

前 言

本书是与陈纪修、於崇华、金路编写的面向 21 世纪课程教材《数学分析》(第二版)相配套的学习辅导书,是教育部“理科基础人才培养基地创建优秀名牌课程数学分析”项目和高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”精品项目的成果。本书分上、下两册出版,内容分别包含了《数学分析》(第二版)中全部习题的详细解答。

自从面向 21 世纪课程教材《数学分析》出版以来,我们不断收到广大读者的来信和电子邮件,希望我们能提供教材中习题的解答,以便于他们学习或教学时参考。正是广大读者的这一要求,促使我们编写了这本《数学分析习题全解指南》。

对于学习“数学分析”课程的学生来说,不仅要掌握微积分的基本概念、基本理论与基本方法,更要通过学习,培养熟练的运算能力、抽象概括问题的能力、逻辑推理的能力以及综合运用数学知识分析和解决问题的能力。要达到这一目的,严格而充分的基本训练是必不可少的。著名数学家苏步青院士说他自己曾做过一万道微积分习题,由此可以说明我们的前辈大师们为什么会有如此深厚的数学功底。希望广大同学在做习题时,首先要认真地独立思考,认真地解答每一道习题。希望同学们一定要正确运用本书,只有在经过自己的认真思考,仍不会解答或对自己解答的正确性无法确定时,再去参考题解。否则,不仅对学习没有任何帮助,也违背了我们编写这本《数学分析习题全解指南》的初衷。

本书给出了教材中全部习题的解答。但对于大部分习题,书中给出的解法并不是惟一的。事实上,教材中大部分习题都是可以有多种解法的,而我们给出的解法也不一定就是最好或最简捷的。对于一些典型的习题,希望读者能自己思考是否有多种解法,这将有助于对数学知识的融会贯通,提高自己的解题能力。

在本书的编写过程中,复旦大学数学科学学院楼红卫教授向我们提供了部分习题的解答;在本书的出版过程中,我们得到了高等教育出版社徐刚老师,李蕊老师,蒋青老师,文小西老师的大力支持。在此谨向他们表示衷心的感谢。

限于作者的水平,书中给出的题解难免会有错误与缺陷,希望广大读者提出宝贵的批评和建议,以便今后再版时改进。

编 者

二〇〇四年八月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

第一章	集合与映射	1
§1	集合	1
§2	映射与函数	3
第二章	数列极限	7
§1	实数系的连续性	7
§2	数列极限	9
§3	无穷大量	16
§4	收敛准则	19
第三章	函数极限与连续函数	29
§1	函数极限	29
§2	连续函数	38
§3	无穷小量与无穷大量的阶	43
§4	闭区间上的连续函数	47
第四章	微分	53
§1	微分和导数	53
§2	导数的意义和性质	53
§3	导数四则运算和反函数求导法则	58
§4	复合函数求导法则及其应用	63
§5	高阶导数和高阶微分	74
第五章	微分中值定理及其应用	86
§1	微分中值定理	86
§2	L'Hospital 法则	98
§3	Taylor 公式和插值多项式	104
§4	函数的 Taylor 公式及其应用	108
§5	应用举例	123
§6	方程的近似求解	139
第六章	不定积分	148
§1	不定积分的概念和运算法则	148
§2	换元积分法和分部积分法	150

	§ 3 有理函数的不定积分及其应用	164
第七章	定积分	181
	§ 1 定积分的概念和可积条件	181
	§ 2 定积分的基本性质	186
	§ 3 微积分基本定理	192
	§ 4 定积分在几何计算中的应用	207
	§ 5 微积分实际应用举例	222
	§ 6 定积分的数值计算	227
第八章	反常积分	237
	§ 1 反常积分的概念和计算	237
	§ 2 反常积分的收敛判别法	245

第一章 集合与映射

§ 1 集合

1. 证明由 n 个元素组成的集合 $T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 有 2^n 个子集.

解 由 k 个元素组成的子集的个数为 C_n^k , $\sum_{k=0}^n C_n^k = (1+1)^n = 2^n$.

2. 证明:

(1) 任意无限集必包含一个可列子集;

(2) 设 A 与 B 都是可列集, 证明 $A \cup B$ 也是可列集.

证 (1) 设 T 是一个无限集, 先取 $a_1 \in T$. 由于 T 是无限集, 必存在 $a_2 \in T, a_2 \neq a_1$. 再由 T 是无限集, 必存在 $a_3 \in T, a_3 \neq a_1, a_3 \neq a_2$. 这样的过程可以无限进行下去, 于是得到可列集 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, S \subset T$.

(2) 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, 则 $A \cup B$ 可表示为

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots\}.$$

3. 指出下列表述中的错误:

(1) $\{0\} = \emptyset$;

(2) $a \subset \{a, b, c\}$;

(3) $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$;

(4) $\{a, b, \{a, b\}\} = \{a, b\}$.

解 (1) $\{0\}$ 是由元素 0 构成的集合, 不是空集.

(2) a 是集合 $\{a, b, c\}$ 的元素, 应表述为 $a \in \{a, b, c\}$.

(3) $\{a, b\}$ 是集合 $\{a, b, c\}$ 的子集, 应表述为 $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$.

(4) $\{a, b, \{a, b\}\}$ 是由 a, b 和 $\{a, b\}$ 为元素构成的集合, 所以 $\{a, b, \{a, b\}\} \supset \{a, b\}$, 或 $\{a, b\} \in \{a, b, \{a, b\}\}$, 但 $\{a, b, \{a, b\}\} \neq \{a, b\}$.

4. 用集合符号表示下列数集:

(1) 满足 $\frac{x-3}{x+2} \leq 0$ 的实数全体;

- (2) 平面上第一象限的点的全体;
 (3) 大于 0 并且小于 1 的有理数全体;
 (4) 方程 $\sin x \cot x = 0$ 的实数解全体.

解 (1) $\{x \mid -2 < x \leq 3\}$.
 (2) $\{(x, y) \mid x > 0 \text{ 且 } y > 0\}$.
 (3) $\{x \mid 0 < x < 1 \text{ 且 } x \in \mathbf{Q}\}$.
 (4) $\left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

5. 证明下列集合等式:

- (1) $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$;
 (2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

证 (1) 设 $x \in A \cap (B \cup D)$, 则 $x \in A$, 并且或者 $x \in B$, 或者 $x \in D$. 于是或者 $x \in A \cap B$, 或者 $x \in A \cap D$, 即 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap D)$, 因此

$$A \cap (B \cup D) \subset (A \cap B) \cup (A \cap D);$$

设 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap D)$, 则或者 $x \in A \cap B$, 或者 $x \in A \cap D$. 于是 $x \in A$, 并且或者 $x \in B$, 或者 $x \in D$, 即 $x \in A \cap (B \cup D)$, 因此

$$A \cap (B \cup D) \supset (A \cap B) \cup (A \cap D).$$

所以

$$A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D).$$

(2) 设 $x \in (A \cup B)^c$, 则 $x \notin A \cup B$, 即 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 于是 $x \in A^c \cap B^c$, 因此

$$(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c;$$

设 $x \in A^c \cap B^c$, 则 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 即 $x \notin A \cup B$, 于是 $x \in (A \cup B)^c$, 因此

$$(A \cup B)^c \supset A^c \cap B^c.$$

因此

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

6. 举例说明集合运算不满足消去律:

- (1) $A \cup B = A \cup C \not\Rightarrow B = C$;
 (2) $A \cap B = A \cap C \not\Rightarrow B = C$.

其中符号“ $\not\Rightarrow$ ”表示左边的命题不能推出右边的命题.

解 (1) 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{c, d\}$, 则 $A \cup B = A \cup C$, 但 $B \neq C$.

(2) 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{c, d\}$, 则 $A \cap B = A \cap C$, 但 $B \neq C$.

7. 下述命题是否正确? 不正确的话, 请改正.

(1) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ 并且 $x \in B$;

(2) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ 或者 $x \in B$.

解 (1) 不正确. $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ 或者 $x \in B$.

(2) 不正确. $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ 并且 $x \in B$.

§2 映射与函数

1. 设 $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b, c\}$, 问有多少种可能的映射 $f: S \rightarrow T$? 其中哪些是双射?

解 有 $3^3 = 27$ 种可能的映射, 其中有 $3! = 6$ 种是双射, 它们是

$$f: \begin{cases} \alpha \mapsto a, \\ \beta \mapsto b, \\ \gamma \mapsto c, \end{cases} \quad f: \begin{cases} \alpha \mapsto a, \\ \beta \mapsto c, \\ \gamma \mapsto b, \end{cases} \quad f: \begin{cases} \alpha \mapsto b, \\ \beta \mapsto c, \\ \gamma \mapsto a, \end{cases} \quad f: \begin{cases} \alpha \mapsto b, \\ \beta \mapsto a, \\ \gamma \mapsto c, \end{cases} \quad f: \begin{cases} \alpha \mapsto c, \\ \beta \mapsto a, \\ \gamma \mapsto b, \end{cases} \quad f: \begin{cases} \alpha \mapsto c, \\ \beta \mapsto b, \\ \gamma \mapsto a. \end{cases}$$

2. (1) 建立区间 $[a, b]$ 与 $[0, 1]$ 之间的一一对应;

(2) 建立区间 $(0, 1)$ 与 $(-\infty, +\infty)$ 之间的一一对应.

解 (1) $f: [a, b] \rightarrow [0, 1]$

$$x \mapsto y = \frac{x-a}{b-a}.$$

(2) $f: (0, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$

$$x \mapsto \tan\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi = -\cot(\pi x).$$

3. 将下列函数 f 和 g 构成复合函数, 并指出定义域与值域:

(1) $y = f(u) = \log_a u$, $u = g(x) = x^2 - 3$;

(2) $y = f(u) = \arcsin u$, $u = g(x) = 3^x$;

(3) $y = f(u) = \sqrt{u^2 - 1}$, $u = g(x) = \sec x$;

(4) $y = f(u) = \sqrt{u}$, $u = g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

解 (1) $y = \log_a (x^2 - 3)$, 定义域: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, 值域: $(-\infty, +\infty)$.

(2) $y = \arcsin 3^x$, 定义域: $(-\infty, 0]$, 值域: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(3) $y = |\tan x|$, 定义域: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, 值域: $[0, +\infty)$.

(4) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, 定义域: $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$, 值域: $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

4. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的:

(1) $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; (2) $y = \frac{1}{3} \log_a^3(x^2-1)$.

解 (1) $y = \arcsin u$, $u = \frac{1}{\sqrt{v}}$, $v = x^2 + 1$.

(2) $y = \frac{1}{3} u^3$, $u = \log_a v$, $v = x^2 - 1$.

5. 求下列函数的自然定义域与值域:

(1) $y = \log_a \sin x$ ($a > 1$);

(2) $y = \sqrt{\cos x}$;

(3) $y = \sqrt{4-3x-x^2}$;

(4) $y = x^2 + \frac{1}{x^4}$.

解 (1) 定义域: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, 值域: $(-\infty, 0]$.

(2) 定义域: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, 值域: $[0, 1]$.

(3) 定义域: $[-4, 1]$, 值域: $\left[0, \frac{5}{2}\right]$.

(4) 定义域: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 值域: $\left[\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}, +\infty\right)$.

6. 问下列函数 f 和 g 是否等同?

(1) $f(x) = \log_a(x^2)$, $g(x) = 2\log_a x$;

(2) $f(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$, $g(x) = 1$;

(3) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, $g(x) = 1$.

解 (1) 函数 f 和 g 不等同.

(2) 函数 f 和 g 不等同.

(3) 函数 f 和 g 等同.

7. (1) 设 $f(x+3) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$, 求 $f(x)$;

(2) 设 $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{3x-1}{3x+1}$, 求 $f(x)$.

解 (1) 令 $x+3=t$, 则 $x=t-3$, 代入等式, 得到

$$f(t) = 2(t-3)^3 - 3(t-3)^2 + 5(t-3) - 1 = 2t^3 - 21t^2 + 77t - 97.$$

所以 $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 77x - 97$.

(2) 令 $\frac{x}{x-1} = t$, 则 $x = \frac{t}{t-1}$, 代入等式, 得到

$$f(t) = \frac{\frac{3t}{t-1} - 1}{\frac{3t}{t-1} + 1} = \frac{2t+1}{4t-1},$$

所以 $f(x) = \frac{2x+1}{4x-1}$.

8. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 求 $f \circ f, f \circ f \circ f, f \circ f \circ f \circ f$ 的函数表达式.

解

$$f \circ f(x) = \frac{x+1}{x+2};$$

$$f \circ f \circ f(x) = \frac{x+2}{2x+3};$$

$$f \circ f \circ f \circ f(x) = \frac{2x+3}{3x+5}.$$

9. 证明: 定义于 $(-\infty, +\infty)$ 上的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和.

证 显然 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是偶函数, $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数, 而

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

10. 写出折线 \overline{ABCD} 所表示的函数关系 $y=f(x)$ 的分段表示, 其中 $A=(0, 3), B=(1, -1), C=(3, 2), D=(4, 0)$.

解

$$y = \begin{cases} -4x+3, & x \in [0, 1], \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}, & x \in (1, 3], \\ -2x+8, & x \in (3, 4]. \end{cases}$$

11. 设 $f(x)$ 表示原教材图 1.2.8 中阴影部分面积, 写出函数 $y=f(x)$, $x \in [0, 2]$ 的表达式.

解

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \in [0, 1], \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

12. 一玻璃杯装有汞、水、煤油三种液体, 密度分别为 13.6 g/cm^3 , 1 g/cm^3 , 0.8 g/cm^3 (原教材图 1.2.9), 上层煤油液体高度为 5 cm , 中层水液体高度为 4 cm , 下层汞液体高度为 2 cm , 试求压强 P 与液体深度 x 之间的函数关系.

解 取重力加速度 $g = 980 \text{ cm/s}^2$,

$$P(x) = \begin{cases} 784x, & x \in [0, 5], \\ 980x - 980, & x \in (5, 9], \\ 13\,328x - 112\,112, & x \in (9, 11]. \end{cases}$$

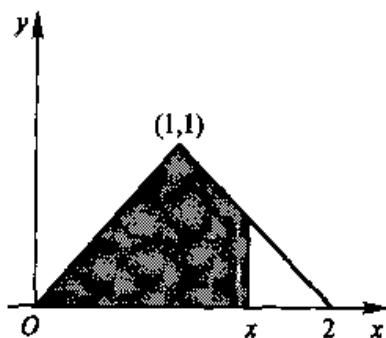


图 1.2.8

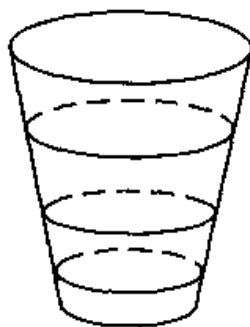


图 1.2.9

13. 试求定义在 $[0, 1]$ 上的函数, 它是 $[0, 1]$ 与 $[0, 1]$ 之间的一一对应, 但在 $[0, 1]$ 的任一子区间上都不是单调函数.

解

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ 1-x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

第二章 数列极限

§1 实数系的连续性

1. (1) 证明 $\sqrt{6}$ 不是有理数;

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 是不是有理数?

证 (1) 反证法. 若 $\sqrt{6}$ 是有理数, 则可写成既约分数 $\sqrt{6}=\frac{m}{n}$. 由 $m^2=6n^2$, 可知 m 是偶数, 设 $m=2k$, 于是有 $3n^2=2k^2$, 从而得到 n 是偶数, 这与 $\frac{m}{n}$ 是既约分数矛盾.

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 不是有理数. 若 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 是有理数, 则可写成既约分数 $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, 于是 $3+2\sqrt{6}+2=\frac{m^2}{n^2}$, $\sqrt{6}=\frac{m^2}{2n^2}-\frac{5}{2}$, 即 $\sqrt{6}$ 是有理数, 与(1)的结论矛盾.

2. 求下列数集的最大数、最小数, 或证明它们不存在:

$$A = \{x \mid x \geq 0\};$$

$$B = \left\{ \sin x \mid 0 < x < \frac{2\pi}{3} \right\};$$

$$C = \left\{ \frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}, \text{ 并且 } n < m \right\}.$$

解 $\min A = 0$; 因为 $\forall x \in A$, 有 $x+1 \in A$, $x+1 > x$, 所以 $\max A$ 不存在.

