

Formelsammlung  
**Nichtlineare FEM**

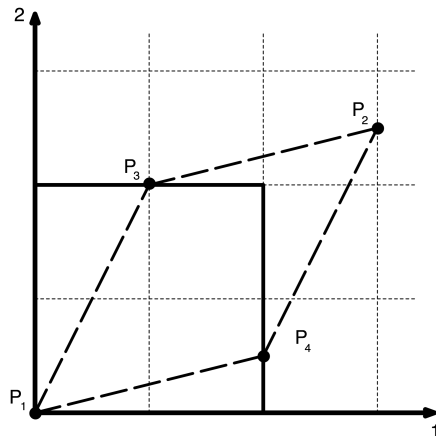
Konstantin Lühe  
2016851

10. Juli 2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Abbildungsbeschreibung</b>	<b>3</b>
1.1	Langrange'sche Beschreibung . . . . .	3
1.2	Euler'sche Beschreibung . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Verschiebung</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Deformationstensor</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Verschiebungsgradient</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Green-Lagrange'scher Dehnungstensor</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Cauchy-Green Tensor</b>	<b>5</b>
6.1	Rechter Cauchy-Green Tensor . . . . .	5
6.2	Linker Cauchy-Green Tensor (Finger-Tensor) . . . . .	5
<b>7</b>	<b>Strecktensor</b>	<b>5</b>
7.1	Rechter Strecktensor . . . . .	5
7.2	Linker Strecktensor . . . . .	6
<b>8</b>	<b>Rotationstensor</b>	<b>6</b>
<b>9</b>	<b>Henckey-Dehnungstensor (Logarithmische Dehnung)</b>	<b>6</b>
9.1	1D . . . . .	6
<b>10</b>	<b>Green-Almansi-Dehnungstensor</b>	<b>6</b>
<b>11</b>	<b>Volumen- und Flächenänderung</b>	<b>6</b>
11.1	Volumenverhältnis . . . . .	6
11.2	Dichteänderung . . . . .	6
<b>12</b>	<b>Invarianten</b>	<b>7</b>
<b>13</b>	<b>Cauchy-Spannungstensor</b>	<b>7</b>
<b>14</b>	<b>1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor</b>	<b>7</b>
<b>15</b>	<b>Kirchhoff-Spannungstensor</b>	<b>7</b>
<b>16</b>	<b>2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor</b>	<b>7</b>
<b>17</b>	<b>Eigenvektoren Normieren</b>	<b>8</b>
<b>18</b>	<b>Spektrale Zerlegung</b>	<b>8</b>
18.1	Spannungstensor . . . . .	8
18.2	Dehnungstensor . . . . .	9

# 1 Abbildungsbeschreibung



	$X=\text{unverformt}$	$\Rightarrow$	$x=\text{verformt}$
$P_1$	$(0, 0)$	$\Rightarrow$	$(0, 0)$
$P_2$	$(2, 2)$	$\Rightarrow$	$(3, 2.5)$
$P_3$	$(0, 2)$	$\Rightarrow$	$(1, 2)$
$P_4$	$(2, 0)$	$\Rightarrow$	$(2, 0.5)$

## 1.1 Langrange'sche Beschreibung

$$x_1 = A \cdot X_1 + B \cdot X_2$$

- Für zwei Punkte Aufstellen
- $A$  und  $B$  bestimmen

$$x_2 = A \cdot X_1 + B \cdot X_2$$

- Für zwei Punkte Aufstellen
- $A$  und  $B$  bestimmen

$$\Rightarrow \phi(X) = \begin{bmatrix} x_1(X) \\ x_2(X) \end{bmatrix}$$

$$1 = A \cdot 0 + B \cdot 2 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$2 = A \cdot 2 + B \cdot 0 \Rightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2X_1 + X_2}{2}$$

$$2 = A \cdot 0 + B \cdot 2 \Rightarrow B = 1$$

$$\frac{1}{2} = A \cdot 2 + B \cdot 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{X_1 + 4X_2}{4}$$

$$\Rightarrow \phi(X) = \begin{bmatrix} \frac{2X_1 + X_2}{2} \\ \frac{X_1 + 4X_2}{4} \end{bmatrix}$$

