

3 Geometrische Nichtlinearität

In der elementaren technischen Mechanik wird eine lineare Abhängigkeit der Dehnungen ε von den Verschiebungen \mathbf{u} vorausgesetzt. Der Zusammenhang $\varepsilon(\mathbf{u})$ wird als Kinematik der Verformung bezeichnet. Bei großen Verschiebungen führt die lineare Kinematik zu unrealistischen Vorhersagen für die tatsächlichen Dehnungen und Spannungen. Eine nichtlineare Kinematik der Verformung wird auch als *geometrische Nichtlinearität* bezeichnet. In der FE-Berechnung mit sogenannten nichtlinearen Solvern kann die geometrische Nichtlinearität optional zugeschaltet werden kann. Die geometrische Nichtlinearität führt immer - auch bei physikalischer Linearität - zu einer nichtlinearen Kinetik, d.h. einem nichtlinearen Zusammenhang $\sigma(\mathbf{u})$ zwischen den wahren Spannungen und den Verschiebungen. Da die wahren Spannungen im verformten Bauteil gemessen werden ist bei geometrisch nichtlinearer Betrachtung das Kräftegleichgewicht grundsätzlich im verformten Zustand aufzustellen (Theorie 2. Ordnung).

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen kinematischen Beziehungen für das dreidimensionale Kontinuum, d.h. für Festkörper mit homogenem Materialverhalten, zusammengestellt. Im ersten Unterabschnitt wird die analytische Beschreibung der Punktbewegung bezüglich körper- und raumfesten Koordinatensysteme erläutert. Der folgenden Unterabschnitte 2 und 3 sind der nichtlinearen Kinematik bzw. Kinetik gewidmet.

3.1 Koordinatensysteme

Grundsätzlich kann die Bewegung der materiellen Punkte des Kontinuums in raumfesten oder körperfesten Koordinaten beschrieben werden. Je nach Bezugssystem spricht man von der Euler'schen bzw. Lagrange'schen Beschreibung der Punktbewegung (s. Unterabschnitt 1). In der Festkörpermechanik werden i.d.R. die körperfesten Koordinaten verwendet. Die Lagrange'schen Koordinaten der materiellen Punkte ändern sich bei Verformung des Festkörpers nicht. Die Verformung des Körpers wird nicht an den Punktkoordinaten sondern an den Basisvektoren des mitbewegten lokalen Bezugssystems abgelesen (Unterabschnitt 2).

3.1.1 Eulersche und Lagrange'sche Beschreibung der Punktbewegung

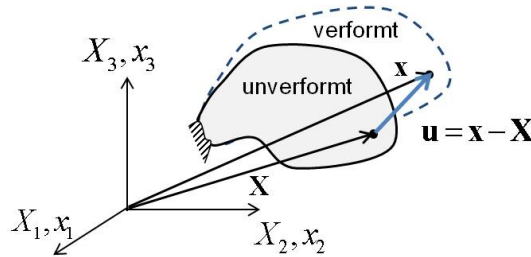


Abbildung 1: Unverformte und verformte Konfiguration, Verschiebungsvektor

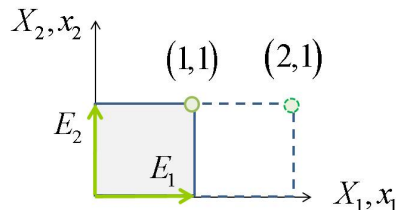
Wir betrachten Festkörper in verschiedenen Stadien der Verformung, die jeweils verschiedenen Zeitpunkten $t \geq 0$ zugeordnet werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Körper in der *unverformten* Konfiguration. Ein beliebiger materieller Punkt des Körpers hat in einem ortsfesten Euklid'schen System die Koordinaten $\mathbf{X} = \mathbf{x}(0)$ in der unverformten Lage des Körpers und $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ in einer verformten Konfiguration, wie in Abb. 1 skizziert. Die beiden Konfigurationen werden auch als *Ausgangs-* und *Momentankonfiguration* bezeichnet. Die *Verschiebung* des Punktes aus seiner Ausgangslage ist definiert als Vektor $\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{x} - \mathbf{X}$. Analog können

Verschiebungsvektoren auch zwischen zwei Momentankonfigurationen berechnet werden.

In der *Lagrange'schen* Beschreibung der Bewegung behält jeder Punkt seine Ausgangskordinaten \mathbf{X} über die gesamte Zeitdauer der Bewegung, obwohl er unterschiedliche Positionen $\mathbf{x}(t)$ im ortsfesten Koordinatensystem annimmt. Das bedeutet in unten stehendem Beispiel, daß die rechte obere Ecke des Quadrates zu jedem Zeitpunkt die Koordinaten $X_1 = X_2 = 1$ hat. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Eckpunkt im Punkt $x_1(0) = x_2(0) = 1$ des raumfesten Systems, in der verformten Lage zum Zeitpunkt $t = 1$ hat er die raumfesten Koordinaten $x_1(1) = 2, x_2(1) = 1$. Diese Beschreibung wird für Festkörper bevorzugt, da die Punkte ihre *materiellen Koordinaten* behalten. Die Lagrange'sche Beschreibung kann als Abbildung $\phi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ aufgefaßt werden.

In der Strömungsmechanik wird hingegen der Fluß des Kontinuums an fixierten ortsfesten Punkte beobachtet. Die Bewegung wird durch die materiellen Koordinaten des Punktes charakterisiert, der sich zu einem Zeitpunkt $t > 0$ am gewählten ortsfesten Punkt befindet. Die Euler'schen Beschreibung definiert also umgekehrt eine Abbildung $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}$.