$\max B = \sin \frac{\pi}{2} = 1$; 因为 $\forall \alpha \in B$, $\exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 使得 $\alpha = \sin x$, 于是有 $\sin \frac{x}{2} \in B$, $\sin \frac{x}{2} < \sin x = \alpha$, 所以 $\min B$ 不存在.

$\max C$ 与 $\min C$ 都不存在, 因为 $\forall \frac{n}{m} \in C$, 有 $\frac{n}{m+1} \in C$, $\frac{n+1}{m+1} \in C$, $\frac{n}{m+1} < \frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$, 所以 $\max C$ 与 $\min C$ 都不存在.

3. A, B 是两个有界集, 证明:

(1) $A \cup B$ 是有界集;

(2) $S = \{x + y | x \in A, y \in B\}$ 也是有界集.

证 (1) 设 $\forall x \in A$, 有 $|x| \leq M_1$, $\forall y \in B$, 有 $|y| \leq M_2$, 则 $\forall z \in A \cup B$, 有 $|z| \leq \max\{M_1, M_2\}$.

(2) 设 $\forall x \in A$, 有 $|x| \leq M_1$, $\forall y \in B$, 有 $|y| \leq M_2$, 则 $\forall z = x + y \in S$, 有 $|z| = |x + y| \leq |x| + |y| \leq M_1 + M_2$.

4. 设数集 S 有上界, 则数集 $T = \{x | -x \in S\}$ 有下界, 且 $\sup S = -\inf T$.

证 设数集 S 的上确界为 $\sup S$, 则对 $\forall x \in T = \{x | -x \in S\}$, 有 $-x \leq \sup S$, 即 $x \geq -\sup S$; 同时对 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $y \in S$, 使得 $y > \sup S - \epsilon$, 于是 $-y \in T$, 且 $-y < -\sup S + \epsilon$. 所以 $-\sup S$ 为集合 T 的下确界, 即 $\inf T = -\sup S$.

5. 证明有界数集的上、下确界惟一.

证 设 $\sup S$ 既等于 A , 又等于 B , 且 $A < B$. 取 $\epsilon = \frac{B-A}{2} > 0$, 因为 B 为集合 S 的上确界, 所以 $\exists x \in S$, 使得 $x > B - \epsilon > A$, 这与 A 为集合 S 的上确界矛盾, 所以 $A = B$, 即有界数集的上确界惟一. 同理可证有界数集的下确界惟一.

6. 对任何非空数集 S , 必有 $\sup S \geq \inf S$. 当 $\sup S = \inf S$ 时, 数集 S 有什么特点?

解 对于 $\forall x \in S$, 有 $\inf S \leq x \leq \sup S$, 所以 $\sup S \geq \inf S$. 当 $\sup S = \inf S$ 时, 数集 S 是由一个实数构成的集合.

7. 证明非空有下界的数集必有下确界.

证 参考定理 2.1.1 的证明.

8. 设 $S = \{x | x \in \mathbb{Q} \text{ 并且 } x^2 < 3\}$, 证明:

(1) S 没有最大数与最小数;

(2) S 在 \mathbb{Q} 内没有上确界与下确界.

证 (1) $\forall \frac{q}{p} \in S, \frac{q}{p} > 0$, 则 $\left(\frac{q}{p}\right)^2 < 3, \frac{q}{p} < 2$. 取有理数 $r > 0$ 充分小, 使得 $r^2 + 4r < 3 - \left(\frac{q}{p}\right)^2$, 于是 $\left(\frac{q}{p} + r\right)^2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2 + r^2 + \frac{2q}{p}r < \left(\frac{q}{p}\right)^2 + r^2 + 4r < 3$, 即 $\frac{q}{p} + r \in S$, 所以 S 没有最大数. 同理可证 S 没有最小数.

(2) 反证法. 设 S 在 \mathbb{Q} 内有上确界, 记 $\sup S = \frac{n}{m} (m, n \in \mathbb{N}_+, \text{ 且 } m, n \text{ 互$

质), 则显然有 $0 < \frac{n}{m} < 2$. 由于有理数平方不能等于 3, 所以只有两种可能:

(i) $\left(\frac{n}{m}\right)^2 < 3$, 由(1)可知存在充分小的有理数 $r > 0$, 使得 $\left(\frac{n}{m} + r\right)^2 < 3$, 这

说明 $\frac{n}{m} + r \in S$, 与 $\sup S = \frac{n}{m}$ 矛盾;

(ii) $\left(\frac{n}{m}\right)^2 > 3$, 取有理数 $r > 0$ 充分小, 使得 $4r - r^2 < \left(\frac{n}{m}\right)^2 - 3$, 于是 $\left(\frac{n}{m} - r\right)^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 - \frac{2n}{m}r + r^2 > \left(\frac{n}{m}\right)^2 - 4r + r^2 > 3$, 这说明 $\frac{n}{m} - r$ 也是 S 的上

界, 与 $\sup S = \frac{n}{m}$ 矛盾. 所以 S 没有上确界.

同理可证 S 没有下确界.

§2

数列极限

1. 按定义证明下列数列是无穷小量:

$$(1) \left\{ \frac{n+1}{n^2+1} \right\}; \quad (2) \{(-1)^n(0.99)^n\};$$

$$(3) \left\{ \frac{1}{n} + 5^{-n} \right\}; \quad (4) \left\{ \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3} \right\};$$

$$(5) \left\{ \frac{n^2}{3^n} \right\}; \quad (6) \left\{ \frac{3^n}{n!} \right\};$$

$$(7) \left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}; \quad (8) \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n} \right\}.$$

证 (1) $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < 2)$, 取 $N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$0 < \frac{n+1}{n^2+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

(2) $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$, 取 $N = \left\lceil \frac{\lg \varepsilon}{\lg 0.99} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$\left| (-1)^n(0.99)^n \right| < (0.99)^{\frac{\lg \varepsilon}{\lg 0.99}} = \varepsilon.$$

(3) $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < 2)$, 取 $N_1 = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N_1$ 时, 成立 $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$;

取 $N_2 = \left\lceil \log_5 \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N_2$ 时, 成立 $5^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$,

则当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时, 成立 $\left| \frac{1}{n} + 5^{-n} \right| < \varepsilon$.

(4) $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$0 < \frac{1+2+\cdots+n}{n^3} = \frac{n+1}{2n^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(5) 当 $n > 11$ 时, 有 $\frac{n^2}{3^n} = \frac{n^2}{(1+2)^n} < \frac{n^2}{2^3 C_n^3} = \frac{6n}{8(n-1)(n-2)} < \frac{1}{n}$. 于是

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max \left\{ 11, \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \right\}$, 当 $n > N$ 时, 成立 $0 < \frac{n^2}{3^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(6) 当 $n > 5$, 有 $\frac{3^n}{n!} \leq \frac{3^5}{5!} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-5} < 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-5}$. 于是 $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < 3)$, 取 $N =$

$$5 + \left\lceil \frac{\lg \frac{\varepsilon}{3}}{\lg \frac{1}{2}} \right\rceil, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 成立 } 0 < \frac{3^n}{n!} < 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-5} < \varepsilon.$$

(7) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 成立 $0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(8) 首先有不等式 $0 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$. $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 成立 $0 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

2. 按定义证明下述极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 2} = \frac{2}{3}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} = 1;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \frac{1}{2}; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n+2} = 1;$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \text{ 其中 } x_n = \begin{cases} \frac{n + \sqrt{n}}{n}, & n \text{ 是偶数,} \\ 1 - 10^{-n}, & n \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

证 (1) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right]$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$\left| \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 2} - \frac{2}{3} \right| = \frac{7}{3(3n^2 + 2)} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$\left| \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} + n} < \frac{1}{2n} < \varepsilon.$$

(3) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{8\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$\left| (\sqrt{n^2 + n} - n) - \frac{1}{2} \right| = \frac{n}{2(\sqrt{n^2 + n} + n)^2} < \frac{1}{8n} < \varepsilon.$$

(4) 令 $\sqrt[n]{3n+2} = 1 + a_n$, 则 $a_n > 0$, $3n+2 = (1+a_n)^n > 1 + C_n^2 a_n^2$. 当 $n > 3$ 时, 有 $a_n < \sqrt{\frac{2(3n+1)}{n(n-1)}} < \frac{3}{\sqrt{n}}$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{9}{\varepsilon^2} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$|\sqrt[n]{3n+2} - 1| = a_n < \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

(5) $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$, 取 $N = \max \left\{ \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil, \left\lceil \lg \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \right\}$, 当 $n > N$ 时, 若 n 是偶数, 则成立 $|x_n - 1| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$; 若 n 是奇数, 则成立 $|x_n - 1| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$.

3. 举例说明下列关于无穷小量的定义是不正确的:

(1) 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 成立 $x_n < \varepsilon$;

(2) 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在无穷多个 x_n , 使 $|x_n| < \varepsilon$.

解 (1) 例如 $x_n = -n$, 则 $|x_n|$ 满足条件, 但不是无穷小量.

(2) 例如 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 是奇数,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 是偶数,} \end{cases}$ 则 $|x_n|$ 满足条件, 但不是无穷小量.

4. 设 k 是一正整数, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的充分必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+k} = a$.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$, 成立 $|x_n - a| < \varepsilon$, 于是也成立 $|x_{n+k} - a| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+k} = a$;

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+k} = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N'$, $\forall n > N'$, 成立 $|x_{n+k} - a| < \varepsilon$, 取 $N = N' + k$, 则 $\forall n > N$, 成立 $|x_n - a| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

5. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

证 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 可知 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1$, $\forall n > N_1$, 成立 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$; $\exists N_2$, $\forall n > N_2$, 成立 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$. 于是取 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, $\forall n > N$, 成立 $|x_n - a| < \varepsilon$.

6. 设 $x_n \geq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.



证 首先有不等式 $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{|x - a|}$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 可知 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N, \forall n > N$, 成立 $|x_n - a| < \varepsilon^2$, 于是 $|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{|x_n - a|} < \varepsilon$.

7. $\{x_n\}$ 是无穷小量, $\{y_n\}$ 是有界数列, 证明 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷小量.

证 设对一切 $n, |y_n| \leq M (M > 0)$. 因为 $\{x_n\}$ 是无穷小量, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N, \forall n > N$, 成立 $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. 于是 $\forall n > N$, 成立 $|x_n y_n| < \varepsilon$, 所以 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷小量.

8. 利用夹逼法计算极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n + \sqrt{n}} \right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

解 (1) 由 $1 < \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n}$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

(2) 由 $\frac{n}{n + \sqrt{n}} < \left(\frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n + \sqrt{n}} \right) < \frac{n}{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \sqrt{n}} = 1$

与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n + \sqrt{n}} \right) = 1.$$

(3) 由 $2 = \frac{2n+2}{n+1} < \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2n+2}{n}$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n} = 2$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$$

(4) 应用不等式 $2k > \sqrt{(2k-1)(2k+1)}$, 得到 $0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} <$

$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = 0.$$

9. 求下列数列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n - 1}{n^2 + 1}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - 3n + 1}{2n^3 - n + 3};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^3}{3^{n+1} + (n+1)^3}; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n^2 + 1} - 1) \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt{n+1});$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}; \quad (8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \lg n}; \quad (10) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right).$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n - 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 3.$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - 3n + 1}{2n^3 - n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = \frac{1}{2}.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^3}{3^{n+1} + (n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{n^3}{3^n}}{3 \left[1 + \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\right]} = \frac{1}{3}.$$

(4) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n^2 + 1} - 1) = 0$, $\left| \sin \frac{n\pi}{2} \right| \leq 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n^2 + 1} - 1) \sin \frac{n\pi}{2} = 0.$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt{n+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}[n^2 + 1 - (n+1)^2]}{(\sqrt[4]{n^2 + 1} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n^2 + 1} + n + 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n\sqrt{n}}{(\sqrt[4]{n^2 + 1} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n^2 + 1} + n + 1)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

(7) 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 利用例 2.2.12, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n}} = 0.$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(9) $1 < \sqrt[n]{n \lg n} < \sqrt[n]{n^2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \lg n} = 1.$$

(10) 设 $x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$, 则 $2x_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$,

两式相减, 得到 $x_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) - \frac{2n-1}{2^n}$.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2^n} = 0$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3.$$

10. 证明: 若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \cdots$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

证 取 $1 < r < l$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 可知 $\exists N, \forall n > N$, 成立 $\frac{a_n}{a_{n+1}} > r > 1$,

于是 $0 < a_n < a_{N+1} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|a_{N+1} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}\right| = 0$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

11. 证明: 若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \cdots$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

证 由 $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}}$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$

12. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 存在, 证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n! \cdot a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n).$$

解 (1) 设 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a$, 则由 $\sum_{k=1}^n ka_k = ns_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ka_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} s_k \right) = a - a = 0.$$

(2) 由 $0 < (n! \cdot a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} (a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n)$ 与 (1), 即得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n! \cdot a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

13. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

证 令 $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$. 设 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $|\beta_n| \leq M$. 因为

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab + \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k + \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n \beta_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k+1},$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\alpha_k \beta_{n-k+1}| \leq \frac{M}{n} \sum_{k=1}^n |\alpha_k|,$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\alpha_k| = 0$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \beta_k = 0$, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

14. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ ($-\infty < a < +\infty$). 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \right) = a$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n} \right) = 0.$$

§3 无穷大量

1. 按定义证明下述数列为无穷大量:

$$(1) \left\{ \frac{n^2+1}{2n+1} \right\}; \quad (2) \left\{ \log_a \left(\frac{1}{n} \right) \right\} \quad (a>1);$$

$$(3) \{n - \arctan n\}; \quad (4) \left\{ \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right\}.$$

证 (1) $\forall G>0$, 取 $N=[3G]$, 当 $n>N$ 时, 成立 $\left| \frac{n^2+1}{2n+1} \right| > \frac{n}{3} > G$.

(2) $\forall G>0$, 取 $N=[a^G]$, 当 $n>N$ 时, 成立 $\left| \log_a \left(\frac{1}{n} \right) \right| = \log_a n > G$.

(3) $\forall G>0$, 取 $N=\left[G + \frac{\pi}{2}\right]$, 当 $n>N$ 时, 成立 $|n - \arctan n| > G$.

(4) $\forall G>0$, 取 $N=[2G^2]$, 当 $n>N$ 时, 成立

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right| > \frac{n}{\sqrt{2n}} > G.$$

2. (1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (或 $-\infty$), 按定义证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = +\infty \text{ (或 } -\infty \text{)};$$

(2) 设 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 利用(1)证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

证 (1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 则 $\forall G>0$, $\exists N_1>0$, $\forall n>N_1$; $a_n > 3G$. 对固定的 N_1 , $\exists N>2N_1$, $\forall n>N$, 成立 $\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} \right| < \frac{G}{2}$, 于是

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_n}{n} - \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} \right| > \frac{3G}{2} - \frac{G}{2} = G.$$

同理可证当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ 时, 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = -\infty$.

(2) 先证明下述两个命题:

(i) 设 $x_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = -\infty$.

证 $\forall G>0$, 取 $\varepsilon = e^{-G} > 0$, 由 $x_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 可知 $\exists N$, $\forall n>N$, 成立 $0 < x_n < \varepsilon = e^{-G}$, 所以 $\ln x_n < -G$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = -\infty.$$

(ii) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{y_n} = 0$.

证 $\forall 0 < \varepsilon < 1$, 取 $G = \ln \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, 可知 $\exists N, \forall n > N$, 成立 $y_n < -G = \ln \varepsilon$, 所以 $0 < e^{y_n} < \varepsilon$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{y_n} = 0.$$

利用以上两个命题与(1)的结论, 就有以下的证明: 由于 $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = -\infty$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}} = 0.$$

3. 证明:

(1) 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, $|y_n| \geq \delta > 0$, 则 $\{x_n y_n\}$ 是无穷大量;

(2) 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$, 则 $\{x_n y_n\}$ 与 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ 都是无穷大量.

证 (1) 因为 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 所以 $\forall G > 0, \exists N, \forall n > N$, 成立 $|x_n| > \frac{G}{\delta}$. 于是 $\forall n > N$, 成立 $|x_n y_n| > G$, 所以 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷大量.

