Formelsammlung Technische Mechanik

1. Allgemeines

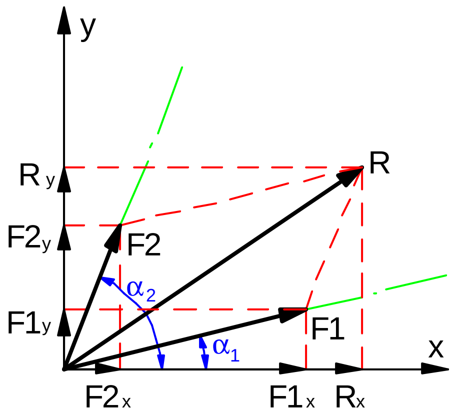
(1) 1 Newton = 1 N = 1 kg · $\frac{m}{s^2}$

(2) 1 kg Masse wiegt auf der Erdoberfläche 9,81 N

(3) $F = m_F \cdot l_F$ — Kennzeichnung der Kraft

(4) $F = q \cdot l$ — Streckenlast (q: Kraft / Länge)

(5) $F = \sigma \cdot A = p \cdot A$ — Flächenlast (σ, p: Kraft / Fläche)



Rechnerische Zerlegung einer Kraft in 2 Komponenten mit gegebenen Wirkungslinien.

R_X und R_Y (Resultierende) müssen mit dem zugehörigen Vorzeichen eingesetzt werden.

(6.1) $F_{2X} = \dfrac{R_y - R_x \cdot \tan\alpha_1}{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}$

(6.2) $F_{2Y} = \dfrac{R_y - R_x \cdot \tan\alpha_1}{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1} \cdot \tan\alpha_2$

(6.3) $F_{1X} = \dfrac{-R_y + R_x \cdot \tan\alpha_2}{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}$

(6.4) $F_{1X} = \dfrac{-R_y + R_x \cdot \tan\alpha_2}{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1} \cdot \tan\alpha_1$

(7) $\vec{F} = F_X \cdot i + F_Y \cdot j + F_Z \cdot k$ — Addition räumlicher Kräfte

(7.1) $\vec{F} = \vec{F}_X + \vec{F}_Y + \vec{F}_Z$

(8) $\vec{R} = \vec{R}_X + \vec{R}_Y + \vec{R}_Z = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ — Resultierende Kraft

$= (F_{1X} + F_{2X}) \cdot i + (F_{1Y} + F_{2Y}) \cdot j + (F_{1Z} + F_{2Z}) \cdot k$

(8.1) $R_X = F_{1X} + F_{2X} = \Sigma F_X$ — Beträge

$R_Y = F_{1Y} + F_{2Y} = \Sigma F_Y$

$R_Z = F_{1Z} + F_{2Z} = \Sigma F_Z$

(9) $F = \sqrt{F_X{}^2 + F_Y{}^2 + F_Z{}^2}$ — Betrag des Kraftvektors

(9.1) $F = \sqrt{F_X{}^2 + F_Y{}^2}$ — Betrag im Ebenen System

2. Statik

2.1 Kräfte am starren Körper

(10)	$\Sigma\ \vec{F}_n = \vec{R}$	Addition nichtparalleler Kräfte
(10.1)	$\Sigma F_X = R_X$ $\Sigma F_Y = R_Y$ $\Sigma F_Z = R_Z$	Beträge
(11)	$\Sigma\ \vec{F}_n = \vec{0}$	Kräftegleichgewicht
(11.1)	$\Sigma F_X = 0$ $\Sigma F_Y = 0$ $\Sigma F_Z = 0$	Beträge

2.2 Momente am starren Körper

(12)	$M_p = F \cdot s$	Moment am starren Körper
(13)	$\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F}_1$	vektoriell allgemein
(14)	$M = s \cdot F = a \cdot F = \sin\alpha$	Betrag

(14.1) $$\vec{a} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

(14.2) $$\vec{a} \times \vec{F} = \left|\begin{matrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ F_x & F_y & F_z \end{matrix}\right|\begin{matrix} i & j \\ a_x & a_y \\ F_x & F_y \end{matrix}$$ nach Sarrus berechnen

(14.3) $= + a_y F_Z i + a_Z F_x j + a_x F_y k - a_Z F_y i - a_x F_Z j - a_y F_x k$

(14.4)
$$\begin{aligned} = &+ (a_y \cdot F_z - a_z \cdot F_y) \cdot i \\ &+ (a_z \cdot F_x - a_x \cdot F_z) \cdot j \\ &+ (a_x \cdot F_y - a_y \cdot F_x) \cdot k \end{aligned}$$

(15) Bei der Parallelverschiebung einer Kraft F um s, muß ein Moment eingeführt werden, das dem Moment $M = s \cdot F$ der unverschobenen Kraft bezüglich der neuen Wirkungslinie entspricht.

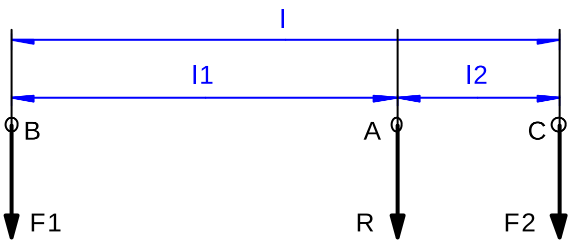
(16)	$\vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{F}$	Das statische Moment einer Kraft
(16.1)	$M_P = r \cdot F \cdot \sin\alpha$	Betrag

(17) $M = (x_1 - x_P) \cdot F \cdot \cos\alpha - (y_1 - y_P) \cdot F \cdot \sin\alpha = F_y \cdot (x_1 - x_P) - F_x \cdot (y_1 - y_P)$

(17.1) Umgekehrt gilt daher: Die Summe der statischen Momente mehrerer Kräfte ist gleich dem statischen Moment ihrer Resultierenden. $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

(17.2) Die Summe der statischen Momente mehrere Kräfte bzgl. eines Punktes der Wirkungslinie ihrer Resultierenden ist = 0. $\vec{M} = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$

Addition parallel gerichteter Kräfte



(18.1) $R = F_2 \cdot \frac{l}{l_1}$ (Bezugspunkt B)

(18.2) $l_1 = l \cdot \frac{F_2}{F_1 + F_2}$

(18.3) $R = F_1 \cdot \frac{l}{l_2}$ (Bezugspunkt C)

(18.4) $l_2 = l \cdot \frac{F_1}{F_1 + F_2}$

2.3 Das Gleichgewicht am starren Körper

Ebenes System

(19) $\Sigma \vec{F}_i = \vec{0} : \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{0}$ Vektoren

(20.1) $\Sigma F_{ix} = \Sigma x = 0 : F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0$ Beträge

(20.2) $\Sigma F_{iy} = \Sigma y = 0 : F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0$

(21) $\vec{M}_i{}^* = M_i{}^* \cdot k$ Freie Momente

(22) $\vec{M}_i = (r_{ix} \cdot F_{iy} - r_{iy} \cdot F_{ix}) \cdot k$

(23) $\Sigma \vec{M} = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \Sigma \vec{M}_i{}^* = \vec{0}$ Vektoren

(23.1) $\Sigma M = \Sigma(r_{ix} \cdot F_{iy} - r_{iy} \cdot F_{ix}) + \Sigma M_i{}^* = 0$ Beträge

Bemerkung:

Definiton des Gleichgewichts: Entweder durch 2 Vektorgleichungen (19 und 23) oder durch 3 Betragsgleichungen (20.1; 20.2 und 23.1).

Räumliches System

(24) $\Sigma \vec{F}_i = \vec{0} : \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{0}$ Vektoren

(24.1) $\Sigma F_{ix} = \Sigma x = 0 : F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0$ Beträge

(24.2) $\Sigma F_{iy} = \Sigma y = 0 : F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0$

(24.3) $\Sigma F_{iz} = \Sigma z = 0 : F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0$

(Vorzeichen beachten !)

(25) $\vec{r}_i \times \vec{F}_i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ r_{ix} & r_{iy} \\ F_{ix} & F_{iy} \end{matrix}$ Momente der Kräfte

(25.1) $\vec{M}_i{}^* = M_{ix}{}^* \cdot i + M_{iy}{}^* \cdot j + M_{iz}{}^* \cdot k$ Freie Momente

(26) $\Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \Sigma \vec{M}_i{}^* = \vec{0}$ Vektoren

(26.1) $\Sigma M_x = 0 : \Sigma(r_{iy} \cdot F_{iz} - r_{iz} \cdot F_{iy}) + \Sigma M_{ix}{}^* = 0$ Beträge

(26.2) $\Sigma M_y = 0 : \Sigma(r_{iz} \cdot F_{ix} - r_{ix} \cdot F_{iz}) + \Sigma M_{iy}{}^* = 0$

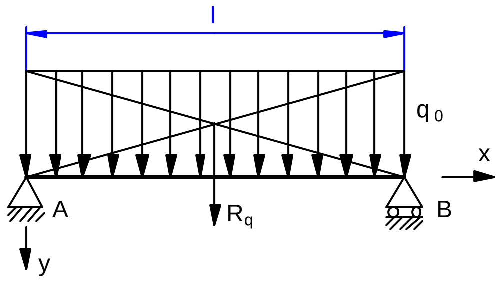
(26.3) $\Sigma M_z = 0 : \Sigma(r_{ix} \cdot F_{iy} - r_{iy} \cdot F_{ix}) + \Sigma M_{iz}{}^* = 0$

Bemerkung:

Das Gleichgewicht im räumlichen System ist definiert, entweder durch 2 Vektorgleichungen (24 und 26) oder durch sechs Betragsgleichungen (24.1-3; 25.1-3).

