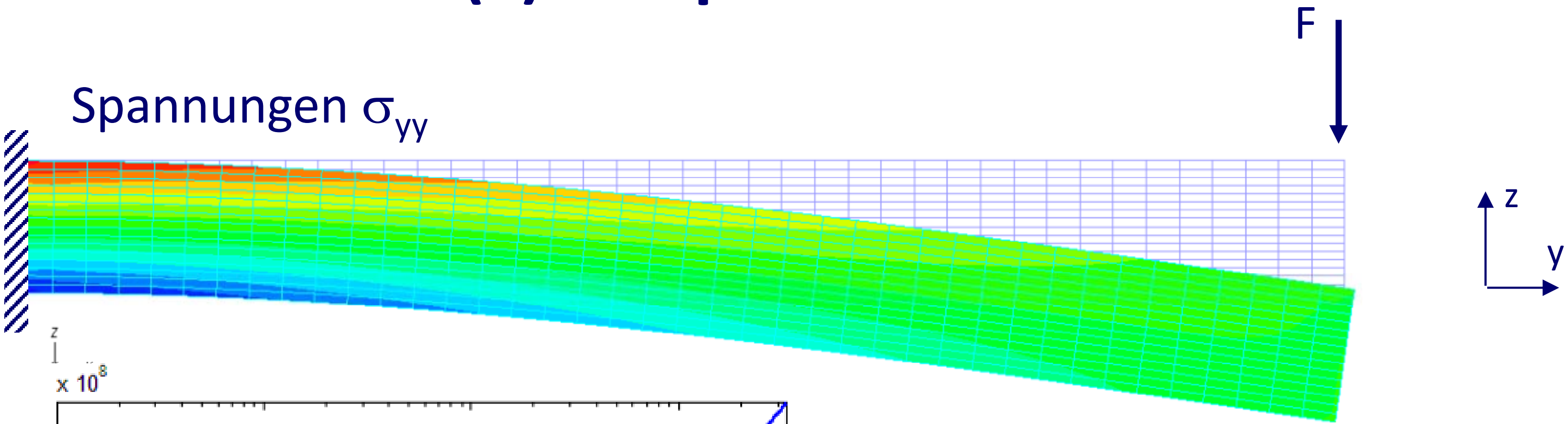
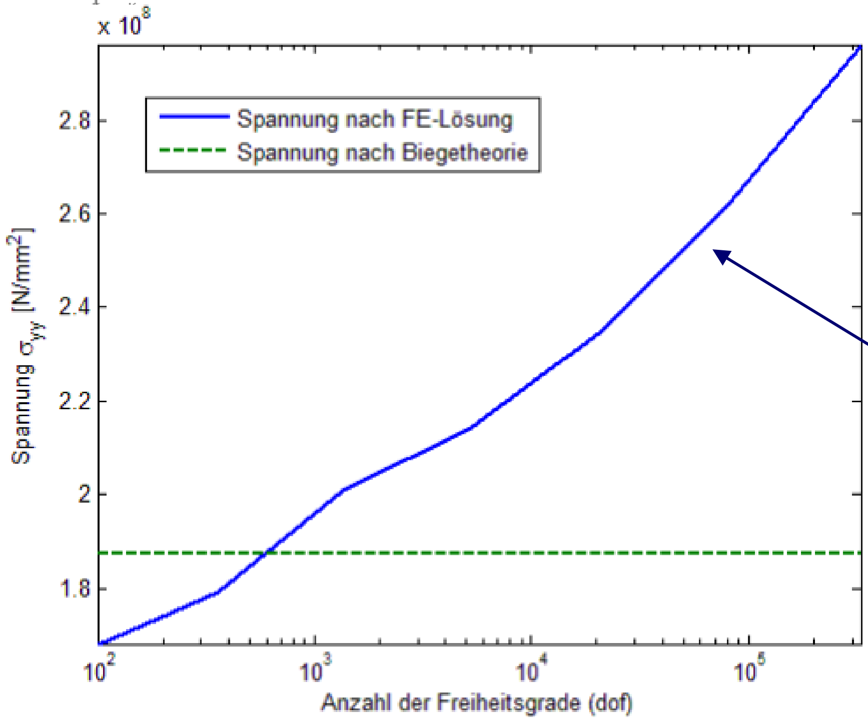
Modellierung mit FEM
Kapitel 5: Singularitäten

Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch
Department Maschinenbau und Produktion
Fakultät Technik und Informatik
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

thomas.graetsch@haw-hamburg.de

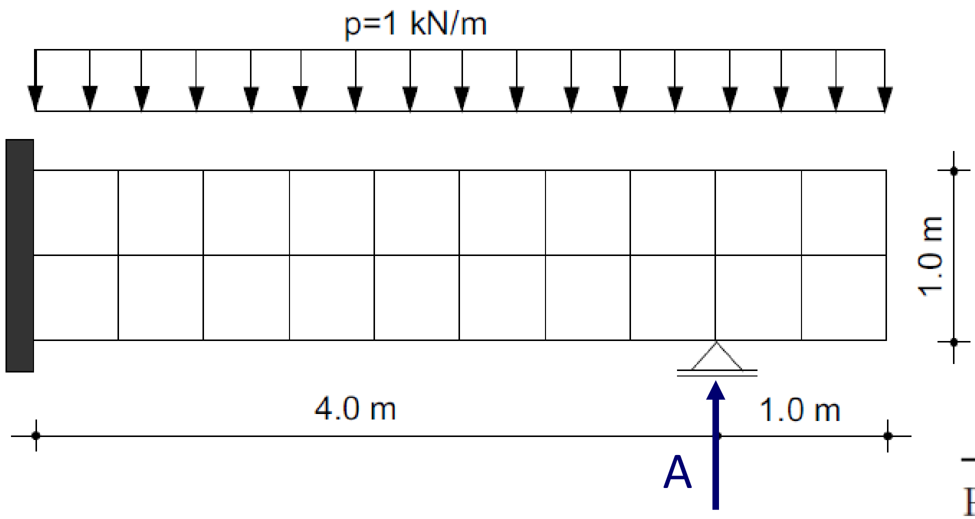
Ein einfaches(?) Beispiel





Spannungen σ_{yy} in der linken oberen Ecke steigen mit zunehmender Netzverfeinerung

Ein weiteres Beispiel



Freiheitsgrade	Lagerkraft	Einspannmoment	Durchbiegung
Balkenlösung	2.70	-1.70	8.39
66	2.70	-1.70	4.45
116	2.70	-1.70	3.67
203	2.70	-1.70	2.89
378	2.69	-1.74	1.00
694	2.69	-1.74	-0.37
1202	2.68	-1.78	-1.98
∞	**0**	**-12.5**	**-937.5**

Die Lagerkraft A nimmt mit zunehmender Netzverfeinerung ab

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Was sind Singularitäten?

