{2\lambda x}{a^2}\,, \\
\delta y: \quad 0 &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) + \frac{2\lambda y}{b^2} + mg\,, \\
\delta\lambda: \quad 0 &= \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\,.
\end{aligned}$$

Nach einfachen Umformungen lauten diese

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= \frac{2\lambda x}{a^2}\,, \\
m\ddot{y} &= \frac{2\lambda y}{b^2} + mg\,, \\
\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 &= 1\,.
\end{aligned}$$

Nach einer Lösung der Gleichungen war nicht gefragt.

c) Im der (hypothetischen) Position, in welcher der Massenpunkt auf einer Linie mit den Punkten A und B rechts von B liegt, ist sein Abstand vom Mittelpunkt genau die große Halbachse a. Hinsichtlich dieser Position errechnet sich die Länge des Seils als

$$l = a + \frac{d}{2} + \left(a - \frac{d}{2}\right) = 2a\,.$$

Die kleine Halbachse ist bei der Position $x = 0$ ermittelbar. In Diesem Fall bildet der Massenpunkt mit den Punkten A und B ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis d und Schenkeln $l/2$. Dessen Höhe, die kleine Halbachse, berechnet sich über den Satz von Pythagoras als

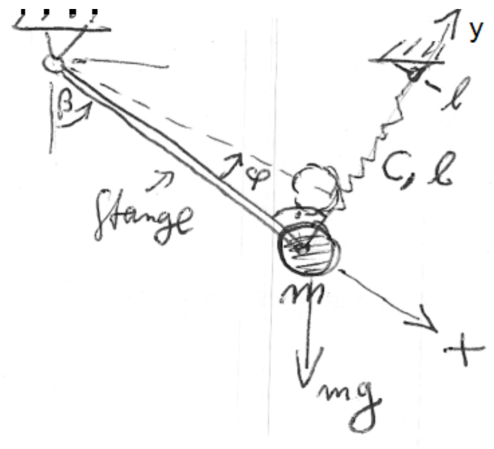
$$b = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - d^2}\,,$$

so dass wir zusammenfassend

$$\begin{aligned}
a &= \frac{l}{2} \\
b &= \frac{l}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}
\end{aligned}$$

schreiben können.

3.2.3 Kombination aus Schwerependel und Federschwinger



Am Ende einer drehbar gelagerten masselosen Stange ist eine Masse m befestigt. Diese wird wiederum von einer Feder (Steifigkeit C), deren Aufhängepunkt mit demjenigen der Stange auf einer Höhe liegt, so gehalten, dass sich im Gleichgewicht zwischen Feder und Stange ein rechter Winkel einstellt. Mit l wird die Länge der Feder im Gleichgewicht und mit β der Winkel der Stange gegen die Horizontale bezeichnet.

a) Wie ändern sich vertikale Position der Masse und Federlänge, wenn das System um einen Winkel φ aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt wird? Stellen Sie beide Größen für sehr kleine Winkel φ durch eine Taylor–Entwicklung bis zum quadratischen Glied dar.

b) Ermitteln Sie kinetische und potentielle Energie und schließlich die Lagrangefunktion des Systems in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$ für kleine Auslenkungen. Benutzen Sie die quadratische Näherung aus (a).

c) Stellen Sie die Euler–Lagrange–Gleichung des Systems auf.

d) Das System ist schwingungsfähig. Mit welcher Kreisfrequenz ω_0?

Lösung:

a) Die Ausgangsposition der Masse liegt um $l_s \cos\beta$ unterhalb der „Nulllinie“, die durch die beiden Lager verläuft, wobei die Länge l_s der Stange sich gemäß $l_s = l\tan\beta$ durch gegebene Größen ausdrücken lässt. Bei Auslenkung um einen Winkel φ ändert sich die vertikale Position also um

