FEM für Dynamik

Kapitel 4: Das Eigenschwingungsproblem der FEM

Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch

Department Maschinenbau und Produktion
Fakultät Technik und Informatik
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Eigenfrequenzen und Eigenformen

Bewegungsgleichung der FEM:

$$\mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{1}$$

Für das Eigenschwingungsproblem setzen wir:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{0} \qquad \text{sowie} \quad \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

Somit folgt:

$$\mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{0} \tag{2}$$

Lösungsansatz:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{X} \cdot cos(\omega t)$$
$$\dot{\mathbf{U}}(t) = -\omega \mathbf{X} \cdot sin(\omega t)$$
$$\ddot{\mathbf{U}}(t) = -\omega^2 \mathbf{X} \cdot cos(\omega t)$$

Eigenfrequenzen und Eigenformen

Einsetzen des Lösungsansatzes in Gl. (2) liefert:

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{X} \cdot cos(\omega t) = \mathbf{0} \tag{3}$$

Nach Kürzen folgt:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\, \mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{4}$$

mit $\lambda = \omega^2$ als sog. Eigenwert

Aus Gl. (4) ergeben sich zwei Lösungsmöglichkeiten:

1.) Triviallösung: $\mathbf{X} = \mathbf{0}$
2.) Nichttriviallösung: $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, wenn

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0 \tag{5}$$

Eigenfrequenzen und Eigenformen

Beispiel: Wir betrachten ein System mit 2 Freiheitsgraden:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

Aus Gl. (5) folgt:

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}\right) &= \det \begin{bmatrix} K_{11} - \lambda M_{11} & K_{12} - \lambda M_{12} \\ K_{21} - \lambda M_{21} & K_{22} - \lambda M_{22} \end{bmatrix} \\ &= \left(K_{11} - \lambda M_{11}\right) \cdot \left(K_{22} - \lambda M_{22}\right) - \left(K_{12} - \lambda M_{12}\right)^2 \\ &= \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad \text{"charakteristische Gleichung"} \end{aligned}$$

mit

$$a_1 = \frac{\left(-M_{11} K_{22} - K_{11} M_{22} + 2 K_{12} M_{12}\right)}{\det \mathbf{M}}$$

$$a_2 = \frac{\det \mathbf{K}}{\det \mathbf{M}}$$

Eigenfrequenzen und Eigenformen

Lösung der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} \tag{6}$$

$\Rightarrow$ Es gibt zwei Eigenwerte λ_1 und λ_2

Verallgemeinerung

1.) Für ein FE-System mit n Freiheitsgraden ergibt sich ein Polynom n-ter Ordnung, aus dem n Eigenwerte resultieren.

2.) Eigenwerte werden dabei der Größe nach geordnet: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

3.) Mehrfache Nullstellen des Polynoms führen auf mehrfache Eigenfrequenzen, zu denen unterschiedliche Eigenformen gehören. (Bsp. hierzu in der Vorlesung)

4.) FE-Programme lösen das Eigenwertproblem in der Regel numerisch.

Eigenfrequenzen und Eigenformen

Einsetzen von λ_i in Gl. (4) liefert die zugehörige *Eigenform* $\mathbf{X}_i$

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \cdot \mathbf{X}_i = \mathbf{0} \tag{7}$$

Da $(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M})$ einen Rangabfall um Eins hat, kann eine beliebige Komponente von $\mathbf{X}_i$ beliebig gewählt werden.

Berechnung der Eigenform für das 2-Freiheitsgrad-System:

$$\begin{bmatrix} \widehat{K}_{11} & \widehat{K}_{12} \\ \widehat{K}_{21} & \widehat{K}_{22} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i=1,2} \qquad \text{mit } \widehat{K}_{ij} = K_{ij} - \lambda_i M_{ij}$$

Wir setzen willkürlich $X_{2(i)} = 1$. Aus der ersten Zeile folgt dann

$$\widehat{K}_{11(i)} \cdot X_{1(i)} + \widehat{K}_{12(i)} \cdot 1 = 0 \tag{8}$$

Eigenfrequenzen und Eigenformen

Umstellen nach $X_{1(i)}$ liefert:

$$X_{1(i)} = -\frac{\widehat{K}_{12(i)}}{\widehat{K}_{11(i)}} \tag{9}$$

Die i-te Eigenform ergibt sich somit zu

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} -\widehat{K}_{12(i)}/\widehat{K}_{11(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Anschließend werden alle Eigenformen spaltenweise in der Modalmatrix zusammengefasst:

$$\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1(1)} & X_{1(2)} \\ X_{2(1)} & X_{2(2)} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Eigenfrequenzen und Eigenformen