Beispiel 1. Ein Quadrat ($t = 0$) wird um den Faktor 2 in 1-Richtung gestreckt ($t = 1$). Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die rechte obere Ecke im (raumfesten) Punkt $x_1 = x_2 = 1$. Die materiellen Koordinaten sind dementsprechend $X_1 = x_1(0) = 1$ und $X_2 = x_2(0) = 1$. Diese Koordinaten bleiben bei der Verformung konstant, während sich die raumfesten Koordinaten ändern. Einzelheiten zeigt die folgende Tabelle:

	Euler Notation	Lagrange Notation
	$X_1(1, 1, t = 0) = 1$ $X_1(1, 1, t = 1) = \frac{1}{2}$ $X_1(2, 1, t = 1) = 1$	$x_1(1, 1, t = 0) = 1$ $x_1(1, 1, t = 1) = 2$ $x_1\left(\frac{1}{2}, 1, t = 1\right) = 1$

3.1.2 Basisvektoren

Die Basisvektoren $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ des raumfesten Systems bleiben zeitlich und örtlich konstant, während die Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ des materiellen Systems an jedem Punkt \mathbf{x} des Körpers sowohl in Richtung als auch Betrag variabel sind. Die Position $\mathbf{x}(t)$ eines beliebigen Punktes kann alternativ beschrieben werden als

$$\mathbf{x}(t) = X_i \mathbf{e}_i(t) = x_i(t) \mathbf{E}_i.$$

Für die lokale Deformation, gemessen als Abstandsvektor $d\mathbf{x}$ zweier benachbarter Punkte, folgt daraus die Regel

$$d\mathbf{x}(t) = dX_i \mathbf{e}_i(t) = dx_i(t) \mathbf{E}_i.$$

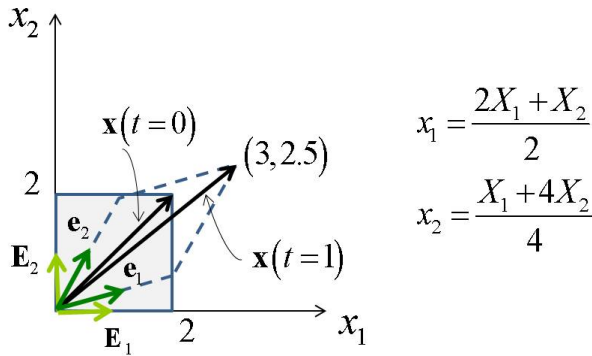
Wendet man in der zweiten obigen Gleichung die Kettenregel der Differentialrechnung an, z.B. $dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 = \frac{\partial x_1}{\partial X_j} dX_j$ so ergibt sich durch Vergleich mit der ersten Gleichung die Basistransformation

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \mathbf{E}_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Für die kanonische Basis $\mathbf{E}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{E}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$, $\mathbf{E}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ folgt

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e}_j = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{E}_i. \quad (3.1)$$

Beispiel 2. Ein Quadrat ($t = 0$) wird zu einem Drachenviereck gestreckt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die rechte obere Ecke im (raumfesten) Punkt $x_1 = x_2 = 2$, bei $t = 1$ liegt sie im Punkt $x_1 = 3$, $x_2 = 2.5$.



Die Lagrange-Koordinaten dieses Punktes lauten weiterhin $X_1 = X_2 = 2$. Die Basis-Koordinaten des Vierecks werden gedreht und gestreckt auf die raumfeste Darstellung

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

3.2 Nichtlineare Kinematik

In der Kinematik deformierbarer Körper wird grundsätzlich zwischen Starrkörperbewegung und Verformung unterschieden. Bei einer Starrkörperbewegung bleibt per Definition der Abstand $|d\mathbf{X}|$ zwischen zwei beliebigen materiellen Punkten des Körpers *konstant*. Die Verformung eines Körpers wird also durch die *Änderung des Abstandes zweier benachbarter Punkte* beschrieben, wie in Abb. 2) skizziert.

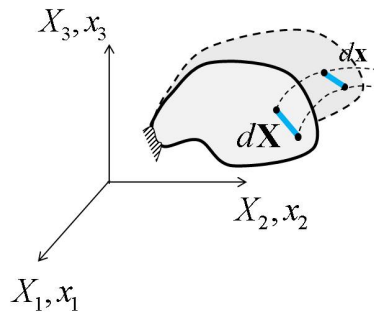


Abbildung 2: Längenänderung einer differentiellen Strecke bei Verformung

Die absolute Längenänderung wird durch den Deformationsgradienten (Unterabschnitt 1) charakterisiert, während die relative Längenänderung durch verschiedene Dehnungsmaße (Un-

terabschnitt 2) beschrieben wird. In weiteren Unterabschnitten werden die *Flächen- und Volumenänderung* bei großen Verformungen und die inkrementelle und zeitliche Variation der Tensoren betrachtet. Diese Zusammenhänge bilden eine wesentliche Voraussetzung für die nichtlineare Kinetik und die Aufstellung des Gleichgewichts am verformten Körper.

3.2.1 Deformationsgradient und Verschiebungsgradient

Der Deformationsgradient

$$\underline{\underline{F}} = \nabla \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

beschreibt die Transformation einer infinitesimalen Strecke zwischen zwei unterschiedlichen Verformungszuständen. Nach der Kettenregel der Differentialrechnung gilt die grundlegende Beziehung

$$d\mathbf{x} = \underline{\underline{F}} d\mathbf{X}. \quad (3.3)$$

Der Deformationsgradient hat die dyadischen Darstellung

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j. \quad (3.4)$$

Ein Vergleich mit Gleichung (3.1) zeigt daß sich der Deformationstensor aus den spaltenweise eingetragenen Basisvektoren der Lagrange'schen Notation zusammensetzt: $\underline{\underline{F}} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$. Die Komponenten des Tensors sind die Skalarprodukte der Basisvektoren $F_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_j$. Der Deformationstensor wird *Zweifeldtensor* (two-point tensor) genannt, da sich seine Komponenten nach obiger Vorschrift sowohl auf die Ausgangs- als auch die Momentan-Konfiguration beziehen.

Analog zu $\underline{\underline{F}}$ ist der *Verschiebungsgradient* definiert als

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j, \quad (3.5)$$

Offenbar gilt

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{I}} = [D_{ij} + \delta_{ij}] \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j.$$

Bemerkung: Im einachsigen Dehnungszustand (Zugstab) gilt $d\mathbf{x} = \lambda d\mathbf{X}$ wobei $\lambda = l/L$ die Streckung des Stabes bezeichnet. Formal wird also bei zwei- bzw. dreidimensionaler Betrachtung die Streckung durch den Deformationstensor ersetzt. Dieser enthält sowohl die Streckungen als auch die Winkelverzerrungen am Flächen- bzw. Volumenelement.