## 1.2 Euler'sche Beschreibung

$$X_1 = A \cdot x_1 + B \cdot x_2$$

- Für zwei Punkte Aufstellen
- $A$  und  $B$  bestimmen

$$X_2 = A \cdot x_1 + B \cdot x_2$$

- Für zwei Punkte Aufstellen
- $A$  und  $B$  bestimmen

$$\Rightarrow \phi(x) = \begin{bmatrix} X_1(x) \\ X_2(x) \end{bmatrix}$$

$$0 = A + 2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}A$$

$$2 = 2A + \frac{1}{2}B = \frac{7}{4}A \Rightarrow A = \frac{8}{7}, B = -\frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{8x_1 - 4x_2}{7}$$

$$2 = A + 2B \Rightarrow B = 1 - \frac{1}{2}A$$

$$0 = 2A + \frac{1}{2}B = \frac{7}{4}A + \frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{2}{7}, B = \frac{8}{7}$$

$$\Rightarrow X_2 = \frac{-2x_2 + 8x_1}{7}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \begin{bmatrix} \frac{8x_1 - 4x_2}{7} \\ \frac{-2x_2 + 8x_1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\phi(x) = \phi(X)^{-1}$$

## 2 Verschiebung

$$u(t) = x(t) - X(t)$$

## 3 Deformationstensor

Der Tensor  $\underline{\underline{F}}$  beschreibt die Änderung eines infinitesimalen Streckenvektors bei der Verformung des Körpers. Er wird Zweifeldtensor (two-point tensor) genannt, da er eine lineare Abbildung zwischen Vektoren aus unterschiedlichen Konfigurationen darstellt.

$$\underline{\underline{F}} = \nabla x = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}}$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{R}}$$

Nur Rotation  $\Rightarrow \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}$

Nur Streckung  $\Rightarrow \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}$

## 4 Verschiebungsgradient

$$\underline{\underline{D}} = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

## 5 Green-Lagrange'scher Dehnungstensor

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}_G &= \frac{1}{2} [\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}] \\ \underline{\underline{E}}_G &= \frac{1}{2} [\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}] \\ \underline{\underline{E}}_G &= \frac{1}{2} [\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T + \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}}] \end{aligned}$$

Zug (ohne Querkontraktion) und ebene Biegung  $\Rightarrow \underline{\underline{E}}_G = \text{Skalar}$  (Siehe Seite 4)

## 6 Cauchy-Green Tensor

### 6.1 Rechter Cauchy-Green Tensor

Symmetrisch und positiv definit  $\Rightarrow$  nur positive und reelle Eigenwerte und Eigenvektoren.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} & (\underline{\underline{C}} - \lambda^2 \underline{\underline{I}}) n &= 0 \\ \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{U}}^2 \\ \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}} & \Rightarrow \det(\underline{\underline{C}} - \lambda^2 \underline{\underline{I}}) &= 0 \\ \underline{\underline{C}} &= N \underline{\underline{\Lambda}}^2 N^T & & \\ & & \Rightarrow \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2 & \\ & & \underline{\underline{\Lambda}}^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2) & \end{aligned}$$

### 6.2 Linker Cauchy-Green Tensor (Finger-Tensor)

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{V}}^2$$

## 7 Strecktensor

### 7.1 Rechter Strecktensor

- Vermischte Streckungen (Rotation und Streckungen zusammen).
- Beschreibt was mit dem Körper aus dem globalen Koordinatensystem passiert.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{U}} &= N \underline{\underline{\Lambda}} N^T \\ \underline{\underline{U}} &= \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{U}} &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ \underline{\underline{U}} &= \sqrt{\underline{\underline{C}}} \end{aligned}$$

## 7.2 Linker Strecktensor

$$\begin{aligned}\underline{\underline{V}} &= \underline{\underline{F}} \underline{\underline{R}}^T \\ \underline{\underline{V}} &= (\underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T)^{\frac{1}{2}} \\ \underline{\underline{V}} &= (\underline{\underline{b}})^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

## 8 Rotationstensor

Der orthogonale Rotationstensor stellt eine Starrkörperbewegung aus der unverformten in die verformte Konfiguration dar.