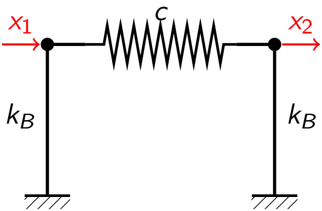
Anmerkungen

- Eigenformen können auf verschiedene Arten normiert werden, vgl. Folie 18.
- Das Eigenwertproblem nach Gl. (4) kann auch für das ungelagerte System gelöst werden. In diesem Fall entsprechen die ersten n Eigenformen den n möglichen Starrkörperbewegungen der Struktur und die zugehörigen Eigenwerte sind Null. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
n &= 1 \quad \text{bei Stäben} \\
n &= 2 \quad \text{bei Balken} \\
n &= 3 \quad \text{bei Scheiben} \\
n &= 6 \quad \text{bei Körper}
\end{aligned}
$$

Eigenfrequenzen und Eigenformen

Übungsbeispiel:



Systemmatrizen:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_B + c & -c \\ -c & k_B + c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

Die Steifigkeitsmatrix wurde mit Hilfe "statischer Kondensation" ermittelt.
Berechnung von a_1 und a_2:

$$a_1 = \frac{-2(k_B + c)}{m} \qquad a_2 = \frac{(k_B + c)^2 - c^2}{m^2} = \frac{k_B^2 + 2k_B \cdot c}{m^2} \tag{12}$$

Daraus folgen die Eigenwerte zu (Rechnen Sie nach!):

$$\lambda_1 = \frac{k_B}{m} \qquad \lambda_2 = \frac{k_B + 2c}{m} \tag{13}$$

Eigenfrequenzen und Eigenformen

Berechnung der ersten Eigenform: Aus $X_{2(1)} = 1$ folgt

$$X_{1(1)} = -\frac{\widehat{K}_{12}}{\widehat{K}_{11}} = -\frac{K_{12} - \lambda_1 M_{12}}{K_{11} - \lambda_1 M_{11}} = \frac{c}{k_B + c - \dfrac{k_B}{m} \cdot m} = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Berechnung der zweiten Eigenform: Aus $X_{2(2)} = 1$ folgt

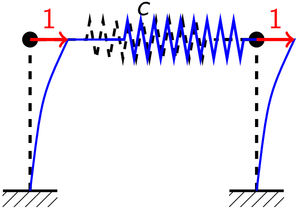
$$X_{1(2)} = -\frac{\widehat{K}_{12}}{\widehat{K}_{11}} = -\frac{K_{12} - \lambda_2 M_{12}}{K_{11} - \lambda_2 M_{11}} = \frac{c}{k_B + c - \dfrac{k_B + 2c}{m} \cdot m} = -1$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \text{Modalmatrix: } \phi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

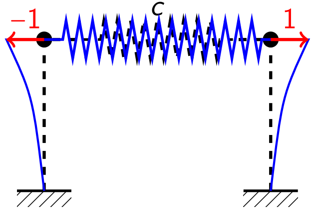
Eigenfrequenzen und Eigenformen

Darstellung der Eigenformen

Erste Eigenform:



Zweite Eigenform:



Die zugehörigen Eigenfrequenzen berechnen sich aus

$$f_i = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2\pi} \tag{14}$$

Eigenfrequenzen und Eigenformen

Hinweise zur Eingabe der Einheiten im FE-Programm

Ziel: Ergebnis der Eigenfrequenzen in $[Hz]$

1.) Alle Größen in den SI-Einheiten eingeben

oder

2.) Eingabe der Abmessungen in $[mm]$, des E-Moduls in $[\frac{N}{mm^2}]$ und der Dichte ρ in $[\frac{t}{mm^3}]$

Begründung:

$$1[N] = 1[kg]1\left[\frac{m}{s^2}\right] \quad \Rightarrow \frac{1}{s} = \sqrt{\frac{N}{\underbrace{\cancel{kg}}_{\mathbf{t}}\ \underbrace{\cancel{m}}_{\mathbf{mm}}}}$$