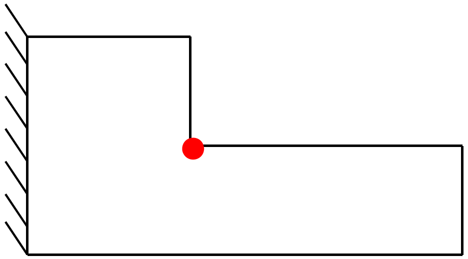
- Mit singulären Stellen einer Struktur (kurz: “Singularitäten”) werden diejenigen Stellen bezeichnet, an denen die Verformungen und/oder Spannungen unendlich groß sind
- Singularitäten können geometrisch bedingt sein oder aus der Belastung resultieren
- Singularitäten sind immer ein ‘Artefakt’ des mathematischen Modells und nicht der FE-Lösung
- Sind Singularitäten im mathematischen Modell enthalten, werden sie von der FE-Lösung durch Netzverfeinerung wiedergegeben (Näherung an Unendlichkeitswert)

Was sind Singularitäten?

Reales Objekt

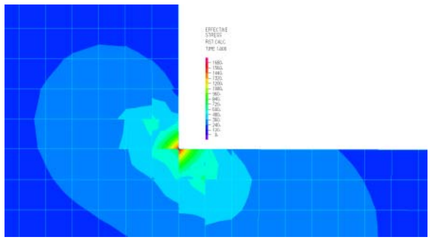
Reales Objekt enthält keine Singulariäten

Mathematische Modell



Mathematisches Modell enthält Singularitäten

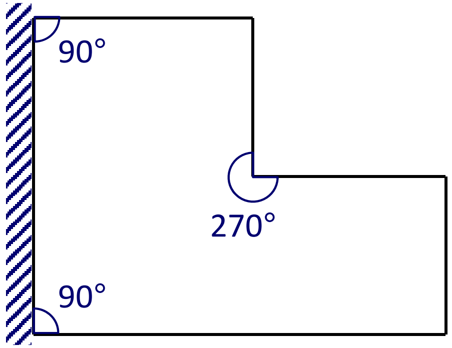
FE-Modell



FEM approximiert Singularitäten bestmöglich

Singularitäten aus der Geometrie

Singularitäten aufgrund der Geometrie treten an Randpunkten auf, an denen der eingeschlossene Innenwinkel der beiden Randtangenten, in Abhängigkeit der Lagerungsart, einen kritischen Wert überschreitet



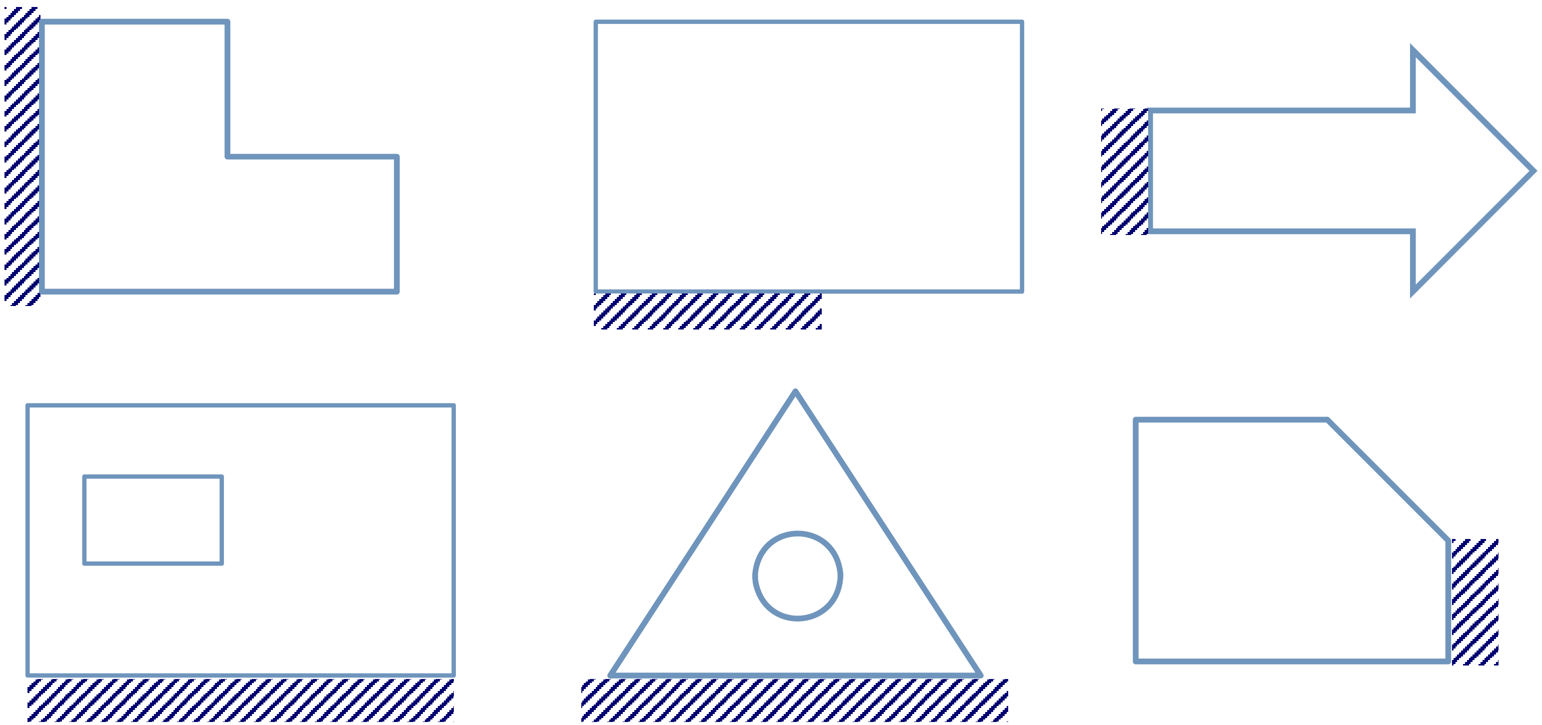
Für Scheiben gilt (ν = 0,3):

Lagerungsart im Randpunkt	Verschiebungen singulär ab	Spannungen singulär ab
eingespannt – eingesp.	180°	180°
frei – frei	180°	180°
eingespannt – frei	≈ 63°	≈ 63°

Lit.: Williams M.L., Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, Journal of Applied Mathematics 12 (1952), S. 526-528

Singularitäten aus der Geometrie

Übungsbeispiele: Finden Sie alle singulären Stellen!