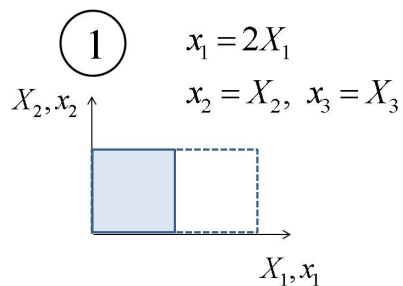
Der inverse Zusammenhang zwischen Momentan- und Ausgangskonfiguration wird beschrieben durch

$$d\mathbf{X} = \underline{\underline{F}}^{-1} d\mathbf{x}$$

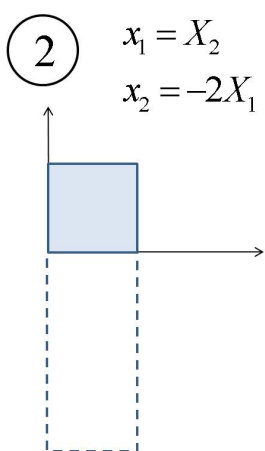
mit $\underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{e}_j$.

Beispiele 3.

1. Stretch

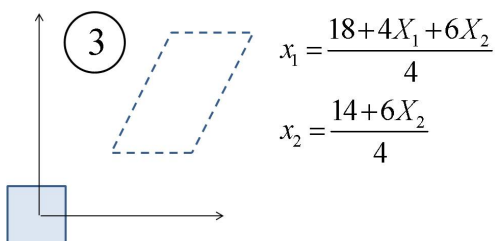


2. Stretch and Rotation

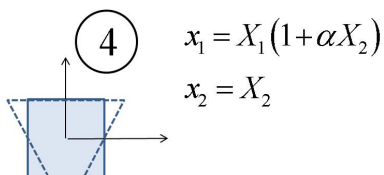


Bemerkung: Das Ergebnis des 2. Beispiels erhält man auch aus der Verkettung $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}$ der Rotation $\underline{\underline{R}}$ und der Streckung $\underline{\underline{U}}$ ($= \underline{\underline{F}}$ des vorigen Beispiels).

3. Stretch and Shear



4. Hourglassing



3.2.2 Cauchy-Green Tensor und Strecktensor

Die Streckenlängen dl^2 bzw. dL^2 in der Momentan- bzw. Ausgangskonfiguration können jeweils zueinander in Beziehung gesetzt werden über

$$dl^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{X}^T \underline{\underline{C}} d\mathbf{X} \quad (3.6)$$

mit dem *rechten Cauchy-Green* Tensor

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \quad (3.7)$$

bzw.

$$dL^2 = d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\mathbf{x}^T \underline{\underline{b}}^{-1} d\mathbf{x}$$

mit dem *linken Cauchy-Green* Tensor (*Finger* Tensor)

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T. \quad (3.8)$$

Der Green Tensor $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$ ist symmetrisch und positiv definit (sofern entartete Deformationen mit $\det \underline{\underline{F}} = 0$ ausgeschlossen werden). Folglich hat er positive reelle Eigenwerte, reelle Eigenvektoren und die spektrale Zerlegung

$$\underline{\underline{C}} = N \Lambda^2 N^T$$

mit einer orthogonalen Matrix der Eigenvektoren N und der Diagonalmatrix der Eigenwerte

$$\Lambda^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \lambda_3^2 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Definition der Matrix

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Wie in Abb. 3 gezeigt, sind die Werte λ_α geometrisch interpretierbar als die *Streckungen* eines in den *Haupttrichtungen des räumlichen Dehnungszustandes* herausgeschnittenen Quaders.

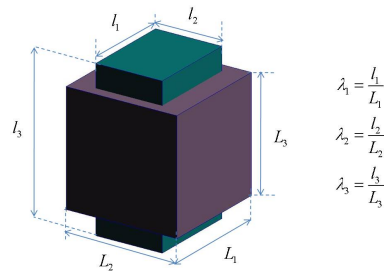


Abbildung 3: Streckungen eines kubischen Volumen-Elements

Der Tensor $\underline{\underline{U}} = N \Lambda N^T$ heißt *Strecktensor*. Offenbar ist $\underline{\underline{U}}$ symmetrisch und es gilt

$$\underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{C}}.$$

Bezeichnet man mit $\mathbf{N}_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$ die Eigenwerte des Green Tensors $\underline{\underline{C}}$ so kann man die spektrale Zerlegung der Matrizen $\underline{\underline{C}}$ und $\underline{\underline{U}}$ auch in der Form

$$\underline{\underline{C}} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2 \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha}; \quad \underline{\underline{U}} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha}$$

schreiben. Die Werte λ_{α} können als *Streckungen* eines in Richtung der Hauptachsen herausgeschnittenen Volumen-Quaders interpretiert werden. Für den Deformationstensor gilt entsprechend

$$\underline{\underline{F}} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha},$$

mit $\mathbf{n}_{\alpha} = \underline{\underline{R}} \mathbf{N}_{\alpha}$, was wiederum dem Zweifeldcharakter des Tensors entspricht.

Beispiel 4. In Abb. 4 ist die Verformung eines Einheitsquadrats zu einem Parallelogramm skizzziert. Im linken Bild a) sind die Hauptrichtungen $\mathbf{N}_{\alpha}, \mathbf{n}_{\alpha}$ der Dehnungstensoren in der unverformten und der verformten Konfiguration eingetragen. Aus Bild b) ist ersichtlich, daß ein *in den Hauptrichtungen* der unverformten Konfiguration herausgeschnittenes Einheitsquadrat bei der Verformung des Flächenstücks *in die Hauptrichtungen* der verformten Konfiguration gedreht wird. Dabei treten *keine Winkelverzerrungen* auf. Die Streckungen des Flächenstücks entsprechen genau den Eigenwerten des Strecktensors.