(2) 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$, 可知 $\exists N', \forall n > N'$, 成立 $\frac{|b|}{2} \leq |y_n| \leq 2|b|$.

因为 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 所以 $\forall G > 0, \exists N'', \forall n > N''$, 成立

$$|x_n| > \max\left\{\frac{2G}{|b|}, 2|b|G\right\}.$$

取 $N = \max\{N', N''\}$, $\forall n > N$, 成立 $|x_n y_n| > G$ 与 $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > G$, 所以 $\{x_n y_n\}$ 与 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ 都是无穷大量.

4. (1) 利用 Stolz 定理, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2}{n^3} = \frac{4}{3};$$

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2}{n^3} - \frac{4}{3} \right]$.

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{n^3 - (n-1)^3} = \frac{4}{3}.$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2}{n^3} - \frac{4}{3} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3[1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2] - 4n^3}{3n^2}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(2n+1)^2 - 4n^3 + 4(n-1)^3}{3n^2 - 3(n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n-1}{6n-3} = 4.$

5. 利用 Stolz 定理, 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1);$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1, k \text{ 是正整数}).$

证 (1) 先证明下述命题:

设 $x_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a x_n = 0$.

不妨设 $a > 1, \forall \varepsilon > 0$, 取 $\eta = \min\{a^\varepsilon - 1, 1 - a^{-\varepsilon}\} > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, 可知 $\exists N, \forall n > N$, 成立 $|x_n - 1| < \eta$, 于是 $a^{-\varepsilon} < x_n < a^\varepsilon$, 从而 $-\varepsilon < \log_a x_n < \varepsilon$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a x_n = 0.$$

利用上述命题与 Stolz 定理, 即可得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_a \frac{n}{n-1} = 0.$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k - (n-1)^k}{a^n - a^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)},$

其中 $P_{k-1}(n)$ 为关于 n 的 $k-1$ 次多项式; 重复上述过程 k 次即得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{k-2}(n)}{a^{n-2}(a-1)^2} = \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_0(n)}{a^{n-k}(a-1)^k} = 0.$$

6. (1) 在 Stolz 定理中, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \infty$, 能否得出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ 的结论?

(2) 在 Stolz 定理中, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ 不存在, 能否得出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ 不存在的结论?

解 (1) 不能. 考虑例子 $x_n = (-1)^n n, y_n = n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{1} = \infty,$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 极限不存在.

(2) 不能. 考虑例子 $x_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}n$, $y_n = n^2$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{2n-1} \text{ 极限不存在, 但 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

7. 设 $0 < \lambda < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \frac{a}{1-\lambda}.$$

证 记 $k = \lambda^{-1}$, 则 $a_n + \lambda a_{n-1} + \cdots + \lambda^n a_0 = \frac{k^n a_n + k^{n-1} a_{n-1} + \cdots + a_0}{k^n}$, 利用

Stolz 定理,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n a_n + k^{n-1} a_{n-1} + \cdots + a_0}{k^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n a_n}{k^{n-1}(k-1)} = \frac{a}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

8. 设 $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有极限. $\{p_n\}$ 为单调递增的正数数列, 且 $p_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = 0.$$

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, 作代换 $a_k = A_k - A_{k-1}$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} &= \frac{p_1 A_1 + p_2 (A_2 - A_1) + \cdots + p_n (A_n - A_{n-1})}{p_n} \\ &= A_n - \frac{A_1(p_2 - p_1) + A_2(p_3 - p_2) + \cdots + A_{n-1}(p_n - p_{n-1})}{p_n}, \end{aligned}$$

对上式求极限, 在求后一分式的极限时应用 Stolz 定理,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1(p_2 - p_1) + A_2(p_3 - p_2) + \cdots + A_{n-1}(p_n - p_{n-1})}{p_n} \\ &= A - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n-1}(p_n - p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}} = A - A = 0. \end{aligned}$$

§4

收敛准则

1. 利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 求下列数列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n;$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} \right] = \frac{1}{e}.$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \right] = e.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$$(4) \text{ 因为对一切 } n, \text{ 成立 } 1 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n < 3, \text{ 由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{\frac{1}{n}} = 1 \text{ 与 } \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1, \text{ 由}$$

极限的夹逼性, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \right]^{\frac{1}{n}} = 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \right]^{\frac{1}{n}} = 1.$$

(5) 当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n = e$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n = e$.

2. 利用单调有界数列必定收敛的性质, 证明下述数列收敛, 并求出极限:

$$(1) x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$(2) x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$(3) x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \frac{-1}{2 + x_n}, n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$(4) x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{4 + 3x_n}, n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$(5) 0 < x_1 < 1, x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}, n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$(6) 0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(2 - x_n), n = 1, 2, 3, \dots.$$

解 (1) 首先有 $0 < x_1 = \sqrt{2} < 2$, 设 $0 < x_k < 2$, 则 $0 < x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < 2$, 由数学归纳法可知 $\forall n, 0 < x_n < 2$. 由

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - \sqrt{2 + x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{2 + x_n} + \sqrt{2 + x_{n-1}}},$$

可知数列 $\{x_{n+1} - x_n\}$ 保持同号; 再由 $x_2 - x_1 > 0$, 可知 $\forall n, x_{n+1} - x_n > 0$, 所以 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 因此收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对等式 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ 两端求极限, 利用习题 2.2 的第 6 题的结果, 得到方程 $a = \sqrt{2 + a}$, 解此方程, 得到 $a = 2$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

(2) 首先有 $0 < x_1 = \sqrt{2} < 2$, 设 $0 < x_k < 2$, 则 $0 < x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < 2$, 由数学归纳法可知 $\forall n, 0 < x_n < 2$. 由 $x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{2} - \sqrt{x_n}) > 0$, 可知 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 因此收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对等式 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ 两端求极限, 利用习题 2.2 的第 6 题的结果, 得到方程 $a = \sqrt{2 + a}$, 解此方程, 得到 $a = 2$ (另一解 $a = 0$ 舍去), 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

(3) 首先有 $x_1 = \sqrt{2} > -1$, 设 $x_k > -1$, 则 $x_{k+1} = \frac{-1}{2 + x_k} > -1$, 由数学归纳法可知 $\forall n, x_n > -1$. 由 $x_{n+1} - x_n = \frac{-1}{2 + x_n} - x_n = -\frac{(x_n + 1)^2}{2 + x_n} < 0$, 可知 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列, 因此收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对等式 $x_{n+1} = \frac{-1}{2 + x_n}$ 两端求极限, 得到方程 $a = \frac{-1}{2 + a}$, 解此方程, 得到 $a = -1$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1.$$

(4) 首先有 $0 < x_1 = 1 < 4$, 设 $0 < x_k < 4$, 则 $0 < x_{k+1} = \sqrt{4 + 3x_k} < 4$, 由数学归纳法可知 $\forall n, 0 < x_n < 4$. 由 $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 4 + 3x_n - x_n^2 = (4 - x_n)(1 + x_n) > 0$, 可知 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 因此收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对等式 $x_{n+1} = \sqrt{4 + 3x_n}$ 两端求极限, 利用习题 2.2 的第 6 题的结果, 得到方程 $a = \sqrt{4 + 3a}$, 解此方程, 得到 $a = 4$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4.$$

(5) 首先有 $0 < x_1 < 1$, 设 $0 < x_k < 1$, 则 $0 < x_{k+1} = 1 - \sqrt{1 - x_k} < 1$, 由数学归纳法可知 $\forall n, 0 < x_n < 1$. 由 $x_{n+1} - x_n = 1 - x_n - \sqrt{1 - x_n} < 0$, 可知 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列, 因此收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对等式 $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ 两端求极限, 利用习题 2.2 的第 6 题的结果, 得到方程 $a = 1 - \sqrt{1 - a}$, 解此方程, 得到 $a = 0$ (另一解 $a = 1$ 舍去),

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(6) 首先有 $0 < x_1 < 1$, 设 $0 < x_k < 1$, 则 $0 < x_{k+1} = x_k(2 - x_k) < 1$, 由数学归纳法可知 $\forall n, 0 < x_n < 1$. 由 $x_{n+1} - x_n = x_n(2 - x_n) - x_n = x_n(1 - x_n) > 0$, 可知 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 因此收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对等式 $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$ 两端求极限, 得到方程 $a = a(2 - a)$, 解此方程, 得到 $a = 1$ (另一解 $a = 0$ 舍去), 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

3. 利用递推公式与单调有界数列的性质, 证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdots \frac{n+1}{2n+1} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

证 (1) 设 $x_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdots \frac{n+1}{2n+1}$, 则 $x_n > 0$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{2n+3} < 1$, 所以 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列, 因此收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对等式 $x_{n+1} = \frac{n+2}{2n+3} x_n$ 两端求极限, 得到 $a = \frac{1}{2}a$, 于是 $a = 0$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdots \frac{n+1}{2n+1} = 0.$$

(2) 设 $x_n = \frac{a^n}{n!}$, 则 $x_n > 0$, 且当 $n > a$ 时, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1} < 1$, 所以 $\{x_n\}$ 从某一项开始是单调减少有下界的数列, 因此收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 对等式 $x_{n+1} = \frac{a}{n+1} x_n$ 两端求极限, 得到 $x = 0$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

(3) 设 $x_n = \frac{n!}{n^n}$, 则 $x_n > 0$, $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1$, 所以 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列, 因此收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对等式 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x_{n+1}$ 两端求极限, 得到 $a = ea$, 于是 $a =$

0, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

4. 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$, $n=1, 2, 3, \dots$, 分 $x_1=1$ 与 $x_1=-2$ 两种情况求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 对 $x_1=1$, 易知 $\forall n, x_n > 0$, 且当 $n \geq 2$ 时, $x_n \geq \sqrt{2}$. 由 $x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \leq 0$, 可知数列 $\{x_n\}$ 单调减少有下界, 所以收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对等式 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ 两端求极限, 得到 $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right)$, 解得 $a = \sqrt{2}$ ($a = -\sqrt{2}$ 舍去), 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}.$$

对 $x_1=-2$, 易知 $\forall n, x_n \leq -\sqrt{2}$. 由 $x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \geq 0$, 可知数列 $\{x_n\}$ 单调增加有上界, 所以收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 对等式 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ 两端求极限, 得到 $b = \frac{1}{2} \left(b + \frac{2}{b} \right)$, 解得 $b = -\sqrt{2}$ ($b = \sqrt{2}$ 舍去), 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\sqrt{2}.$$

5. 设 $x_1=a, x_2=b, x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 首先利用递推公式 $x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})$, 得到数列 $\{x_{n+1} - x_n\}$ 的通项公式 $x_{n+1} - x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b-a)$. 然后由

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = a + (b-a) \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k,$$

得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{a+2b}{3}.$$

第二章 数列极限

6. 给定 $0 < a < b$, 令 $x_1 = a, y_1 = b$.

(1) 若 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 证明 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. 这个公共极限称为 a 与 b 的算术几何平均;

(2) 若 $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 证明 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. 这个公共极限称为 a 与 b 的算术调和平均.

证 (1) 首先易知 $\forall n$, 有 $x_n \leq y_n$. 由 $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}) \geq 0$, $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}(x_n - y_n) \leq 0$, 得到 $a \leq x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n \leq b$, 即 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列, $\{y_n\}$ 是单调减少有下界的数列, 所以它们收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, 对 $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ 的两端求极限, 得到 $x = y$.

(2) 首先易知当 $n \geq 2$ 时, 有 $x_n \geq y_n$. 由 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(y_n - x_n) \leq 0$, $y_{n+1} - y_n = \frac{y_n(x_n - y_n)}{x_n + y_n} \geq 0$, 得到当 $n \geq 2$ 时, $\frac{2ab}{a+b} \leq y_n < y_{n+1} < x_{n+1} < x_n \leq \frac{a+b}{2}$, 即 $\{y_n\}$ 是单调增加有上界的数列, $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列, 所以它们收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, 对 $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ 的两端求极限, 得到 $x = y$.

7. 设 $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 当 $0 < x_n < \sqrt{2} - 1$ 时, 有 $x_{n+1} > \sqrt{2} - 1$; 当 $x_n > \sqrt{2} - 1$ 时, 有 $0 < x_{n+1} < \sqrt{2} - 1$.

由于 $x_1 = \sqrt{2} > \sqrt{2} - 1$, 得到 $\forall n, x_{2n+1} > \sqrt{2} - 1, 0 < x_{2n} < \sqrt{2} - 1$. 于是由

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = \frac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}} - x_{2n-1} = \frac{-2(x_{2n-1} - \sqrt{2} + 1)(x_{2n-1} + \sqrt{2} + 1)}{5+x_{2n-1}} < 0,$$

$$x_{2n+2} - x_{2n} = \frac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}} - x_{2n} = \frac{-2(x_{2n} - \sqrt{2} + 1)(x_{2n} + \sqrt{2} + 1)}{5+x_{2n}} > 0,$$

可知数列 $\{x_{2n-1}\}$ 单调减少有下界, 数列 $\{x_{2n}\}$ 单调增加有上界, 从而都收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = b$, 对等式 $x_{2n+1} = \frac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}}$ 与 $x_{2n+2} = \frac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}$

两端求极限, 得到方程 $a = \frac{2+a}{5+2a}$ 与 $b = \frac{2+b}{5+2b}$, 解此两方程, 得到解 $a = \sqrt{2} - 1$

与 $b = \sqrt{2} - 1$ (另两解 $a = -\sqrt{2} - 1$ 与 $b = -\sqrt{2} - 1$ 舍去), 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} - 1.$$

8. 设 $\{x_n\}$ 是一单调数列, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的充分必要条件是: 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

证 必要性显然, 现证充分性. 不妨设 $\{x_n\}$ 单调增加, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists K, \forall k > K: -\varepsilon < x_{n_k} - a \leq 0$. 取 $N = n_{K+1}, \forall n > N, \exists M > K + 1$, 使得 $n_{K+1} < n < n_M$, 于是 $-\varepsilon < x_{n_{K+1}} - a \leq x_n - a \leq x_{n_M} - a \leq 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

9. 证明: 若有界数列 $\{x_n\}$ 不收敛, 则必存在两个子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 与 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 收敛于不同的极限, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(1)} = a, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(2)} = b, a \neq b$.

证 由于 $\{x_n\}$ 不收敛, 所以 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists m > n > N$, 成立 $|x_m - x_n| \geq \varepsilon_0$.

取 $N_1 = 1, \exists m_1 > n_1 > N_1$, 成立 $|x_{m_1} - x_{n_1}| \geq \varepsilon_0$,

取 $N_2 = m_1, \exists m_2 > n_2 > N_2$, 成立 $|x_{m_2} - x_{n_2}| \geq \varepsilon_0$,

.....,

取 $N_k = m_{k-1}, \exists m_k > n_k > N_k$ 成立 $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$,

......

于是得到 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n_k}\}$ 与 $\{x_{m_k}\}$, 它们都是有界数列. 首先 $\{x_{n_k}\}$ 具有收敛子列 $\{x_{n'_k}\}$, 由于对应的 $\{x_{m_k}\}$ 也是有界数列, 又具有收敛子列 $\{x_{m'_k}\}$.

记 $\{n'_k\} = \{n_k^{(1)}\}, \{m'_k\} = \{n_k^{(2)}\}$, 则得到 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 与 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$, 它们收敛于不同的极限.

10. 证明: 若数列 $\{x_n\}$ 无界, 但非无穷大量, 则必存在两个子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 与 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$, 其中 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 是无穷大量, $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 是收敛子列.

证 由于数列 $\{x_n\}$ 不是无穷大量, 所以 $\exists M > 0$, 使得数列 $\{x_n\}$ 中有无穷多项满足 $|x_n| \leq M$, 于是从中可以取出数列 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 又由于数列 $\{x_n\}$ 无界, 所以对 $\forall G > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 中必有无穷多项满足 $|x_n| > G$.

取 $G_1 = 1$, 则 $\exists n_1$, 使得 $|x_{n_1}| > G_1$,

取 $G_2 = 2$, 则 $\exists n_2 > n_1$, 使得 $|x_{n_2}| > G_2$,

.....,

取 $G_k = k$, 则 $\exists n_k > n_{k-1}$, 使得 $|x_{n_k}| > G_k$,

.....,

记 $\{n_k\} = \{n_k^{(1)}\}$, $\{m_k\} = \{n_k^{(2)}\}$, 则得到 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 与 $\{x_{n_k^{(2)}}\}$, 其中 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 是无穷大量, $\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 是收敛子列.