$$\begin{aligned}\Delta y &= -l_s \cos(\beta+\varphi) + l_s \cos\beta \\ &= l\tan\beta\,[\cos\beta - \cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi] \\ &\approx l\tan\beta\left[\sin\beta\,\varphi + \frac{1}{2}\cos\beta\,\varphi^2\right] ,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Näherungen $\sin\varphi \approx \varphi$ und $\cos\varphi \approx 1-\varphi^2/2$ benutzt wurden. Wichtig ist hier eine Entwicklung bis zum *quadratischen Glied*, was für die Kraft eine Entwicklung bis zum linearen Glied bedeutet. Hinsichtlich der Federlänge müsste für beliebige Winkel berücksichtigt werden, dass der rechte Winkel in Gleichgewichtslage nach Auslenkung kein rechter Winkel mehr ist. Für kleine Winkel kann genau dieser Effekt vernachlässigt werden, so dass die negative Änderung der Federlänge gerade die Bogenlänge des Winkels φ, also

$$-\Delta l \approx l_s\varphi = l\tan\beta\,\varphi$$

ist. Das negative Vorzeichen trägt der Tatsache Rechnung, dass ein positiver Winkel φ die Feder verkürzt.

b) Die kinetische Energie berechnet sich in Polarkoordinaten (Koordinatenursprung = Aufhängung der Stange) relativ einfach zu

$$E_{kin} = T = \frac{m}{2}\vec{v}^2 = \frac{m}{2}(l_s\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}ml^2\tan^2\beta\,\dot{\varphi}^2\,,$$

während die potentielle Energie neben der Lageenergie einen Beitrag von der Feder erfährt, der gemäß $C\Delta l_{ges}^2/2$ quadratisch von der Federverlängerung gegenüber der entspannten Länge abhängt. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Feder bereits im Gleichgewichtszustand $\varphi = 0$ verlängert ist, und zwar gemäß der Gleichgewichtsbedingung $C\Delta l_0 = mg\sin\beta$ um $\Delta l_0 = mg\sin\beta/C$. Damit ist

$$\Delta l_{ges} = \Delta l_0 + \Delta l \approx \frac{mg}{C}\sin\beta - l\tan\beta\,\varphi\,,$$

was für die potentielle Energie

$$\begin{aligned}
E_{pot} = U &= mg\Delta y + \frac{1}{2}C\Delta l_{ges}^2 \\
&\approx mgl\tan\beta\left[\sin\beta\,\varphi + \frac{1}{2}\cos\beta\,\varphi^2\right] + \frac{1}{2}C\left[\left(\frac{mg}{C}\sin\beta\right)^2 - 2\frac{mg}{C}l\tan\beta\sin\beta\,\varphi + l^2\tan^2\beta\,\varphi^2\right] \\
&= \frac{(mg\sin\beta)^2}{2C} + \frac{1}{2}\left[mgl\sin\beta + Cl^2\tan^2\beta\right]\varphi^2
\end{aligned}$$

bedeutet. Den ersten Term kann man bedenkenlos vergessen, da die potentielle Energie immer bis auf eine frei wählbare Konstante bestimmt ist. Man kann also guten Gewissens

$$E_{pot} = U \approx \frac{1}{2}\left[mgl\sin\beta + Cl^2\tan^2\beta\right]\varphi^2$$

schreiben. Für kleine Auslenkungen lautet die Lagrangefunktion des Systems somit

$$L(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2\tan^2\beta\,\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\left[mgl\sin\beta + Cl^2\tan^2\beta\right]\varphi^2$$

in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$.

c) Die entsprechende Euler–Lagrange–Gleichung berechnet sich als

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) \\
&= -\left[mgl\sin\beta + Cl^2\tan^2\beta\right]\varphi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ml^2\tan^2\beta\,\dot{\varphi}\right) \\
&= -ml^2\tan^2\beta\,\ddot{\varphi} - \left[mgl\sin\beta + Cl^2\tan^2\beta\right]\varphi\,,
\end{aligned}$$

was man auch als

$$\ddot{\varphi} + \frac{mg\cos\beta\cot\beta + Cl}{ml}\varphi = 0$$

schreiben kann.

d) Die Bewegungsgleichung des Systems hat die Form

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

einer ungedämpften harmonischen Schwingungsgleichung. Die Parameteridentifikation liefert dann

$$\omega_0^2 = \frac{mg\cos\beta\cot\beta + Cl}{ml} = \frac{g}{l}\cos\beta\cot\beta + \frac{C}{m}\,,$$