Eigenschaften der Eigenformen

Eigenschaften der Eigenformen

1.) Falls $\mathbf{M}$ und $\mathbf{K}$ reell und symmetrisch sind, ist ω_i stets reell
2.) Falls $\mathbf{M}$ und $\mathbf{K}$ reell und symmetrisch sind, ist ω_i stets ≥ 0
3.) Diverse Orthogonalitätseigenschaften von $\mathbf{K}$ und $\mathbf{M}$ bezüglich $\mathbf{X}$:

Aus dem Eigenwertproblem

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{15}$$

folgt für die r-te Eigenform (mit $1 \leq r \leq n$):

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{X}_r &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}\mathbf{X}_r &= \omega_r^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_r \end{aligned} \tag{16}$$

Für s $\neq$ r folgt analog:

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_s = \omega_s^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_s \tag{17}$$

Eigenschaften der Eigenformen

Wir multiplizieren Gl. (16) v.l. mit $\mathbf{X}_s^T$:

$$\mathbf{X}_s^T \mathbf{K} \mathbf{X}_r = \omega_r^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{M} \mathbf{X}_r \tag{18}$$

und Gl. (17) v.l. mit $\mathbf{X}_r^T$:

$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_s = \omega_s^2 \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_s \tag{19}$$

Wir bilden die Differenz aus Gl.(18) und Gl. (19):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_s^T \mathbf{K} \mathbf{X}_r - \mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_s &= \omega_r^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{M} \mathbf{X}_r - \omega_s^2 \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_s \\ 0 &= (\omega_r^2 - \omega_s^2) \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_s \qquad (20) \\ 0 &= \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_s \quad \text{wenn } \omega_r^2 \neq \omega_s^2 \qquad (21) \end{aligned}$$

Dabei wird ausgenutzt, dass bei symmetrischen Matrizen **A** gilt:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{A}\, \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{A}\, \mathbf{a} \qquad \Rightarrow \mathbf{a}^T \mathbf{A}\, \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{A}\, \mathbf{a} = 0 \tag{22}$$

Eigenschaften der Eigenformen

$\mathbf{X}_r$ und $\mathbf{X}_s$ sind **M**-orthogonal:

$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_s = 0 \qquad \text{wenn r} \neq \text{s}$$
$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_r = \mu_r \qquad \text{Modale Masse} \tag{23}$$

Aus Gl. (19) folgt, dass $\mathbf{X}_r$ und $\mathbf{X}_s$ ebenfalls **K**-orthogonal sind:

$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_s = 0 \qquad \text{wenn r} \neq \text{s}$$
$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_r = \gamma_r \qquad \text{Modale Steifigkeit} \tag{24}$$

Aus Gl. (19) folgt für $s = r$:

$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_r = \omega_r^2 \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_r$$
$$\gamma_r = \omega_r^2 \mu_r \tag{25}$$

Eigenschaften der Eigenformen

Hieraus folgt der Rayleigh-Quotient:

$$\omega_r^2 = \frac{\gamma_r}{\mu_r} = \frac{\mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_r}{\mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_r} \tag{26}$$

Mit diesem können Eigenfrequenzen aus gegebenen Eigenformen abgeschätzt werden.

Führt man die Orthogonalitätsbedingungen für alle Eigenformen durch, lassen sich mit Hilfe der Modalmatrix ϕ die Systemmatrizen **K** und **M** diagonalisieren:

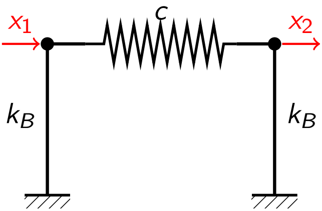
$$\phi^T \mathbf{M} \phi = \boldsymbol{\mu} = diag(\mu_r) \tag{27}$$

$$\phi^T \mathbf{K} \phi = \boldsymbol{\gamma} = diag(\gamma_r) \tag{28}$$

$\Rightarrow$ Diese Eigenschaft wird beim Verfahren der modalen Superposition ausgenutzt, vgl. Kap. 5.