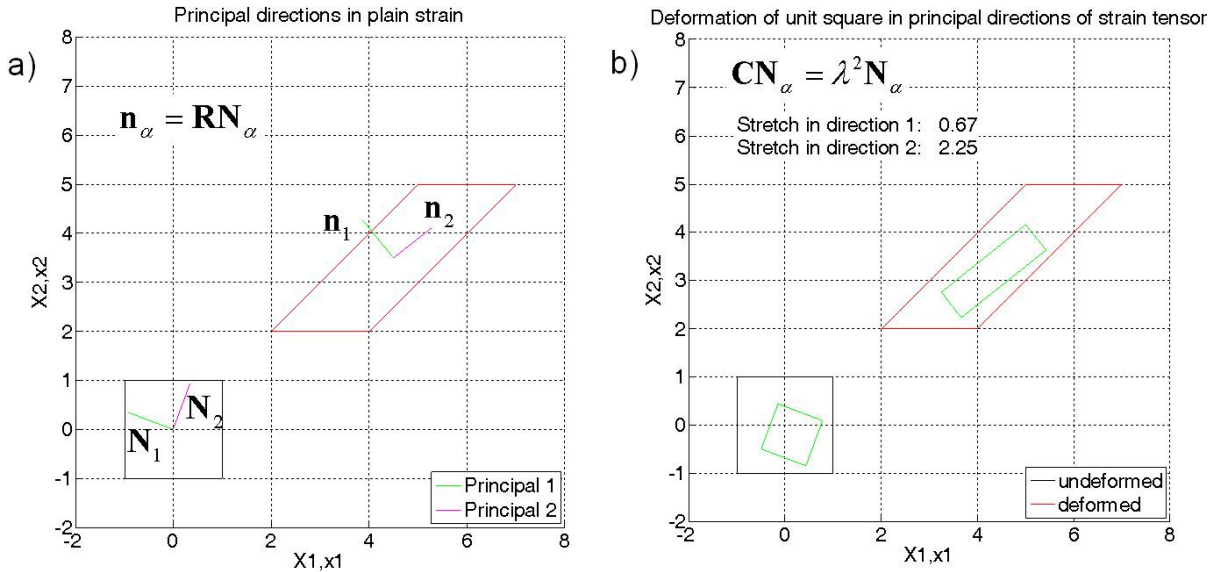


Abbildung 4: Verformung eines in den Hauptrichtungen herausgeschnittenen Quadrats

3.2.3 Polare Zerlegung des Deformationsgradienten

Mit der Definition $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{U}}^{-1}$ erhält man die *polare Zerlegung*

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} \quad (3.9)$$

des Deformationsgradienten. Der orthogonale Tensor $\underline{\underline{R}}$ stellt eine Starrkörper-Rotation dar. Die polare Zerlegung bedeutet somit, daß jede Deformation eines Volumenelements als Verkettung

aus Starrkörperrotation und Formänderung darstellbar ist. Die Formänderung umfaßt i.A. sowohl eine Volumenänderung als eine Winkelverzerrung. Die Hauptrichtungen des Cauchy-Tensors stellen den Sonderfall dar daß ein, entlang dieser Richtungen herausgeschnittener, Quader bei der Verformung des Starrkörpers nur rotiert und gestreckt aber nicht winkelverzerrt wird.

Der Tensor $\underline{\underline{U}}$ heißt *rechter Strecktensor*. Analog dazu kann ein linker Strecktensor $\underline{\underline{V}}$ definiert werden über

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{R}}.$$

Es gilt also $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{F}}$ und $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{R}}^T$. Als unsymmetrischer Tensor 2. Ordnung hat der Deformationsgradient $\underline{\underline{F}}$ *neun* unabhängige Komponenten. Der Strecktensor $\underline{\underline{U}}$ ist symmetrisch und besitzt daher *sechs* unabhängige Komponenten (drei Streckungen und drei Winkelverzerrungen). Der orthogonale Tensor $\underline{\underline{R}}$ enthält *drei* unabhängige Komponenten (entsprechend den Raumwinkeln der Starrkörper-Rotationen). Den unterschiedlichen Definitionen $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{R}}$ der polaren Zerlegung entsprechen unterschiedliche Abfolgen von Rotation und Streckung; vgl. Abb. 5.

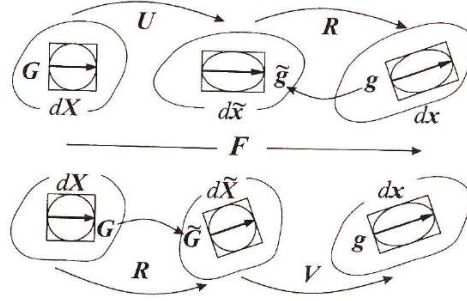


Abbildung 5: Polare Zerlegung (aus [4])

3.2.4 Dehnungstensoren

Die technische Dehnung eines Linieninkrements dL ist definiert als $\varepsilon = (dl - dL)/dL$. In der nichtlinearen Kinematik werden unterschiedliche Dehnungsmaße verwendet, die sich bei kleinen Verschiebungen jeweils auf die technische Dehnung reduzieren. Die gebräuchlichsten nichtlinearen Definitionen sind die Green-Lagrange Dehnung

$$\varepsilon_G = \frac{dl^2 - dL^2}{2dL^2}$$

und die logarithmische Dehnung (Hencky-Dehnung)

$$\varepsilon_H = \ln \frac{dl}{dL}.$$

Green'sche Dehnung: Die Green-Lagrange'sche Dehnung $\underline{\underline{E}}_G$ (oder einfach $\underline{\underline{E}}$) wird definiert über die Beziehung

$$2d\mathbf{X}^T \underline{\underline{E}} d\mathbf{X} = dl^2 - dL^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}. \quad (3.10)$$

Rechnet man das Längenquadrat dl^2 mittels (3.6) auf die unverformte Konfiguration zurück, so erhält man

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_G = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}). \quad (3.11)$$