11. 设 S 是非空有上界的数集, $\sup S = a \in S$. 证明在数集 S 中可取出严格单调增加的数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

证 由 $\sup S = a \in S$, 可知 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in S$, 使得 $a - \varepsilon < x < a$.

先取 $\varepsilon_1 = 1$, 则 $\exists x_1 \in S$, 使得 $a - \varepsilon_1 < x_1 < a$;

对 $\varepsilon_2 = \min \left\{ \frac{1}{2}, a - x_1 \right\} > 0$, 则 $\exists x_2 \in S$, 使得 $a - \varepsilon_2 < x_2 < a$, 其中 $x_1 = a - (a - x_1) \leq a - \varepsilon_2 < x_2$;

对 $\varepsilon_3 = \min \left\{ \frac{1}{3}, a - x_2 \right\} > 0$, 则 $\exists x_3 \in S$, 使得 $a - \varepsilon_3 < x_3 < a$, 其中 $x_2 = a - (a - x_2) \leq a - \varepsilon_3 < x_3$;

.....;

对 $\varepsilon_n = \min \left\{ \frac{1}{n}, a - x_{n-1} \right\} > 0$, 则 $\exists x_n \in S$, 使得 $a - \varepsilon_n < x_n < a$, 其中 $x_{n-1} = a - (a - x_{n-1}) \leq a - \varepsilon_n < x_n$;

.....

由此在数集 S 中取到了严格单调增加的数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

12. 设 $\{(a_n, b_n)\}$ 是一列开区间, 满足条件:

(1) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1$,

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

证明: 存在惟一的实数 ξ 属于所有的开区间 (a_n, b_n) , 且 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

证 根据题意, $\{a_n\}$ 单调增加有上界, $\{b_n\}$ 单调减少有下界, 因此都收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n + (b_n - a_n)] = \xi$. 由于 $\{a_n\}$ 严格单调增加, $\{b_n\}$ 严格单调减少, 可知 $\forall n$, 有 $a_n < \xi < b_n$, 即 ξ 属于所有的开区间 (a_n, b_n) .

若存在另一 ξ' 属于所有的开区间 (a_n, b_n) , 则由 $a_n < \xi' < b_n$, 利用极限的夹逼性, 得到 $\xi' = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$, 即满足题意的 ξ 是惟一的.

13. 利用 Cauchy 收敛原理证明下述数列收敛:

$$(1) x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n \quad (|q| < 1, |a_k| \leq M);$$

$$(2) x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

证 (1) $\forall \varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{M}{1-|q|} \right)$, 取 $N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1-|q|}{\varepsilon}}{\ln |q|} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k q^k \right| \leq M |q|^{n+1} (1 + |q| + |q|^2 + \cdots + |q|^{m-n-1}) < \frac{M}{1-|q|} |q|^{n+1} < \varepsilon.$$

$$(2) \forall \varepsilon > 0, \text{取 } N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil, \text{当 } n > N \text{ 时, 成立 } \left| \sum_{k=n+1}^m (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

14. (1) 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, 问 $\{x_n\}$ 是否一定是基本数列;

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$, 证明 $\{x_n\}$ 是基本数列.

解 (1) 不一定. 反例: $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$$(2) \forall \varepsilon (0 < \varepsilon < 1), \text{取 } N = 1 + \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}} \right\rceil, \forall m > n > N, \text{成立}$$

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} < \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

15. 对于数列 $\{x_n\}$ 构造数集 A_k :

$$A_k = \{x_n | n \geq k\} = \{x_k, x_{k+1}, \cdots\}.$$

记 $\text{diam } A_k = \sup\{|x_n - x_m|, x_n \in A_k, x_m \in A_k\}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } A_k = 0.$$

证 充分性. 因为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } A_k = 0, \forall \varepsilon > 0, \exists K, \forall k > K, \text{成立 } \text{diam } A_k < \varepsilon$. 取 $N = K$, 则 $\forall m > n > N$, 成立

$$|x_m - x_n| \leq \text{diam } A_{K+1} < \varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛原理, $\{x_n\}$ 收敛.

必要性. 由 $\{x_n\}$ 收敛, $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m > n > N$, 成立

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $K = N, \forall k > K$,

$$\text{diam } A_k = \sup\{|x_m - x_n|, m, n \geq k\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } A_k = 0.$$

16. 利用 Cauchy 收敛原理证明: 单调有界数列必定收敛.

证 采用反证法. 不妨设 $\{x_n\}$ 是单调增加的有界数列. 假设它不收敛, 则

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists m, n > N$, 成立 $|x_m - x_n| > \varepsilon_0$.

取 $N_1 = 1, \exists m_1 > n_1 > N_1$, 成立 $x_{m_1} - x_{n_1} > \varepsilon_0$;

取 $N_2 = m_1, \exists m_2 > n_2 > N_2$, 成立 $x_{m_2} - x_{n_2} > \varepsilon_0$;

.....;

取 $N_k = m_{k-1}, \exists m_k > n_k > N_k$, 成立 $x_{m_k} - x_{n_k} > \varepsilon_0$;

......

于是 $x_{m_k} - x_{n_1} > k\varepsilon_0 \rightarrow +\infty (k \rightarrow \infty)$, 与数列 $\{x_n\}$ 有界矛盾.

第三章 函数极限与连续函数

§ 1 函数极限

1. 按函数极限的定义证明:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$; (2) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$;
(3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$; (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}$;
(5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$;
(7) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{x^2-4} = +\infty$; (8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$.

证 (1) 先取 $|x-2| < 1$, 则 $1 < x < 3$, $|x^3 - 8| = |(x^2 + 2x + 4)(x-2)| < 19|x-2|$, 于是对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{19}\right\} > 0$, 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 成立 $|x^3 - 8| < 19|x-2| < \varepsilon$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8.$$

(2) 首先函数 \sqrt{x} 的定义域为 $x \geq 0$, 且 $|\sqrt{x} - 2| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2}|x-4|$, 于是对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{4, 2\varepsilon\} > 0$, 当 $0 < |x-4| < \delta$ 时, 成立 $|\sqrt{x} - 2| \leq \frac{1}{2}|x-4| < \varepsilon$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2.$$

(3) 先取 $|x-3| < 1$, 则 $2 < x < 4$, $\left|\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-3}{2(x+1)}\right| < \frac{1}{6}|x-3|$, 于是对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{1, 6\varepsilon\} > 0$, 当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 成立 $\left|\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{6}|x-3| < \varepsilon$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

(4) 先取 $|x| > 1$, 则 $|2x-1| \geq |x|$, $\left|\frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2|2x-1|} \leq \frac{3}{2|x|}$, 于是对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $X = \max\left\{1, \frac{3}{2\varepsilon}\right\} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 成立 $\left|\frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2}\right| \leq$

$\frac{3}{2|x|} < \epsilon$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

(5) 对任意的 $G > 0$, 取 $\delta = e^{-G} > 0$, 当 $0 < x < \delta$ 时, 成立 $\ln x < -G$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

(6) 对任意的 $0 < \epsilon < 1$, 取 $X = \ln \frac{1}{\epsilon} > 0$, 当 $x > X$ 时, 成立 $0 < e^{-x} < e^{-\ln \epsilon} = \epsilon$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

(7) 先取 $0 < x-2 < 1$, 则 $2 < x < 3$, $\frac{2x}{x+2} > 1$, 于是对任意的 $G > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ 1, \frac{1}{G} \right\}$, 当 $0 < x-2 < \delta$ 时, 成立 $\frac{2x}{x^2-4} = \frac{2x}{(x+2)(x-2)} > \frac{1}{x-2} > G$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{x^2-4} = +\infty.$$

(8) 先取 $x < -1$, 则 $\frac{x}{x+1} > 1$, 于是对任意的 $G > 0$, 取 $X = \max \{1, G\}$, 当 $x < -X$ 时, 成立 $\frac{x^2}{x+1} < x < -G$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty.$$

2. 求下列函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^5-5x^3+2x}{x^5-x^3+3x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)(1+3x)-1}{x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n-1}{x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^n}{x^2};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-\cos x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

解

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{1}{2}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^5 - 5x^3 + 2x}{x^5 - x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 5x^2 + 3x^4}{3 - x^2 + x^4} = \frac{2}{3}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)(1+3x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+5x+6x^2) - 1}{x} = 5.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + x^n}{x} = n.$$

$$\begin{aligned} (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nm x + C_n^2 m^2 x^2 + \cdots + m^n x^n) - (1+mn x + C_m^2 n^2 x^2 + \cdots + n^m x^m)}{x^2} \\ = \frac{1}{2} nm(n-m). \end{aligned}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = \cos a.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = 2.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = 4.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^3 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

3. 利用夹逼法求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

解 (1) $\forall x > 0$, 当 $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, 有 $\frac{n}{n+1} < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 可知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$. $\forall x < 0$, 当 $-\frac{1}{n} < x \leq -\frac{1}{n+1}$, 有 $1 \leq x \left[\frac{1}{x} \right] < \frac{n+1}{n}$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 可知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$. 由此得到

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

(2) 当 $n \leq x < n+1$, 有 $n^{\frac{1}{n+1}} < x^{\frac{1}{x}} < (n+1)^{\frac{1}{n}}$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n+1}} = 1$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$, 得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

4. 利用夹逼法证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \quad (a > 1, k \text{ 为任意正整数});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^k x}{x} = 0 \quad (k \text{ 为任意正整数}).$$

解 (1) 首先有 $0 < \frac{x^k}{a^x} < \frac{([x]+1)^k}{a^{[x]}}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{a^n} = 0$, 即得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0.$$

(2) 令 $\ln x = t$, 则 $\frac{\ln^k x}{x} = \frac{t^k}{e^t}$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有 $t \rightarrow +\infty$. 再利用(1)的结论, 即得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^k x}{x} = 0.$$

5. 讨论单侧极限:

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & 0 < x \leq 1, \\ x^2, & 1 < x < 2, \\ 2x, & 2 < x < 3, \end{cases} \text{ 在 } x=0, 1, 2 \text{ 三点};$$

$$(2) f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 1}{2^{\frac{1}{x}} - 1}, \text{ 在 } x=0 \text{ 点};$$

(3) Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases} \text{ 在任意点};$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], \text{ 在 } x = \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{0+1}{0-1} = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{1}{2^x}}{1 - \frac{1}{2^x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

(3) 设 x_0 为任意一点. 取有理数点列 $\{x'_n\}$, $x'_n > x_0$ (或 $x'_n < x_0$), $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x'_n) = 1$; 取无理数点列 $\{x''_n\}$, $x''_n > x_0$ (或 $x''_n < x_0$), $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x''_n) = 0$. 由定理 3.1.5 (Heine 定理), 可知 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} D(x)$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} D(x)$) 不存在.

在, 所以 $D(x)$ 在任意点无单侧极限.

(4) 当 $x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$, $\frac{1}{x} \in (n-1, n)$, 于是 $\left[\frac{1}{x}\right] = n-1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^+} f(x) = n - (n-1) = 1;$$

当 $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, $\frac{1}{x} \in (n, n+1)$, 于是 $\left[\frac{1}{x}\right] = n$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^-} f(x) = n - n = 0.$$

6. 说明下列函数极限的情况:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \sin x;$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \sin \frac{1}{x};$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2};$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x;$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right).$

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $|\sin x| \leq 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \sin x$ 极限不存在, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \sin x$ 极限不存在.

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \sin \frac{1}{x} = \begin{cases} 0, & \alpha < 1, \\ 1, & \alpha = 1, \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^x = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ 极限不存在.

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$(6) \text{ 取 } x'_n = \frac{1}{n}, x''_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x'_n} - \left[\frac{1}{x'_n}\right]\right) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x''_n} - \left[\frac{1}{x''_n}\right]\right) = \frac{1}{2},$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)$ 极限不存在.

7. 设函数

$$f(x) = \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right).$$

问当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 的极限是否存在?

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + (e^{\frac{1}{x}})^4} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{-x} \right) = 2 - 1 = 1,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1.$

8. 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ($a \geq 0$), 证明: $\lim_{x \rightarrow \sqrt{a}} f(x^2) = A.$

证 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ($a \geq 0$), 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0, \forall x$ ($0 < |x - a| < \delta'$), 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 取 $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\delta'}{1 + 2\sqrt{a}} \right\} > 0$, 则当 $0 < |x - \sqrt{a}| < \delta$ 时, 首先有 $|x + \sqrt{a}| < 1 + 2\sqrt{a}$, 于是 $0 < |x^2 - a| = |(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})| < \delta'$, 从而 $|f(x^2) - A| < \varepsilon$, 这就说明了 $\lim_{x \rightarrow \sqrt{a}} f(x^2) = A.$

9. (1) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = A$, 证明: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$;

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = A$, 问是否成立 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$?

证 (1) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0, \forall x$ ($0 < |x| < \delta'$) (即 $0 < |x^3| < \delta'^3$), 有 $|f(x^3) - A| < \varepsilon$. 取 $\delta = \delta'^3 > 0$, 则当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有 $0 < |x^3| < \delta'$, 从而 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 这就说明了 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A.$

(2) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = A$ 时, 不一定成立 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A.$

例如: $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = 1$, 但极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

10. 写出下述命题的“否定命题”的分析表述:

- (1) $\{x_n\}$ 是无穷小量;
- (2) $\{x_n\}$ 是正无穷大量;
- (3) $f(x)$ 在 x_0 的右极限是 A ;

(4) $f(x)$ 在 x_0 的左极限是正无穷大量;

(5) 当 $x \rightarrow -\infty$, $f(x)$ 的极限是 A ;

(6) 当 $x \rightarrow +\infty$, $f(x)$ 是负无穷大量.

解 (1) $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists n > N$, 成立 $|x_n| \geq \varepsilon_0$.

(2) $\exists G_0 > 0, \forall N, \exists n > N$, 成立 $x_n \leq G_0$.

(3) $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 成立 $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

(4) $\exists G_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 成立 $f(x) \leq G_0$.

(5) $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall X > 0, \exists x \in (-\infty, -X)$, 成立 $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

(6) $\exists G_0 > 0, \forall X > 0, \exists x \in (X, +\infty)$, 成立 $f(x) \geq -G_0$.

11. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ 的充分必要条件是: 对于任意从右方收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ ($x_n > x_0$), 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty.$$

证 必要性: 由 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, 可知 $\forall G > 0, \exists \delta > 0, \forall x$ ($0 < x - x_0 < \delta$), 成立 $f(x) > G$. 因为数列 $\{x_n\}$ ($x_n > x_0$) 收敛于 x_0 , 对于上述 $\delta > 0, \exists N, \forall n > N$, 成立 $0 < x_n - x_0 < \delta$. 于是当 $n > N$ 时, 成立 $f(x_n) > G$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$.

充分性: 用反证法. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ 不成立, 则 $\exists G_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x$ ($0 < x - x_0 < \delta$), 成立 $f(x) \leq G_0$. 取 $\delta_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$:

对于 $\delta_1 = 1, \exists x_1$ ($0 < x_1 - x_0 < 1$), 成立 $f(x_1) \leq G_0$;

对于 $\delta_2 = \frac{1}{2}, \exists x_2$ ($0 < x_2 - x_0 < \frac{1}{2}$), 成立 $f(x_2) \leq G_0$;

.....,

对于 $\delta_k = \frac{1}{k}, \exists x_k$ ($0 < x_k - x_0 < \frac{1}{k}$), 成立 $f(x_k) \leq G_0$;

.....,

于是得到数列 $\{x_n\}$ ($x_n > x_0$) 收敛于 x_0 , 但相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 不可能是无穷大量, 由此产生矛盾, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ 成立.

12. 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 的充分必要条件是: 对于任意正无穷大量 $\{x_n\}$, 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty.$$

证 必要性: 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 可知 $\forall G > 0, \exists X > 0, \forall x > X$, 成立



$f(x) < -G$. 因为数列 $\{x_n\}$ 是正无穷大量, 对于上述 $X > 0$, $\exists N, \forall n > N$, 成立 $x_n > X$. 于是当 $n > N$ 时, 成立 $f(x_n) < -G$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$.