2.4 Statik des Balkens

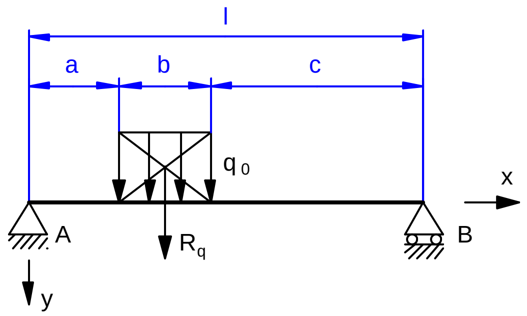
Konstante Streckenlast über die ganze Balkenlänge (siehe 230.4 / 230.5)



(31.1) $M(x) = \frac{q_o \cdot l}{2} \cdot \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) = \frac{R_q \cdot l}{2} \cdot \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)$ (Parabel) Biegemoment an der Stelle x

(31.2) $Q(x) = q_o \cdot l \cdot \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right)$ (Gerade) Querkraft an der Stelle x

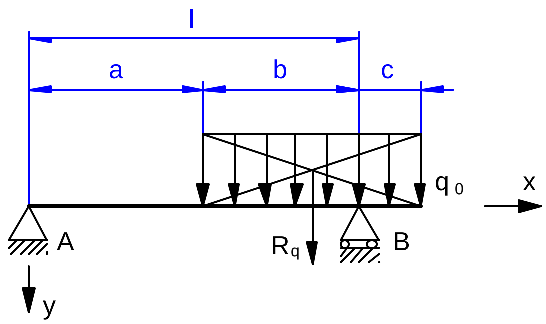
Kontinuierliche Streckenlast auf Teillänge des Balkens



(32.1) $M(x) = A_x - q_0 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + q_0 \cdot \frac{(x-a-b)^2}{2}$ Biegemoment

(32.2) $Q(x) = -A + q_0 \cdot (x-a) - q_0 \cdot (x-a-b)$ Querkraft

Konstante, übertragende Streckenlast



(33.1) $M(x) = \underbrace{A \cdot x}_{Bereich\_a} = \underbrace{A \cdot x - q_o \cdot (x-a) \cdot \frac{x-a}{2}}_{Bereich\_b} = \underbrace{A \cdot x - q_o \cdot (x-a) \cdot \frac{x-a}{2} + B \cdot (x-a-b)}_{Bereich\_c}$

(33.2) $Q(x) = -A = -A + q_0 \cdot (x-a) = -A + q_0 \cdot (x-a) - B$ Querkraft

3. Schwerkraft und Schwerpunkt

3.1 Massenpunkt und Schwerpunkt

(60) $G = m \cdot g$ — Gewicht = Masse · Erdbeschleunigung

(60.1) $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$ — Fallbeschleunigung

(60.2) $1\ N = 1\ kg \cdot 1\ \frac{m}{s^2}$ — Einheit

3.2 Der Schwerpunkt

(61) $\vec{M} = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{G}_i = \vec{r}_0 \times \vec{G}$

(61.1) $\vec{r}_o \times \vec{G} = 0 = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{G}_i$

(62) $\vec{r}_o = \frac{\Sigma m_i \cdot \vec{r}_i}{m} = \sum \frac{m_i}{m} \cdot \vec{r}_i$

(63) $x_0 = \sum \frac{m_i}{m} x_i \qquad y_0 = \sum \frac{m_i}{m} y_i \qquad z_0 = \sum \frac{m_i}{m} z_i$

(64) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$

3.3 Ermittlung von Schwerpunkten

(65) $\sum \frac{V_i}{V} \cdot \vec{r}_i = \vec{r}_0$

Schwerpunkte von Linien

(66) $x_0 = \sum \frac{\Delta l_i}{l} \cdot x_i \qquad y_0 = \sum \frac{\Delta l_i}{l} \cdot y_i \qquad z_0 = \sum \frac{\Delta l_i}{l} \cdot z_i$

(66.1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{l_2}{l_1}$ — gebrochener Linienzug

(66.2) $x_0 = \frac{l_1 \cdot x_1}{l_1 + l_2} + \frac{l_1 \cdot x_2}{l_1 + l_2} = \frac{l_1 \cdot x_1}{l} + \frac{l_2 \cdot x_2}{l}$

$y_0 = \frac{l_1 \cdot y_1}{l_1 + l_2} + \frac{l_1 \cdot y_2}{l_1 + l_2} = \frac{l_1 \cdot y_1 + l_2 \cdot y_2}{l}$

(67.1) $y_0 = \frac{r}{b} \cdot s \quad ; \quad x_0 = 0$ (b = Bogenlänge, s = Sehnenlänge) — Kreisbogen

(67.2) $y_0 = \frac{s}{\pi} \cdot \frac{90°}{\alpha°} \quad ; \quad x_0 = 0$

(67.3) $y_0 = \frac{r \cdot \sin\alpha}{\widehat{\alpha}} \quad ; \quad x_0 = 0$

(67.4) $y_0 = \frac{2r}{\pi} \quad ; \quad x_0 = 0$ — Halbkreisbogen

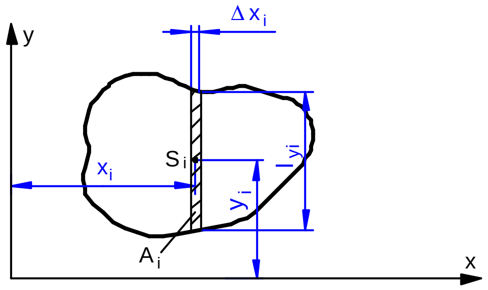
(67.5) $x_0 = \frac{2r}{\pi} = y_0$ — Viertelkreisbogen

Schwerpunkte von ebenen Flächen

(68) $x_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot x_i$ — allgemein

$y_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot y_i$

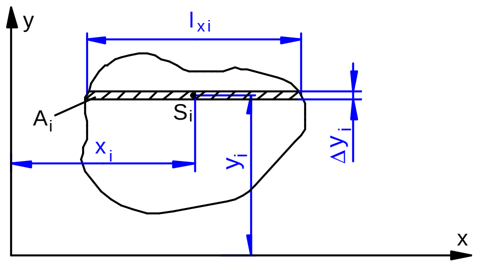
1. Möglichkeit



(68.1) $$x_0 = \sum \frac{\Delta x_i \cdot l_{yi}}{A} \cdot x_i$$

$$y_0 = \sum \frac{\Delta x_i \cdot l_{yi}}{A} \cdot y_i$$

2. Möglichkeit



(68.2) $$x_0 = \sum \frac{\Delta y_i \cdot l_{xi}}{A} \cdot x_i$$

$$y_0 = \sum \frac{\Delta y_i \cdot l_{xi}}{A} \cdot y_i$$

(69) Schwerpunkt eines Dreiecks:
Die 3 Seitenhalbierenden (Schwerlinien) eines Dreiecks, schneiden sich im Schwerpunkt der Dreiecksfläche. Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinien und die Höhen im Verhältnis 2:1.

(69.2) $x_0 = 0 \;;\; y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b}$ Kreisausschnitt, Kreissektor

(69.3) $x_0 = 0 \;;\; y_0 = \frac{s}{\pi} \cdot \frac{60°}{\alpha°}$

(69.4) $x_0 = 0 \;;\; y_0 = \frac{2r \cdot \sin\alpha}{3\hat{\alpha}}$

(69.5) $x_0 = 0 \;;\; y_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$ Halbkreisfläche

(70) Kreisabschnitt:
Ist von einer Gesamtfläche ein Teil abgeschnitten, so ist das statische Moment der Restfläche gleich dem statischen Moment der Gesamtfläche, vermindert um das statische Moment der fehlenden Fläche.

(71.1) $yo = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot \sin^3\alpha}{\hat{\alpha} - \sin\alpha \cdot \cos\alpha} \;;\; x_0 = 0$

(71.2) $yo = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \cdot \sin^3\alpha}{2\hat{\alpha} - \sin\alpha} \;;\; x_0 = 0$

Schwerpunkte räumlicher Flächen

(73) $\vec{r}_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot \vec{r}_i$ $\vec{r}$ = Richtungsvektor

(73.1) $x_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot x_i$ $y_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot y_i$ $z_0 = \sum \frac{A_i}{A} \cdot z_i$

(73.2) $x_0 = 0 \;;\; y_0 = 0 \;;\; z_0 = h_1 + \frac{h}{2}$ Kugeloberfläche

(73.3) $x_0 = 0 \;;\; y_0 = 0 \;;\; z_0 = \frac{r}{2}$ Halbkugeloberfläche

(73.4) $x_0 = 0 \;;\; y_0 = 0 \;;\; z_0 = \frac{r}{2} \cdot (y + \cos\alpha)$ Kugelkappe

Schwerpunkte von Körpern

(74) $\vec{r}_0 = \sum \frac{V_i}{V} \cdot \vec{r}_i$ — $\vec{r}$ = Richtungsvektor

(74.1) $x_0 = \sum \frac{V_i}{V} \cdot x_i \qquad y_0 = \sum \frac{V_i}{V} \cdot y_i \qquad z_0 = \sum \frac{V_i}{V} \cdot z_i$

(74.2) Dreiseitige Pyramide
S ist Schwerpunkt eines Dreiecks, das parallel über dem Dreieck BCD (Grungfläche) liegt, im Abstand h/4 von diesem, bzw. im Abstand $\frac{3}{4}h$ von A (Spitze) aus.