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{U}}^{-1}$$

## 9 Hencky-Dehnungstensor (Logarithmische Dehnung)

$$\underline{\underline{E}}_H = \sum_{\alpha} \ln(\lambda_{\alpha}) N_{\alpha} \otimes N_{\alpha}$$

$$\underline{\underline{E}}_H = N \ln(\underline{\underline{\Lambda}}) N^T$$

### 9.1 1D

$$\varepsilon_H = \int_L^l \frac{d\bar{l}}{\bar{l}} d\bar{l} = \ln \frac{l}{L} = \ln \lambda$$

## 10 Green-Almansi-Dehnungstensor

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1}]$$

## 11 Volumen- und Flächenänderung

### 11.1 Volumenverhältnis

$$J = \frac{dv}{dV} = \det \underline{\underline{F}}$$

### 11.2 Dichteänderung

$$\rho = \rho_0 J^{-1}$$

## 12 Invarianten

$$\begin{aligned}
 I &= \text{tr} (\underline{\underline{T}}) \\
 II &= \frac{1}{2} \left[ (\text{tr} \underline{\underline{T}})^2 - \text{tr} (\underline{\underline{T}}^2) \right] \\
 III &= \det \underline{\underline{T}}
 \end{aligned}$$

## 13 Cauchy-Spannungstensor

Die Cauchy Spannungen sind die wahren physikalischen Spannungen, da sie die am Punkt wirkende Kraft auf die wahre (verformte) Schnittfläche beziehen.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

## 14 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

Der 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor bezieht die Kräfte auf die verformte Konfiguration, die Flächen aber auf die unverformte Konfiguration.

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{P}} &= J \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} \\
 \underline{\underline{P}} &= \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T}
 \end{aligned}$$

## 15 Kirchhoff-Spannungstensor

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\tau}} &= J \underline{\underline{\sigma}} \\
 \underline{\underline{\tau}} &= \underline{\underline{F}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{F}}^T
 \end{aligned}$$

## 16 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

Der 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor bezieht die Kräfte und die Fläche auf die unverformte Konfiguration. Dieser stellt kein physikalisch interpretierbares Spannungsmaß dar. Er dient für die Anwendung von Materialgesetzen in der unverformten Konfiguration.

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{S}} &= \underline{\underline{F}}^{-1} J \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} \\
 \underline{\underline{S}} &= \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T}
 \end{aligned}$$

## 17 Eigenvektoren Normieren

$$n_1 = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \\ \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \end{bmatrix}$$

## 18 Spektrale Zerlegung

### 18.1 Spannungstensor

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) n = 0$$

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\sigma_0 \underline{\underline{I}}}_{\text{Hydrostatischer Spannungszustand}} + \underbrace{\underline{\underline{s}}}_{\text{Deviatorischer Spannungszustand}}$$

**Hydrostatischer Spannungszustand:** Der hydrostatische Spannungszustand hat die Eigenschaft, dass sich für beliebige Schnittrichtungen immer die reine Normalspannung  $\sigma_0$  ergibt und keine Schubspannungen. Damit entspricht der hydrostatische Spannungsanteil einem Spannungszustand, wie man ihn in ruhenden Flüssigkeiten vorfindet, in denen der Druck an einer Stelle ja ebenfalls in allen Richtungen gleich ist.

**Deviatorische Spannungsanteil:** Der deviatorische Spannungsanteil hat seinerseits eine verschwindende mittlere Normalspannung und beschreibt die Abweichung des Spannungszustandes von einem rein hydrostatischen Spannungszustand.



## 18.2 Dehnungstensor

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\varepsilon_0 \underline{\underline{I}}}_{Volumen} + \underbrace{\underline{\underline{e}}}_{Form}$$

Dabei charakterisiert der erste Anteil eine reine Volumendehnung, während der zweite (deviatorische) Anteil eine reine „Gestaltänderung“ bei gleichbleibendem Volumen beschreibt.