充分性: 用反证法. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 不成立, 则 $\exists G_0 > 0, \forall X > 0, \exists x > X$, 成立 $f(x) \geq -G_0$. 取 $X_n = n, n = 1, 2, 3, \dots$:

对于 $X_1 = 1, \exists x_1 > 1$, 成立 $f(x_1) \geq -G_0$;

对于 $X_2 = 2, \exists x_2 > 2$, 成立 $f(x_2) \geq -G_0$;

.....,

对于 $X_k = k, \exists x_k > k$, 成立 $f(x_k) \geq -G_0$;

.....,

于是得到数列 $\{x_n\}$ 为正无穷大量, 但相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 不可能是负无穷大量, 由此产生矛盾, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 成立.

13. 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是: 对于任意正无穷大量 $\{x_n\}$, 相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

证 必要性: 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x > X$, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 因为数列 $\{x_n\}$ 是正无穷大量, 对于上述 $X > 0, \exists N, \forall n > N$, 成立 $x_n > X$. 于是当 $n > N$ 时, 成立 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

充分性: 因为对于任意正无穷大量 $\{x_n\}$, 相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 我们可以断言 $\{f(x_n)\}$ 收敛于同一个极限. 事实上, 如果存在正无穷大量 $\{x'_n\}$ 与 $\{x''_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = A, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = B$, 且 $A \neq B$, 则取 $x_{2n-1} = x'_n, x_{2n} = x''_n$, $\{x_n\}$ 仍然是正无穷大量, 但相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 不收敛.

设 $\{f(x_n)\}$ 都收敛于同一个极限 A , 现用反证法证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 不成立, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall X > 0, \exists x > X$, 成立 $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$. 取 $X_n = n, n = 1, 2, 3, \dots$:

对于 $X_1 = 1, \exists x_1 > 1$, 成立 $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$;

对于 $X_2 = 2, \exists x_2 > 2$, 成立 $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$;

.....,

对于 $X_k = k, \exists x_k > k$, 成立 $|f(x_k) - A| \geq \varepsilon_0$;

.....,

于是得到数列 $\{x_n\}$ 为正无穷大量, 但相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 不收敛于 A , 由此产生矛盾, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

14. 分别写出下述函数极限存在而且有限的 Cauchy 收敛原理, 并加以证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x); \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x); \quad (3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

解 (1) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对一切 $x', x'' \in \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$, 成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

先证必要性. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$, 成立 $|f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon.$$

再证充分性. 任意选取数列 $\{x_n\}, x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 则对于条件中的 $\delta > 0, \exists N, \forall n > N$, 成立 $0 < |x_n - x_0| < \delta$. 于是当 $m > n > N$ 时, 成立 $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$. 这说明函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列, 因而收敛. 再根据相应的 Heine 定理, 可知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在而且有限.

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对一切 $x', x'' \in \{x | 0 < x - x_0 < \delta\}$, 成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

先证必要性. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in \{x | 0 < x - x_0 < \delta\}$, 成立 $|f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon.$$

再证充分性. 任意选取数列 $\{x_n\}, x_n > x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 则对于条件中的 $\delta > 0, \exists N, \forall n > N$, 成立 $0 < x_n - x_0 < \delta$. 于是当 $m > n > N$ 时, 成立 $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$. 这说明函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列, 因而收敛. 再根据相应的 Heine 定理, 可知 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在而且有限.

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 对一切 $x', x'' < -X$, 成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

先证必要性. 设 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x', x'' < -X$, 成立 $|f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon.$$

再证充分性. 任意选取数列 $\{x_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, 则对于条件中的 $X > 0, \exists N, \forall n > N$, 成立 $x_n < -X$. 于是当 $m > n > N$ 时, 成立 $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$. 这说明

函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列, 因而收敛. 再根据相应的 Heine 定理, 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在而且有限.

15. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上满足函数方程 $f(2x) = f(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 证明

$$f(x) \equiv A, x \in (0, +\infty).$$

证 $\forall x_0 \in (0, +\infty)$, 利用 $f(x) = f(2x)$ 得到 $f(x_0) = f(2^n x_0)$, 由于 $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(2^n x_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 由 x_0 的任意性得到 $f(x) \equiv A, x \in (0, +\infty)$.

§2 连续函数

1. 按定义证明下列函数在其定义域连续:

$$(1) y = \sqrt{x}; \quad (2) y = \sin \frac{1}{x};$$

$$(3) y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

证 (1) 函数 $y = \sqrt{x}$ 的定义域是 $D = [0, +\infty)$. 设 $x_0 \in D$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon^2 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ ($x \in D$) 时, 成立

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \sqrt{|x - x_0|} < \epsilon,$$

所以函数 $y = \sqrt{x}$ 在其定义域连续.

(2) 函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 的定义域是 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 设 $x_0 \in D$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ \frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_0|^2}{2} \epsilon \right\} > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 成立

$$\left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x_0} \right| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{|xx_0|} < \frac{2|x - x_0|}{|x_0|^2} < \epsilon,$$

所以函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在其定义域连续.

(3) 函数 $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 的定义域是 $D = (-\infty, +\infty)$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

可知函数在 $x_0 = 0$ 连续.

设 $x_0 \neq 0$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ \frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_0|}{4} \epsilon \right\} > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$

时,成立

$$\left| \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x_0}{x_0} \right| = \frac{|x_0 \sin x - x \sin x_0|}{|xx_0|} \leq \frac{|x_0| |\sin x - \sin x_0| + |\sin x_0| |x - x_0|}{|xx_0|}$$

$$< \frac{4}{|x_0|} |x - x_0| < \varepsilon,$$

所以 $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在其定义域连续.

2. 确定下列函数的连续范围:

$$(1) y = \tan x + \csc x; \quad (2) y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}};$$

$$(3) y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-3)}{x+1}}; \quad (4) y = [x] \ln(1+x);$$

$$(5) y = \left[\frac{1}{x} \right]; \quad (6) y = \operatorname{sgn}(\sin x).$$

解 (1) $y(x)$ 为初等函数, 它的定义域为 $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2} \right)$, 由定理

3.2.4, 函数的连续范围为 $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2} \right)$.

(2) $y(x)$ 为初等函数, 它的定义域为 $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$, 由定理

3.2.4, 函数的连续范围为 $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$.

(3) $y(x)$ 为初等函数, 它的定义域为 $(-1, 1] \cup [3, +\infty)$. 由定理 3.2.4, 函数的连续范围为 $(-1, 1] \cup [3, +\infty)$.

(4) $y(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$. 显然函数在 $(n, n+1)$ ($n \in \mathbb{Z}, n \geq -1$) 上连续. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \{ [x] \ln(1+x) \} = 0 = y(0),$$

所以函数也在 $x=0$ 连续. 对于任意正整数 n , 由于

$$\lim_{x \rightarrow n+} y(x) = n \ln(1+n) \neq \lim_{x \rightarrow n-} y(x) = (n-1) \ln(1+n),$$

所以函数在 $x=n$ 不连续, 从而函数的连续范围为 $\{x | x > -1, x \in \mathbb{N}_+\}$.

(5) $y(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 由于 $\left[\frac{1}{x} \right]$ 在 $x = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$) 不连续, 所以函数的连续范围为 $\{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\} \setminus \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \right\}$.

(6) 显然函数在 $(k\pi, (k+1)\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) 上连续. 由于 $\lim_{x \rightarrow k\pi+} y(x) \neq \lim_{x \rightarrow k\pi-} y(x)$,

所以函数的连续范围为 $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$.

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 证明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续. 反之, 若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续, 能否断言 $f(x)$ 在点 x_0 连续?

解 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则 $\forall 0 < \varepsilon < 1, \exists \delta > 0, \forall x (|x - x_0| < \delta)$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 同时还有 $|f(x) + f(x_0)| < 1 + 2|f(x_0)|$, 于是成立

$|f^2(x) - f^2(x_0)| = |(f(x) + f(x_0))(f(x) - f(x_0))| < (1 + 2|f(x_0)|)\varepsilon$
与

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

这说明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续.

反之, 若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续, 则不能断言 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 例如: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x_0 = 0$ 不连续, 但 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 $x_0 = 0$ 是连续的.

4. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续, $g(x)$ 在点 x_0 不连续, 能否断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续? 又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 都不连续, 则上面的断言是否成立?

解 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续, $g(x)$ 在点 x_0 不连续, 不能断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续: 例如 $f(x) \equiv 0$ 在点 $x_0 = 0$ 连续, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 2, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x_0 = 0$ 不连续, 但 $f(x)g(x) \equiv 0$ 在点 $x_0 = 0$ 连续.

又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 都不连续, 也不能断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续: 例如 $f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x_0 = 0$ 不连续, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 2, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x_0 = 0$ 不连续, 但 $f(x)g(x) \equiv 2$ 在点 $x_0 = 0$ 连续.

5. 若 f, g 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\max\{f, g\}$ 与 $\min\{f, g\}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 其中

$$\max\{f, g\} = \max\{f(x), g(x)\}, x \in [a, b];$$

$$\min\{f, g\} = \min\{f(x), g(x)\}, x \in [a, b].$$

证 由 f, g 在 $[a, b]$ 上的连续性, 可知 $|f(x) - g(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续, 利用等式

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\},$$

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2} \{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\},$$

即得到 $\max\{f, g\}$ 与 $\min\{f, g\}$ 在 $[a, b]$ 上的连续性.

6. 若对任意 $\delta > 0$, f 在 $[a + \delta, b - \delta]$ 上连续, 能否得出

(1) f 在 (a, b) 上连续?

(2) f 在 $[a, b]$ 上连续?

解 (1) $\forall x \in (a, b)$, $\exists \delta > 0$, 使得 $x \in [a + \delta, b - \delta]$, 由于 f 在 $[a + \delta, b - \delta]$ 上连续, 所以 f 在 x 点连续, 由 x 的任意性, 得到 f 在 (a, b) 上连续.

(2) 不能得到 f 在 $[a, b]$ 上连续. 反例: $f(x) = \operatorname{sgn} \sqrt{x(1-x)}$, $x \in [0, 1]$. 对于任意 $\delta > 0$, f 在 $[\delta, 1 - \delta]$ 上连续, 但 f 在 $[0, 1]$ 上不连续.

7. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$, 证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \alpha^\beta$; 并求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{2x-1}{x+1}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} \quad (\sin a \neq 0); \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n;$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right).$$

证 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \ln f(x)] = \beta \ln \alpha$, 利用指数函数的连续性, 得到

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\beta \ln \alpha} = \alpha^\beta.$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{2x-1}{x+1}} = 1^2 = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]^{\frac{2x}{x-1}} = e^2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin x - \sin a}{(x-a) \sin a}} = e^{\cot a}.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x+1}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{x+1}} \right]^{\frac{(x+1)n}{n-1}} = e^{x+1}.$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \right]^n$$



$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2 \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \right)^{\frac{1 - \tan \frac{1}{n}}{2 \tan \frac{1}{n}}} \right]^{\frac{2 \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}}} = e^2.$$

8. 指出下列函数的不连续点, 并确定其不连续的类型:

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}; \quad (2) y = [x] \sin \frac{1}{x};$$

$$(3) y = \frac{x}{\sin x}; \quad (4) y = [2x] - 2[x];$$

$$(5) y = \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad (6) y = x \ln^n |x|;$$

$$(7) y = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}; \quad (8) y = \frac{\sqrt{1+3x-1}}{\sqrt{1+2x-1}};$$

$$(9) y = \begin{cases} \sin \pi x, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数;} \end{cases} \quad (10) y = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{p}, & x = \frac{q}{p} \text{ (} p, q \text{ 互质, } p > 0 \text{),} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

解 (1) $x = 1, -2$. $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$, 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -2} y(x) = \infty$, 所以 $x = 1, -2$ 是第二类不连续点.

(2) $x = k$ ($k \in \mathbb{Z}$). 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\sin \frac{1}{x} \right)$ 极限不存在, 所以 $x = 0$ 是第二类不连续点; 对于 $x = k$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$), 由于

$$\lim_{x \rightarrow k^+} y(x) = k \sin \frac{1}{k} \neq \lim_{x \rightarrow k^-} y(x) = (k-1) \sin \frac{1}{k},$$

所以 $x = k$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$) 是第一类不连续点.

(3) $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$, 但 $y(x)$ 在 $x = 0$ 没有定义, 所以 $x = 0$ 是第三类不连续点; 对于 $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$), $\lim_{x \rightarrow k\pi} y(x) = \infty$, 所以 $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$) 是第二类不连续点.

(4) $x = \frac{1}{2}k$ ($k \in \mathbb{Z}$). 对任意整数 n ,

$$\lim_{x \rightarrow n^+} y(x) = 2n - 2n = 0, \quad \lim_{x \rightarrow n^-} y(x) = (2n-1) - 2(n-1) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow (n+\frac{1}{2})^+} y(x) = (2n+1) - 2n = 1, \quad \lim_{x \rightarrow (n+\frac{1}{2})^-} y(x) = 2n - 2n = 0,$$

所以 $x = \frac{1}{2}k$ ($k \in \mathbb{Z}$) 是第一类不连续点.

(5) $x=0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$, 但 $y(x)$ 在 $x=0$ 没有定义, 所以 $x=0$ 是第三类不连续点.

(6) $x=0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$, 但 $y(x)$ 在 $x=0$ 没有定义, 所以 $x=0$ 是第三类不连续点.

(7) $x=0, \pm 1$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$, 所以 $x=0$ 是第一类不连续点; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = \frac{1}{2}$, 但 $y(x)$ 在 $x=1$ 没有定义, 所以 $x=1$ 是第三类不连续点; $\lim_{x \rightarrow -1} y(x) = \infty$, 所以 $x=-1$ 是第二类不连续点.

(8) $x=0$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \frac{3}{2}$, 但 $y(x)$ 在 $x=0$ 没有定义, 所以 $x=0$ 是第三类不连续点.

(9) 非整数点. 对整数点 x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = 0 = y(x_0)$, 所以整数点是函数的连续点. 对非整数点 x_0 , 取有理数点列 $\{x'_n\}$, $x'_n > x_0$ (或 $x'_n < x_0$), $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y(x'_n) = \sin \pi x_0 \neq 0$; 取无理数点列 $\{x''_n\}$, $x''_n > x_0$ (或 $x''_n < x_0$), $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y(x''_n) = 0$. 于是可知 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y(x)$ 都不存在, 所以非整数点是第二类不连续点.

(10) 非整数有理点. 类似对 Riemann 函数的证明 (见教材例 3.2.7), 可以证明对一切点 x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = 0$, 由于在非整数有理点, $y(x) \neq 0$, 所以非整数有理点是第三类不连续点.

9. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且满足 $f(x^2) = f(x)$, $x \in (0, +\infty)$, 证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为常数函数.

证 $\forall x \in (0, +\infty)$, 利用 $f(x^2) = f(x)$ 得到 $f(x) = f(x^{2^{\frac{1}{n}}})$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2^{\frac{1}{n}}} = 1$ 及 $f(x)$ 的连续性, 得到 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{2^{\frac{1}{n}}}) = f(1)$.