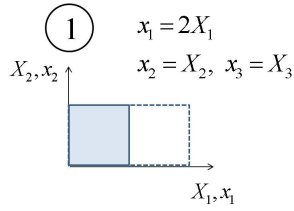
Der Tensor $\underline{\underline{E}}$ bezieht sich auf die unverformte Konfiguration d.h. es gilt $\underline{\underline{E}} = E_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j$ mit $2E_{ij} = C_{ij} - \delta_{ij}$. Rechnet man umgekehrt das unverformte auf das verformten Streckenquadrat um, so erhält man den *Green-Almansi* Dehnungstensor

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1}) \quad (3.12)$$

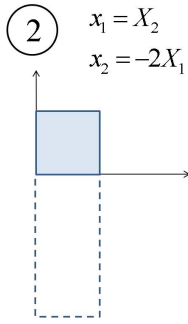
mit dem Finger Tensor $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T$ aus (3.8). Dieser Tensor erfüllt die Definition $2d\mathbf{x}^T \underline{\underline{e}} d\mathbf{x} = dl^2 - dL^2$.

Beispiele 5. (Dehnung)

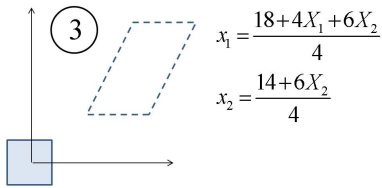
1. Stretch



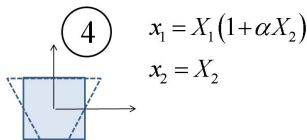
2. Stretch and Rotation



3. Stretch and Shear



4. Hourglassing



Der Green-Lagrange Dehnungstensor kann auch über den Verschiebungstensor dargestellt werden,

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T + \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}}) . \quad (3.13)$$

Die entsprechende Beziehung für die Komponenten lautet

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i}.$$

Verallgemeinerte und logarithmische Dehnung: Der Green-Lagrange Dehnungstensor kann in den Hauptrichtungen des Cauchy Tensors dargestellt werden als

$$\underline{\underline{E}}_G = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} (\lambda_{\alpha}^2 - 1) \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha}$$

Dieser Zusammenhang kann verallgemeinert werden auf den *Dehnungstensor n. Ordnung*

$$\underline{\underline{E}}^{(n)} = \sum_{\alpha} \frac{1}{n} (\lambda_{\alpha}^n - 1) \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha}.$$

Für $n = 2$ ergibt sich der Green-Lagrange Tensor. Für $n = 0$ folgt aus dem Grenzwert

$$\ln \lambda_{\alpha} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (\lambda_{\alpha}^n - 1).$$

der Hencky Tensor für die logarithmische Dehnung

$$\underline{\underline{E}}^{(0)} = \underline{\underline{E}}_H = \sum_{\alpha} \ln \lambda_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha}.$$

Aus dieser Definition in den Hauptrichtungen kann der Hencky Tensor für beliebige Schnitttrichtungen durch Rotation, entsprechend den Regeln der Tensorrechnung für Tensoren 2. Stufe, berechnet werden.

3.2.5 Volumen- und Flächenänderung

Das statische Gleichgewicht im Festkörper wird für die Spannungen und Volumenkräfte in der verformten Konfiguration aufgestellt. Hierzu sind Formeln für die Flächen- und Volumenbestimmung erforderlich. Wir betrachten die Verformung differentieller Volumen- und Flächenelemente wie in Abb. 6 skizziert.

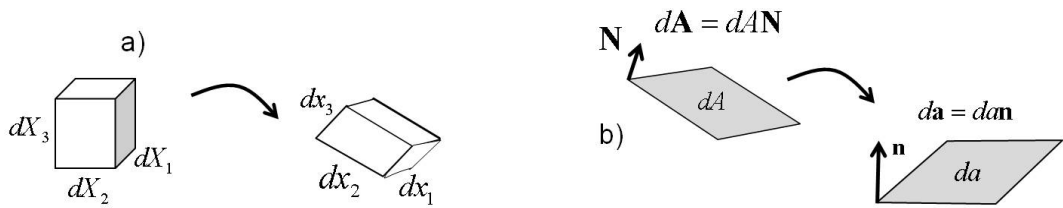


Abbildung 6: a) Verformung eines Volumenelements und b) Definition des Flächenvektors

Die Volumeninhalte dV und dv der in Abb. 6a) skizzierten Elemente können als Spatprodukte der Kantenvektoren berechnet werden.

$$dV = d\mathbf{X}_1 \cdot (d\mathbf{X}_2 \times d\mathbf{X}_3); \quad dv = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3)$$

mit $d\mathbf{x}_1 = dx_1 \mathbf{E}_1 = dX_1 \mathbf{e}_1$, $d\mathbf{X}_1 = dX_1 \mathbf{E}_1$ usw. Durch Einsetzen erhält man

$$dV = dX_1 dX_2 dX_3 \underbrace{[\mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_3)]}_{=1}, \quad dv = dX_1 dX_2 dX_3 \underbrace{[\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)]}_{=\det \underline{\underline{F}}}$$

und somit das Volumenverhältnis

$$J = \frac{dv}{dV} = \det \underline{\underline{F}}. \quad (3.14)$$

Da die Masse des Volumenelements bei der Verformung erhalten bleiben muss, folgt für die Umrechnung der Dichten aus $dm = \rho_0 dV = \rho dv$ die Beziehung

$$\rho = \rho_0 J^{-1}. \quad (3.15)$$

Aus (3.14) ergibt sich die Bedingung $\det \underline{\underline{F}} = 1$ für den Volumenerhalt einer Deformation. Im allgemeinen Fall beschreibt der *isochore* Deformationstensor

$$\hat{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}} J^{-\frac{1}{3}} \quad (3.16)$$

den volumenerhaltenden Anteil der Verformung.

