6 Stoßvorgänge

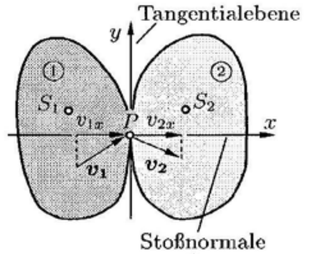
Als Stoß bezeichnet man ein plötzliches Aufeinanderprallen zweier Körper.

Bezeichnungen:

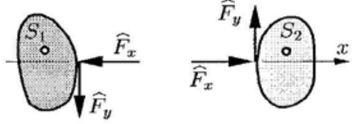
$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ $\widehat{=}$ Geschwindigkeit am Stoßpunkt P vor dem Stoß,

v_{1x}, v_{2x} $\widehat{=}$ Geschwindigkeitskomponenten in P in Richtung der Stoßnormalen vor dem Stoß,

$\overline{v}_{1x}$, $\overline{v}_{2x}$ $\widehat{=}$ Geschwindigkeitskomponenten in P in Richtung der Stoßnormalen nach dem Stoß,



$$\widehat{F}_x = \int_0^{t^*} F_x(\bar{t})\,\mathrm{d}\bar{t} \;\widehat{=}\; \text{Kraftstoß.}$$



Annahmen:

- Die Stoßdauer t^* sei klein.
- Während des Stoßvorganges ändert sich die Lage der beteiligten Körper nicht.
- Kräfte, die nicht durch den Stoß hervorgerufen werden (z.B Gewicht), können beim Stoßvorgang vernachlässigt werden

Stoßbedingung (Stoßhypothese):

$$\boxed{e = -\frac{\overline{v}_{1x} - \overline{v}_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} = -\frac{\text{relative Trennungsgeschwindigkeit}}{\text{relative Annäherungsgeschwindigkeit}}}$$

mit $e \,\widehat{=}$ Stoßziffer

$$0 \le e \le 1 \,.$$

Sonderfall $e = 1$: *Elastischer Stoß* (kein Energieverlust),

Sonderfall $e = 0$: *Plastischer Stoß* ($\overline{v}_{2x} = \overline{v}_{1x}$, Körper trennen sich nicht).

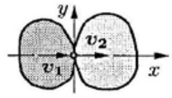
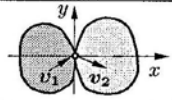
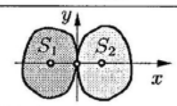
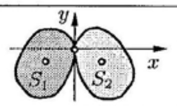
Lösung ebener Stoßprobleme: Auf jeden Körper werden die Impulssätze und der Drehimpulssatz (vgl. Seite 89)

$$\boxed{m(\overline{v}_{Sx} - v_{Sx}) = \sum \widehat{F}_x\,, \quad m(\overline{v}_{Sy} - v_{Sy}) = \sum \widehat{F}_y\,, \quad \Theta_A(\overline{\omega} - \omega) = \sum \widehat{M}_A}$$

angewendet ($A \,\widehat{=}$ fester Punkt oder Schwerpunkt S). Hinzu kommen die *Stoßbedingung* und die kinematischen Beziehungen zwischen Schwerpunkts-, Winkel- und Stoßpunktgeschwindigkeit.

Anmerkungen:

- Sind die Körper *glatt*, so wirkt der Kraftstoß immer in Richtung der Stoßnormalen.
- *Haften* die Körper während des Stoßes im Berührungspunkt, so sind die Tangentialgeschwindigkeiten der Berührungspunkte nach dem Stoß gleich.

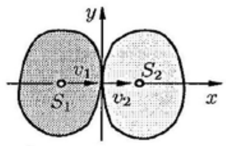
Stoß		Bemerkungen
Gerade		$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ in Richtung der Stoßnormalen, Kraftstoß immer in Richtung der Stoßnormalen ($\widehat{F}_y = 0$).
Schief		$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ nicht in Richtung der Stoßnormalen.
Zentrisch		Schwerpunkte liegen auf der Stoßnormalen.
Exzentrisch		Schwerpunkte liegen nicht auf der Stoßnormalen.