(74.3) $x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad z_0 = \frac{h}{4}$ — Kreiskegel

(74.4) $x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad z_0 = \frac{3}{8} \cdot r \cdot (1 + \cos \alpha)$ — Kugelausschnitt

(74.5) $x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad z_0 = \frac{3}{8} \cdot r$ — Halbkugel

Schwerpunktsbestimmung durch Messung

(75) $x_0 = \frac{B}{G} \cdot l$

3.4 Bestimmung von Oberflächen und Volumen von Rotationskörpern

(80) $A = 2\pi \cdot y_0 \cdot l$ — Rotationsfläche

(80.1) $A = 2\pi \cdot \sum \Delta l_i \cdot y_i$

(81) $A = 4\pi r^2$ — Kugeloberfläche

(82) $A = \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$ — Mantelfläche des Kreiskegels

(83) $A = 4\pi^2 \cdot r \cdot R$ — Torus (Donut)

(84) $V = 2\pi \cdot y_0 \cdot A$ — Volumen des Rotationskörper

(85) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ — Kugelvolumen

(86) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot r^2$ — Kreiskegel

(87) $V = 2\pi^2 \cdot R \cdot r^2$ — Torus

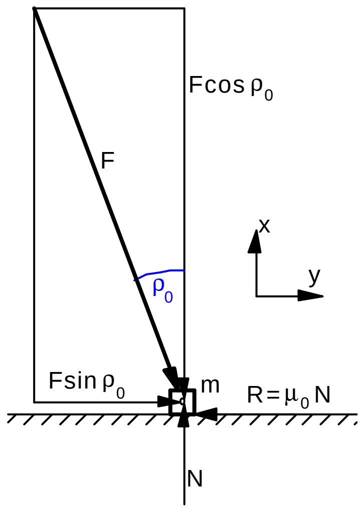
4. Die Reibung

4.1 Haftreibung

(90) $R = \mu_0 \cdot N$ Reibungskraft (Coulomb'sches Gesetz)

(91) μ_0 = Reibungskoeffizient der Ruhe

Reibkegel



(92) $\rho_0 = \arctan(\mu_0)$ Reibungswinkel

(93) Solange F innerhalb des Reibungskegels wirkt ($\alpha \le \rho_0$)

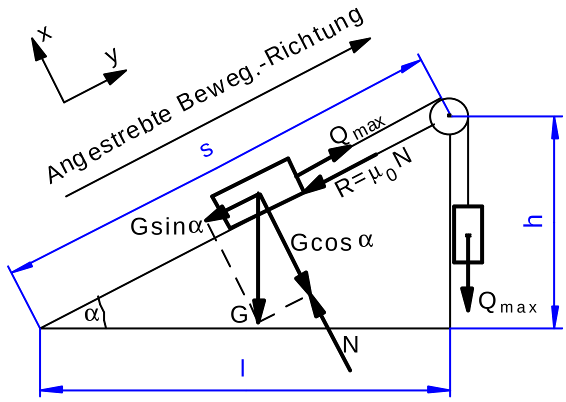
bleibt der Körper in Ruhe und man spricht von Selbsthemmung (Selbstsperrung).

(94) $H = F \cdot (\mu_0 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)$ Horizontalkraft

(94.1) $H = F \cdot \dfrac{\sin(\rho_0 - \alpha)}{\cos\rho_0}$

Reibung auf schiefer Ebene

Hinaufschieben der Masse



(95) $Q_{max} = G \cdot (\sin\alpha + \mu_0 \cdot \cos\alpha)$

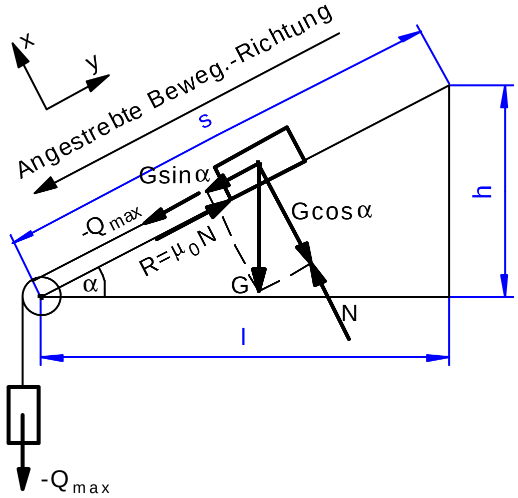
(96) $N = G \cdot \cos\alpha$ (Normalkraft)

(95.1) $Q_{max} = G \cdot \dfrac{h + \mu_0 \cdot l}{s}$

mit $\mu_0 = \tan\rho_0$:

(95.2) $Q_{max} = G \cdot \dfrac{\sin(\alpha + \rho_0)}{\cos\rho_0}$

Hinabschieben der Masse



(97) $Q_{max} = G \cdot (\sin\alpha - \mu_0 \cdot \cos\alpha)$

(98) $N = G \cdot \cos\alpha$ (Normalkraft)

(97.1) $Q_{max} = G \cdot \dfrac{h - \mu_0 \cdot l}{s}$

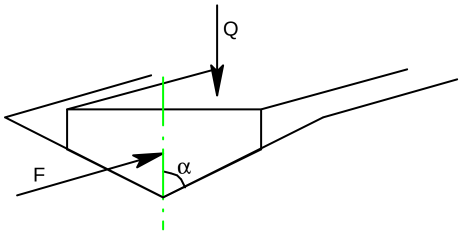
(97.2) $Q_{max} = G \cdot \dfrac{\sin(\alpha - \rho_0)}{\cos\rho_0}$

(99) Selbsthemmung für $\alpha \le \rho_0$

(100) Selbsthemmung für $l \geq \frac{t}{2 \cdot \mu_0}$ Schraubzwinge

(101) Selbsthemmung für $\alpha \leq \rho_0$ Schraube mit Flachgewinde

Keilförmige Nut

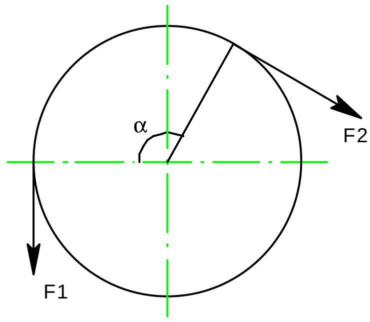


(102) $N = Q \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin\alpha}$

(103) $F = \frac{\mu_0 \cdot Q}{\sin\alpha}$

Umschlingungsreibung

(104) $F_2 = F_1 \cdot e^{\mu_0 \cdot \alpha}$



4.2 Gleitreibung

(110) $R = \mu \cdot N$

Gleitreibung am Radiallager

(111) $\rho = \alpha$

(111.1) $N = Q \cdot \cos\alpha$

(111.2) $R = Q \cdot \sin\alpha$

(111.3) $M_d = r \cdot Q \cdot \sin\alpha$ äusseres Moment

Gleitreibung am Axiallager

(112) $M_R = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot Q \cdot r$

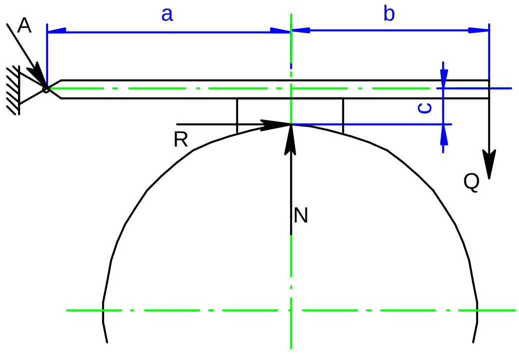
Konstanter Druck auf Kreisringfläche

(113) $M_R = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot Q \cdot \frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^2 - r_i^2}$ Reibungsmoment

Hyperbolische Druckverteilung auf Kreisringfläche

(114) $M_R = \mu \cdot Q \cdot \frac{r_a + r_i}{2}$

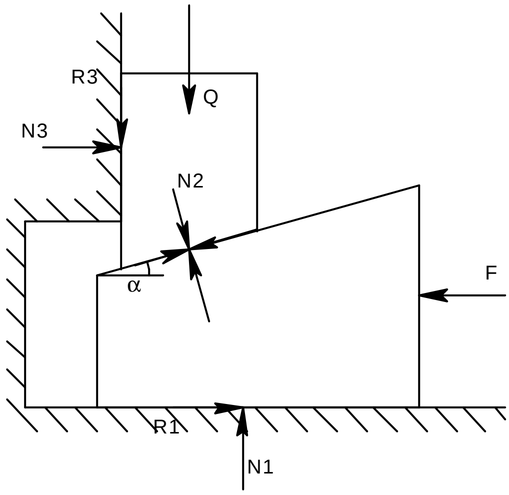
Die Backenbremse



(115.1) $N_1 = Q \cdot \frac{a+b}{a+\mu \cdot c}$

(115.2) $N_2 = Q \cdot \frac{a+b}{a-\mu \cdot c}$

Reibung am Keil



(116) $F = Q \cdot \frac{-\mu_1(\mu_2 \sin\alpha - \cos\alpha) + (\mu_2 \cos\alpha + \sin\alpha)}{-\mu_3(\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha) + (\cos\alpha - \mu_2 \sin\alpha)}$

(für eintreiben des Keils)

(117) $F = Q \cdot \frac{(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha) + \mu_1(-\mu_2 \sin\alpha - \cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha) + \mu_3(-\mu_2 \cos\alpha + \sin\alpha)}$