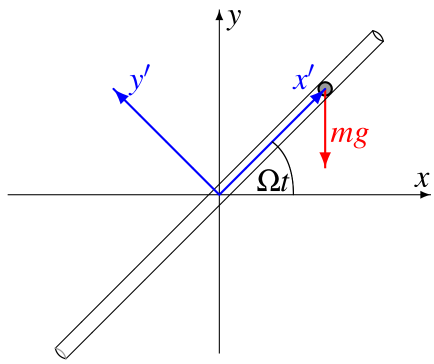
also:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}\cos\beta\cot\beta + \frac{C}{m}}\,.$$

4 Relativbewegungen

4.1 Geführte Bewegungen

4.1.1 Kugel im rotierenden Rohr



Ein Massenpunkt bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei innerhalb eines mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω rotierenden Rohres, s. Abb. links.

a) Beschreibt man die Bewegung im mitrotierenden Bezugssystem, dessen x'–Achse die Rohrachse ist, so treten Inertialkräfte in Erscheinung. Bestimmen Sie diese (Beträge und Richtungen).

b) Schneiden Sie frei und stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung (in x'–Richtung) auf.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung.

d) Ist es möglich, dass bei Einhaltung spezieller Anfangsbedingungen und bei entsprechender Rohrlänge die Kugel das Rohr nie verlässt?

Lösung:

a) Weil bewegtes Koordinatensystem und Inertialsystem einen gemeinsamen Ursprung haben gilt $\vec{R} = \vec{0}$, so dass die Trägheitskraft $-m\ddot{\vec{R}}$ verschwindet. Ebenso ist hier auch keine Euler–Kraft $-m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$ vorhanden, da die Winkelgeschwindigkeit des Rohres konstant ist. Dagegen errechnt sich die Coriolis–Kraft als

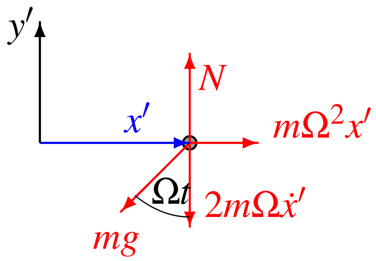
$$\begin{aligned} -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' &= -2m\left(\Omega\vec{e}_z^{\,\prime}\right) \times \left(\dot{x}\vec{e}_x^{\,\prime}\right) \\ &= -2m\Omega\dot{x}\vec{e}_z^{\,\prime} \times \vec{e}_x^{\,\prime} = -2m\Omega\dot{x}\vec{e}_y^{\,\prime} \end{aligned}$$

und drückt somit gegen die Rohrwand. Die Zentrifugalkraft

$$\begin{aligned} -m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) &= -m\left(\Omega\vec{e}_z^{\,\prime}\right) \times \left(\Omega\vec{e}_z^{\,\prime} \times x'\vec{e}_x^{\,\prime}\right) \\ &= -m\Omega^2 x'\vec{e}_z^{\,\prime} \times \left(\vec{e}_z^{\,\prime} \times \vec{e}_x^{\,\prime}\right) = +m\Omega^2 x'\vec{e}_x^{\,\prime} \end{aligned}$$

wirkt dagegen in Richtung der Rohrachse.

b) Die Bewegungsgleichungen des Systems können am besten im mitrotierenden Koodinatensystem dargestellt werden, siehe Freikörperbild:



Als Bewegungsgleichungen resultieren dann

$$\begin{aligned} \rightarrow: \quad m\Omega^2 x' - mg\sin(\Omega t) &= m\ddot{x}', \\ \uparrow: \quad N - 2m\Omega\dot{x}' - mg\cos(\Omega t) &= 0, \end{aligned}$$

und damit insbesondere die inhomogene lineare Dgl.