§3 无穷小量与无穷大量的阶

1. 确定 a 与 α , 使下列各无穷小量或无穷大量等价于 $(\sim) ax^a$:

(1) $u(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 \quad (x \rightarrow 0, x \rightarrow \infty)$;

(2) $u(x) = \frac{x^5 + 2x^2}{3x^4 - x^3} \quad (x \rightarrow 0, x \rightarrow \infty)$;

(3) $u(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2} \quad (x \rightarrow 0^+, x \rightarrow +\infty)$;

$$(4) u(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \quad (x \rightarrow 0+, x \rightarrow +\infty);$$

$$(5) u(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x} \quad (x \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty);$$

$$(6) u(x) = \sqrt{x^2+1} - x \quad (x \rightarrow +\infty);$$

$$(7) u(x) = \sqrt{x^3+x} - x^{\frac{3}{2}} \quad (x \rightarrow 0+);$$

$$(8) u(x) = \sqrt{1+x\sqrt{x}} - e^{2x} \quad (x \rightarrow 0+);$$

$$(9) u(x) = \ln \cos x - \arctan x^2 \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(10) u(x) = \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x} \quad (x \rightarrow 0).$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{x^3} = 2$, 所以 $u(x) \sim 2x^3 \quad (x \rightarrow 0)$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x^5} = 1, \text{ 所以 } u(x) \sim x^5 \quad (x \rightarrow \infty).$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} xu(x) = -2$, 所以 $u(x) \sim -2x^{-1} \quad (x \rightarrow 0)$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x} = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } u(x) \sim \frac{1}{3}x \quad (x \rightarrow \infty).$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{u(x)}{x^{\frac{2}{3}}} = 1$, 所以 $u(x) \sim x^{\frac{2}{3}} \quad (x \rightarrow 0+)$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{x^{\frac{3}{2}}} = 1, \text{ 所以 } u(x) \sim x^{\frac{3}{2}} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{u(x)}{x^{\frac{1}{8}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1}}} = 1$, 所以 $u(x) \sim x^{\frac{1}{8}} \quad (x \rightarrow 0+)$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} = 1, \text{ 所以 } u(x) \sim x^{\frac{1}{2}} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

$$\begin{aligned} (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+3x}-1) - (\sqrt[3]{1+2x}-1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{2}x + o(x)\right) - \left(\frac{2}{3}x + o(x)\right)}{x} = \frac{5}{6}, \end{aligned}$$

所以 $u(x) \sim \frac{5}{6}x \quad (x \rightarrow 0)$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\frac{1}{x} + 3} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}} \right] = \sqrt{3},$$

所以 $u(x) \sim \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} \quad (x \rightarrow +\infty)$.

(6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xu(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{2}$, 所以 $u(x) \sim \frac{1}{2}x^{-1} \quad (x \rightarrow +\infty)$.

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 1, \text{ 所以 } u(x) \sim x^{\frac{1}{2}} (x \rightarrow 0^+).$$

$$\begin{aligned} (8) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+x}\sqrt{x} - 1) - (e^{2x} - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x} + o(x\sqrt{x})\right) - (2x + o(x))}{x} = -2, \end{aligned}$$

所以 $u(x) \sim -2x (x \rightarrow 0^+)$.

$$\begin{aligned} (9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) - \arctan x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) - (x^2 + o(x^2))}{x^2} = -\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

所以 $u(x) \sim -\frac{3}{2}x^2 (x \rightarrow 0)$.

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \sin x}{x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\sin x})} = 1, \text{ 所以 } u(x) \sim x (x \rightarrow 0).$$

2. (1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 下列变量都是无穷大量, 将它们从低阶到高阶进行排列, 并说明理由.

$$a^x (a > 1), x^x, x^a (a > 0), \ln^k x (k > 0), [x]!;$$

(2) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列变量都是无穷小量, 将它们从高阶到低阶进行排列, 并说明理由.

$$x^a (a > 0), \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!}, a^{-\frac{1}{x}} (a > 1), \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}}, \ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right) (k > 0).$$

解 (1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 从低阶无穷大量到高阶无穷大量的排列为

$$\ln^k x (k > 0), x^a (a > 0), a^x (a > 1), [x]!, x^x.$$

证 设 $n \leq x < n+1$,

$$\text{则 } 0 < \frac{x^a}{a^n} < \frac{(n+1)^a}{a^n}, 0 < \frac{a^x}{[x]!} < \frac{a^{n+1}}{n!}, 0 < \frac{[x]!}{x^n} < \frac{(n+1)!}{n^n}.$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^a}{a^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{n!} = 0 \text{ 与 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n^n} = 0,$$

$$\text{即得到 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{a^x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{[x]!} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]!}{x^x} = 0,$$

$$\text{同时也得到 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^k x}{x^a} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^k}{(e^a)^y} = 0 \quad (y = \ln x).$$

(2) 当 $x \rightarrow 0+$ 时, 从高阶无穷小量到低阶无穷小量的排列为

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}}, \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!}, a^{-\frac{1}{x}} (a > 1), x^a (a > 0), \ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right) (k > 0).$$

证 令 $y = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow 0+$ 时, 有 $y \rightarrow +\infty$. 参考(1)的排列即可得到(2)的排列.

3. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}); \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2});$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - a^a}{x - a} (a > 0);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x - a} (a > 0);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x) - \ln x);$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} (a > 0);$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x - \frac{x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) (x > 0);$$

$$(12) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) (x > 0).$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) - (\sqrt[3]{1+2x^2} - 1)}{\ln(1+3x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2}x + o(x)\right) - \left(\frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right)}{3x} = \frac{1}{6}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x(1 + \sqrt{\cos x})} = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}} = 1.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - a^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a(a^{x-a} - 1)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a(x-a)\ln a}{x - a} = a^a \ln a.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a(e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a a \ln \left(1 + \frac{x-a}{a}\right)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a a^{\frac{x-a}{a}}}{x-a} = a a^{a-1}.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)}{x-a} = \frac{1}{a}.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + e^x - 1)^{\frac{1}{x}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x + o(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + 2x + o(x))} = e^2.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x - \frac{x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - (1 - \cos x) - \frac{x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2 + o(x^2))^{\frac{1}{x^2}} \\ = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(1 - x^2 + o(x^2))} = e^{-1}.$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{1}{n} \ln x} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{1}{n} \ln x \right) = \ln x.$$

$$(12) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x^{\frac{1}{n+1}} \left(x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x^{\frac{1}{n+1}} (e^{\frac{1}{n(n+1)} \ln x} - 1) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{1}{n(n+1)} \ln x + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \ln x.$$

§4 闭区间上的连续函数

1. 证明: 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (有限数), 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界.

证 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (有限数), 可知 $\exists X > a, \forall x > X$, 成立 $|f(x) - A| < 1$, 即 $A - 1 < f(x) < A + 1$. 再由 $f(x)$ 在闭区间 $[a, X]$ 上的连续性, 可知 $f(x)$ 在 $[a, X]$ 上有界, 即 $\forall x \in [a, X]$, 成立 $|f(x)| < B$. 令 $M = \max\{B, A + 1\}$, $m = \min\{-B, A - 1\}$, 则 $\forall x \in [a, +\infty)$, 成立 $m < f(x) < M$.

2. 证明: 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上连续, 且 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 存在, 则它可取到介于 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 之间的一切中间值.

证 令

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b), \\ f(a+), & x = a, \\ f(b-), & x = b, \end{cases}$$

则 $\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 不妨设 $f(a+) < f(b-)$, 由闭区间上连续函数的中间值定理, 可知 $\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可取到 $[f(a+), f(b-)]$ 上的一切值, 于是 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上可取到介于 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 之间的一切中间值.

3. 证明: 若闭区间 $[a, b]$ 上的单调有界函数 $f(x)$ 能取到 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切值, 则 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数.

证 采用反证法. 不妨设 $f(x)$ 单调增加. 若 $\xi \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的不连续点, 则 $f(\xi-)$ 与 $f(\xi+)$ 都存在, 且 $f(a) \leq f(\xi-) < f(\xi+) \leq f(b)$, 于是 $f(x)$ 取不到开区间 $(f(\xi-), f(\xi+))$ 中异于 $f(\xi)$ 的值, 与条件矛盾; 若 $x = a$ 是 $f(x)$ 的不连续点, 则 $f(a+)$ 存在, 且 $f(a) < f(a+) \leq f(b)$, 于是 $f(x)$ 取不到开区间 $(f(a), f(a+))$ 中的值, 也与条件矛盾; 同样可以证明 $x = b$ 也不可能是 $f(x)$ 的不连续点.

4. 应用 Bolzano-Weierstrass 定理证明闭区间上连续函数的有界性定理.

证 采用反证法. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 但无界, 则存在点列 $\{x_n\}, x_n \in [a, b]$, 满足 $|f(x_n)| > n$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$. 由 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在子列 $\{x_{n_k}\}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$, 且 $\xi \in [a, b]$. 因为 $f(x)$ 在点 ξ 连续, 所以有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$, 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ 矛盾.

5. 应用闭区间套定理证明零点存在定理.

证 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 不妨设 $a = a_1, b = b_1, f(a) < 0, f(b) > 0$.

如果 $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = 0$, 则定理得证. 如果 $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) < 0$, 则令 $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, b_2 = b_1$; 如果 $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) > 0$, 则令 $a_2 = a_1, b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$.

如果 $f\left(\frac{a_2 + b_2}{2}\right) = 0$, 则定理得证. 如果 $f\left(\frac{a_2 + b_2}{2}\right) < 0$, 则令 $a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}, b_3 = b_2$; 如果 $f\left(\frac{a_2 + b_2}{2}\right) > 0$, 则令 $a_3 = a_2, b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$.

……,

这样的过程可以一直进行下去. 如果存在某个 k , 使得 $f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) = 0$, 则定

理得证;如果不存在某个 k , 使得 $f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) = 0$, 则得到一个闭区间套 $[a_n, b_n]$, 满足 $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$. 由闭区间套定理, 可知存在惟一属于所有闭区间 $[a_n, b_n]$ 的点 ξ , 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. 再由 $f(x)$ 在点 ξ 的连续性, 可知 $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$ 与 $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$, 从而得到 $f(\xi) = 0$, 定理得证.

6. 证明方程 $x = a \sin x + b (a, b > 0)$ 至少有一个正根.

证 令 $f(x) = x - a \sin x - b$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续. 取 $A > a + b$, 则 $f(0) < 0, f(A) > 0$, 由零点存在定理, $f(x)$ 在 $(0, A)$ 上至少有一个根.

7. 证明方程 $x^3 + px + q = 0 (p > 0)$ 有且仅有一个实根.

证 令 $f(x) = x^3 + px + q$, 由

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)[x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 + p] > 0 (x_2 > x_1),$$

知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格单调增加的.

$$\text{再由} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = +\infty.$$

根据零点存在定理, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有且仅有一个实根.

8. 证明:

(1) $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上不一致连续, 但在 $(a, 1) (a > 0)$ 上一致连续;

(2) $\sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续, 但在 $[0, A]$ 上一致连续;

(3) \sqrt{x} 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续;

(4) $\ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续;

(5) $\cos \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

证 (1) 在 $(0, 1)$ 上, 令 $x'_n = \frac{1}{n\pi}, x''_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}, x'_n - x''_n \rightarrow 0$, 但

$$\left| \sin \frac{1}{x'_n} - \sin \frac{1}{x''_n} \right| = 1, \text{ 所以 } \sin \frac{1}{x} \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上不一致连续.}$$

在 $(a, 1) (a > 0)$ 上, $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = a^2 \epsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in (a, 1), |x_1 - x_2| < \delta$, 成立

$$\left| \sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{a^2} < \epsilon,$$

所以 $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(a, 1) (a > 0)$ 上一致连续.

(2) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 令 $x'_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}, x''_n = \sqrt{n\pi}$, 则 $x'_n - x''_n \rightarrow 0$, 但

$$|\sin(x'_n)^2 - \sin(x''_n)^2| = 1,$$

所以 $\sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续.

在 $[0, A]$ 上, $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\epsilon}{2A} > 0$, $\forall x_1, x_2 \in [0, A], |x_1 - x_2| < \delta$, 成立

$$|\sin x_1^2 - \sin x_2^2| \leq |x_1^2 - x_2^2| \leq 2A|x_1 - x_2| < \epsilon,$$

所以 $\sin x^2$ 在 $[0, A]$ 上一致连续.

(3) $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon^2 > 0$, $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty), |x_1 - x_2| < \delta$, 成立

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} < \epsilon,$$

所以 \sqrt{x} 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

(4) $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon > 0$, $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty), 0 \leq x_1 - x_2 < \delta$, 成立

$$|\ln x_1 - \ln x_2| = \left| \ln \left(1 + \frac{x_1 - x_2}{x_2} \right) \right| \leq |x_1 - x_2| < \epsilon,$$

所以 $\ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

(5) $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon^2 > 0$, $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty), |x_1 - x_2| < \delta$, 成立

$$|\cos \sqrt{x_1} - \cos \sqrt{x_2}| \leq |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} < \epsilon,$$

所以 $\cos \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

9. 证明: 对椭圆内的任意一点 P , 存在椭圆过 P 的一条弦, 使得 P 是该弦的中点.

证 过 P 点作弦, 设弦与 x 轴的夹角为 θ , P 点将弦分成长度为 $l_1(\theta)$ 和 $l_2(\theta)$ 的两线段, 则 $f(\theta) = l_1(\theta) - l_2(\theta)$ 在 $[0, \pi]$ 连续, 满足 $f(0) = -f(\pi)$, 即 $f(0) \cdot f(\pi) = -f^2(\pi) \leq 0$. 于是必有 $\theta_0 \in [0, \pi]$, 满足 $f(\theta_0) = 0$, 也就是 $l_1(\theta_0) = l_2(\theta_0)$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2)$, 证明: 存在 $x, y \in [0, 2]$, $y - x = 1$, 使得 $f(x) = f(y)$.

证 令 $F(x) = f(x+1) - f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $F(1) = -F(0)$, 于是必有 $x_0 \in [0, 1]$, 满足 $F(x_0) = 0$. 令 $y_0 = x_0 + 1$, 则 $x_0, y_0 \in [0, 2]$, $y_0 - x_0 = 1$, 使得 $f(x_0) = f(y_0)$.

11. 若函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a, b) 上一致连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界.

证 由 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续, 可知 $f(a+), f(b-)$ 存在且有限. 令

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b), \\ f(a+), & x = a, \\ f(b-), & x = b, \end{cases}$$

则 $\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 所以 $\tilde{f}(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 因此 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界.

12. 证明:

(1) 某区间上两个一致连续函数之和必定一致连续;

(2) 某区间上两个一致连续函数之积不一定一致连续.

证 (1) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上一致连续, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, $\forall x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta$, 成立 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}, |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$, 于是

$$|[f(x') + g(x')] - [f(x'') + g(x'')]| < \varepsilon,$$

所以 $f(x) + g(x)$ 在区间 I 上一致连续.

(2) 设 $f(x) = g(x) = x$, 区间 $I = [0, +\infty)$, 则 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上一致连续, 但 $f(x)g(x) = x^2$ 在区间 I 上不一致连续.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \neq 0, x \in [a, b]$, 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒正或恒负.

证 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不保持定号, 则存在 $x', x'' \in [a, b]$ (不妨设 $x' < x''$), 使 $f(x')$ 与 $f(x'')$ 不同号, 由闭区间上连续函数的中间值定理, 必定存在 $\xi \in [x', x'']$, 使得 $f(\xi) = 0$, 这就产生矛盾, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必定恒正或恒负.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$, 证明在 $[a, b]$ 中必有 ξ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

证 根据闭区间上连续函数的中间值定理, 闭区间上连续函数一定能取到最大值和最小值之间任何一个值. 由于

$$\min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \leq \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \leq \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\},$$



所以在 $[a, b]$ 中必有 ξ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

15. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (有限数), 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

证 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \forall \varepsilon > 0, \exists X > a, \forall x', x'' > X$, 成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 由于 $f(x)$ 在 $[a, X+1]$ 连续, 所以一致连续, 也就是 $\exists 0 < \delta < 1$, $\forall x', x'' \in [a, X+1]$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 于是 $\forall x', x'' \in [a, +\infty)$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

第四章 微 分

§ 1 微分和导数

1. 半径为 1 cm 的铁球表面要镀一层厚度为 0.01 cm 的铜, 试用求微分的方法算出每只球需要用铜多少克? (铜的密度为 8.9 g/cm^3 .)

解 球体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi[3r^2\Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3] \approx 4\pi r^2\Delta r.$$

每只球镀铜所需要铜的质量为

$$m = \rho\Delta V \approx 4\rho\pi r^2\Delta r \approx 1.12 \text{ g}.$$

2. 用定义证明: 函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在它的整个定义域中, 除了 $x=0$ 这一点之外都是可微的.

证 当 $x=0$ 时, $\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x^2}$ 是 Δx 的低阶无穷小, 所以 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 不可微. 当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} - \sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x + \Delta x} + \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}) \\ &= \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x + \Delta x} + \sqrt[3]{x^2}}\Delta x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\Delta x + o(\Delta x),\end{aligned}$$

所以 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在 $x \neq 0$ 是可微的.