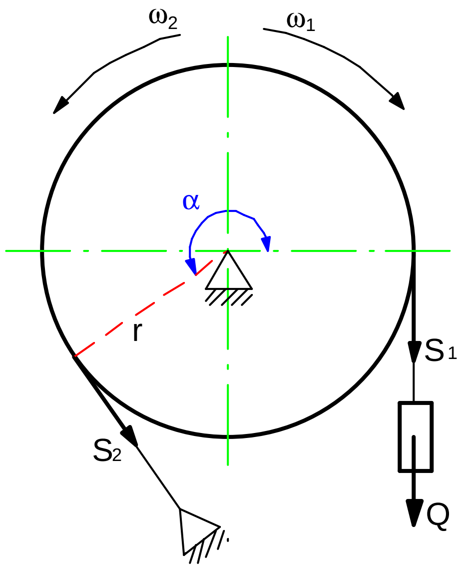
(für herausziehen des Keils)

Für $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

(116.1) $F = Q \cdot \tan(\alpha + 2\rho)$ (eintreiben)

(117.1) $F = Q \cdot \tan(\alpha - 2\rho)$ (herausziehen)

Bandbremse



Reibungsmoment rechtslauf:

(118) $M_{R1} = r \cdot Q \cdot (e^{\mu\alpha} - 1)$

Reibungsmoment linkslauf:

(118.1) $M_{R2} = r \cdot Q \cdot (1 - e^{-\mu\alpha})$

5. Normal- und Tangentialspannung

5.1 Zugspannung und Dehnung

Hooke'sches Gesetz, Spannung, Dehnung

(150) $\sigma = \frac{F}{A_0}$ Spannung

(151) $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ Dehnung

(152) $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$ mit α = Dehnungszahl Dim: $\frac{\text{Fläche}}{\text{Kraft}}$ Hooke'sches Gesetz

(152.1) $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ mit E = Elastizitätsmodul = $\frac{1}{\alpha}$

(152.2) $\varepsilon = \frac{\text{Endlänge} - \text{Anfangslänge}}{\text{Anfangslänge}} = \frac{l' - l_0}{l_0}$

Vorzeichen der Dehnung:
+ Verlängerung durch Zugkraft ist positiv.
- Verkürzung durch Druckkraft ist negativ.

(153) $\Delta l = \frac{\sigma \cdot l_0}{E}$ Verlängerung

(153.1) $\Delta l = \frac{F}{A_0} = \frac{l_0}{E}$

(154) $E_{Stahl} = 2{,}1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$ Elastizitätsmodul für Stahl

(154.1) $\sigma_{Zul} = \frac{K}{s}$ Zulässige Spannung

mit K = Werkstoffkennwert und s = Sicherheitsfaktor

Querdehnung

(155) $\varepsilon_q = \eta = \frac{\Delta d}{d_0}$ Querkontraktion

(155.1) $\varepsilon_q = \frac{d_0 - d'}{d_0}$ Richtige Vorzeichen

Verhältnis zwischen ε und ε_q über Proportionalität:

(156) $\varepsilon = m \cdot \varepsilon_q = \frac{1}{\nu} \cdot \varepsilon_q$ mit m = Poisson'sche Zahl und $\mu = \nu$ = Querdehnungszahl

(156.1) $\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m}$ Querkontraktion

(156.2) $\varepsilon_q = \frac{\sigma}{m \cdot E}$

(156.3) $m_{Stahl} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ m_{Stahl} = Poisson'sche Zahl für Stahl

(156.4) $\mu = \nu = 0{,}3 = \frac{1}{m}$ $\mu = \nu$ = Querdehnungszahl für Stahl

Dehnung der Querschnittsfläche

(157) $$\varepsilon_A = 2\frac{\Delta d}{d_0} = 2\varepsilon_q = 2\eta$$

Volumendehnung

(158) $$\varepsilon_V = \varepsilon \cdot \frac{m-2}{m} = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{m-2}{m}$$

Formänderungsarbeit bei Zugbeanspruchung

(159) $$W^* = \tfrac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta l$$ Arbeit im elastischen Bereich

(160) $$W^* = \tfrac{1}{2} \cdot V_0 \cdot \varepsilon \cdot \sigma = w \cdot V_0$$

(160.1) mit $$w = \tfrac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \sigma = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E}$$

Diese Arbeit W* ist innerhalb des elastischen Bereiches geleistet und kann bei Entlastung wiedergewonnen werden. Man nennt W* eine „innere Arbeit".

Wärmespannung

α = lineare Wärmeausdehnungszahl (bei Stahl: $1{,}17 \cdot 10^{-5}$ 1/K)

(161) $$\Delta l_T = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$$ Verlängerung durch Wärmedehnung

(162) $$\Delta l_{ges} = l_0 \cdot \left[\alpha \cdot (T_2 - T_1) + \frac{F}{A_0 \cdot E}\right]$$ Gesamtverlängerung

(162.1) $$F = \left[\frac{\Delta l_{ges}}{l_0} - \alpha \cdot (T_2 - T_1)\right] \cdot A_0 \cdot E$$ dazu nötige Kraft

(162.2) $$\sigma = \frac{F}{A_0} = \left[\frac{\Delta l_{ges}}{l_0} - \alpha \cdot (T_2 - T_1)\right] \cdot E$$ auftretende Spannung

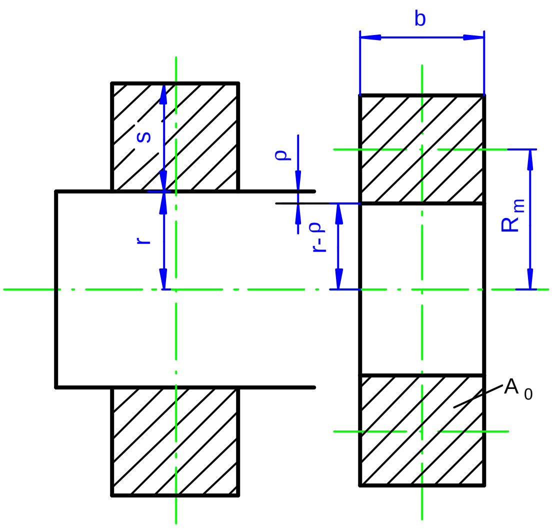
Schrumpfspannung

(163) Temperaturdifferenz

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha} = \frac{\rho}{r - \rho}$$ mit r = Wellenradius

(163.1) Gesamtreibungsmoment

$$M_R = 2\pi \cdot \mu_0 \cdot r \cdot \frac{\rho}{R_m} \cdot E \cdot A_0$$ für $s \ll R_m$



Nach Aufschrumpfen Lose, kalt

5.2 Tangential- oder Schubspannungen

Schubspannung

(164) $\tau = \frac{T}{A} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$ Schubspannung

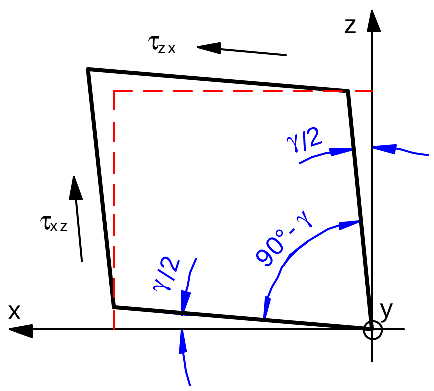
Satz der Gleichheit einander zugehöriger Schubspannungen:

(164.1) $|\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|$

Definition der Indizes bei Schubspannungen:

1. Index: Bezeichnung der Achse, die zur Spannungsebene senkrecht verläuft.

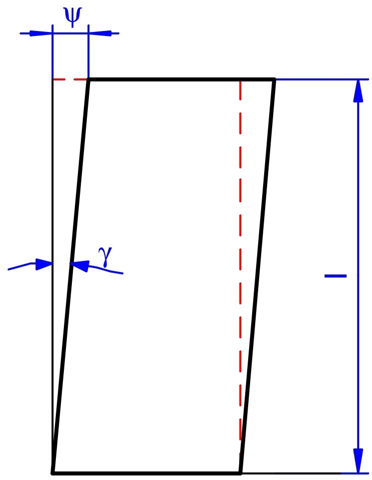
2. Index: Bezeichnung der Achse, die zur Spannung τ parallel verläuft.