Eigenschaften der Eigenformen

Übungsbeispiel:



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_B + c & -c \\ -c & k_B + c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe:

- Berechnen Sie die modalen Massen μ_r und modalen Steifigkeiten γ_r
- Geben Sie $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\gamma}$ an
- Verifizieren Sie die Eigenfrequenzen mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten

Eigenschaften der Eigenformen

Mögliche Normierungen der Eigenformen

1.) Beliebige Komponente von $\mathbf{X}_r$ auf 1 setzen
2.) Maximalkomponente von $\mathbf{X}_r$ auf 1 setzen
3.) Betrag von $\mathbf{X}_r$ auf 1 normieren
4.) $\mathbf{X}_r$ auf modale Masse $\mu_r = 1$ normieren (z.B. in ADINA)

$\overline{\mathbf{X}}_r$ sei die auf modale Masse $\mu_r = 1$ normierte Eigenform, dann folgt aus

$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_r = \mu_r = \sqrt{\mu_r} \cdot \sqrt{\mu_r}$$

$$\frac{\mathbf{X}_r^T}{\sqrt{\mu_r}} \mathbf{M} \frac{\mathbf{X}_r}{\sqrt{\mu_r}} = 1 \qquad \Rightarrow \overline{\mathbf{X}}_r = \frac{\mathbf{X}_r}{\sqrt{\mu_r}} \tag{29}$$

Bezüglich $\mathbf{K}$ folgt dann:

$$\overline{\mathbf{X}}_r^T \mathbf{K} \overline{\mathbf{X}}_r = \frac{\mathbf{X}_r^T}{\sqrt{\mu_r}} \mathbf{K} \frac{\mathbf{X}_r}{\sqrt{\mu_r}} = \frac{\gamma_r}{\mu_r} = \omega_r^2 \tag{30}$$

Das gedämpfte Eigenschwingungssystem

Bewegungsgleichung der FEM (gedämpft):

$$\mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{31}$$

Der komplexwertige Ansatz

$$\mathbf{U}(t) = \boldsymbol{\psi} \cdot e^{pt} \tag{32}$$

mit $p \in \mathbb{C}$ und der komplexwertigen Amplitude $\boldsymbol{\psi}$ führt auf komplexwertige Eigenwerte und Eigenformen, die sich bei schwach gedämpften Systemen nur geringfügig von den Werten des ungedämpften Systems unterscheiden.

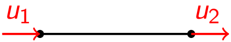
Für eine weitergehende Betrachtung wird auf die Literatur verwiesen.

Modale Beteiligungsfaktoren und effektive Massen

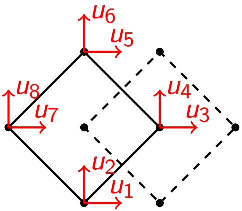
Modale Beteiligungsfaktoren (engl. „Modal Participation Factor“) geben den Anteil der Gesamtmasse der Struktur an, der an der zugehörigen Eigenform i pro Raumrichtung k beteiligt ist:

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{\mu_i} \mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{d}_k \qquad [-] \tag{33}$$

Dabei ist $\mathbf{d}_k$ eine Starrkörperverschiebung in Richtung k ($k = 1, 2$ oder 3), Beispiele:



$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modale Beteiligungsfaktoren und effektive Massen

Die effektive Masse ist ein Maß für die "Signifikanz" einer Eigenform i bezüglich der Raumrichtung k:

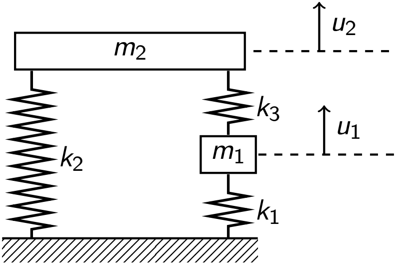
$$m_{ik}^{eff} = \mu_i \cdot \Gamma_{ik}^2 \qquad [kg] \tag{34}$$

Anmerkungen

- Die effektive Masse enthält im Gegensatz zur modalen Masse μ_i eine Richtungsinformation
- Eigenformen mit hoher effektiver Masse können leichter angeregt werden
- Die Kenntnis der effektiven Massen ist wichtig zur Lösung der Bewegungsgleichung im Zeitbereich (z.B. bei Modaler Superposition)
- Die Summe aller effektiven Massen entspricht der Gesamtmasse der Struktur: $\sum_i m_{ik}^{eff} = m$ (pro Raumrichtung k)