Gerader zentrischer Stoß:

$$\overline{v}_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - e\, m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}\,,$$

$$\overline{v}_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e\, m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}\,,$$

$$\Delta E_k = \frac{1 - e^2}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2 \;=\; \text{Energieverlust.}$$



7 Schwingungen

Die folgenden Formeln und Aufgaben beschränken sich auf Schwingungen von *linearen* Systemen mit *einem* Freiheitsgrad.

1. Freie ungedämpfte Schwingung

Die Bewegungsgleichung (*Schwingungsgleichung*)

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

hat die allgemeine Lösung

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\cos(\omega t - \varphi)$$

mit

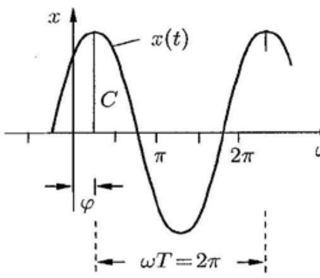
ω $\widehat{=}$ Kreisfrequenz,

$f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ $\widehat{=}$ Frequenz,

$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ $\widehat{=}$ Schwingungsdauer,

$C = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\widehat{=}$ Amplitude,

$\varphi = \arctan\dfrac{B}{A}$ $\widehat{=}$ Phasenverschiebung.



Anmerkungen:

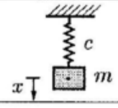
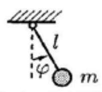
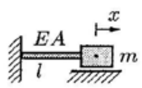
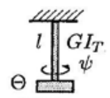
- Die Konstanten A, B bzw. C, φ folgen aus den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ zu

$$A = x_0\,, \quad B = \frac{v_0}{\omega}\,, \quad C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\,, \quad \varphi = \arctan\frac{v_0}{x_0\omega}\,.$$

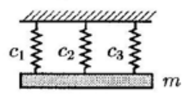
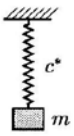
- Ein System, das durch obige DGL beschrieben wird, nennt man auch *harmonischer Oszillator.*
- Wird die Bewegungskoordinate *nicht* von der statischen Ruhelage gezählt, dann lauten die Schwingungsgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_{st}$ und ihre Lösung $x(t) = D\cos(\omega t - \psi) + x_{st}$.

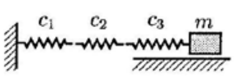
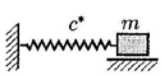
Beispiele für Einmassenschwinger

Die Koordinaten zählen jeweils von der statischen Ruhelage aus.

System		DGL	Eigenfrequenz ω
Feder-Masse-System		$m\ddot{x} + cx = 0$	$\sqrt{\dfrac{c}{m}}$
Mathematisches Pendel (kleine Ausschläge)		$l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$	$\sqrt{\dfrac{g}{l}}$
Masseloser Dehnstab mit Endmasse		$m\ddot{x} + cx = 0$	$\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ mit $c = EA/l$
Masseloser Balken mit Endmasse		$m\ddot{x} + cx = 0$	$\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ mit $c = 3EI/l^3$
Masseloser Torsionsstab mit Endscheibe		$\Theta\ddot{\psi} + c_T\psi = 0$	$\sqrt{\dfrac{c_T}{\Theta}}$ mit $c_T = GI_T/l$

Federschaltungen

Parallelschaltung:  $\widehat{=}$  $\boxed{c^* = \sum c_i}$,

Serienschaltung:  $\widehat{=}$  $\boxed{\dfrac{1}{c^*} = \sum \dfrac{1}{c_i}}$.

Federnachgiebigkeit: Die reziproke Federsteifigkeit nennt man Federnachgiebigkeit: $h = 1/c$. Man findet die Federnachgiebigkeit elastischer Tragwerke, indem man an der Stelle der schwingenden Masse eine gedachte Kraft „1" anbringt und mit den Methoden der Technischen Mechanik II die Verschiebung δ in Richtung der Kraft bestimmt. Dann ist $h = \delta$ und $c = 1/\delta$.