Gleitung, Gleitwinkel

(165) $\gamma = \beta \cdot \tau = \frac{1}{G} \cdot \tau$; G = Gleitmodul; β = Gleitzahl

(165.1) $\tau = \frac{\gamma}{\beta} = \gamma \cdot G$



Gesamtgleitung

(165.2) $\psi = \gamma \cdot l = \frac{\tau}{G} \cdot l = \frac{T}{A} \cdot \frac{l}{G}$

Gleitmodul für Stahl

(166) $G_{Stahl} = 8{,}1 \cdot 10^4 \frac{N}{mm^2}$

Zusammenhang zwischen Gleit- und Elastizitätsmodul

(167) $G = \frac{E \cdot m}{2(m+1)}$

(167.1) $m = \frac{2G}{E - 2G}$

Torsion einer Welle mit Kreisquerschnitt

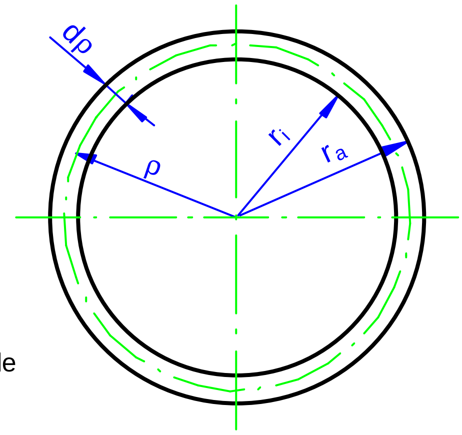
(168) $\varphi = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{l}{r} = \frac{\gamma \cdot l}{r}$ Verdrehwinkel

Dünne Hohlwelle (mit Radius r *und Wandstärke* dr*;* $r >> dr$*)*

(169) $M_t = 2\pi \cdot \tau_{x\varphi} \cdot \rho^2 \cdot d\rho$ Gesamt-Torsionsmoment

Dicke Hohlwelle oder Vollwelle (mit Radius r *und Wandstärke* dr*)*

(170) $I_p = \frac{(d_a{}^4 - d_i{}^4) \cdot \pi}{32}$ Polares Flächenmoment 2. Grades



(171) $\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_P}$ Verdrehwinkel

(172) $\tau = \frac{M_t \cdot \rho}{I_P}$ Torsionsspannung

(173) $\tau_{max} = \frac{M_t \cdot r_a}{I_P}$ Maximale Torsionsspannung

(174) $I_P = \frac{d^4 \cdot \pi}{32}$ Polares Trägheitsmoment für Vollwelle

(175) $W_P = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}$ Polares Widerstandsmoment nur für Vollwelle

(176) $\tau_{max} = \underbrace{\frac{M_t \cdot r}{I_P}}_{\text{auch Hohlwelle}} = \underbrace{\frac{M_t}{W_P}}_{\text{nur Vollwelle}}$ allgemein

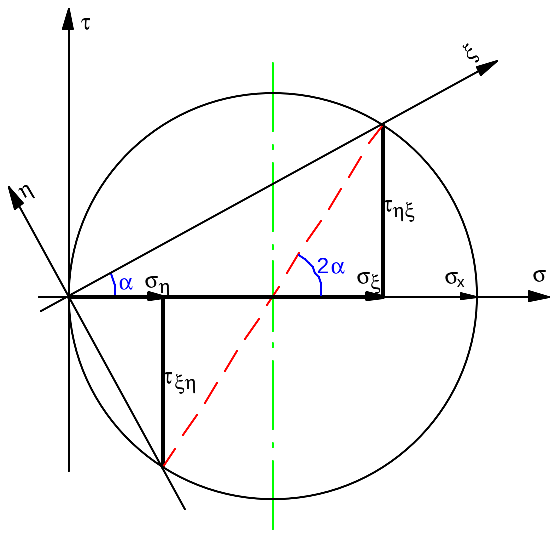
(177) $W^* = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot \varphi$ Formänderungsarbeit bei Torsion

(178) $W^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} \cdot V = w^* \cdot V$ ($V = A \cdot l =$ Volumen)

(179) $w^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G}$ spezielle Formänderungsarbeit

5.3 Spannungszustände

Einachsiger oder geradliniger Spannungszustand



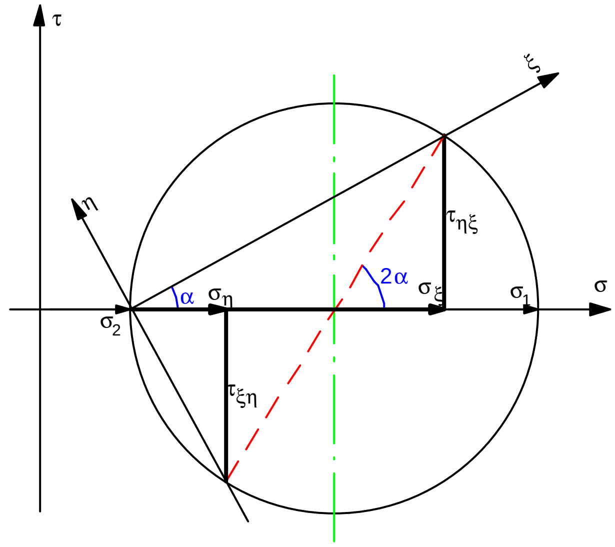
(180) $$\sigma_\xi = \sigma_x \cdot \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

(180.1) $$\tau_{\xi\eta} = -\sigma_x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

(181) $$\sigma_\eta = \sigma_x \cdot \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

(181.1) $$\tau_{\eta\xi} = \sigma_x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

Zweiachsiger oder ebener Spannungszustand



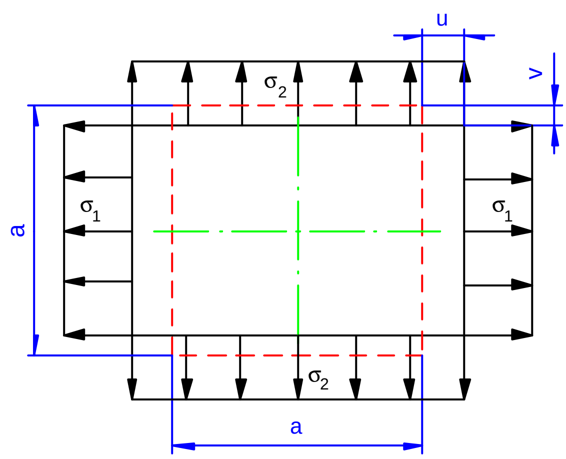
(182) $$\sigma_\xi = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

(182.1) $$\tau_{\xi\eta} = -\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

(183) $$\sigma_\eta = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

(183.1) $$\tau_{\eta\xi} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

Die Dehnungen im 2-achsigen Spannungszustand



(184) $$\varepsilon_u = \frac{u_{ges}}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m}\right)$$

$$\varepsilon_v = \frac{v_{ges}}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1}{m}\right)$$

Umrechnen allgemeiner Spannungen

(185) $$\sigma_x = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2} + \frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{\xi\eta} \cdot \sin 2\alpha$$

(185.1) $$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{\xi\eta} \cdot \cos 2\alpha$$

(186) $$\sigma_y = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2} - \frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \cdot \cos 2\alpha - \tau_{\xi\eta} \cdot \sin 2\alpha$$

(186.1) $$\tau_{yx} = +\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \cdot \sin 2\alpha - \tau_{\xi\eta} \cdot \cos 2\alpha$$

Allgemeines Gesetz für die Zerlegung allgemeiner Spannungen

(187) $$\sigma_{xx} = \sigma_{\xi\xi} \cdot \cos x\xi \cdot \cos x\xi + \tau_{\xi\eta} \cdot \cos x\xi \cdot \cos x\eta + \tau_{\eta\xi} \cdot \cos x\eta \cdot \cos x\xi + \sigma_{\eta\eta} \cdot \cos x\eta \cdot \cos x\eta$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{\xi\xi} \cdot \cos y\xi \cdot \cos y\xi + \tau_{\xi\eta} \cdot \cos y\xi \cdot \cos y\eta + \tau_{\eta\xi} \cdot \cos y\eta \cdot \cos y\xi + \sigma_{\eta\eta} \cdot \cos y\eta \cdot \cos y\eta$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{\xi\xi} \cdot \cos x\xi \cdot \cos y\xi + \tau_{\xi\eta} \cdot \cos x\xi \cdot \cos y\eta + \tau_{\eta\xi} \cdot \cos x\eta \cdot \cos y\xi + \sigma_{\eta\eta} \cdot \cos x\eta \cdot \cos y\eta$$

Umrechnung auf Hauptspannungen

(188) $$\tan 2\alpha^* = \frac{2\tau_{\xi\eta}}{\sigma_\xi - \sigma_\eta}$$

Die Invarianten des ebenen Spannungszustandes

1. Invariante

(189) $$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_1 + \sigma_2$$

(190) $$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2 = \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2}\right)^2 + \tau_{\xi\eta}{}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

2. Invariante

(190.1) $$\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}{}^2 = \sigma_\xi \sigma_\eta - \tau_{\xi\eta}{}^2 = \sigma_1 \sigma_2$$

Die Verzerrungen im ebenen Spannungszustand

(191) $$\gamma_{\xi\eta} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \sin 2\alpha$$ Änderung des rechten Winkels im Bogenmaß !

(191.1) $$\gamma_{\xi\eta} = -\frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

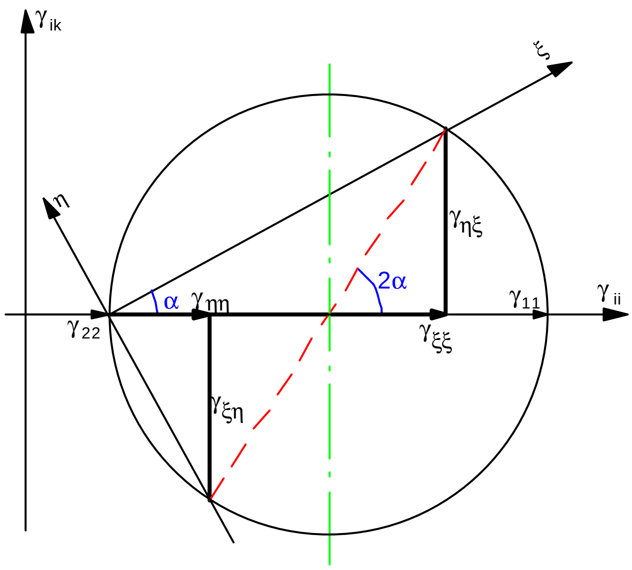
(192) $$2\varepsilon_\xi = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \cos 2\alpha$$

(192.1) $$\gamma_{\xi\xi} = 2\varepsilon_\xi = \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22}}{2} + \frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

(193) $$2\varepsilon_\eta = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \cos 2\alpha$$

(193.1) $$\gamma_{\eta\eta} = 2\varepsilon_\eta = \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22}}{2} - \frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

Verzerrungskreis



die Größen ...