Modale Beteiligungsfaktoren und effektive Massen

Übungsbeispiel:



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

Systemgrößen:

$$m_1 = 2\,kg, \;\; m_2 = 1\,kg$$

$$k_1 = 1000\,\frac{N}{m}, \;\; k_2 = 2000\,\frac{N}{m}, \;\; k_3 = 3000\,\frac{N}{m}$$

Modale Beteiligungsfaktoren und effektive Massen

Aufgabe:

- Berechnen Sie die Eigenfrequenzen f_i und die Eigenformen $\mathbf{X}_i$
- Berechnen Sie die modalen Massen μ_i
- Berechnen Sie die modalen Beteiligungsfaktoren Γ_{ik}
- Berechnen Sie die effektiven Massen m_{ik}^{eff}
- Überprüfen Sie, dass $\sum_i m_{ik}^{eff} = m$

MAC-Werte

MAC-Werte werden zum Vergleich zweier Eigenformen verwendet:

$$MAC = \frac{|\mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_j|^2}{|\mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_i| \cdot |\mathbf{X}_j^T \mathbf{X}_j|} = \frac{\text{Prüfung}}{\text{Normierung}} \tag{35}$$

$MAC = 1 \rightarrow$ beide Vektoren sind identisch

$MAC = 0 \rightarrow$ beide Vektoren sind orthogonal

Anmerkungen

- Verwendung z.B. beim Vergleich zwischen experimentell ermittelten und berechneten Eigenformen
- MAC $\geq 0{,}8 \rightarrow$ gute Übereinstimmung
- Nachteil: Knotenanzahl und Orientierung müssen gleich sein
- „Auto-MAC“ = Einheitsmatrix

MAC-Werte

Anwendungsbeispiel "Model Updating":

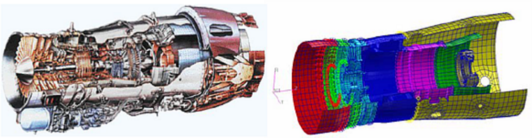


Figure 1: Aero-engine with accessories and WEM w/o accessories (ca. 105.000 degrees of freedom)

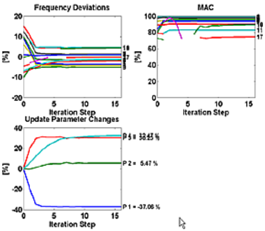


Figure 5: Track plots of updating the CCOC model parameters

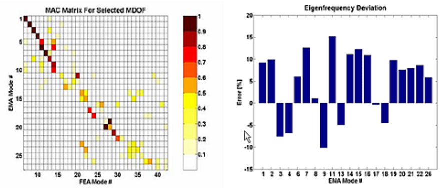


Figure 3: Correlation results of test data and analytical data of the initial model after remodeling

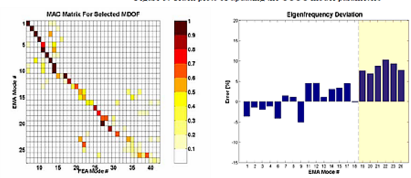
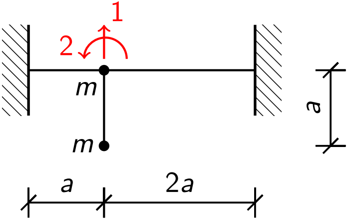


Figure 6: MAC matrix and frequency deviations after update

Hausaufgabe

Gegeben ist ein System mit 2 Freiheitsgraden:



Systemgrößen:

$$a = 1,0\, m$$
$$m = 10\, kg$$
$$EI = 10000\, Nm^2$$

Die zugehörigen Systemmatrizen lauten:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{a^3} \cdot \begin{bmatrix} 13,5 & -4,5a \\ -4,5a & 6a^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \cdot a^2 \end{bmatrix}$$

Hausaufgabe

Aufgabe:

- Nehmen Sie eine Schätzung der ersten Eigenform vor und berechnen Sie aus dem Rayleigh-Quotienten eine Näherung für die erste Eigenfrequenz.
- Berechnen Sie die zwei Eigenfrequenzen des Tragwerks.
- Berechnen Sie die zugehörigen Eigenformen und skizzieren Sie diese.
- Berechnen Sie die modalen Steifigkeiten und modalen Massen.