FEM für Dynamik

Kapitel 6: Harmonische Erregung

Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch

Department Maschinenbau und Produktion
Fakultät Technik und Informatik
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Harmonische Erregung

Bewegungsgleichung der FEM:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \tag{1}$$

Ansatz zur Lösung des inhom. DGL-Systems 2. Ordnung:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{hom} + \mathbf{U}_{part} \tag{2}$$

Homogener Anteil $\mathbf{U}_{hom}$:

- resultiert aus Anfangsbedingungen mit $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$
- klingt aufgrund der Dämpfung mit der Zeit ab

Partikulärer Anteil $\mathbf{U}_{part}$:

- angepasst an den Typ der rechten Seite
- dominiert im eingeschwungenen Zustand

Harmonische Erregung

Ansatz für Anregung:

$$\mathbf{F}(t) = \hat{\mathbf{F}} \cdot e^{i\bar{\omega}t} \tag{3}$$

Mit

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{re} + i \cdot \mathbf{F}_{im} \tag{4}$$

$$\bar{\omega} = \text{Erregerkreisfrequenz in } [Hz]$$

Unter Verwendung der Eulerschen Relation

$$e^{\pm i\bar{\omega}t} = cos(\bar{\omega}t) \pm i \cdot sin(\bar{\omega}t) \tag{5}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= (\mathbf{F}_{re} + i \cdot \mathbf{F}_{im}) \cdot (cos(\bar{\omega}t) + i \cdot sin(\bar{\omega}t)) \\ &= \underbrace{(\mathbf{F}_{re} \cdot cos(\bar{\omega}t) - \mathbf{F}_{im} \cdot sin(\bar{\omega}t))}_{Re(\mathbf{F}(t))} + i \cdot \underbrace{(\mathbf{F}_{re} \cdot sin(\bar{\omega}t) + \mathbf{F}_{im} \cdot cos(\bar{\omega}t))}_{Im(\mathbf{F}(t))} \end{aligned} \tag{6}$$

Harmonische Erregung

Ansatz für Verschiebung vom Typ der rechten Seite:

$$\mathbf{U}_p(t) = \hat{\mathbf{U}} \cdot e^{i\bar{\omega}t} \tag{7}$$

Mit

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U}_{re} + i \cdot \mathbf{U}_{im} \tag{8}$$

$$\bar{\omega} = \text{Erregerkreisfrequenz in } [Hz]$$

Analog zur Anregung ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_p(t) &= (\mathbf{U}_{re} + i \cdot \mathbf{U}_{im}) \cdot (cos(\bar{\omega}t) + i \cdot sin(\bar{\omega}t)) \\ &= \underbrace{(\mathbf{U}_{re} \cdot cos(\bar{\omega}t) - \mathbf{U}_{im} \cdot sin(\bar{\omega}t))}_{Re(\mathbf{U}_p(t))} + i \cdot \underbrace{(\mathbf{U}_{re} \cdot sin(\bar{\omega}t) + \mathbf{U}_{im} \cdot cos(\bar{\omega}t))}_{Im(\mathbf{U}_p(t))} \end{aligned} \tag{9}$$

Harmonische Erregung

Für den zeitleichen Verlauf der Anregung an einem Freiheitsgrad A wird nur der Realteil von $\mathbf{F}(t)$ betrachtet:

$$\begin{aligned} F_A &= Re(F_A(t)) = F_{re,A} \cdot cos(\bar{\omega}t) - F_{im,A} \cdot sin(\bar{\omega}t) \\ &= |F_A| \cdot cos(\bar{\omega}t + \phi_A) \end{aligned}$$

mit

$$|F_A| = \sqrt{F_{re,A}^2 + F_{im,A}^2} \quad \phi_A = arctan(\frac{F_{im,A}}{F_{re,A}})$$

Für den zeitleichen Verlauf der Antwort $\mathbf{U}(t)$ gilt analog:

$$\begin{aligned} U_A &= U_{re,A} \cdot cos(\bar{\omega}t) - U_{im,A} \cdot sin(\bar{\omega}t) \\ &= |U_A| \cdot cos(\bar{\omega}t + \psi_A) \end{aligned}$$

mit

$$|U_A| = \sqrt{U_{re,A}^2 + U_{im,A}^2} \quad \psi_A = arctan\left(\frac{U_{im,A}}{U_{re,A}}\right)$$