$$\ddot{x}' - \Omega^2 x' = -g\sin(\Omega t) \,. \tag{29}$$

c) Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (29) findet man mit Hilfe der Methode des char. Polynoms, während eine partikuläre Lösung durch Ansatz in der Form der Inhomigenität, also durch $C\sin(\Omega t)$ gewonnen werden kann. Insgesamt ergibt sich

$$x' = A\exp(\Omega t) + B\exp(-\Omega t) + \frac{g}{2\Omega^2}\sin(\Omega t) \tag{30}$$

als allgemeine Lösung, welche sich somit als Überlagerung aus einer periodischen mit einer monotonen Bewegung darstellt.

d) Bei gegebener Anfangsposition x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 ergeben sich die beiden Integrationskonstanten aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= x_0, \\ \Omega[A - B] + \frac{g}{2\Omega} &= v_0, \end{aligned}$$

dessen Auflösung auf

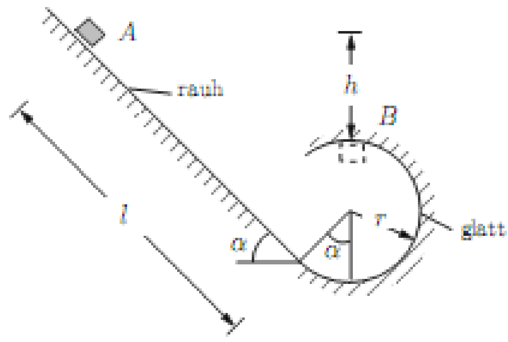
$$\begin{aligned} A &= \frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\Omega} - \frac{g}{4\Omega^2} \\ B &= \frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\Omega} + \frac{g}{4\Omega^2} \end{aligned}$$

führt. Wie man obiger Lösung entnimmt, kann durch die spezielle Wahl $x_0 = 0$ und $v_0 = g/2\Omega$ der Anfangsbedingungen dafür gesorgt werden, dass $A = B = 0$ ist und somit die Bewegung der Kugel eine reine Sinusbewegung ist, d.h. es ist prinzipiell möglich, die Kugel permanent in dem Rohr zu halten. Eine Kugel, die durch vertikale Rotation in einem Rohr gehalten wird, wäre ein guter Blickfang für Besucher und damit ein Beitrag zur Öffentlichkeitsarbeit der Hochschule. Ein wesentliches Problem besteht in einer *dynamischen Instabilität* der Bewegung: Sobald der Koeffizient A auch nur geringfügig von Null verschieden ist, sorgt der exponentiell anwachsende Term $A\exp(\Omega t)$ in der Lösung (30) für einen Zusammenbruch der periodischen Bewegung und letztlich dafür, dass die Kugel das Rohr verlässt. Leider können die Anfangsbedingungen nie so perfekt eingehalten werden, dass $A = 0$ exakt erfüllbar ist. Das System muss also geregelt werden, um die periodische Bewegung zu stabilisieren.

5 Gemischte Problemstellungen

5.1 Zusammengesetzte Bewegungen

Ein Massenpunkt rutscht aus seiner Ruhelage im Punkt A (vergl. Bild rechts) eine rauhe schiefe Ebene herab (Winkel α zur Horizontalen, Reibungskoeffizient μ), die tangential in eine glatte Kreisbahn (Radius r) einmündet. In welcher Höhe h über dem Scheitel B der Kreisbahn muss die Bewegung beginnen, damit der Massenpunkt in B die Bahn nicht verlässt?



Lösung:

Die erste Phase der Bewegung kann man aufgrund der Anwesenheit von Reibung nur mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - \mu F_N \\ 0 = m\ddot{y} &= mg\cos\alpha - F_N \end{aligned}$$

behandeln, wobei hier zweckmäßigerweise die x–Achse parallel zur schiefen Ebene gerichtet ist nach rechts unten zeigt, während die y–Achse senkrecht dazu nach rechts oben zeigt. Löst man die zweite Gleichung nach F_N auf und setzt dies in die erste ein, so ergibt sich

$$\ddot{x} = [\sin\alpha - \mu\cos\alpha]\, g$$

nach Herauskürzen der Masse. Es handelt sich also um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung, deren Lösung durch zweimalige Integration