Singularitäten aus der Geometrie

Für die Kirchhoffplatte (schubstarre Platte) gelten folgende Werte ($\nu = 0{,}3$):

Lagerungsart im Randpunkt	Biegemoment singulär ab	Querkraft singulär ab
eingespannt – eingesp.	180°	≈ 126,28°*
gelenkig – gelenkig	90°*	60°*
frei – frei	180°	≈ 77,75°*
eingespannt – gelenkig	≈ 128,73°	90°
eingespannt – frei	≈ 95,35°	≈ 52,05°
gelenkig – frei	90°	≈ 51,12°

*ohne 180°

⇒ Übungsaufgabe an der Tafel

Lit.: Melzer H., Rannacher R., Spannungskonzentrationen in Eckpunkten der Kirchhoffschen Platte, Bauingenieur 55 (1980), S. 181-184

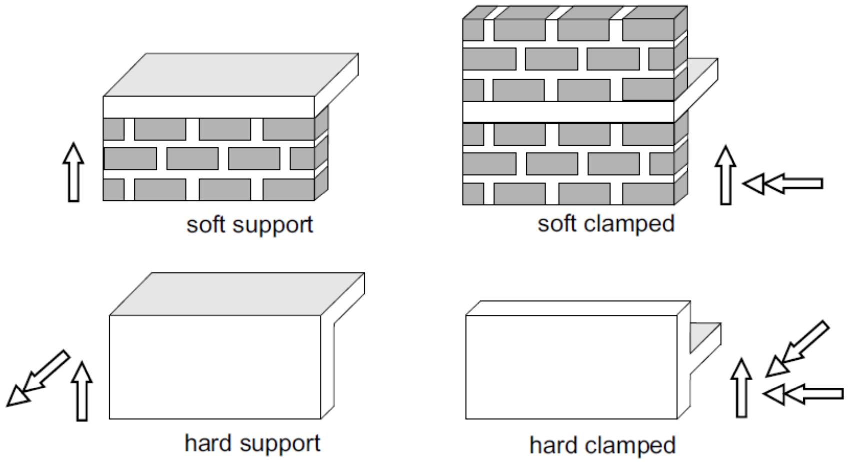
Singularitäten aus der Geometrie

Für die Reissner-Mindlin-Platte (schubweiche Platte) gelten folgende Werte:

Lagerungsarten im Eckpunkt	Biegemoment unbeschränkt ab	Querkraft unbeschränkt ab
hard clamped-hard clamped	180°	180°
soft clamped-soft clamped	90°*	180°
hard support-hard support	90°*	180°
soft support-soft support	180°	180°
frei-frei	180°	180°
hard clamped-soft clamped	90°	180°
hard clamped-hard support	90°	180°
hard clamped-soft support	$\approx 61.70°$ ($\nu = 0.29$)	180°
hard clamped-frei	$\approx 61.70°$ ($\nu = 0.29$)	90°
soft clamped-hard support	45°	90°
soft clamped-soft support	90°	180°
soft clamped-frei	90°	90°
hard support-soft support	$\approx 128.73°$	180°
hard support-frei	$\approx 128.73°$	90°
soft support-frei	180°	90°

*ohne 180°

Lagerungsarten:



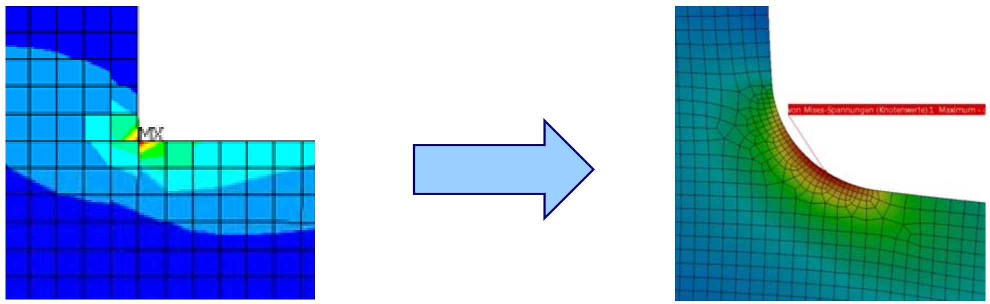
Lit.: Rössle A., Sändig A.-M., Corner singularities and regularity results for the Reissner/Mindlin plate model. Preprint 01/04 des Sonderforschungsbereiches 404 "Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik" an der Universität Stuttgart, 2001

Empfehlungen für die Praxis

Empfehlungen für die Praxis zur Auswertung von Spannungen an singulären Stellen:

1.) Gut konstruieren (und FE-Modellieren!)

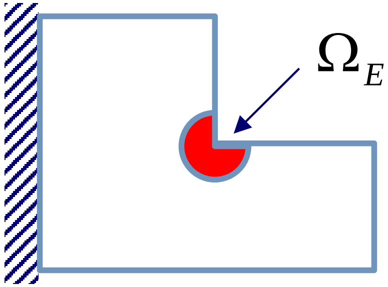
- Ersetzen einer “scharfen Ecke” durch einen Radius bzw. einer ausgerundeten Fase
- Im FE-Modell den Radius ausmodellieren und ausreichend fein vernetzen



Empfehlungen für die Praxis

2.) Bildung integraler Spannungen

- Mittelwertbildung der FE-Spannungen über Integrationsbereich:



Ω_E : Integrationsbereich

$$\sigma_M = \frac{1}{|\Omega_E|} \int_{\Omega_E} \sigma \, dV$$

- Kernfrage: Wie groß ist Ω_E zu wählen?
- Tipp: Ω_E möglichst klein wählen und sicherstellen, dass σ_M mit Netzverfeinerung konvergiert

Empfehlungen für die Praxis

Oftmals können integrale Schnittgrößen auch entlang einer Linie gebildet werden:

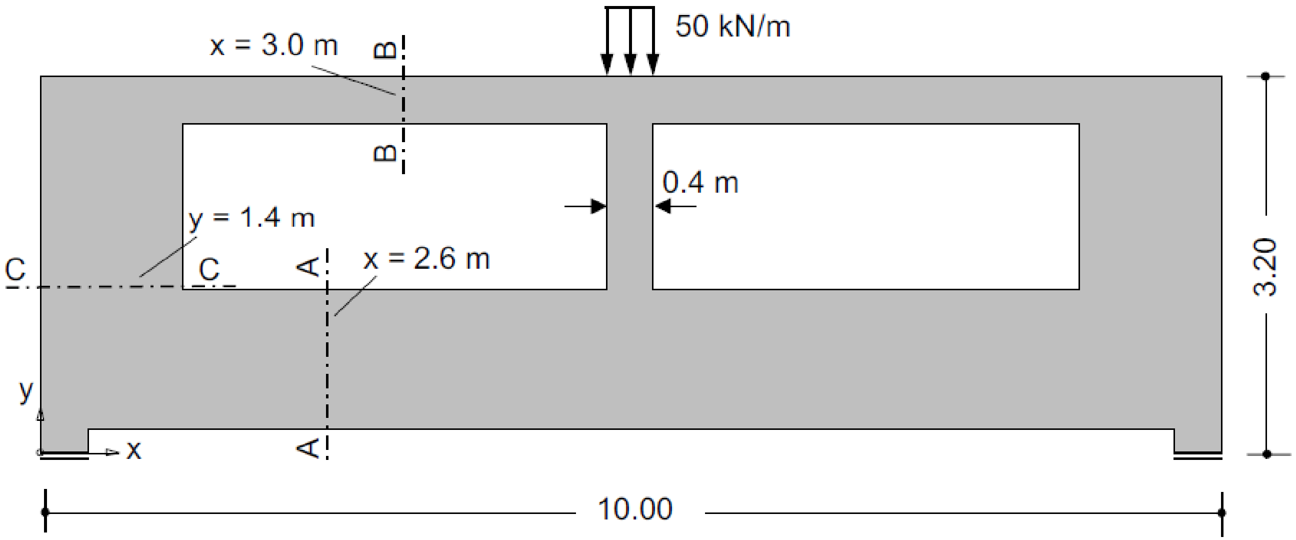


Tabelle 6.9: Spannungen σ^h_{yy} [kN/m^2] im Schnitt C–C ($y = 1.40$)