Harmonische Erregung

Einsetzen von Gln. (3) und (7) und der Ableitungen

$$\mathbf{U}_p = \hat{\mathbf{U}} \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$
$$\dot{\mathbf{U}}_p = i\bar{\omega}\hat{\mathbf{U}} \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$
$$\ddot{\mathbf{U}}_p = -\bar{\omega}^2\hat{\mathbf{U}} \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$

in Gl. (1) liefert:

$$\underbrace{\left(-\bar{\omega}^2\mathbf{M} + i\bar{\omega}\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)}_{\substack{\widehat{\mathbf{K}}(i\bar{\omega}) \\ \text{komplexe dynamische} \\ \text{Steifigkeitsmatrix}}} \hat{\mathbf{U}} \cdot \cancel{e^{i\bar{\omega}t}} = \hat{\mathbf{F}} \cdot \cancel{e^{i\bar{\omega}t}} \tag{10}$$

oder

$$\hat{\mathbf{K}}(i\bar{\omega})\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}} \tag{11}$$

(Sonderfall Statik: $\bar{\omega} = 0 \rightarrow \mathbf{KU} = \mathbf{F}$)

Harmonische Erregung

Berechnung der Verschiebungsamplituden:

$$\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{K}}^{-1}(i\bar{\omega})\hat{\mathbf{F}} \tag{12}$$

$$= \hat{\mathbf{H}}(i\bar{\omega})\hat{\mathbf{F}} \tag{13}$$

mit $\hat{\mathbf{H}}(i\bar{\omega}) := \hat{\mathbf{K}}^{-1}$ als komplexwertige Nachgiebigkeitsmatrix (komplexe Frequenzgangsmatrix)

Überführen von Gl. (11) in den reellen Bereich:

$$\hat{\mathbf{K}}(i\bar{\omega}) = -\bar{\omega}^2\mathbf{M} + i\bar{\omega}\mathbf{C} + \mathbf{K} \tag{14}$$

$$= \underbrace{(-\bar{\omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})}_{\hat{\mathbf{K}}_{re}} + i\,\underbrace{\bar{\omega}\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{K}}_{im}} \tag{15}$$

Harmonische Erregung

Aus Gl. (11) folgt somit:

$$(\hat{\mathbf{K}}_{re} + i \cdot \hat{\mathbf{K}}_{im}) \cdot (\mathbf{U}_{re} + i \cdot \mathbf{U}_{im}) = (\mathbf{F}_{re} + i \cdot \mathbf{F}_{im}) \tag{16}$$

Umsortieren liefert

$$\hat{\mathbf{K}}_{re}\mathbf{U}_{re} - \hat{\mathbf{K}}_{im}\mathbf{U}_{im} + i \cdot (\hat{\mathbf{K}}_{im}\mathbf{U}_{re} + \hat{\mathbf{K}}_{re}\mathbf{U}_{im}) = \mathbf{F}_{re} + i \cdot \mathbf{F}_{im} \tag{17}$$

'Trick': Vergleich zweier komplexer Zahlen

$$a + i \cdot b = c + i \cdot d \quad \Rightarrow \quad a = c \;\text{ und }\; b = d$$

Aus Gl. (17) folgen somit die reellwertigen Gleichungen:

$$\hat{\mathbf{K}}_{re}\mathbf{U}_{re} - \hat{\mathbf{K}}_{im}\mathbf{U}_{im} = \mathbf{F}_{re} \tag{18}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{im}\mathbf{U}_{re} + \hat{\mathbf{K}}_{re}\mathbf{U}_{im} = \mathbf{F}_{im} \tag{19}$$

Harmonische Erregung

Als Gleichungssystem:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} -\bar{\omega}^2\mathbf{M}+\mathbf{K} & -\bar{\omega}\,\mathbf{C} \\ \hline \bar{\omega}\,\mathbf{C} & -\bar{\omega}^2\mathbf{M}+\mathbf{K} \end{array}\right]}_{\substack{\widehat{\mathbf{K}}(\bar{\omega})_{(2n\times 2n)} \\ \text{reelle dynamische} \\ \text{Steifigkeitsmatrix}}} \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{U}_{re} \\ \hline \mathbf{U}_{im} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{F}_{re} \\ \hline \mathbf{F}_{im} \end{array}\right] \tag{20}$$