In Abb. 6b) ist die Definition des Flächenvektors $d\mathbf{A} = dA \mathbf{N}$ als Produkt aus dem Flächeninhalt dA und dem zum Flächenelement orthogonalen Einheitsvektor \mathbf{N} bezeichnet. In verformter Konfiguration gilt analog $d\mathbf{a} = da \mathbf{n}$. Betrachtet man differentielle Volumenelemente $dV = d\mathbf{L} \cdot d\mathbf{A}$ bzw. $dv = d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{a}$, wobei $d\mathbf{L}$ bzw. $d\mathbf{l}$ beliebig aus der Fläche heraus orientierte Kantenvektoren bezeichnen, so erhält man mit $d\mathbf{l} = \underline{\underline{F}} d\mathbf{L}$ und $dv = J dV$ die Gleichungskette

$$dv = d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{a} = (\underline{\underline{F}} d\mathbf{L}) \cdot d\mathbf{a} = (\underline{\underline{F}} d\mathbf{L})^T d\mathbf{a} = d\mathbf{L}^T (\underline{\underline{F}}^T d\mathbf{a}) = J dV = J d\mathbf{L} \cdot d\mathbf{A} = d\mathbf{L}^T (J d\mathbf{A})$$

woraus folgt daß

$$d\mathbf{a} = J \underline{\underline{F}}^{-T} d\mathbf{A}. \quad (3.17)$$

3.2.6 Inkrementelle und zeitliche Variation

In der nichtlinearen FE-Modellierung werden virtuelle oder reale Verschiebungsinkremente $\delta d\mathbf{u}$ bzw. $d\mathbf{u}$ verwendet. Aus den Verschiebungen werden über die kinematischen Beziehungen und die Materialgesetze inkrementelle Dehnungen und Spannungen berechnet. Für die Berücksichtigung zeitabhängigen Materialverhaltens sind auch die zeitlichen Ableitungen der Grössen (auch Raten genannt) von Interesse. von Interesse.

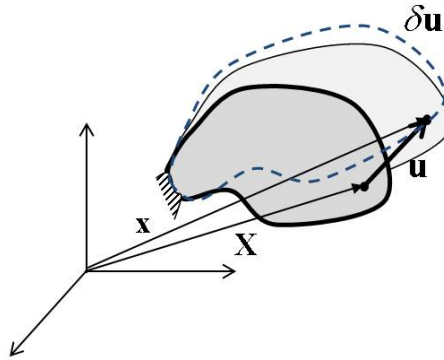


Abbildung 7: Inkrementelle Verschiebung aus der verformten Konfiguration

Die Inkremente $\delta d\mathbf{u}$ bzw. $d\mathbf{u}$ sind per Definition *kleine* Verschiebungen aus der verformten Konfiguration (vgl. Abb 7). Die Dehnungsinkremente können daher als Ingenieurdehnungen, ausgehend von den Koordinaten \mathbf{x} , berechnet werden

$$\delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\delta u_j)}{\partial x_i} \right). \quad (3.18)$$

Die Green-Lagrange Dehnungen werden formal durch Variation der Gleichung (3.13) inkrementiert. Man erhält

$$2\delta\underline{\underline{E}}_G = \delta\underline{\underline{D}} + \delta\underline{\underline{D}}^T + \delta\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T \delta\underline{\underline{D}}$$

also

$$\delta\underline{\underline{E}}_G = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \delta\underline{\underline{D}} + \delta\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{F}}) . \quad (3.19)$$

In Komponentenschreibweise lautet diese Gleichung

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial (\delta u_k)}{\partial X_j} + y \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \frac{\partial (\delta u_k)}{\partial X_i} \right) . \quad (3.20)$$

Durch Anwendung der Kettenregel, z.B.

$$\frac{\partial (\delta u_k)}{\partial X_j} = \frac{\partial (\delta u_k)}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_j} ,$$

ergibt sich der Zusammenhang

$$\delta\underline{\underline{E}}_G = \underline{\underline{F}}^T \delta\underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{F}} . \quad (3.21)$$

Geschwindigkeitsgradient und Deformationsrate: Die zeitliche Ableitung des Deformationsgradienten ist

$$\dot{\underline{\underline{F}}} = \left[\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_j} \right] = \left[\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right] .$$

Diese Gleichung kann geschrieben werden als

$$\dot{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{l}} \underline{\underline{F}} \quad (3.22)$$

mit dem *Geschwindigkeitsgradienten*

$$\underline{\underline{l}} = \left[\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \right] . \quad (3.23)$$

Bemerkung: Im Geschwindigkeitsgradienten werden die Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ nach den Koordinaten der *verformten* Konfiguration abgeleitet.

Die Deformationsrate (Dehngeschwindigkeit) $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ ist definiert als zeitliche Ableitung der Dehnungen in der verformten Konfiguration,

$$\underline{\underline{d}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) .$$

Wegen $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{X} + \mathbf{u})^\cdot = \dot{\mathbf{u}}$ gilt offenbar

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{l}} + \underline{\underline{l}}^T) . \quad (3.24)$$

Die Deformationsrate kann also als symmetrischer Anteil des Geschwindigkeitstensors in der Zerlegung

$$\underline{\underline{l}} = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{w}}$$

interpretiert werden. Der antimetrische Tensor

$$\underline{\underline{w}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{l}} - \underline{\underline{l}}^T) \quad (3.25)$$

heißt *Spintensor*.

Leitet man die Identität $\underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$ nach der Zeit ab, so ergeben sich nach Inversion von (3.22) die Gleichungen

$$\underline{\underline{l}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1} = -\underline{\underline{F}} \dot{\underline{\underline{F}}}^{-1} . \quad (3.26)$$

3.3 Nichtlineare Kinetik

Aus der linearen Elastizitätslehre ist die Definition des Cauchy'schen Spannungstensors bekannt. Dieser bezieht sich grundsätzlich auf die verformte Konfiguration. Bei kleinen Verschiebungen kann die Definition direkt auf die unverformte Ausgangslage bezogen werden. Im Fall großer Verschiebungen sind weitere Umrechnungen unter Verwendung der nichtlinearen kinematischen Beziehungen erforderlich, die zur Definition der Piola-Kirchhoff Spannungstensoren führen. Die Komponenten dieser Tensoren hängen auch bei linearem Materialverhalten nichtlinear von den Verschiebungen ab.