$\gamma_{\xi\xi} = 2\varepsilon_\xi$

$\gamma_{\eta\eta} = 2\varepsilon_\eta$

$\gamma_{11} = 2\varepsilon_1$

$\gamma_{22} = 2\varepsilon_2$

... sind Dehnungen.

$\gamma_{\xi\eta}$ ist die Änderung des rechten Winkels im Bogenmaß.

Die Invarianten der Verzerrungenszustandes

(194) $$\gamma_{\xi\xi} + \gamma_{\eta\eta} = \gamma_{xx} + \gamma_{yy} = \gamma_{11} + \gamma_{22}$$

$$\varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\eta} = \varepsilon_{x} + \varepsilon_{y} = \varepsilon_{1} + \varepsilon_{2}$$

(194.1) $$\gamma_{xx}\gamma_{yy} - \gamma_{xy}^{2} = \gamma_{\xi\xi}\gamma_{\eta\eta} - \gamma_{\xi\eta}^{2} = \gamma_{11}\gamma_{22}$$

Allgemeine Umrechnungsformeln für Verzerrungen

geg: $\gamma_{xx} = 2\varepsilon_{x}$; $\gamma_{yy} = 2\varepsilon_{y}$; γ_{xy} (=Winkeländerung)
ges: $\gamma_{\xi\xi} = 2\varepsilon_{\xi}$; $\gamma_{\eta\eta} = 2\varepsilon_{\eta}$; $\gamma_{\xi\eta}$

(195) $$\gamma_{\xi\xi} = \frac{\gamma_{xx} + \gamma_{yy}}{2} + \frac{\gamma_{xx} - \gamma_{yy}}{2} \cdot \cos 2\alpha + \gamma_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

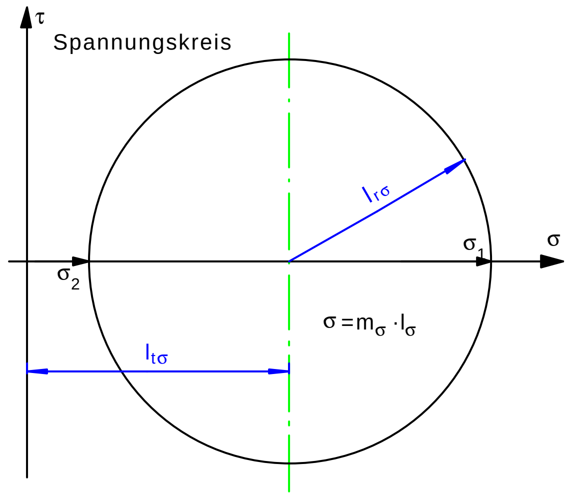
$$\gamma_{\eta\eta} = \frac{\gamma_{xx} + \gamma_{yy}}{2} - \frac{\gamma_{xx} - \gamma_{yy}}{2} \cdot \cos 2\alpha - \gamma_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

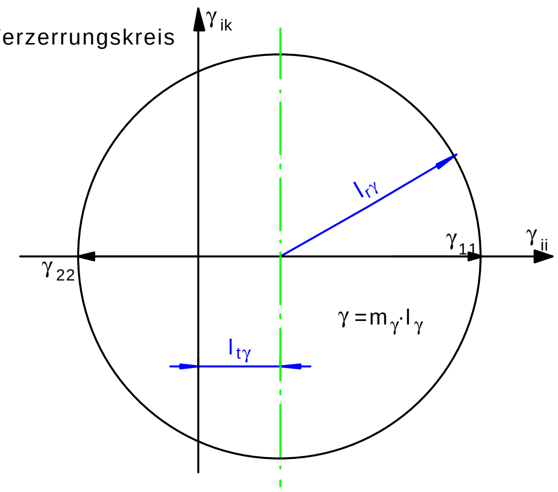
$$\gamma_{\xi\eta} = -\frac{\gamma_{xx} + \gamma_{yy}}{2} \cdot \sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

Ermittlung der Hauptverzerrungsrichtungen aus g_{xx} , g_{yy} und $g_{xx45°}$

(195.1) $$\gamma_{xy} = \gamma_{\xi\xi 45°} - \frac{\gamma_{xx} + \gamma_{yy}}{2}$$

Zusammenhang zwischen Spannungskreis und Verzerrungskreis





(196) $$\frac{l_{r\sigma}}{l_{r\gamma}} = \frac{Em}{2(m+1)} \cdot \frac{m_{\gamma}}{m_{\sigma}} = G \cdot \frac{m_{\gamma}}{m_{\sigma}}$$

(196.1) $$\sigma_1 = \frac{E \cdot m}{m^2 - 1} \cdot (\varepsilon_1 \cdot m + \varepsilon_2)$$

(196.2) $$\sigma_2 = \frac{E \cdot m}{m^2 - 1} \cdot (\varepsilon_2 \cdot m + \varepsilon_1)$$

(197) $$\frac{l_{t\sigma}}{l_{t\gamma}} = \frac{E \cdot m}{2 \cdot (m-1)} \cdot \frac{m_{\gamma}}{m_{\sigma}} = G \cdot \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{m_{\gamma}}{m_{\sigma}} = \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{l_{r\gamma}}{l_{r\gamma}}$$

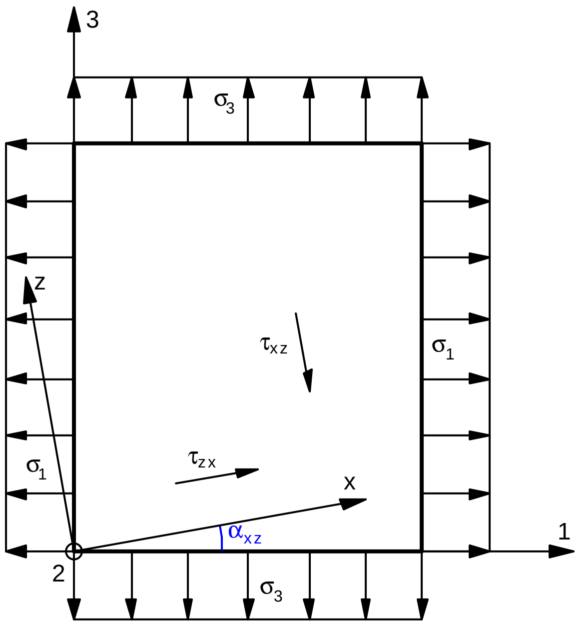
Zylinderkessel mit dünner Wand (s = Wandstärke)

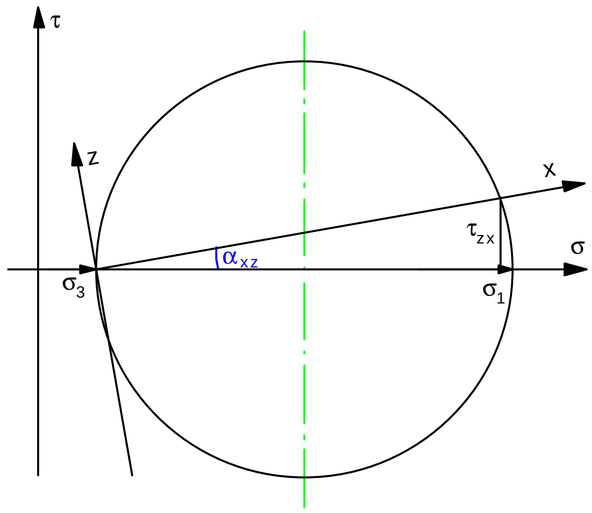
(198) $$\sigma_l = \frac{R}{2 \cdot s} \cdot p_i$$ Längsspannung

(198.1) $$\sigma_{\varphi} = \frac{R}{s} \cdot p_i = 2 \cdot \sigma_l$$ Tangentialspannung

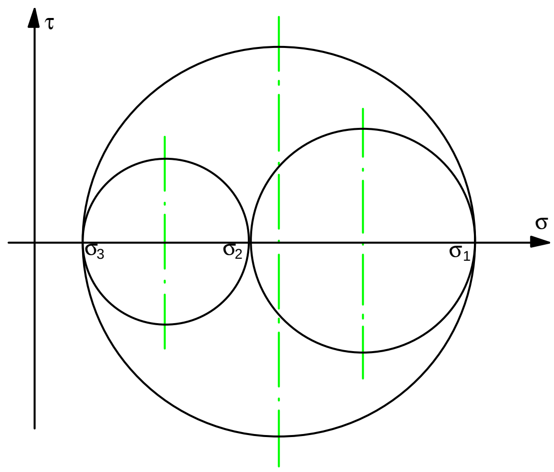
Dreiachsiger Spannungszustand

Hier ist der Spannungszustand in der Ebene 1 – 3 dargestellt. Eine Drehung um die Achse 2 ergibt Schubspannungen τ_{zx} bzw. τ_{zx} im System x – z.





Man kann diese drei ebenen Spannungszustände in drei Spannungskreisen ausdrücken, die man ineinander zeichnen kann.



Wenn 2 der vorhandenen Spannungen Hauptspannungen sind, dann ist zwangsläufig die
3. Spannung auch eine Hauptspannung.
Der ebene Spannungszustand ist nur ein Sonderfall des räumlichen, wobei eine Spannung = 0 ist.

Hydrostatischer Spannungszustand

Ein hydrostatischer Spannungszustand liegt vor wenn $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Der Spannungskreis des 3-achsigen Spannungszustandes wird zum Punkt, es gibt also keinerlei Schubspannungen, daher auch keine Winkelverzerrungen.