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [\sin\alpha - \mu\cos\alpha]\, gt + v_0 \\ x &= \frac{1}{2}[\sin\alpha - \mu\cos\alpha]\, gt^2 + v_0 t + x_0 \end{aligned}$$

ergibt, wobei aus den Anfangsbedingungen (Start im Nullpunkt aus der Ruhe) für die Integrationskonstanten $v_0 = 0$ und $x_0 = 0$ folgt. Der Massenpunkt erreicht den Fußpunkt der Ebene zur Zeit t_1 und hat bis dahin die Strecke

$$l = \frac{1}{2}[\sin\alpha - \mu\cos\alpha]\, gt_1^2$$

zurückgelegt, woraus die Zeit t_1 als

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{[\sin\alpha - \mu\cos\alpha]\, g}}$$

resultiert. Die Geschwindigkeit beträgt zu diesem Zeitpunkt

$$v_1 = [\sin\alpha - \mu\cos\alpha]\, gt_1 = \sqrt{2\,[\sin\alpha - \mu\cos\alpha]\, gl}\,.$$

Für die zweite Phase der Bewegung brauchen wir uns nicht mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen „herumquälen“, sondern können aufgrund der angenommenen Reibungsfreiheit auf den Energieerhaltungssatz zurückgreifen. Zu Beginn der Bewegung beträgt die Gesamtenergie

$$E_1 = T_1 + U_1 = \frac{m}{2}v_1^2 - mgr\cos\alpha = [\sin\alpha - \mu\cos\alpha]\,mgl - mgr\cos\alpha\,,$$

wobei das Nullniveau für die potentielle Energie zweckmäßigerweise auf die Mittelpunktslage der Kreisbewegung gelegt wurde. Im Punkt B errechnet sich die Gesamtenergie indes als

$$E_B = T_B + U_B = \frac{m}{2}v_B^2 + mgr$$

mit zu bestimmender Geschwindigkeit v_B bei Erreichen des Punktes B. Aus der Energieerhaltung $E_B = E_1$ folgt

$$v_B^2 = 2\,[\sin\alpha - \mu\cos\alpha]\,gl - 2\,[1+\cos\alpha]\,gr\,. \tag{31}$$

Damit der Massenpunkt die geführte Bahn nicht verlässt, muss eine positive Normalkraft verbleiben. Die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_y - N\vec{e}_y$$

bei Erreichen des Punktes B führt unter Berücksichtigung von

$$\ddot{\vec{r}} = \left[\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right]\vec{e}_r + [r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}]\,\vec{e}_\varphi = -r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi = -\frac{v_B^2}{r}\vec{e}_y - r\ddot{\varphi}\vec{e}_x$$

und Bildung der y–Komponente zu

$$N = \left[\frac{v_B^2}{rg} - 1\right] mg\,,$$

so dass der Grenzfall, bei dem der Kontakt zwischen Führung und Massenpunkt gerade noch nicht verloren geht, durch das Verschwinden der eckigen Klammer gegeben, also

$$0 = v_B^2 - rg = 2\,[\sin\alpha - \mu\cos\alpha]\,gl - [3+2\cos\alpha]\,gr\,,$$

was durch Auflösen nach l zunächst die Mindestlänge

$$l = \frac{[3+2\cos\alpha]\,r}{2\,[\sin\alpha - \mu\cos\alpha]}$$

liefert, die der Massenpunkt auf der schiefen Ebene zurücklegen muss. Die Berechnung der gesuchten Höhe h daraus ist nunmehr reine Geometrie: Aus

$$l\sin\alpha = r\cos\alpha + r + h$$

resultiert

$$\begin{aligned} h &= l\sin\alpha - [1+\cos\alpha]\,r \\ &= \frac{[3+2\cos\alpha]\sin\alpha - 2\,[\sin\alpha - \mu\cos\alpha]\,[1+\cos\alpha]}{2\,[\sin\alpha - \mu\cos\alpha]}r \\ &= \frac{\sin\alpha + 2\mu\cos\alpha\,[1+\cos\alpha]}{2\,[\sin\alpha - \mu\cos\alpha]}r \end{aligned}$$

als Endergebnis.