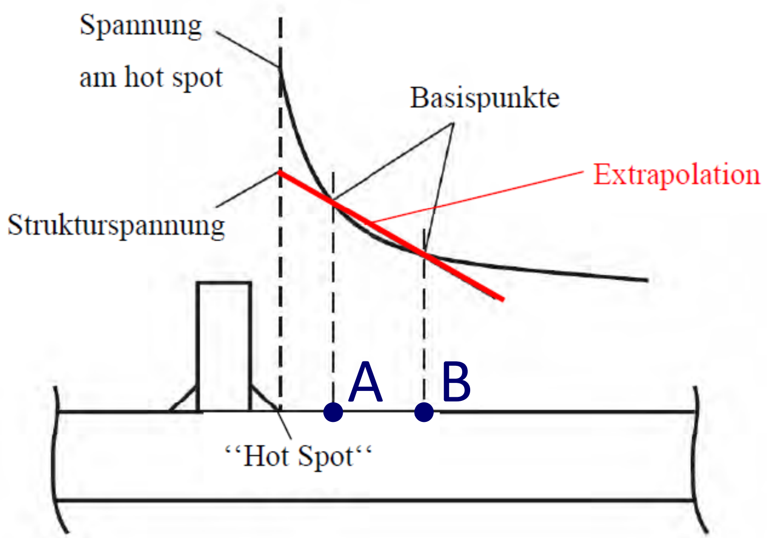
$x = \ldots$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
REM	−48.62	−31.17	−18.25	−6.74	6.07
FEM (6 El.)	−44.36	−28.71	−17.19	−6.92	4.58
FEM (7 El.)	−45.30	−29.23	−17.33	−6.68	5.23
FEM (8 El.)	−45.26	−29.19	−17.32	−6.68	5.23
	0.9	1.0	1.1	1.2	$\int \sigma^+_{yy}\,\mathrm{dx}$
REM	14.22	25.28	45.06	81.27	12.75 kN
FEM (6 El.)	–	20.34	–	56.97	9.68 kN
FEM (7 El.)	–	22.30	39.13	80.74	11.51 kN
FEM (8 El.)	13.42	23.11	38.31	80.74	11.51 kN

Konvergenz integraler Spannungen

Empfehlungen für die Praxis

3.) Extrapolation der Spannungen

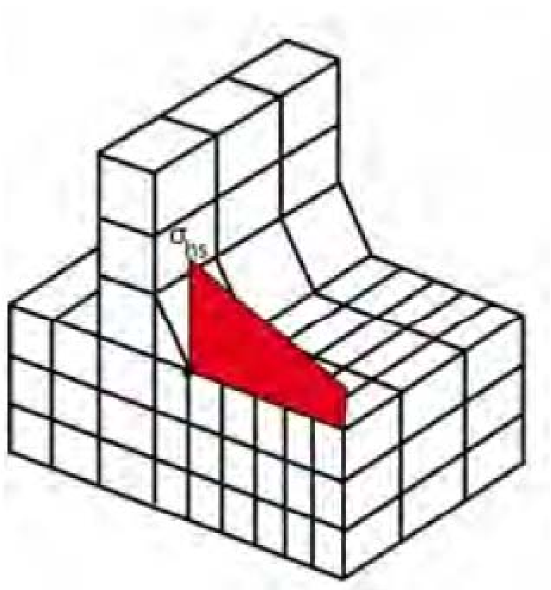
- Methode aus Lebensdauerberechnung, wird dort “Strukturspannungs-konzept” genannt



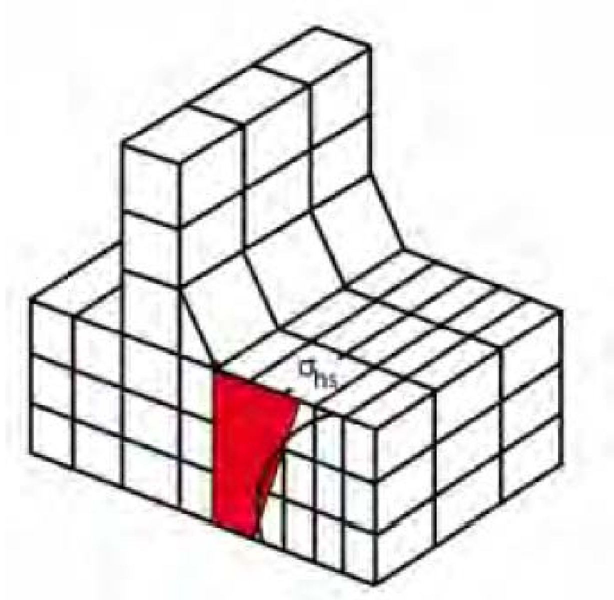
- Kernfrage: Wo werden die Punkte A und B gesetzt?
- Teilweise existieren hierfür Empfehlungen aus Normen

Empfehlungen für die Praxis

Extrapolation der Spannungen im 3D:



Extrapolation entlang der Oberfläche

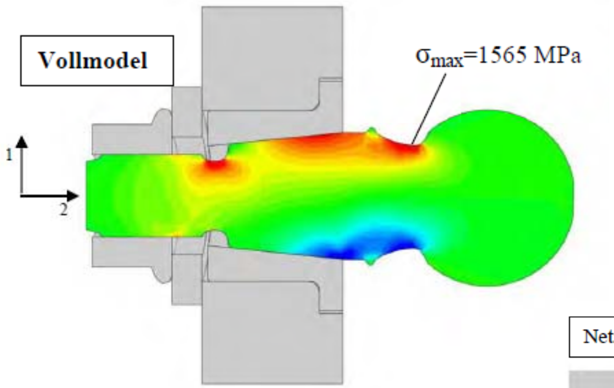


Extrapolation über die Bauteildicke

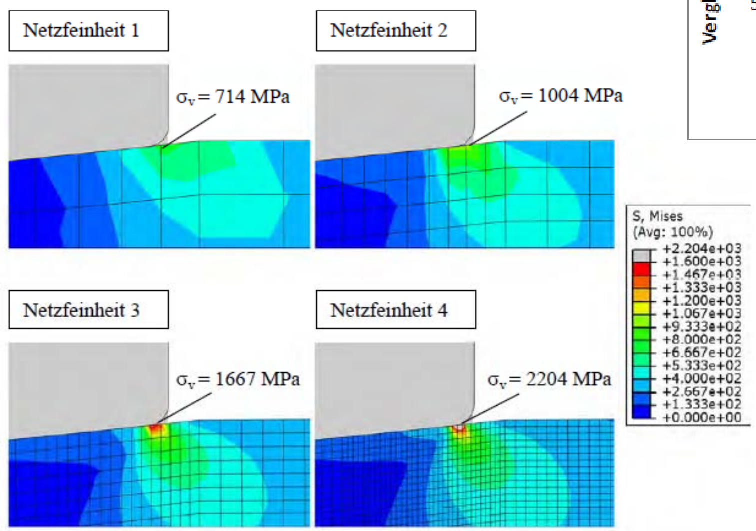
$\Rightarrow$ Beide Richtungen getrennt voneinander untersuchen

