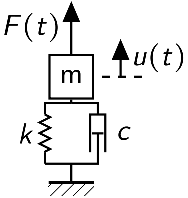
FEM für Dynamik

Kapitel 2: Einmassenschwinger

Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch

Department Maschinenbau und Produktion
Fakultät Technik und Informatik
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Eigenschwingungen



Bewegungsgleichung:

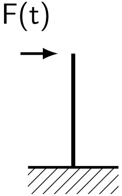
$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = F(t) \quad (1)$$

m : Masse in $[kg]$

c : Dämpfungskonstante in $[kg/s]$

k : Steifigkeit in $[N/m]$

Gl. (1) kann auch ein Ersatzmodell sein für:



$$w = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot EI} \qquad F = k \cdot w \quad \text{mit } F = 1$$

$$\Rightarrow \qquad k = \frac{3 \cdot EI}{L^3}$$

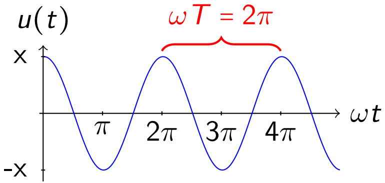
Eigenschwingungen

Für die Randbedingungen $F(t) = 0$ und $c = 0$ ergibt sich:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0 \tag{2}$$

Lösungsansatz:

$$u(t) = x \cdot cos(\omega t) \tag{3}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{Periodendauer}$$

$$f = \frac{1}{T}\ [1/s] \qquad \text{Eigenfrequenz}$$

Eigenschwingungen

Einsetzen von (3) in (1) liefert:

$$-m \cdot \underbrace{\omega^2 \cdot x \cdot \cancel{cos(\omega t)}}_{\ddot{u}(t)} + k \cdot \underbrace{x \cdot \cancel{cos(\omega t)}}_{u(t)} = 0$$

$$(k - m \cdot \omega^2) \cdot x = 0 \tag{4}$$

Hieraus ergeben sich zwei Lösungsmöglichkeiten:

1.) Triviallösung: $x = 0$

2.) Nicht-triviale Lösung: $k - m \cdot \omega^2 = 0$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Eigenschwingungen

Einsetzen der Eigenkreisfrequenz ω in Gl. (4) liefert die Eigenform, z.B. $x = 1$ oder $x = 2$, oder allgemein $x \in \mathbb{R}$

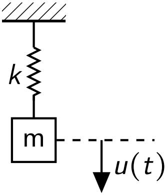
Schlussfolgerung

1.) Eigenformen sind unabhängig von der Belastung.

2.) Die Amplitude der Eigenformen ist beliebig skalierbar.

Freie ungedämpfte Schwingungen

Bewegungsgleichung ohne Dämpfung:



$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} \cdot u = 0$$

$$\ddot{u} + \omega^2 \cdot u = 0$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$u(t) = A \cdot cos(\omega t) + B \cdot sin(\omega t) \tag{5}$$

Übung: Überprüfen Sie durch Einsetzen, ob Gl. (5) eine homogene Lösung der DGL darstellt.

Freie ungedämpfte Schwingungen

Bestimmung der Koeffizienten A und B aus den Anfangsbedingungen:

$$u(t=0) = u_0 \Rightarrow A = u_0$$

$$\dot{u}(t=0) = v_0$$

$$\dot{u}(t) = -A \cdot \omega \cdot sin(\omega t) + B \cdot \omega cos(\omega t)$$

$$\dot{u}(t=0) = \cancel{-A \cdot \omega \cdot sin(\omega t)} + B \cdot \omega \underbrace{cos(\omega t)}_{1}$$

$$v_0 = B \cdot \omega \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega}$$

Aus Gl. (5) folgt mit eingesetzten Anfangsbedingungen:

$$u(t) = u_0 \cdot cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot sin(\omega t) \tag{6}$$

Freie gedämpfte Schwingungen

Bewegungsgleichung mit Dämpfung:

$$
\begin{aligned}
m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u &= 0 \\
\ddot{u} + \frac{c}{m} \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u &= 0 \\
\ddot{u} + 2\delta \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u &= 0 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

mit $2\delta = \frac{c}{m}$ (δ = Abklingkoeffizient)