3.3.1 Cauchy Spannungstensor



Abbildung 8: Schnitt durch die verformte Konfiguration, Spannungs- und Normalenvektor

Wir betrachten einen Körper unter Einwirkung äußerer Kräfte in der verformten Konfiguration. An einer gedachten Schnittebene mit der Schnitt-Normalen \mathbf{n} und der Fläche da wirken kontinuierlich verteilte Schnittkräfte pro Flächeneinheit $\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$ derart daß die Schnittkraft $\mathbf{f}_a = \mathbf{t}_n da$ im statischen Gleichgewicht mit den äußeren Kräften steht. In einem beliebigen Punkt \mathbf{x} der Schnittfläche ist der *Cauchy Spannungstensor* $\boldsymbol{\sigma}$ definiert als lineare Abbildung

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t}_n . \quad (3.27)$$

Durch drei Schnitte orthogonal zu den Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ erhält man den Spannungstensor in der allgemeinen Matrix-Darstellung

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} .$$

Die Diagonal-Elemente stellen die senkrecht auf der Schnittfläche stehenden Komponenten der Spannungsvektoren dar und heißen Normalspannungen σ . Die Nebendiagonal-Elemente sind tangentielle Komponenten und heißen Schubspannungen τ . Aus dem Momentengleichgewicht an einem infinitesimalen Quader um den Punkt \mathbf{x} folgt die *Symmetrie* des Cauchy Tensors.

Durch Multiplikation von (3.27) mit der Schnittfläche da ergibt sich

$$d\mathbf{f}_a = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.28)$$

Die Cauchy Spannungen sind die *wahren physikalischen* Spannungen, da sie die am Punkt wirkende Kraft auf die wahre (verformte) Schnittfläche beziehen. Durch Lösung des Eigenwertproblems

$$[\boldsymbol{\sigma} - \lambda \underline{I}] \mathbf{n}$$

können an jedem Punkt des Körpers die *Hauptwerte und Hauptrichtungen* des Spannungstensors (in der verformten Konfiguration) berechnet werden. Mit den Bezeichnungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ für die Hauptwerte (Hauptspannungen) und $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ ergibt sich die dyadische Darstellung

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} .$$

3.3.2 Piola-Kirchhoff Spannungstensoren

Der 1. Piola-Kirchhoff (1. PK) Tensor ergibt sich aus dem Bezug der Schnittkraft auf die *unverformte* Schnittfläche

$$d\mathbf{f}_a = \mathbf{P}d\mathbf{A}. \quad (3.29)$$

Aus $d\mathbf{a} = J\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{A}$ folgt die Beziehung

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (3.30)$$

zum Cauchy-Spannungstensor. In der Werkstoffkunde werden die 1. PK Spannungen auch als *Nominalspannungen* bezeichnet. Das Produkt

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \quad (3.31)$$

heißt *Kirchhoff* Spannungstensor.

Für die Anwendung von Materialgesetzen in der unverformten Konfiguration wird ein symmetrischer Spannungstensor benötigt. Multipliziert man Gleichung (3.30) von links mit \mathbf{F}^{-1} so ergibt sich

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T}. \quad (3.32)$$

als Definition des 2. *Piola-Kirchhoff* Tensors. Aus dem Vergleich mit (3.29) wird ersichtlich daß das Produkt $\mathbf{S}d\mathbf{A}$ die unphysikalische Kraftgröße $d\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{f}$ darstellt. Durch Umkehrung von (3.32) folgt

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T. \quad (3.33)$$

3.3.3 Gleichgewicht

Das *lokale* Kräftegleichgewicht an einem Volumenelement dv lautet

$$\oint_{\partial(dv)} \mathbf{t}_n da + \int_{dv} \mathbf{f}_v dv = 0,$$

wobei $\mathbf{f}_v(\mathbf{x})$ die am Körper wirkenden Volumenskräfte (z.B. Gravitation, dynamische Massenträgheit) und ∂dv die Oberfläche des Volumenelementes bezeichnen. Ersetzt man den Spannungsvektor durch das Produkt aus Spannungstensor und Flächen-Normale so ergibt sich nach Umformung des Oberflächen-Integrals mittels Gauss'schem Integralsatz die Beziehung

$$\int_{dv} (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v) dv = 0$$

Für ein beliebiges Volumenelement kann dieses Integral nur verschwinden wenn der Integrand im Volumen den konstanten Wert 0 annimmt, also

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = 0. \quad (3.34)$$

Gleichgewicht in der verformten Konfiguration Das globale Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren (eingepägten) Kräften am verformbaren Körper wird über das Prinzip der virtuellen Verschiebungen formuliert. Demgemäß ist für beliebige virtuelle Verschiebungen die (dabei geleistete virtuelle) Arbeit der äußeren Kräfte gleich der Arbeit der inneren Kräfte. Für

die Anwendung von zeitabhängigen Materialgesetzen ist es zweckmäßig, statt der virtuellen Arbeit die virtuelle Leistung als Produkt von Kraft und Verschiebungsrate bzw. Verformungsgeschwindigkeit zu betrachten. Die oben postulierte Gleichheit der inneren und äußeren Leistung kann wie folgt durch mathematische Umformungen aus dem lokalen Gleichgewicht gewonnen werden. Aus (3.34) folgt nach Multiplikation mit einer virtuellen Verschiebungsrate $\delta \mathbf{v}$ und Integration die Beziehung

$$\int_v [(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v) \cdot \delta \mathbf{v}] dv = 0.$$

Mit der allgemeinen Beziehung $\operatorname{div}(\mathbf{T}^T \underline{\underline{b}}) = \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \underline{\underline{b}} + \mathbf{T} : \nabla \underline{\underline{b}}$ folgt

$$\int_v (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{v}) dv - \int_v \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{v}) dv - \int_v (\mathbf{f}_v \cdot \delta \mathbf{v}) dv = 0.$$

Im ersten Summanden ist der Term $\nabla \delta \mathbf{v}$ identisch mit dem virtuellen Geschwindigkeitsgradienten $\delta \underline{\underline{l}}$. Wegen der Symmetrie des Spannungstensors sind die Produkte $\boldsymbol{\sigma} : \underline{\underline{l}}$ und $\boldsymbol{\sigma} : \underline{\underline{l}}^T$ gleich, also gilt auch $\boldsymbol{\sigma} : \delta \underline{\underline{l}} = \boldsymbol{\sigma} : \delta \underline{\underline{d}}$ mit $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{l}} + \underline{\underline{l}}^T)$. Ein Vergleich mit der Definition der technischen Dehnungen zeigt daß $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$.