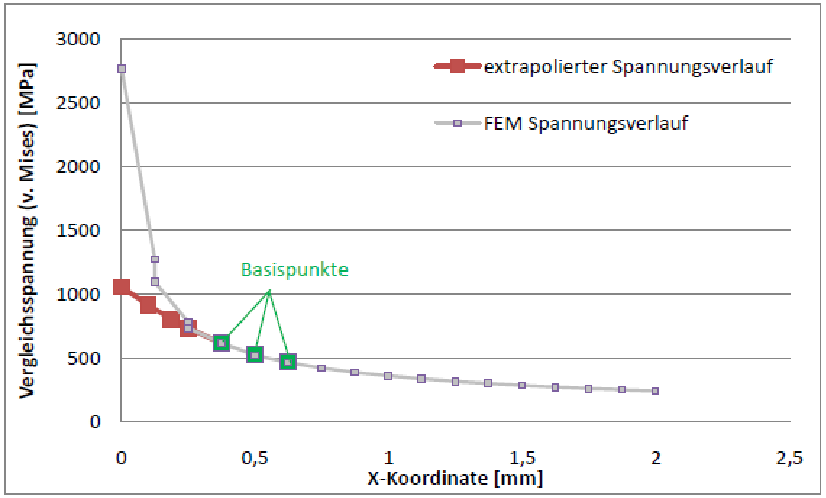
Empfehlungen für die Praxis

Beispiel für Extrapolationsverfahren



Auftreten von Singularitäten





Wahl geeigneter Basispunkte

(Erster Punkt dort, wo Spannungen mit Netzverfeinerung erstmals konvergieren)

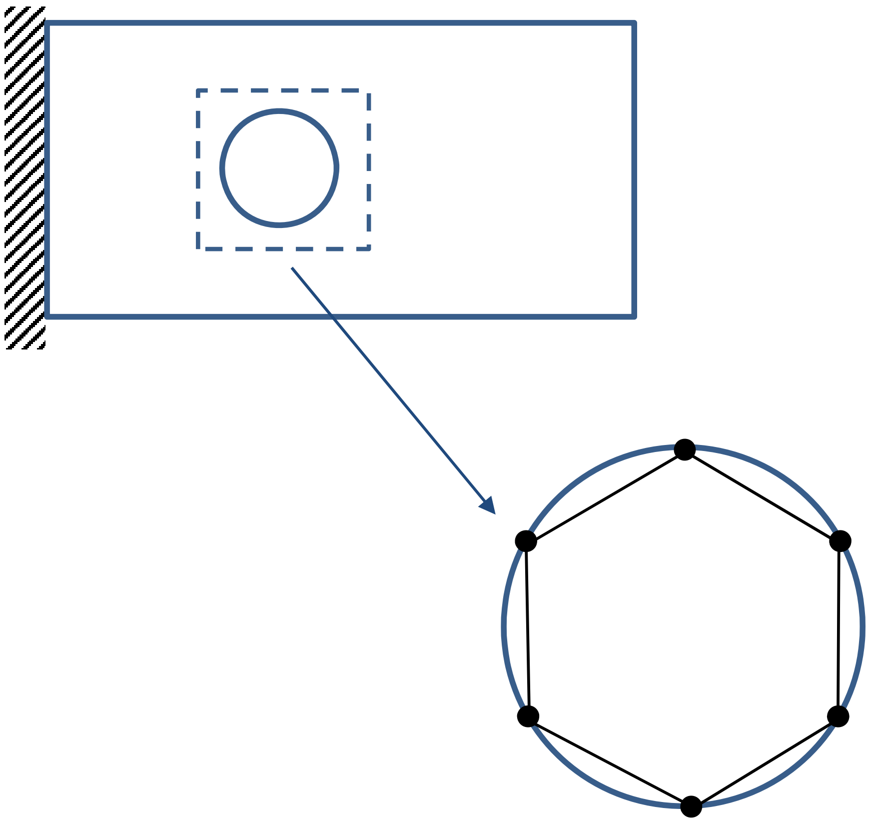
Empfehlungen für die Praxis

Übungsbeispiel zum Extrapolationsverfahren:

Die singuläre Spannung in einer Ecke lautet $\sigma(r) = 1/r$

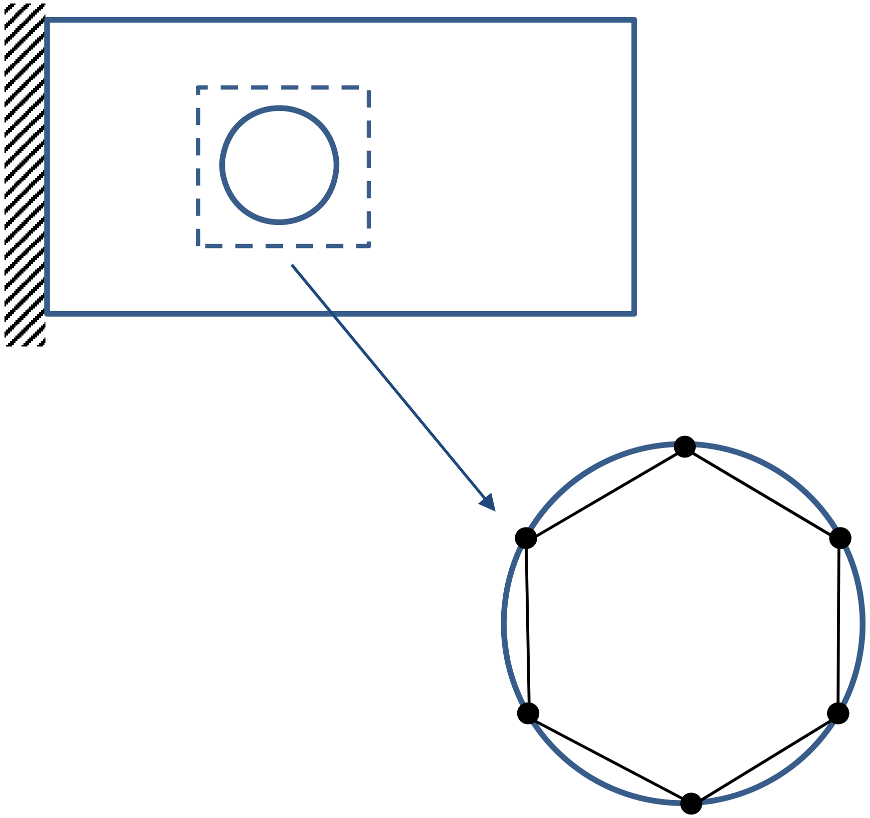
- Wie lautet die Extrapolationsformel, wenn Stützstellen im Abstand von 0,4 und 0,8 von der Ecke verwendet werden sollen und linear interpoliert werden soll?
- Wie groß ist die Bemessungsspannung in der Ecke?