§ 2 导数的意义和性质

1. 设 $f'(x_0)$ 存在, 求下列各式的值:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}.$$

$$\text{解 (1)} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + (-\Delta x)) - f(x_0)}{(-\Delta x)} \\ = -f'(x_0).$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x - x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + (x - x_0)) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = 2f'(x_0).$$

2. (1) 用定义求抛物线 $y = 2x^2 + 3x - 1$ 的导函数;

(2) 求该抛物线上过点 $(-1, -2)$ 处的切线方程;

(3) 求该抛物线上过点 $(-2, 1)$ 处的法线方程;

(4) 问该抛物线上是否有点 (a, b) , 过该点的切线与抛物线顶点与焦点的连线平行?

$$\text{解 (1)} \quad \text{因为} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 1 - (2x^2 + 3x - 1)}{\Delta x} \\ = 4x + 3 + 2\Delta x,$$

$$\text{所以} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 3.$$

(2) 由于 $f'(-1) = -1$, 切线方程为

$$y = -1 \cdot [x - (-1)] + (-2) = -x - 3.$$

(3) 由于 $f'(-2) = -5$, 法线方程为 $y = -\frac{1}{-5}[x - (-2)] + 1 = \frac{x+7}{5}$.

(4) 抛物线顶点与焦点的连线平行于 y 轴, 即斜率为无穷大, 由(1)可知不存在 x , 使得 $f'(x) = \infty$, 所以这样的点 (a, b) 不存在.

3. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数, 且在 $x=0$ 的某个邻域上成立

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小量. 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

解 记 $F(x) = f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)$, 可得 $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = -2f(1) = 0$,

即 $f(1) = 0$. 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + \alpha(x)}{x} = 8$ 与

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(1 + \sin x) - f(1)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right] - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(1 - \sin x) - f(1)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right] \\ = 4f'(1),$$

得到 $f'(1)=2$. 于是曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=2(x-1)$.

4. 证明: 从椭圆的一个焦点发出的任一束光线, 经椭圆反射后, 反射光必定经过它的另一个焦点(见原教材图 4.2.5).

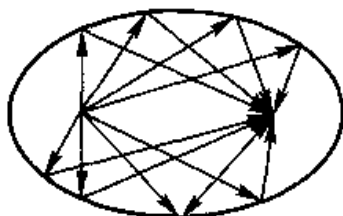


图 4.2.5

证 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0,$$

焦点坐标为 $(\pm c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. 假设 (x_0, y_0) 为椭圆上任意一点, 当 $y_0 = 0$ 时结论显然成立. 现设 $y_0 \neq 0$, 则过此点的切线斜率为 $\tan \theta = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, (x_0, y_0)

与焦点 $(-c, 0)$ 连线的斜率为 $\tan \theta_1 = \frac{y_0}{x_0 + c}$, 此连线与切线夹角的正切为 $k =$

$\frac{\tan \theta_1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta}$. 利用 $c^2 = a^2 - b^2$ 和 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ 代入计算, 得到

$$k = \frac{\frac{y_0}{x_0 + c} + \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 - \frac{y_0}{x_0 + c} \cdot \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}} = \frac{a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 + c x_0 b^2}{(a^2 - b^2) x_0 y_0 + a^2 c y_0} = \frac{a^2 b^2 + c x_0 b^2}{c^2 x_0 y_0 + a^2 c y_0} = \frac{b^2}{c y_0}.$$

(x_0, y_0) 与另一焦点 $(c, 0)$ 连线的斜率为 $\tan \theta_2 = \frac{y_0}{x_0 - c}$, 此连线与切线夹

角的正切为

$$\begin{aligned} \frac{\tan \theta - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta \tan \theta_2} &= \frac{-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} - \frac{y_0}{x_0 - c}}{1 - \frac{y_0}{x_0 - c} \cdot \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}} = \frac{c x_0 b^2 - a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2}{(a^2 - b^2) x_0 y_0 - a^2 c y_0} \\ &= \frac{c x_0 b^2 - a^2 b^2}{c^2 x_0 y_0 - a^2 c y_0} = \frac{b^2}{c y_0} = k. \end{aligned}$$

由于两个夹角的正切相等, 所以两个夹角相等, 命题得证.

5. 证明:双曲线 $xy = a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积恒为 $2a^2$.

证 假设 (x_0, y_0) 为双曲线上任意一点, 则 $x_0 y_0 = a^2$, 过这一点的切线斜率为 $y'|_{x_0} = -\frac{a^2}{x_0^2} = -\frac{y_0}{x_0}$, 切线方程为

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0),$$

易得切线与两坐标轴的交点为 $(0, 2y_0)$ 和 $(2x_0, 0)$. 切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积为

$$S = \frac{1}{2}(2y_0)(2x_0) = 2x_0 y_0 = 2a^2.$$

6. 求函数在不可导点处的左导数和右导数.

$$(1) y = |\sin x|; \quad (2) y = \sqrt{1 - \cos x};$$

$$(3) y = e^{-|x|}; \quad (4) y = |\ln(x+1)|.$$

解 (1) 对 $y = f(x) = |\sin x|$, 当 $x = 0$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin \Delta x| - |\sin 0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin \Delta x| - |\sin 0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin \Delta x}{\Delta x} = -1,$$

所以 $x = 0$ 是不可导点. 又由于函数 y 是周期为 π 的函数, 所有不可导点为 $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 且 $f'_-(k\pi) = -1, f'_+(k\pi) = 1$.

$$(2) y = f(x) = \sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|, \text{ 由 (1) 可知不可导点}$$

为 $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 且经计算得到 $f'_-(2k\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, f'_+(2k\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) $y = f(x) = e^{-|x|}$ 不可导点只有 $x = 0$, 且

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\Delta x} - 1}{\Delta x} = -1, f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

(4) $y = f(x) = |\ln(x+1)|$ 不可导点只有 $x = 0$, 且

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\ln(\Delta x + 1)| - \ln 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\Delta x + 1)}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\ln(\Delta x + 1)| - \ln 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\ln(\Delta x + 1)}{\Delta x} = -1.$$

7. 讨论下列函数在 $x = 0$ 处的可导性:

$$(1) y = \begin{cases} |x|^{1+a} \sin \frac{1}{x} & (a > 0), \quad x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad (2) y = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ ax + b, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$(3) y = \begin{cases} xe^x, & x > 0, \\ ax^2, & x \leq 0; \end{cases} \quad (4) y = \begin{cases} e^{\frac{a}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解 (1) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|^{1+a} \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(|\Delta x|^a \operatorname{sgn}(\Delta x) \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = 0,$

所以函数在 $x=0$ 可导.

(2) 如果函数在 $x=0$ 可导, 则必须在 $x=0$ 连续, 由 $f(0+) = f(0) = b$ 可得 $b=0$. 当 $b=0$ 时, $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta x^2 - 0}{\Delta x} = 0$, $f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{a\Delta x - 0}{\Delta x} = a$, 故当 $a=b=0$ 时函数在 $x=0$ 可导, 其他情况下函数在 $x=0$ 不可导.

(3) 由于 $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta x e^{\Delta x} - 0}{\Delta x} = 1$, $f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{a\Delta x^2 - 0}{\Delta x} = 0 \neq f'_+(0)$, 故函数在 $x=0$ 不可导.

(4) 当 $a \geq 0$ 时函数在 $x=0$ 不连续, 所以不可导; 当 $a < 0$ 时,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{a}{\Delta x^2}} - 0}{\Delta x} = 0,$$

所以当 $a < 0$ 时函数在 $x=0$ 可导.

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 在什么情况下, $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导?

解 当 $f(0) \neq 0$ 时, 不妨设 $f(0) > 0$, 则在 $x=0$ 的小邻域中有 $f(x) > 0$, 故 $|f(x)| = f(x)$, 所以 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导.

当 $f(0) = 0$ 时, 由于

$$\frac{|f(x)| - |f(0)|}{x - 0} = \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \operatorname{sgn} x$$

分别在 $x=0$ 处计算左、右极限, 得到 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处的左导数为 $-|f'(0)|$, 右导数为 $|f'(0)|$, 所以 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导的充分必要条件是 $f'(0) = 0$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) = f(b) = 0$, 且 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 至少存在一个零点.

证 由题设知 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 同号, 不妨设两者都为正数. 由于

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{x - a} > 0,$$

可知存在 $x_1 (a < x_1 < b)$, $f(x_1) > 0$.

同理由于 $f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x - b} > 0$, 可知存在 $x_2 (x_1 < x_2 < b)$, $f(x_2) < 0$. 由连续函数的零点存在定理, 函数 $f(x)$ 在 x_1, x_2 之间有零点.

10. 设 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 内可导,

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, 那么能否断定也有 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$?

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$, 那么能否断定也有 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$?

解 (1) 不一定. 反例: $f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$, $a = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(-1 + \sin \frac{1}{x} \right)$, 由 $f' \left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \right) = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right)^2 (-1 + 1) = 0, k \in \mathbf{Z}$ 知

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty$ 不成立.

(2) 不一定. 反例: $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq \infty$.

11. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$. 证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充分必要条件是: 存在在 $x = 0$ 处连续的函数 $g(x)$, 使得 $f(x) = xg(x)$, 且此时成立 $f'(0) = g(0)$.

证 充分性. 由 $f(x) = xg(x)$, 可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且成立 $f'(0) = g(0)$.

必要性. 令 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0. \end{cases}$ 则 $f(x) = xg(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = g(0),$$

即 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

§ 3

导数四则运算和反函数求导法则

1. 用定义证明 $(\cos x)' = -\sin x$.

证 由于

$$\cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin \frac{\Delta x}{2},$$

根据 $\sin x$ 的连续性和 $\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sim \frac{\Delta x}{2}$ ($\Delta x \rightarrow 0$), 可知

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

2. 证明:

$$(1) (\csc x)' = -\cot x \csc x;$$

$$(2) (\cot x)' = -\csc^2 x;$$

$$(3) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(4) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(5) (\operatorname{ch}^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$(6) (\operatorname{th}^{-1} x)' = (\operatorname{cth}^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

解 (1) $(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x.$

$$(2) (\cot x)' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

$$(3) (\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(4) (\operatorname{arc cot} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(5) (\operatorname{ch}^{-1} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} y)'} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$(6) (\operatorname{th}^{-1} x)' = \frac{1}{(\operatorname{th} y)'} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2},$$

$$(\operatorname{cth}^{-1} x)' = \frac{1}{(\operatorname{cth} y)'} = -\frac{1}{\operatorname{csch}^2 y} = -\frac{1}{\operatorname{cth}^2 y - 1} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

3. 求下列函数的导函数:

$$(1) f(x) = 3\sin x + \ln x - \sqrt{x};$$

$$(2) f(x) = x \cos x + x^2 + 3;$$

$$(3) f(x) = (x^2 + 7x - 5)\sin x;$$

$$(4) f(x) = x^2(3\tan x + 2\sec x);$$

$$(5) f(x) = e^x \sin x - 4\cos x + \frac{3}{\sqrt{x}};$$

$$(6) f(x) = \frac{2\sin x + x - 2^x}{\sqrt[3]{x^2}};$$

$$(7) f(x) = \frac{1}{x + \cos x};$$

$$(8) f(x) = \frac{x \sin x - 2 \ln x}{\sqrt{x+1}};$$

$$(9) f(x) = \frac{x^3 + \cot x}{\ln x};$$

$$(10) f(x) = \frac{x \sin x + \cos x}{x \sin x - \cos x};$$

第四章 微 分

$$(11) f(x) = (e^x + \log_3 x) \arcsin x; \quad (12) f(x) = (\csc x - 3 \ln x) x^2 \operatorname{sh} x;$$

$$(13) f(x) = \frac{x + \sec x}{x - \csc x}; \quad (14) f(x) = \frac{x + \sin x}{\arctan x}.$$

解 (1) $f'(x) = (3 \sin x)' + (\ln x)' - (\sqrt{x})' = 3 \cos x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

$$(2) f'(x) = x' \cos x + x(\cos x)' + (x^2)' + (3)' = \cos x - x \sin x + 2x.$$

$$(3) f'(x) = (x^2 + 7x - 5)' \sin x + (x^2 + 7x - 5)(\sin x)' \\ = (2x + 7) \sin x + (x^2 + 7x - 5) \cos x.$$

$$(4) f'(x) = (x^2)'(3 \tan x + 2 \sec x) + x^2(3 \tan x + 2 \sec x)' \\ = 2x(3 \tan x + 2 \sec x) + x^2(3 \sec^2 x + 2 \tan x \sec x).$$

$$(5) f'(x) = (e^x)' \sin x + e^x(\sin x)' - (4 \cos x)' + \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)' \\ = e^x(\sin x + \cos x) + 4 \sin x - \frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}}.$$

$$(6) f'(x) = (x + 2 \sin x - 2^x)' x^{-\frac{2}{3}} + (x + 2 \sin x - 2^x)(x^{-\frac{2}{3}})' \\ = (1 + 2 \cos x - 2^x \ln 2) x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} (x + 2 \sin x - 2^x) x^{-\frac{5}{3}}.$$

$$(7) f'(x) = -\frac{(x + \cos x)'}{(x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - 1}{(x + \cos x)^2}.$$

$$(8) f'(x) = \frac{(x \sin x - 2 \ln x)'(\sqrt{x} + 1) - (x \sin x - 2 \ln x)(\sqrt{x} + 1)'}{(\sqrt{x} + 1)^2} \\ = \frac{2(x \sin x + x^2 \cos x - 2)(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{x}(x \sin x - 2 \ln x)}{2x(\sqrt{x} + 1)^2}.$$

$$(9) f'(x) = \frac{(x^3 + \cot x)' \ln x - (x^3 + \cot x)(\ln x)'}{\ln^2 x} \\ = \frac{(3x^2 - \csc^2 x)x \ln x - x^3 - \cot x}{x \ln^2 x}.$$

$$(10) f'(x) = \left(1 + \frac{2 \cos x}{x \sin x - \cos x}\right)' \\ = \frac{(2 \cos x)'(x \sin x - \cos x) - 2 \cos x(x \sin x - \cos x)'}{(x \sin x - \cos x)^2} \\ = \frac{-2(x + \sin x \cos x)}{(x \sin x - \cos x)^2}.$$

$$(11) f'(x) = (e^x + \log_3 x)' \arcsin x + (e^x + \log_3 x)(\arcsin x)' \\ = \left(e^x + \frac{1}{x \ln 3}\right) \arcsin x + \left(e^x + \frac{\ln x}{\ln 3}\right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad f'(x) &= (\csc x - 3\ln x)'x^2 \operatorname{sh} x + (\csc x - 3\ln x)(x^2)' \operatorname{sh} x \\
 &\quad + (\csc x - 3\ln x)x^2(\operatorname{sh} x)' \\
 &= -\left(\cot x \csc x + \frac{3}{x}\right)x^2 \operatorname{sh} x \\
 &\quad + (\csc x - 3\ln x)(2x) \operatorname{sh} x + (\csc x - 3\ln x)x^2 \operatorname{ch} x \\
 &= -(x^2 \cot x \csc x + 3x) \operatorname{sh} x \\
 &\quad + x(\csc x - 3\ln x)(2 \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (13) \quad f'(x) &= \frac{(x + \sec x)'(x - \csc x) - (x + \sec x)(x - \csc x)'}{(x - \csc x)^2} \\
 &= \frac{(1 + \tan x \sec x)(x - \csc x) - (x + \sec x)(1 + \cot x \csc x)}{(x - \csc x)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14) \quad f'(x) &= \frac{(x + \sin x)' \arctan x - (x + \sin x)(\arctan x)'}{\arctan^2 x} \\
 &= \frac{(1 + x^2)(1 + \cos x) \arctan x - (x + \sin x)}{(1 + x^2) \arctan^2 x}.
 \end{aligned}$$

4. 求曲线 $y = \ln x$ 在 $(e, 1)$ 处的切线方程和法线方程.

解 因为 $y'(e) = \frac{1}{x} \Big|_{x=e} = \frac{1}{e}$, 切线方程为

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{x}{e},$$

法线方程为

$$y = -e(x - e) + 1 = -ex + (e^2 + 1).$$

5. 当 a 取何值时, 直线 $y = x$ 能与曲线 $y = \log_a x$ 相切, 切点在哪里?