Berechung der Verschiebungsamplituden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{re} \\ \mathbf{U}_{im} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{K}}^{-1}(\bar{\omega}) \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{re} \\ \mathbf{F}_{im} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{H}}(\bar{\omega}) \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{re} \\ \mathbf{F}_{im} \end{bmatrix} \tag{21}$$

mit $\hat{\mathbf{H}}(\bar{\omega}) := \hat{\mathbf{K}}^{-1}(\bar{\omega})$ als reellwertige Nachgiebigkeitsmatrix (reelle Frequenzgangsmatrix)

Harmonische Erregung

Anmerkungen zu Gl. (20)

1.) Falls $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, sind Real- und Imaginärteil entkoppelt:

$$(-\bar{\omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{U}_{re} = \mathbf{F}_{re}$$

$$(-\bar{\omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{U}_{im} = \mathbf{F}_{im}$$

2.) Falls $\mathbf{F}_{im} = \mathbf{0}$ (Cosinusanregung) und $\mathbf{U}_{re} = \mathbf{0}$ (Sinusantwort):

aus 2. Zeile:

$(-\bar{\omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{U}_{im} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\;$ Eigenwertproblem

mit $\bar{\omega} = \omega$ und $\mathbf{U}_{im} = \mathbf{X}$

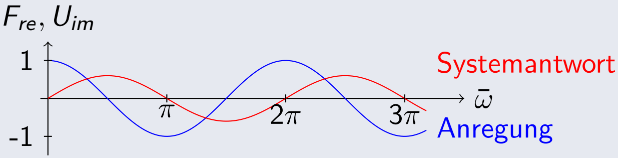
aus 1. Zeile:

$-\bar{\omega}\mathbf{C}\mathbf{U}_{im} = \mathbf{F}_{re} \;\Rightarrow\;$ Erregerkräfte kompensieren Dämpfungskräfte

Harmonische Erregung

Anmerkungen zu Gl. (20)

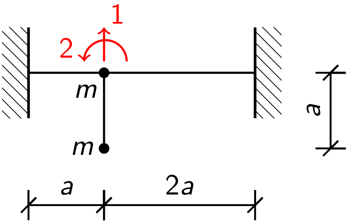
In diesem Fall entsprechen die Ergebnisse dem experimentellen Standschwingversuch, was auch als „Phasenresonanzkriterium“ bezeichnet wird. Anregung und Systemantwort sind dabei um 90° phasenverschoben.



3.) Die Berechnung von $\hat{\mathbf{H}}(\bar{\omega})$ ist für große Matrizen sehr aufwendig, in diesem Fall kann eine Transformation auf modale Koordinaten erfolgen, vgl. Literatur.

Hausaufgabe

Gegeben ist ein System mit 2 Freiheitsgraden:



Systemgrößen:

$$a = 1,0\,m$$
$$m = 10\,kg$$
$$EI = 10000\,Nm^2$$
$$\xi_1 = \xi_2 = 0.02$$

Die zugehörigen Systemmatrizen lauten:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{a^3} \cdot \begin{bmatrix} 13,5 & -4,5a \\ -4,5a & 6a^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \cdot a^2 \end{bmatrix}$$

Hausaufgabe

Die Eigenfrequenzanalyse ergibt folgende Größen:

$$\omega_1 = 56,3$$

$$\omega_2 = 97,9$$

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ {}^{1,59}/_{a} & {}^{-1,26}/_{a} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 45,3 & 0 \\ 0 & 35,9 \end{bmatrix}$$

Aufgabe:

- Berechnen Sie für eine harmonische Erregung am Freiheitsgrad 1 mit $F_{re} = 1$ und $F_{im} = 0$ die Frequenzgänge der Amplituden der Antworten am Freiheitsgrad 1 und 2 für einen Frequenzbereich von 0 bis 50 Hz. Als Dämpfungsmatrix ist Rayleigh-Dämpfung zu verwenden.
- Stellen Sie die Lösung in Matlab graphisch dar.