Approximation der Geometrie



- Mit linearen finiten Elementen wird eine Kreisgeometrie geometrisch als Polygonzug angenähert
- Eine Singularität liegt in den Ecken des Polygonzugs <u>nicht</u> vor, da sie nicht im mathematischen Modell enthalten ist, d.h. Netzverfeinerung liefert konvergente Spannungen entlang des Kreisbogens

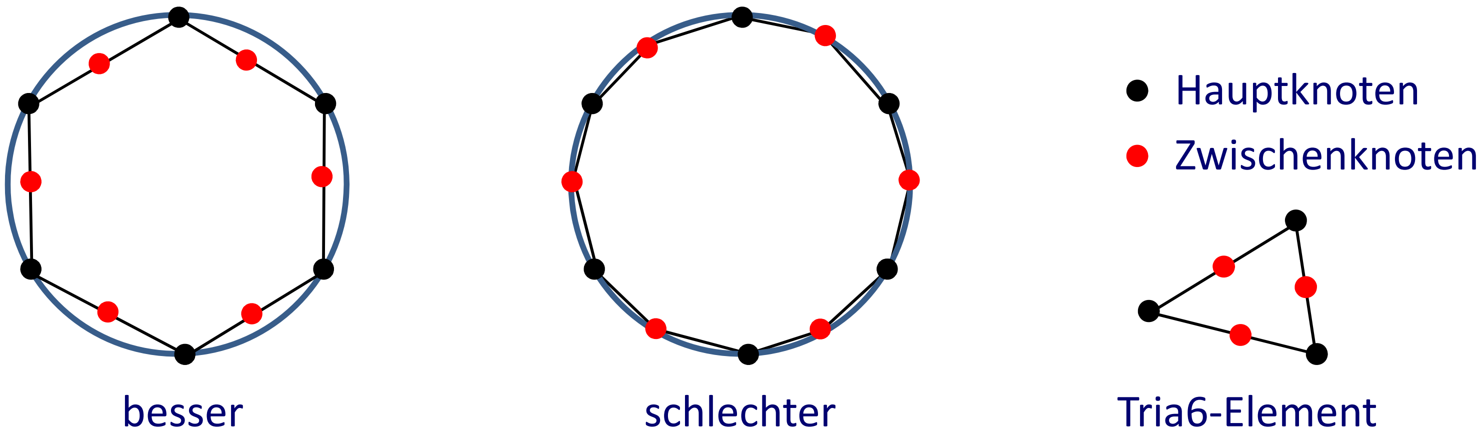
Approximation der Geometrie



- Geometrische Fehler im FE-Modell haben auf Spannungen i.d.R. nur einen Einfluss auf das Nahfeld, aber nicht auf das Fernfeld
- Empfehlung: 8-10 Elemente pro Umfang, wenn Fernfeld von Interesse, sonst mind. 10-12 pro Viertelkreis, bzw. Konvergenzanalyse durchführen

Approximation der Geometrie

- Interessante Beobachtung: Zwischenknoten bei quadratischen Elementen auf Verbindungslinie der Hauptknoten liefert oftmals bessere Spannungen im Nahfeld als Zwischenknoten auf Kreisbogen:



- Neueste Enwicklung: IGA (Isogeometric Analysis), d.h. Integration von CAD und FEM durch Splines-Ansatzfunktionen und Elementgeometrie

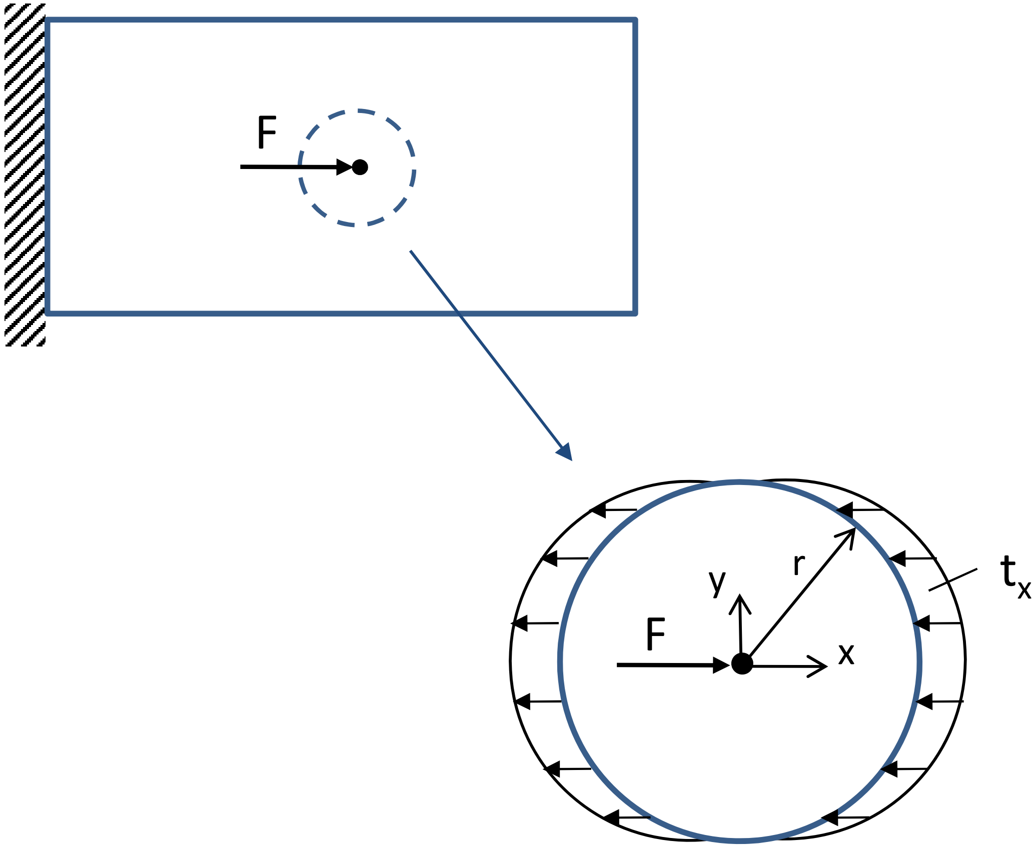
Singularitäten aus der Geometrie

Zusammenfassung

- Spannungen an singulären Stellen sind bereits vor der Berechnung bekannt, d.h. sie sind unendlich groß
- Die punktförmige Auswertung an solchen Stellen ist daher sinnlos, jedoch sind Singularitäten immer ein Hinweis auf Spannungsspitzen und daher stets zu beachten
- Eine extrem feine Vernetzung an Singularitäten ist nicht nötig, dennoch werden ausreichend feine Netze zur Bildung integraler Spannungen bzw. für Extrapolationen benötigt
- Am besten Einführen eines Radius mit Konvergenzuntersuchung

Singularitäten aus der Belastung

Bsp.: Scheibe unter Einzelkraft

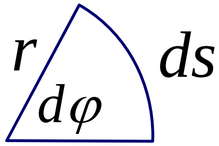


Aus Gleichgewichtsgründen gilt:

$$F = \int_U t_x \, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} t_x \cdot r \, \mathrm{d}\varphi \quad (\text{mit } ds = r \cdot d\varphi)$$

$$= t_x \cdot r \cdot 2\pi$$



$$\text{kleine Winkel}: d\varphi \approx ds / r$$

Singularitäten aus der Belastung

Randspannungen:

$$t_x = \frac{F}{r \cdot 2\pi} \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \to 0} t_x = \lim_{r \to 0} \frac{F}{r \cdot 2\pi} = \infty$$

Verschiebungen:

$$u_r \sim \int t_x \; dr \quad (\text{weil } \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r})$$

$$= \int \frac{F}{r \cdot 2\pi} dr = \frac{F}{2\pi} \int \frac{1}{r} dr = \frac{F}{2\pi} \ln r \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \to 0} u_r = \infty$$

$\Rightarrow$ Bei einer Scheibe sind die Verschiebungen und Spannungen im Aufpunkt einer Einzelkraft unendlich groß!