Allgemeine Lösung der homogenen DGL (Exponentialansatz):

$$u(t) = A \cdot e^{\lambda t} \qquad (8a)$$

$$\dot{u}(t) = A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} \qquad (8b)$$

$$\ddot{u}(t) = A \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} \qquad (8c)$$

Freie gedämpfte Schwingungen

Einsetzen ergibt die „charakteristische Gleichung“ für λ:

$$A \cdot e^{\lambda t} \cdot \underbrace{(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2)}_{=0} = 0 \tag{9}$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \tag{10}$$

Die Einführung von $D = \frac{\delta}{\omega}$ als Lehr'sches Dämpfungsmaß ergibt:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{D^2 \cdot \omega^2 - \omega^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 \cdot (D^2 - 1)}$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega \cdot \sqrt{D^2 - 1} \tag{11}$$

Freie gedämpfte Schwingungen

Fallunterscheidung:

1.) $D > 1$ starke Dämpfung (z.B. Stoßdämpfer)

2.) $D = 1$ aperiodischer Grenzfall

3.) $D < 1$ schwache Dämpfung

Freie gedämpfte Schwingungen

Beispiele

Tragwerk	Art der Dämpfung	$D[\%]$
Stabartige Bauteile, starre Anschlüsse	Werkstoff und aerodynamisch	≤ 0.5
Flächentragwerke, starre Anschlüsse	Werkstoff, aerodynamisch und und akustisch	0.1 – 1
Rahmen-, Flächentragwerke, geschweißte Anschlüsse	Werkstoffdämpfung in Anschlussbereichen	0.5 – 2
Komplexe Bauteile, Niet- und Schraubverbindungen	Reibung in Verbingungsbereichen	2 – 8
Tragwerke mit aktiver viskoel. Beschichtung	Werkstoffdämpfung der Beschichtung	bis 20

Freie gedämpfte Schwingungen

Fall 1: $(D > 1)$ $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \mu$ mit $\mu = \omega\sqrt{D^2 - 1}$

Allgemeine Lösung:

$$u(t) = A_1 \cdot e^{\overbrace{\lambda_1}^{-\delta+\mu} t} + A_2 \cdot e^{\overbrace{\lambda_2}^{-\delta-\mu} t}$$

$$u(t) = e^{-\delta t} \cdot \left(A_1 \cdot e^{\mu t} + A_2 \cdot e^{-\mu t}\right) \tag{12}$$

Fall 2: $(D = 1)$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$

Erweiterter Ansatz für Fälle mit doppelter Nullstelle:

$$u(t) = (A_1 + A_2 \cdot t) \cdot e^{-\delta t} \tag{13}$$

Freie gedämpfte Schwingungen

Fall 3: $(D < 1)$

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= -\delta \pm \omega \cdot \sqrt{D^2 - 1} \\
&= -\delta \pm \omega \cdot \sqrt{(-1)(1 - D^2)} \\
&= -\delta \pm \omega \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 - D^2} \qquad \text{mit } i = \sqrt{-1} \\
&= -\delta \pm i\omega \cdot \sqrt{1 - D^2}
\end{aligned} \tag{14}$$

Mit der Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung $\omega_D = \omega \cdot \sqrt{1 - D^2}$ ergibt sich:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_D \tag{15}$$

$\Rightarrow$ 2 konjugiert komplexe Lösungen!

Freie gedämpfte Schwingungen

Allgemeine Lösung:

$$u(t) = A_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$$u(t) = e^{-\delta t} \cdot \left(A_1 \cdot e^{i\omega_D t} + A_2 \cdot e^{-i\omega_D t} \right) \tag{16}$$

Aus der Eulerschen Formel $e^{\pm i\omega_D t} = cos(\omega_D t) \pm i \cdot sin(\omega_D t)$ folgt (Übung!)

$$u(t) = e^{-\delta t} \cdot \left[(A_1 + A_2) \cdot cos(\omega_D t) + i(A_1 - A_2) \cdot sin(\omega_D t) \right] \tag{17}$$