Das zweite Volumen-Integral kann mittels des Gauss'schen Integralsatzes umgeformt werden in ein Oberflächenintegral

$$\int_v \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{v}) dv = \oint_{\partial v} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{v}) da.$$

Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors gilt $\mathbf{n}^T (\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{v}) = \delta \mathbf{v}^T (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})$. Der geklammerte Term auf der rechten Seite stellt die Oberflächenkräfte $\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ dar. Im Ergebnis erhält man das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der verformten Konfiguration als Gleichheit der inneren und äußeren Leistung in der Form

$$\int_v (\boldsymbol{\sigma} : \delta \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}) dv - \int_v (\mathbf{f}_v \cdot \delta \mathbf{v}) dv = \oint_{\partial v} (\mathbf{t}_n \delta \mathbf{v}) da. \quad (3.35)$$

Gleichgewicht in der unverformten Konfiguration Mittels Koordinatentransformation der Integrationsvariablen erhält man aus (3.35) die Gleichung

$$\int_V (\boldsymbol{\tau} : \delta \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}) dV - \int_V (\mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{v}) dV = \oint_{\partial V} (\mathbf{t}_N \delta \mathbf{v}) dA.$$

Dabei gilt das Volumenverhältnis $dv = J dV$ mit $J = \det \mathbf{F}$, und der Cauchy Tensor wurde ersetzt durch die Kirchhoff Spannungen $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$. Die Volumenkräfte bezogen auf die unverformte Konfiguration sind $\mathbf{f}_V = J \mathbf{f}_v$. Die äußeren Kräfte ergeben sich als

$$\mathbf{t}_N = \mathbf{t}_n \frac{da}{dA} = \mathbf{t}_n J \mathbf{N}^T \underline{\underline{U}}^{-1} \mathbf{N},$$

wobei $\mathbf{N} = \underline{\underline{R}}^T \mathbf{n}$ die Normale zum Flächenelement in Lagrange-Koordinaten bezeichnet. Ersetzt man

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^T$$

und

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{F}^{-T} \underline{\underline{E}}_G \mathbf{F}^{-1}$$

so kann man mittels der allgemeinen Beziehung $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$ zeigen daß

$$\boldsymbol{\tau} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{S} : \delta \dot{\underline{\underline{E}}}_G.$$

Damit ergibt sich schließlich das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Form

$$\int_V (\mathbf{S} : \delta \dot{\underline{\underline{E}}}_G) dV - \int_V (\mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{v}) dV = \oint_{\delta V} (\mathbf{t}_N \delta \mathbf{v}) dA. \quad (3.36)$$

3.4 Zusammenfassung

In Tab. 9 sind die wesentlichen Formeln zum Thema Spannungen und Gleichgewicht bei großen Verformungen zusammengefaßt.

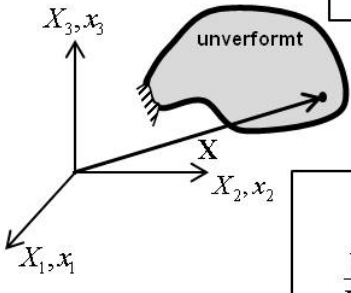
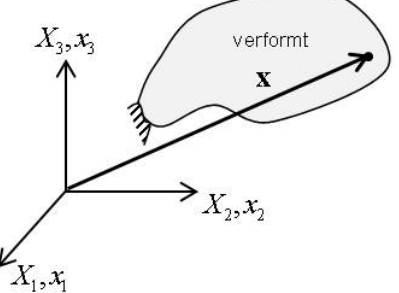
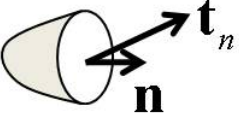
unverformt	verformt
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>unverformt</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Geometrie</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}(\mathbf{X})$ $\frac{v}{V} = J = \det \mathbf{F}$ </div> </div> <div style="text-align: center;">  <p>verformt</p> </div> </div>	
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="width: 30%;"> <p>Spannungen</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f}_a = \mathbf{S} d\mathbf{A}$ </div> </div> <div style="width: 40%; text-align: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $d\mathbf{f}_a = \mathbf{P} d\mathbf{A}$ </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} J$ </div> </div> </div> <div style="width: 25%; text-align: right;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $d\mathbf{f}_a = \boldsymbol{\sigma} da$ </div> <div style="margin-top: 10px;">  </div> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 0 10px;"> $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 0 10px;"> $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \boldsymbol{\tau}$ </div> </div>	
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="width: 45%;"> <p>Dehnungen</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $\mathbf{E}_G = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$ </div> </div> <div style="width: 45%;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $\boldsymbol{\varepsilon}_H = \sum_{\alpha} \ln \lambda_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha}$ </div> </div> </div>	
<p>Arbeit</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px; text-align: center;"> $\delta W_i = \int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}_G = \int_V \boldsymbol{\tau} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}$ </div>	
<p>Gleichgewicht</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px; text-align: center;"> $\delta W_i = \delta W_a$ </div>	

Abbildung 9: Kinematik, Kinetik und Gleichgewicht bei großen Verschiebungen

Literatur

- [1] J. Bonet and R.D. Wood, Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, 2nd ed., Cambridge University Press 2008
- [2] G.A. Holzapfel, Nonlinear Solid Mechanics, J. Wiley 2008
- [3] S. Krenk, Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures, Cambridge University Press 2009
- [4] H. Parisch, Festkörper-Kontinuumsmechanik: von den Grundgleichungen zur Lösung mit finiten Elementen, Teubner Studienbücher Maschinenbau, 2003