Singularitäten aus der Belastung

Analoge Überlegungen für einen 3D-Körper liefern:

$$F = t_x \cdot 4\pi r^2 \quad (\text{mit } 4\pi r^2 \text{ als Kugeloberfläche})$$

Für die Oberflächenspannungen gilt somit

$$t_x = \frac{F}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \to 0} t_x = \lim_{r \to 0} \frac{F}{4\pi r^2} = \infty$$

- Man nennt den Ausdruck "ln r", "1/r" und "$1/r^2$" auch den Grad der Singularität
- Die Singularität der Verschiebung stellt somit eine "schwächere Singularität" als die Singularität der Spannungen dar

Singularitäten aus der Belastung

Weitere Anmerkungen:

- Weil bei einer Einzelkraft die Verschiebung im Aufpunkt unendlich ist, ist auch die innere Energie und die potentielle Energie unendlich groß
- Analoge Überlegungen für eine Kirchhoffplatte liefern, dass sich auch die Querkräfte (Kirchhoffschub) im Angriffspunkt einer Einzelkraft wie 1/r verhalten, d.h. unendlich groß werden
- Die Verschiebungen bei der Kirchplatte sind allerdings endlich, weil zwischen den Querkräften und den Verschiebungen drei Integrations-stufen stehen, die innere Energie der Kirchhoffplatte ist bei Angriff einer Einzelkraft somit endlich

Sobolevscher Einbettungssatz

Der Grad der Singularität hängt stets von drei Größen ab:

m = Ordnung der Energie (entspricht halber Ordnung der Differentialgleichung)

i = Grad der Singulariät (z.B. i = 0 für Kraft, i = 1 für Moment)

n = Dimension des Problems (z.B. n = 1 für Balken, n = 2 für Scheibe, usw.)

Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz gilt: Die zur Belastung gehörige innere Energie ist endlich und die zur Last konjugierte Weggröße beschränkt und stetig, wenn

$$\boxed{m - i > n/2}$$

Sobolevscher Einbettungssatz

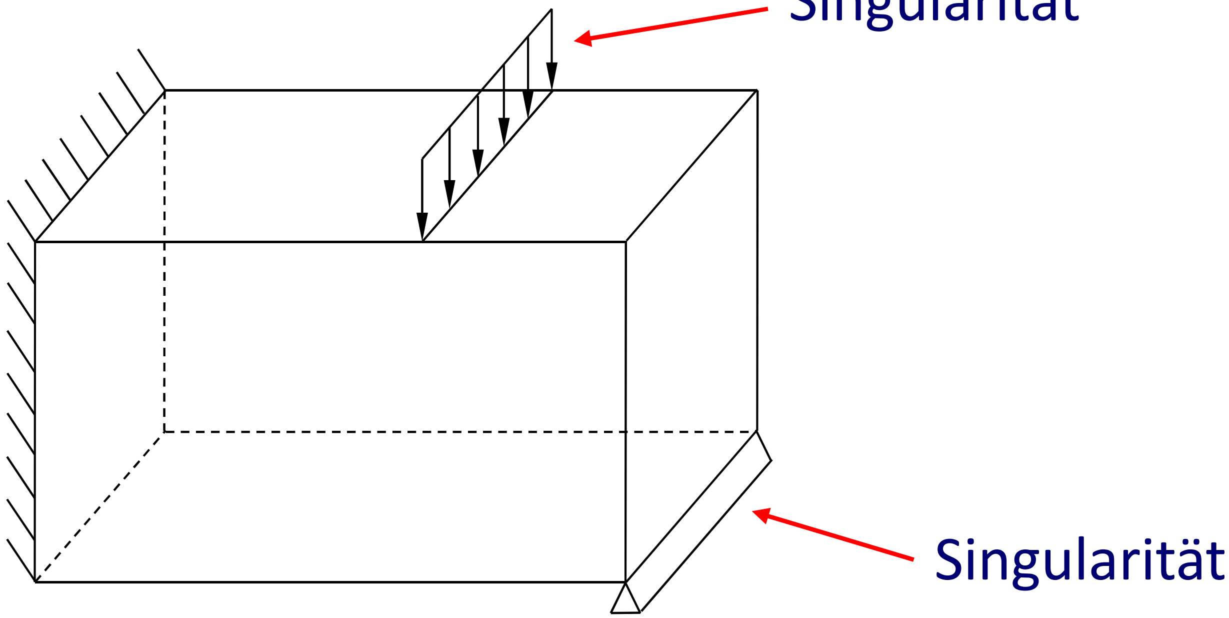
Tabelle 6.2: Lasten mit endlicher (Ja) und unendlicher (Nein) Energie

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 1$ Singularität	Seil, Stab, Timoshenko-Balken	Scheibe, schubw. Schale, Reissner-Mindlin-Platte	Kontinuum
$i = 0 :$ $\downarrow$	Ja	Nein	Nein
$i = 1 :$	Nein	Nein	Nein
$m = 2$ Singularität	schubstarrer Balken	schubstarre Schale, Kirchhoffplatte	Kontinuum
$i = 0 :$ $\downarrow$	Ja	Ja	Ja
$i = 1 :$ $\circlearrowright$	Ja	Nein	Nein
$i = 2 :$	Nein	Nein	Nein
$i = 3 :$	Nein	Nein	Nein

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Linienlasten im 3D

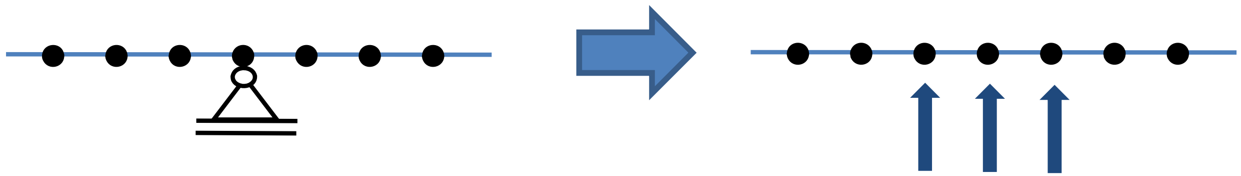
Wie Einzelkräfte (und somit Punktlager!) bei der Scheibe eine Singularität darstellen, stellen Linienlasten (und somit Linienlager!) eine Singularität bei einem Körper dar:



Empfehlungen für die Praxis

Modellieren von Lagern:

- In 2D keine Punktlager, sondern Linienlager verwenden
- Dabei Freiheitsgrade entsprechend der realen Lagerbreite sperren