Da $u(t)$ eine komplexwertige Lösung der DGL ist, sind auch $Re(u(t))$ und $Im(u(t))$ jeweils reelle Lösungen der DGL:

$$u(t) = \underbrace{e^{-\delta t}}_{\text{Dämpfungsanteil}} \cdot \underbrace{(A \cdot cos(\omega_D t) + B \cdot sin(\omega_D t))}_{\text{Harmonischer Anteil}} \tag{18}$$

A und B sind neue reelle Konstanten und es gilt $\omega_D < \omega$, sowie $T_D > T$

Freie gedämpfte Schwingungen

Bestimmung der Koeffizienten A und B aus den Anfangsbedingungen:

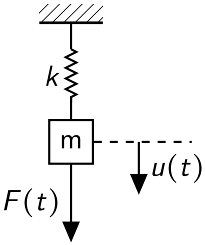
$$
\begin{aligned}
u(t=0) &= u_0 \Rightarrow A = u_0 \\
\dot{u}(t) &= -\delta \cdot e^{-\delta t} \cdot (A \cdot cos(\omega_D t) + B \cdot sin(\omega_D t)) \\
&\quad + e^{-\delta t} \cdot (-A \cdot \omega_D \cdot sin(\omega_D t) + B \cdot \omega_D \cdot cos(\omega_D t)) \\
&= e^{-\delta t} \cdot ((-\delta B - A \cdot \omega_D) \cdot sin(\omega_D t) + (-\delta A + B \cdot \omega_D) \cdot cos(\omega_D t)) \\
\dot{u}(t=0) &= -\delta A + B \cdot \omega_D = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0 + \delta A}{\omega_D} = \frac{v_0 + \delta u_0}{\omega_D}
\end{aligned}
$$

Aus Gl. (18) folgt mit den eingesetzten Anfangsbedingungen:

$$
u(t) = e^{-\delta t} \left(u_0 \cdot cos(\omega_D t) + \frac{v_0 + \delta u_0}{\omega_D} \cdot sin(\omega_D t) \right) \tag{19}
$$

Falls $D < 0$ (somit $\delta < 0$) $\Rightarrow$ angefachte Schwingung

Erzwungene ungedämpfte Schwingungen



Ungedämpfte Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = F(t) \tag{20}$$

Annahme: harmonische Erregung

$$F(t) = F_0 \cdot cos(\Omega t) \tag{21}$$

mit Ω als Erregerkreisfrequenz in $[Hz]$

Einsetzen liefert:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = F_0 \cdot cos(\Omega t) \tag{22}$$

$$\ddot{u}(t) + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} u(t) = \frac{F_0}{m} \cdot cos(\Omega t) \tag{23}$$

Erzwungene ungedämpfte Schwingungen

Definition der statischen Auslenkung:

$$k \cdot u_s = F_0 \quad \Rightarrow \quad u_s = \frac{F_0}{k} \tag{24}$$

Inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \omega^2 \cdot u_s \cdot cos(\Omega t) \tag{25}$$

Ansatz zur Lösung der inhomogenen DGL:

$$u = u_h + u_p \tag{26}$$

Lösungsansatz des homogenen Teils aus Gl. (5):

$$u_h = A \cdot cos(\omega t) + B \cdot sin(\omega t) \tag{27}$$

Erzwungene ungedämpfte Schwingungen

Für Partikulärlösung Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$u_p = u_s \cdot V \cdot cos(\Omega t) \tag{28}$$

Einsetzen von (28) in (25) liefert:

$$-\Omega^2 \cdot \cancel{u_s} \cdot V \cdot \cancel{cos(\Omega t)} + \omega^2 \cdot \cancel{u_s} \cdot V \cdot \cancel{cos(\Omega t)} = \omega^2 \cdot \cancel{u_s} \cdot \cancel{cos(\Omega t)} \tag{29}$$

oder

$$V = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \quad \text{mit } V \text{ als Vergrößerungsfunktion} \tag{30}$$