Verzerrungen im 3-achsigen Spannungszustand

(200) $$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

(201) $$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} - \frac{\sigma_z}{m} \right)$$

Dehnungen

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_y - \frac{\sigma_z}{m} - \frac{\sigma_x}{m} \right)$$

Die einzelnen Werte σ können auch negativ sein, wenn es sich um Druckspannungen handelt.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x}{m} - \frac{\sigma_y}{m} \right)$$

(202) $$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Volumendilatation

(202.1) $$e = \frac{m-2}{E \cdot m} \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \right)$$

(203) $$\sigma_x = \frac{E \cdot m}{m+1} \cdot \left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right)$$

Die Spannungen als Funktion der Dehnungen

$$\sigma_y = \frac{E \cdot m}{m+1} \cdot \left(\varepsilon_y + \frac{e}{m-2} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{E \cdot m}{m+1} \cdot \left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2} \right)$$

Formänderungsarbeit durch Schubspannungen

(204) $$W_\tau{}^*{}_{gesamt} = \left(w_1 + w_2 + w_3 \right) \cdot V_0 = \frac{\tau_{xy}{}^2 + \tau_{xz}{}^2 + \tau_{yz}{}^2}{2 \cdot G} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Formänderungsarbeit durch Normalspannungen

(205) $$W_\sigma{}^*{}_{gesamt} = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left(\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2 - \frac{2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_x\sigma_z + 2\sigma_y\sigma_z}{m} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Spez. Gesamtformänderungsarbeit durch Spannungen ausgedrückt

(206) $$w_{\sigma,\tau} = \frac{1}{E} \cdot \left[\frac{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2}{2} - \frac{\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z}{m} + \frac{m+1}{m} \cdot \left(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{xz}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 \right) \right]$$

(206.1) $$w_{\sigma,\tau} = \frac{1}{E} \cdot \left[\frac{\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \right)^2}{2} - \frac{m+1}{m} \cdot \left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z \right) + \frac{m+1}{m} \cdot \left(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{xz}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 \right) \right]$$

Spezielle Formänderungsarbeit durch Verzerrungen ausgedrückt

(206.2) $$w_{\varepsilon,\gamma} = G \cdot \left[e^2 \cdot \frac{m-1}{m-2} - 2 \cdot \left(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z \right) + \tfrac{1}{2} \cdot \left(\gamma_{xy}{}^2 + \gamma_{xz}{}^2 + \gamma_{yz}{}^2 \right) \right]$$

Gestaltänderungsarbeit und Dehnungsarbeit

Die Formänderungsarbeit besteht aus Dehnungsarbeit (Volumenänderung) und Gestaltänderungsarbeit (Verzerrung).

(208) $$w_{D\sigma} = \frac{\sigma''^2}{E} \cdot \frac{3(m-2)}{2m}$$ Dehnungsarbeit

(208.1) $$w_{D\varepsilon} = G \cdot e^2 \cdot \frac{m+1}{3(m-2)}$$

(209.1) $$w_{G\varepsilon} = -2G \cdot \left(\varepsilon_1'\varepsilon_2' + \varepsilon_1'\varepsilon_3' + \varepsilon_2'\varepsilon_3'\right)$$ Gestaltänderungsarbeit

(209.2) $$w_{G\varepsilon} = +\frac{G}{3} \cdot \left[(\varepsilon_1' - \varepsilon_2')^2 + (\varepsilon_1' - \varepsilon_3')^2 + (\varepsilon_2' - \varepsilon_3')^2\right]$$

(209.3) $$w_{G\sigma} = \frac{1}{12G} \cdot \left[(\sigma_1' - \sigma_2')^2 + (\sigma_1' - \sigma_3')^2 + (\sigma_2' - \sigma_3')^2\right]$$

$$w_{G\sigma} = \frac{m+1}{6 \cdot E \cdot m} \cdot \left[(\sigma_1' - \sigma_2')^2 + (\sigma_1' - \sigma_3')^2 + (\sigma_2' - \sigma_3')^2\right]$$

Überlagerung von Dehnungs- und Gestaltänderungsarbeit zur Formänderungsarbeit

(206.3) $$\underbrace{w_\varepsilon}_{\substack{\text{Formänd-} \\ \text{arbeit}}} = G \cdot \left[\underbrace{e^2 \cdot \frac{m+1}{3(m-2)}}_{\text{Dehnungsarbeit}} + \underbrace{\left\{-2 \cdot \left(\varepsilon_1'\varepsilon_2' + \varepsilon_1'\varepsilon_3' + \varepsilon_2'\varepsilon_3'\right)\right\}}_{\text{Gestaltänderungsarbeit}}\right]$$

(206.4) $$w_\varepsilon = \frac{G}{3} \cdot \left[e^2 \cdot \frac{m+1}{m-2} + \left\{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2\right\}\right]$$

(206.5) $$w_\sigma = \frac{1}{6 \cdot E \cdot m} \cdot \left[(m-2) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + (m+1) \cdot \left\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right\}\right]$$

Festigkeitshypothesen (Bruchhypothesen, Anstrengungshypothesen)

σ_v = Vergleichsspannung $\left(\sigma_v \le \sigma_{zul} = \frac{R_e}{s}\right)$

Theorie 1: Vergleich der größten Normalspannung (bei Versagen durch Trennbruch).

(210) $\sigma_v = \sigma_1$

Theorie 2: Vergleich der größten Dehnung zwischen zwei Punkten.

(211) $\sigma_v = \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m} - \frac{\sigma_3}{m}$

Theorie 3: Vergleich der größten Schubspannung (bei Versagen durch Gleitbruch).

(212) $\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3$

Theorie 4: Vergleich der Formänderungsarbeit

(213) $\sigma_v = \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \frac{2 \cdot (m+1)}{m}(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3)}$ oder

$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{3m} \cdot \left\{(m-2)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + (m+1) \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]\right\}}$

Theorie 5: Vergleich der Gestaltändänderungsarbeit

(214) $\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]}$

Festigkeitshypothesen bei Wellen

Theorie 1:

(210.1) $\sigma_{v(\sigma)} = \sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_w + \sqrt{\sigma_w} + \sqrt{\sigma_w{}^2 + 4\tau_w{}^2}$

Theorie 2:

(211.1) $\sigma_{v(\varepsilon)} = \frac{1}{2} \cdot \left[\sigma w \cdot \frac{m-1}{m} + \sqrt{\sigma_w{}^2 + 4\tau_w{}^2} \cdot \frac{m+1}{m}\right]$

(211.2) $\sigma_{v(\varepsilon)} = 0{,}35 \cdot \sigma_w + 0{,}65 \cdot \sqrt{\sigma_w{}^2 + 4\tau_w{}^2}$

Theorie 3:

(212.1) $\sigma_{v(\tau)} = \sqrt{\sigma_w{}^2 + 4\tau_w{}^2}$

Theorie 4:

(213.1) $\sigma_{v(w)} = \sqrt{\sigma_w{}^2 + \frac{2(m+1)}{m} \cdot \tau_w{}^2}$

(213.2) $\sigma_{v(w)} = \sqrt{\sigma_w{}^2 + 2{,}6 \cdot \tau_w{}^2}$

Theorie 5:

(214.1) $\sigma_{v(G)} = \sqrt{\sigma_w{}^2 + 3\tau_w{}^2}$

6. Allgemeine Biegung

6.1 Die Biegebeanspruchung

Allgemeines

Angreifende Belstungen an einem Balken können sein:

- Einzellasten F_i, A und B
- Streckenlasten q(x)
- Freie Momente M_i

$I_{äq}$ = äquatoriales Trägheitsmoment = Flächenträgheitsmoment = äq. Flächenmoment 2. Grades

(215.1) $\sum z^2 \cdot dA = \int z^2 \cdot dA = I_{äq}$ — η = Abstand von neutraler Faser

(215) $\sigma = \dfrac{M_b \cdot \eta}{i_{äq}}$; $\sigma_{max} = \dfrac{M_b \cdot \eta_{max}}{I_{äq}}$ — Biegespannung

Errechnung von Flächenträgheitsmomenten

Rechtecksfläche

(216.1) $I_{äq} = \dfrac{b \cdot h^3}{12}$ — äquatoriales Trägheitsmoment

(216.2) $W_{äq} = \dfrac{b \cdot h^2}{b}$ (nur für Vollquerschnitt) — äquatoriales Widerstandsmoment

(216) $$\sigma_{max} = \underbrace{\frac{M_b \cdot \eta_{max}}{I_{äq}}}_{\substack{\text{auch}\\ \text{Hohlquerschnitt}}} = \underbrace{\frac{M_b}{W_{äq}}}_{\substack{\text{nur}\\ \text{Vollquerschnitt}}}$$

Kreisquerschnitt

(217.1) $I_{äq} = \dfrac{d^4 \cdot \pi}{64}$ — äquatoriales Trägheitsmoment

(217.2) $W_b = \dfrac{\pi \cdot d^3}{32}$ (nur für Vollquerschnitt) — äquatoriales Widerstandsmoment

(217) $$\sigma_{max} = \underbrace{\frac{M_b \cdot \eta_{max}}{I_{äq}}}_{\substack{\text{auch}\\ \text{Hohlquerschnitt}}} = \underbrace{\frac{M_b}{W_b}}_{\substack{\text{nur}\\ \text{Vollquerschnitt}}}$$

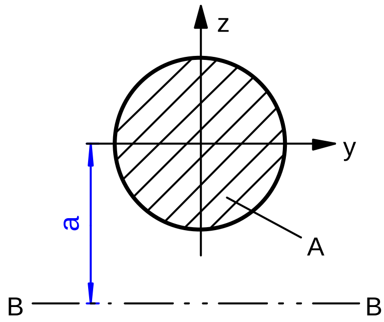
Hohler Kreisquerschnitt

(217.3) $$I_{yy} = I_{zz} = \frac{d_a^{\,4} - d_i^{\,4}}{64} \cdot \pi$$

(217.4) $$\sigma_{max} = \frac{M_b \cdot \eta_{max}}{I_{äq}} = \frac{M_b \cdot \dfrac{d_a}{2}}{\dfrac{(d_a^{\,4} - d_i^{\,4}) \cdot \pi}{64}}$$

Umrechnung von Flächenträgheitsmomenten auf parallele Achsen (Steiner'scher Satz)

(218) $I_{BB} = I_{äq}{}^* = I_{äqSchwerachse} + a^2 \cdot A$



Flächenträgheitsmomente zusammengesetzter Flächen
Flächenträgheitsmomente mit gleicher Bezugsachse dürfen addiert werden.
Das äquatoriale Trägheitsmoment eines fehlenden Flächenteils darf von dem $I_{äq}$ der Gesamtfläche abgezogen werden, fall gleiche Bezugsachse vorliegt.
Widerstandsmomente dagegen, dürfen nicht addiert werden.