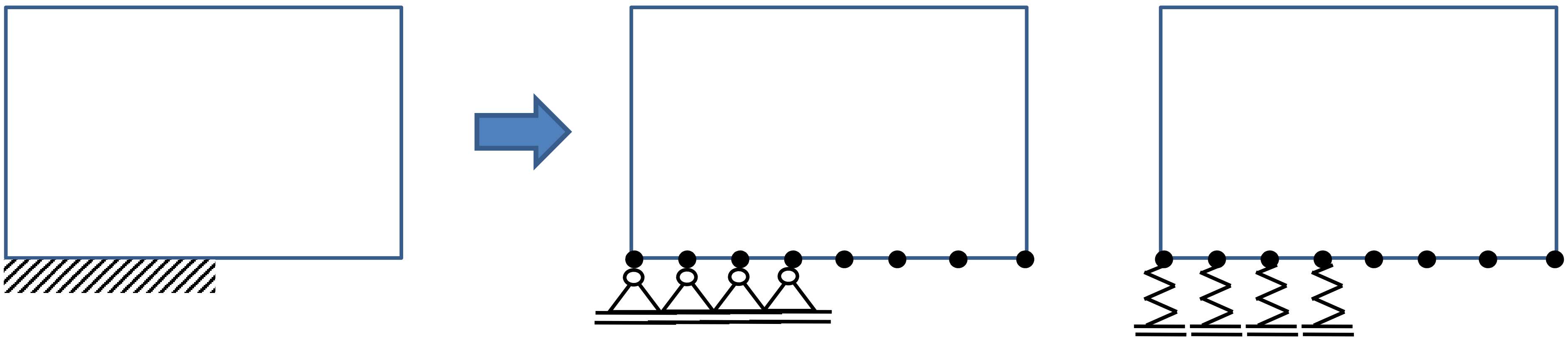
Statt Punktlager … … stets mehrere Fhg. sperren

- Achtung: Momente können aufgenommen werden!
- Ausweg: Kontaktformulierung zum Lager, hoher numerischer Aufwand
- In 3D keine Punkt- und Linienlager, sondern Flächenlager verwenden

Empfehlungen für die Praxis

Modellieren von Lagern:

- Zur Vermeidung von Eckensingularitäten im Übergang "eingespannt – frei" nachgiebige Linienlager verwenden
- Hierzu ist die reale Lagersteifigkeit zu ermitteln



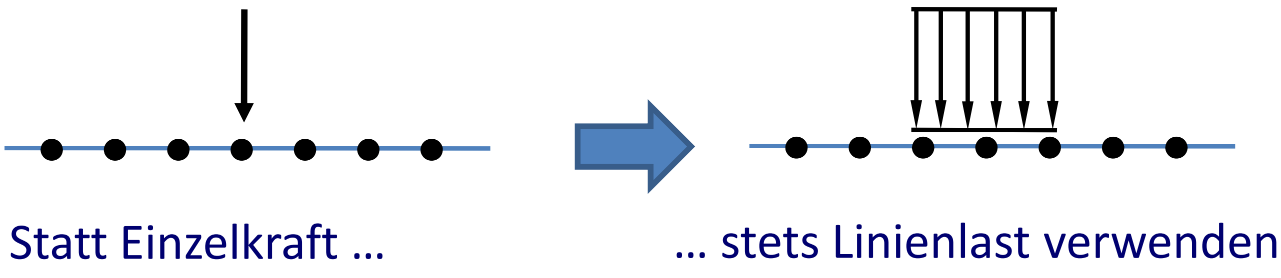
Modell mit Singularitäten

Modell ohne Singularitäten

Empfehlungen für die Praxis

Modellieren von Lasten:

- In 2D keine Einzelkräfte, sondern Linienlasten verwenden
- Dabei Linienlast entsprechend der realen Lastbreite aufbringen

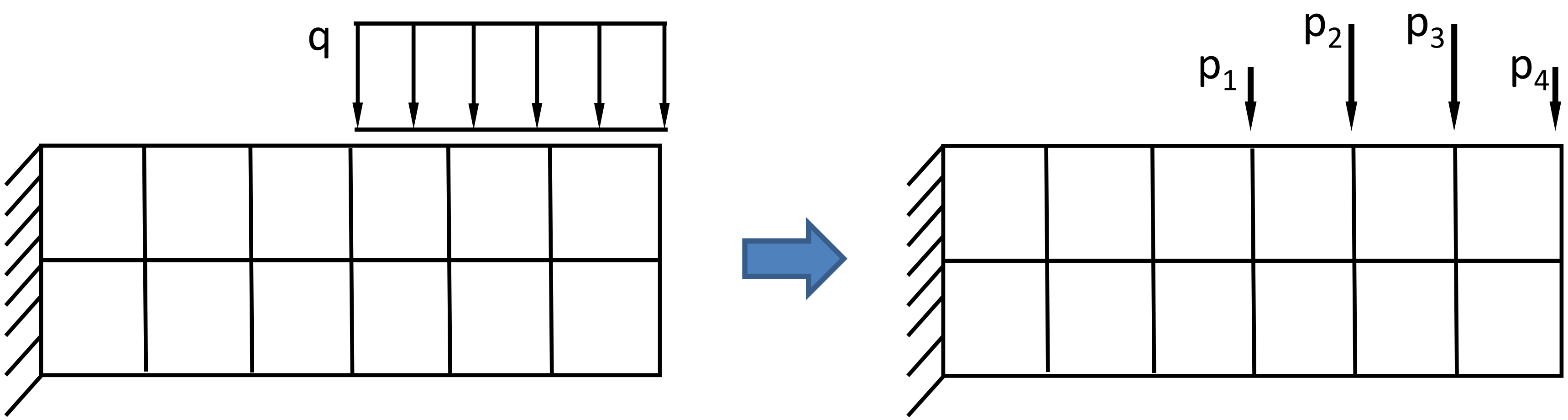


- Die Linienlast wird vom FE-Programm in äquiv. Knotenkräfte umgerechnet
- In 3D keine Einzel- und Linienlasten, sondern Flächenlasten verwenden

Singularitäten vs. äquivalente Knotenkräfte

- Echte Einzelkräfte nicht verwechseln mit äquivalente Knotenkräfte
- Diese sind keine Singularitäten des mathematischen Modells, sondern äußere Arbeiten im Prinzip der virt. Verrückungen, s. Kap. 2, Gl. (11):

$$p_k = \int_0^L q\,\varphi_k\,dx \quad k = 1,\ldots,4$$



Singularitäten vs. äquivalente Knotenkräfte

- Die FEM kann offenbar auf einem gegebenen Netz nicht zwischen echten Einzelkräften und äquiv. Knotenkräften gleicher Intensität unterscheiden
- Erst mit Netzverfeinerung wird dieser Unterschied sichtbar gemacht (echte Einzelkräfte bleiben Einzelkräfte, Linienlasten “verschmieren” zu vielen äquivalenten Knotenkräften)
- Praktische Schlussfolgerung: “Einzelkräfte” auf einem moderat feinen Netz sind nicht prinzipiell kritisch zu sehen, so lange im Nahfeld nicht weiter verfeinert wird und die Spannungen im Fernfeld ausgewertet werden (entsprechend dem Prinzip von St. Venant)