Somit folgt

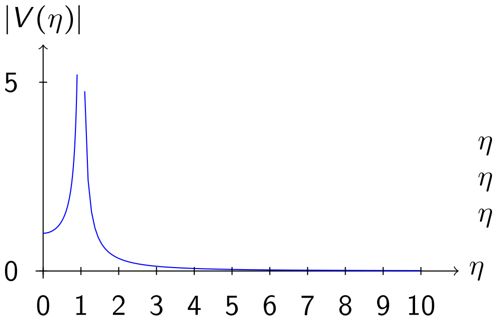
$$u_p = u_s \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \cdot cos(\Omega t) \tag{31}$$

Erzwungene ungedämpfte Schwingungen

Mit Hilfe des Frequenzverhältnisses $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$ folgt

$$V = \frac{1}{1 - \eta^2} \tag{32}$$

Lösung im Frequenzbereich:



$\eta < 1$: unterkritischer Fall
$\eta = 1$: Resonanzfall
$\eta > 1$: überkritischer Fall

Erzwungene ungedämpfte Schwingungen

Für die Lösung im Zeitbereich folgt (gilt nur für $\eta \neq 1$):

$$u = u_h + u_p = A \cdot sin(\omega t) + B \cdot cos(\omega t) + u_s \cdot \frac{1}{1 - \eta^2} \cdot cos(\Omega t) \tag{33}$$

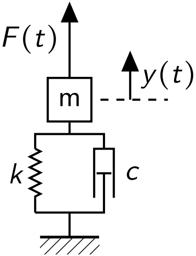
Die Koeffizienten A und B sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen

Anmerkungen

1.) Im Resonanzfall wächst die Auslenkung über alle Grenzen.

2.) Anregungen in der Nähe der Eigenfrequenzen sind zu vermeiden.

Erzwungene gedämpfte Schwingungen



Gedämpfte Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = F_0 \cdot cos(\Omega t)$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \cdot \dot{u} + \frac{k}{m} \cdot u = \frac{F_0}{m} \cdot cos(\Omega t)$$

$$\ddot{u} + 2\delta \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u = \omega^2 \cdot u_s \cdot cos(\Omega t) \qquad (34)$$

Homogene Lösung der DGL:

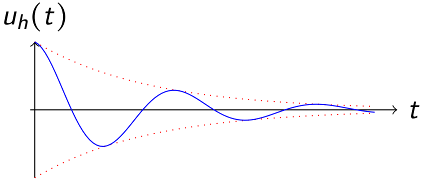
$$u_h(t) = e^{-\delta t} \cdot (A \cdot cos(\omega_D t) + B \cdot sin(\omega_D t)) \qquad (35)$$

Ansatz für partikuläre Lösung der DGL:

$$u_p = u_s \cdot V \cdot cos(\Omega t - \phi) \quad \text{mit } \phi \text{ als mögliche Phasenverschiebung} \qquad (36)$$

Erzwungene gedämpfte Schwingungen

Der homogene Teil der Lösung u_h klingt exponential ab und hat somit nur einen kurzzeitigen Einfluss auf die Gesamtlösung ("Einschwingvorgang")



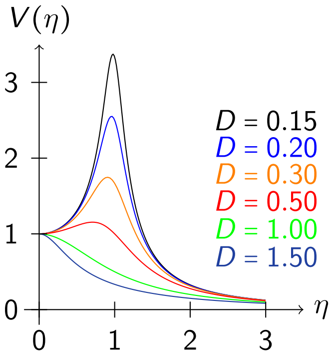
Einsetzen von (36) in (34) liefert:

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \tag{37}$$

V wird als Amplitudenfrequenzgang bezeichnet ("dynamic load factor")

Erzwungene gedämpfte Schwingungen

Amplitudenfrequenzgang in Abhängigkeit von D und η:



$$V(\eta = 1) = \frac{1}{2D}$$

$$(\text{z.B. } D = 0,01 \rightarrow V = 50)$$

Für $D \leq 0,707$:

$$V_{max} \text{ bei } \eta = \sqrt{1 - 2 \cdot D^2}$$

Anmerkung

Auch bei schwach gedämpften Systemen ist eine Anregung in der Nähe der Eigenfrequenzen zu vermeiden.