Der Krümmungsradius

(219) $\frac{1}{\rho} = K = \frac{M_b}{E \cdot I_{äq}}$ ρ = Krümmungsradius, K = Krümmung

6.2 Allgemeine Balkenbiegung

(220) $K = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)} \cdot \frac{3}{2}$ Krümmung

(221) $K = -y''$

(222) $Q(x) = \frac{d(-M(x))}{dx}$

(223) $q(x) = \frac{dQ(x)}{dx}$

Allgemeine Biegeformeln

(224) $E \cdot I_{äq} \cdot y^{IV} = E \cdot I_{äq} \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x)$

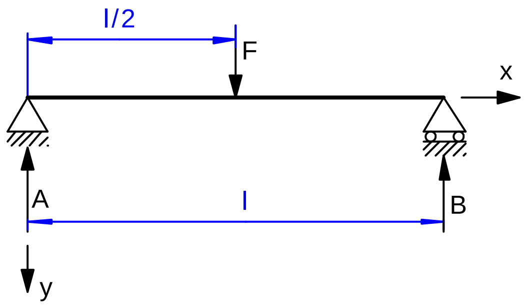
(225) $E \cdot I_{äq} \cdot y''' = E \cdot I_{äq} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} = Q(x)$

(226) $E \cdot I_{äq} \cdot y'' = E \cdot I_{äq} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$

(227) $E \cdot I_{äq} \cdot y' = E \cdot I_{äq} \cdot \frac{dy}{dx} = -\int M(x)dx$

(228) $E \cdot I_{äq} \cdot y = E \cdot I_{äq} \cdot y(x) = -\int\left(\int M(x)dx\right)dx$

Einzellast in der Mitte



Symmetrie:

$A = B = \frac{F}{2}$

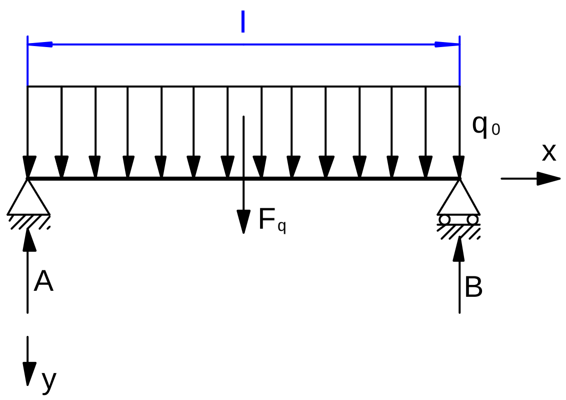
(229) $y = \frac{F \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot I_{äq}} \cdot \left[-\frac{x^3}{l^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{l} \right]$ Biegelinie

(229.1) $y' = \frac{F \cdot l^2}{4 \cdot E \cdot I_{äq}} \cdot \left[-\frac{x^2}{l^2} + \frac{1}{4} \right]$ Neigung

(229.2) $y'(0) = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot I_{äq}}$ Neigung bei x = 0

(229.3) $f = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_{äq}}$ Maximale Durchbiegung

Konstante Streckenlast q_0



Symmetrie:

$A = B = \frac{q_0 \cdot l}{2}$

(230) $y = \frac{q_0 \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I_{äq}} \cdot \left[\frac{x^4}{l^4} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right]$ Biegelinie

(230.1) $f = \frac{5}{16 \cdot 24} \cdot \frac{q_0 \cdot l^4}{E \cdot I_{äq}} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_0 \cdot l^4}{E \cdot I_{äq}}$ Maximale Durchbiegung

(230.2) $y' = \frac{q_0 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I_{äq}} \cdot \left[\frac{x^3}{l^3} - \frac{3 \cdot x^2}{2 \cdot l^2} + \frac{1}{4} \right]$ Neigung

(230.3) $y'(0) = \frac{q_0 \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I_{äq}}$ wegen Symmetrie: $y'(l) = -\frac{q_0 \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I_{äq}}$ Neigung

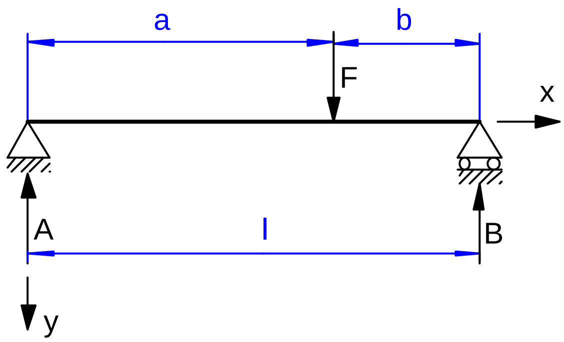
(230.4) $M(x) = \frac{q_0 \cdot l^2}{2} \cdot \left[-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x}{l} \right]$ Biegemoment (wie 31.1)

(230.5) $Q(x) = q_0 \cdot l \cdot \left[\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right]$ Querkraft (wie 31.2)

Unsymmetrische Einzellast

$$A = \frac{b}{l}\cdot F$$

$$B = \frac{a}{l}\cdot F$$



(231) $$y = \frac{F\cdot l^3}{6\cdot E\cdot I_{äq}}\cdot\left[-\frac{b}{l}\cdot\frac{x^3}{l^3}+\frac{a}{l}\cdot\frac{b}{l}\cdot\frac{l+b}{l}\cdot\frac{x}{l}\Bigg|+\frac{(x-a)^3}{l^3}\right]$$ Biegelinie

(231.1) $$y' = \frac{F\cdot l^2}{2\cdot E\cdot I_{äq}}\cdot\left[-\frac{b}{l}\cdot\frac{x^2}{l^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{l}\cdot\frac{b}{l}\cdot\frac{l+b}{l}\Bigg|+\frac{(x-a)^2}{l^2}\right]$$ Neigung

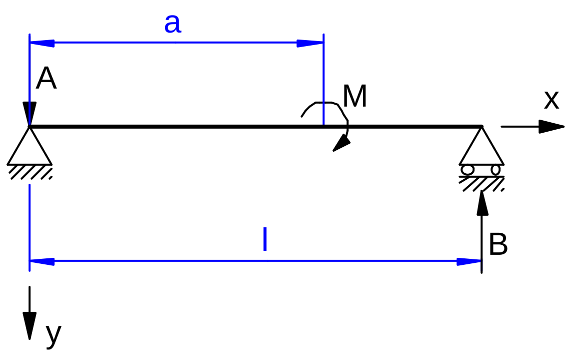
Sonderfall: mittige Einzellast

(231.2) $$y' = \frac{F\cdot l^3}{12\cdot E\cdot I_{äq}}\cdot\left[-\frac{x^3}{l^3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{l}\Bigg|+2\cdot\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right)^3\right]$$ wie (229)

Lastmoment bei x=a

$$A = -\frac{M}{l}$$

$$B = \frac{M}{l}$$



(232) $$y = \frac{M\cdot l^2}{6\cdot E\cdot I_{äq}}\cdot\left[\frac{x^3}{l^3}+\frac{x}{l}\cdot\left(2-6\cdot\frac{a}{l}+3\cdot\frac{a^2}{l^2}\right)-3\cdot\left(\frac{x-a}{l}\right)^2\right]$$ Biegelinie

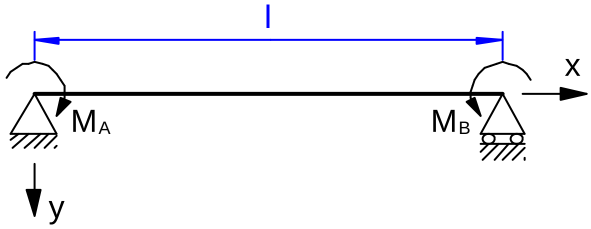
(232.1) $$y' = \frac{M\cdot l}{2\cdot E\cdot I_{äq}}\cdot\left[\frac{x^2}{l^2}+\left(\frac{2}{3}-2\cdot\frac{a}{l}+\frac{a^2}{l^2}\right)\Bigg|-2\cdot\frac{x-a}{l}\right]$$ Neigung

Zwei gleiche entgegengesetzt gerichtete Momente an den Stabenden

$\left|\vec{M}_A\right| = \left|\vec{M}_B\right|$

A = 0

B = 0



(233)