解 设切点为 (x_0, x_0) , 由于 $y = x$ 是 $y = f(x) = \log_a x$ 的切线, 其斜率为 1, 所以 $f'(x_0) = \frac{1}{x_0 \ln a} = 1$, 故 $x_0 = \frac{1}{\ln a}$. 又由 $f(x_0) = \log_a x_0 = \frac{\ln x_0}{\ln a} = x_0$, 得到 $\ln x_0 = 1$, 即 $x_0 = e$, 从而 $a = e^{e^{-1}}$, 切点为 (e, e) .

6. 求曲线 $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}_+$) 上过点 $(1, 1)$ 的切线与 x 轴的交点的横坐标 x_n , 并求出极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n)$.

解 因为 $y'(1) = nx^{n-1} \Big|_{x=1} = n$, 所以过点 $(1, 1)$ 的切线为 $y = n(x - 1) + 1$, 它与 x 轴交点的横坐标为 $x_n = \frac{n-1}{n}$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}.$$

7. 对于抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 设集合

$S_1 = \{(x, y) | \text{过}(x, y) \text{可以作该抛物线的两条切线}\};$

$S_2 = \{(x, y) | \text{过}(x, y) \text{只可以作该抛物线的一条切线}\};$

$S_3 = \{(x, y) | \text{过}(x, y) \text{不能作该抛物线的切线}\},$

请分别求出这三个集合中的元素所满足的条件.

解 $a \neq 0$, 不妨设 $a > 0$, 抛物线开口向上. 过 (x, y) 可以作该抛物线两条切线当且仅当 (x, y) 在该抛物线的下方, 即 $y < ax^2 + bx + c$. 同理当 $a < 0$ 时, $y > ax^2 + bx + c$, 因此

$$S_1 = \{(x, y) | a(ax^2 + bx + c - y) > 0\}.$$

过 (x, y) 只可以作该抛物线一条切线当且仅当 (x, y) 在该抛物线上, 所以

$$S_2 = \{(x, y) | ax^2 + bx + c - y = 0\}.$$

由此得到

$$S_3 = (S_1 \cup S_2)^c = \{(x, y) | a(ax^2 + bx + c - y) < 0\}.$$

8. (1) 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处不可导, 证明 $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ ($c_2 \neq 0$) 在 $x = x_0$ 处也不可导;

(2) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处都不可导, 能否断定 $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 在 $x = x_0$ 处一定可导或一定不可导?

解 (1) 记 $h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$, 当 $c_2 \neq 0$ 时, 如果 $h(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则 $g(x) = [h(x) - c_1 f(x)]/c_2$ 在 $x = x_0$ 处也可导, 从而产生矛盾.

(2) 不能断定. 如 $g(x) = f(x) = |x|$, 当 $c_1 = -c_2$ 时, $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 在 $x = 0$ 处是可导的; 当 $c_1 \neq -c_2$ 时, $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

9. 在上题的条件下, 讨论 $f(x)g(x)$ 在 $x = x_0$ 处的可导情况.

解 函数 $f(x) = c$ 在 $x = 0$ 处可导, $g(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导, 则 $f(x)g(x)$ 当 $c = 0$ 时在 $x = 0$ 处可导, 当 $c \neq 0$ 时在 $x = 0$ 处不可导.

函数 $f(x) = g(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处都不可导, 但 $f(x)g(x) = x^2$ 在 $x = 0$ 处可导. 函数 $f(x) = g(x) = \operatorname{sgn}|x|$ 在 $x = 0$ 处都不可导, $f(x)g(x) = \operatorname{sgn}|x|$ 在 $x = 0$ 处也不可导.

10. 设 $f_j(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 为同一区间上的可导函数, 证明在该区域上成立

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

证 根据行列式的定义

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{d}{dx} \sum (-1)^{N(k_1 k_2 \cdots k_n)} f_{1k_1}(x) f_{2k_2}(x) \cdots f_{nk_n}(x) \\ &= \sum (-1)^{N(k_1 k_2 \cdots k_n)} [f'_{1k_1}(x) f_{2k_2}(x) \cdots f_{nk_n}(x) + f_{1k_1}(x) f'_{2k_2}(x) \cdots f_{nk_n}(x) + \cdots \\ & \quad + f_{1k_1}(x) f_{2k_2}(x) \cdots f'_{nk_n}(x)] \\ &= \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & \cdots & f'_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & \cdots & f'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots \\ & \quad + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{n1}(x) & f'_{n2}(x) & \cdots & f'_{nn}(x) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

§4

复合函数求导法则及其应用

1. 求下列函数的导数:

(1) $y = (2x^2 - x + 1)^2$;

(2) $y = e^{2x} \sin 3x$;

$$(3) y = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}};$$

$$(4) y = \sqrt{\frac{\ln x}{x}};$$

$$(5) y = \sin x^3;$$

$$(6) y = \cos \sqrt{x};$$

$$(7) y = \sqrt{x+1} - \ln(x + \sqrt{x+1});$$

$$(8) y = \arcsin(e^{-x^2});$$

$$(9) y = \ln\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right);$$

$$(10) y = \frac{1}{(2x^2 + \sin x)^2};$$

$$(11) y = \frac{1 + \ln^2 x}{x \sqrt{1-x^2}};$$

$$(12) y = \frac{x}{\sqrt{1 + \csc x^2}};$$

$$(13) y = \frac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}} + \frac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}};$$

$$(14) y = e^{-\sin^2 x};$$

$$(15) y = x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

解 (1) $y' = 2(2x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 1)' = 2(2x^2 - x + 1)(4x - 1).$

(2) $y' = e^{2x}(\sin 3x)' + (e^{2x})' \sin 3x = e^{2x}(3\cos 3x + 2\sin 3x).$

(3) $y' = -\frac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}(1+x^3)' = -\frac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}.$

(4) $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{2x^2}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}.$

(5) $y' = \cos x^3(x^3)' = 3x^2 \cos x^3.$

(6) $y' = -\sin \sqrt{x}(\sqrt{x})' = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$

$$\begin{aligned} (7) y' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+1)'}{\sqrt{x+1}} - \frac{(x+\sqrt{x+1})'}{x+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1+2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})} \\ &= \frac{x-1-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})}. \end{aligned}$$

$$(8) y' = \frac{(e^{-x^2})'}{\sqrt{1-(e^{-x^2})^2}} = \frac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} = \frac{-2x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}}.$$

$$(9) y' = [\ln(x^4-1) - \ln x^2]' = \frac{(x^4-1)'}{x^4-1} - 2\frac{1}{x} = \frac{2x^4+2}{x(x^4-1)}.$$

$$(10) y' = \frac{-2(2x^2 + \sin x)'}{(2x^2 + \sin x)^3} = \frac{-2(4x + \cos x)}{(2x^2 + \sin x)^3}.$$

$$(11) y' = \frac{(1 + \ln^2 x)'x \sqrt{1-x^2} - (1 + \ln^2 x) \sqrt{1-x^2}'}{x^2(1-x^2)}$$

$$= \frac{2(1-x^2)\ln x - (1+\ln^2 x)(1-2x^2)}{x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\begin{aligned} (12) \quad y' &= \frac{x' \sqrt{1+\csc x^2} - x(\sqrt{1+\csc x^2})'}{1+\csc x^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+\csc x^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(-\cot x^2 \csc x^2) \cdot (2x)}{\sqrt{1+\csc x^2}}}{1+\csc x^2} \\ &= \frac{1+\csc x^2 + x^2 \csc x^2 \cot x^2}{(1+\csc x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (13) \quad y' &= \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}} \right)' + \left(\frac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}} \right)' \\ &= 2 \left(-\frac{1}{3} \right) (2x^2-1)^{-\frac{4}{3}} (4x) + 3 \left(-\frac{1}{4} \right) (3x^3+1)^{-\frac{5}{4}} (9x^2) \\ &= -\frac{8}{3} x (2x^2-1)^{-\frac{4}{3}} - \frac{27}{4} x^2 (3x^3+1)^{-\frac{5}{4}}. \end{aligned}$$

$$(14) \quad y' = e^{-\sin^2 x} (-\sin^2 x)' = -\sin 2x \cdot e^{-\sin^2 x}.$$

$$\begin{aligned} (15) \quad y' &= \left(\frac{x(a^2-x^2)+x}{\sqrt{a^2-x^2}} \right)' \\ &= \frac{a^2-3x^2+1}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x(a^2-x^2+1) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (-2x)}{(\sqrt{a^2-x^2})^3} \\ &= \frac{2x^4-3a^2x^2+a^4+a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) \quad y = \ln \sin x;$$

$$(2) \quad y = \ln(\csc x - \cot x);$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right); \quad (4) \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2});$$

$$(5) \quad y = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2-a^2})).$$

解 (1) $y' = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' = \cot x.$

$$(2) \quad y' = \frac{(\csc x - \cot x)'}{\csc x - \cot x} = \frac{-\cot x \csc x - (-\csc^2 x)}{\csc x - \cot x} = \csc x.$$

$$(3) \quad y' = \frac{1}{2} \left[x' \sqrt{a^2-x^2} + x(\sqrt{a^2-x^2})' + a^2 \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)' \right].$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2 - x^2} + x \left(\frac{1}{2} \right) \frac{(-2x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a^2 \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}} \right]$$

$$= \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2}, & a > 0, \\ -\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & a < 0. \end{cases}$$

$$(4) y' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + a^2})'}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$(5) y' = \frac{1}{2} \left[x' \sqrt{x^2 - a^2} + x (\sqrt{x^2 - a^2})' - a^2 \frac{(x + \sqrt{x^2 - a^2})'}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sqrt{x^2 - a^2} + x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) - a^2 \cdot \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right] = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

3. 设 $f(x)$ 可导, 求下列函数的导数:

- (1) $f(\sqrt[3]{x^2})$; (2) $f\left(\frac{1}{\ln x}\right)$;
 (3) $\sqrt{f(x)}$; (4) $\arctan f(x)$;
 (5) $f(f(e^{x^2}))$; (6) $\sin(f(\sin x))$;
 (7) $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$; (8) $\frac{1}{f(f(x))}$.

解 (1) $f(\sqrt[3]{x^2})' = f'(\sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2})' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}f'(x^{\frac{2}{3}}).$

(2) $f\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = f'\left(\frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{x \ln^2 x} f'\left(\frac{1}{\ln x}\right).$

(3) $[\sqrt{f(x)}]' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} [f(x)]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$

(4) $[\arctan f(x)]' = \frac{1}{1 + [f(x)]^2} [f(x)]' = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}.$

(5) $[f(f(e^{x^2}))]' = f'(f(e^{x^2}))[f(e^{x^2})]' = f'(f(e^{x^2}))f'(e^{x^2})(e^{x^2})'$
 $= 2xe^{x^2}f'(e^{x^2})f'(f(e^{x^2})).$

(6) $[\sin(f(\sin x))]' = \cos(f(\sin x))(f(\sin x))'$
 $= \cos(f(\sin x))f'(\sin x)(\sin x)'$

$$= \cos(f(\sin x)) f'(\sin x) \cos x.$$

$$(7) \left[f\left(\frac{1}{f(x)}\right) \right]' = f'\left(\frac{1}{f(x)}\right) \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} f'\left(\frac{1}{f(x)}\right).$$

$$(8) \left(\frac{1}{f(f(x))}\right)' = -\frac{f'(f(x))}{f^2(f(x))} [f(x)]' = -\frac{f'(f(x))f'(x)}{f^2(f(x))}.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

$$(1) y = x^x; \quad (2) y = (x^3 + \sin x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(3) y = \cos^x x; \quad (4) y = \ln^x(2x+1);$$

$$(5) y = x \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}; \quad (6) y = \prod_{i=1}^n (x-x_i);$$

$$(7) y = \sin x^{\sqrt{x}}.$$

解 由于 $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, 所以 $y' = y(\ln y)'$.

$$(1) \ln y = x \ln x,$$

$$y' = y(\ln y)' = y[x' \ln x + x(\ln x)'] = (1 + \ln x)x^x.$$

$$(2) \ln y = \frac{1}{x} \ln(x^3 + \sin x),$$

$$\begin{aligned} y' &= y(\ln y)' = y \left[\left(\frac{1}{x}\right)' \ln(x^3 + \sin x) + \frac{1}{x} [\ln(x^3 + \sin x)]' \right] \\ &= (x^3 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{3x^2 + \cos x}{x(x^3 + \sin x)} - \frac{\ln(x^3 + \sin x)}{x^2} \right]. \end{aligned}$$

$$(3) \ln y = x \ln \cos x,$$

$$\begin{aligned} y' &= y(x \ln \cos x)' = y[x' \ln \cos x + x(\ln \cos x)'] \\ &= (\ln \cos x - x \tan x) \cos^x x. \end{aligned}$$

$$(4) \ln y = x \ln \ln(2x+1),$$

$$\begin{aligned} y' &= y[x' \ln \ln(2x+1) + x(\ln \ln(2x+1))'] \\ &= \left[\ln \ln(2x+1) + \frac{2x}{(2x+1)\ln(2x+1)} \right] \ln^x(2x+1). \end{aligned}$$

$$(5) \ln y = \ln x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+x^3),$$

$$\begin{aligned} y' &= y \left[(\ln x)' + \frac{1}{2} (\ln(1-x^2))' - \frac{1}{2} (\ln(1+x^3))' \right] \\ &= \frac{x \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}} \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2} - \frac{3x^2}{2(1+x^3)} \right]. \end{aligned}$$

$$(6) \ln y = \sum_{i=1}^n \ln(x - x_i),$$

$$y' = y \left[\sum_{i=1}^n [\ln(x - x_i)]' \right] = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}.$$

(7) 令 $u = x^{\sqrt{x}}$, $\ln u = \sqrt{x} \ln x$, 则

$$u' = u [(\sqrt{x})' \ln x + \sqrt{x} (\ln x)'] = u \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = u \left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} \right),$$

于是
$$y' = (\sin u)'(u)' = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}} \cos x^{\sqrt{x}}.$$

5. 对下列隐函数求 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y = x + \arctan y$;

(2) $y + xe^y = 1$;

(3) $\sqrt{x - \cos y} = \sin y - x$;

(4) $xy - \ln(y+1) = 0$;

(5) $e^{x^2+y} - xy^2 = 0$;

(6) $\tan(x+y) - xy = 0$;

(7) $2y \sin x + x \ln y = 0$;

(8) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

解 (1) 在等式两边对 x 求导, 得到

$$y' = x' + (\arctan y)' = 1 + \frac{y'}{1+y^2},$$

解得

$$y' = \frac{1+y^2}{y^2}.$$

(2) 在等式两边对 x 求导, 得到

$$y' + x'e^y + xe^y y' = y'(1 + xe^y) + e^y = 0,$$

解得

$$y' = -\frac{e^y}{1 + xe^y}.$$

(3) 等式两边平方, 再对 x 求导, 得到

$$1 + \sin y \cdot (y)' = 2(\sin y - x)(\cos y \cdot (y)' - 1),$$

解得

$$y' = \frac{1 + 2(\sin y - x)}{2(\sin y - x)\cos y - \sin y}.$$

(4) 在等式两边对 x 求导, 得到

$$x'y + xy' - [\ln(y+1)]' = y + xy' - \frac{1}{1+y}y' = 0,$$

解得

$$y' = \frac{y^2 + y}{1 - x - xy}.$$

(5) 在等式两边对 x 求导, 得到

$$e^{x^2+y}(x^2+y)' - (xy^2)' = e^{x^2+y}(2x+y') - (y^2 + 2xyy') = 0,$$

解得

$$y' = -\frac{2xe^{x^2+y} - y^2}{e^{x^2+y} - 2xy}.$$

(6) 在等式两边对 x 求导, 得到

$$\sec^2(x+y)(x+y)' - (xy)' = \sec^2(x+y)(1+y') - (y + xy') = 0,$$

解得

$$y' = \frac{\sec^2(x+y) - y}{x - \sec^2(x+y)}.$$

(7) 在等式两边对 x 求导, 得到

$$2y'\sin x + 2y(\sin x)' + (x\ln y)' = 2y'\sin x + 2y\cos x + \ln y + x \cdot \frac{y'}{y} = 0,$$

解得

$$y' = -\frac{2y^2\cos x + y\ln y}{x + 2y\sin x}.$$

(8) 在等式两边对 x 求导, 得到

$$3x^2 + 3y^2y' - 3ax'y - 3axy' = 3(x^2 + y^2y' - ay - axy') = 0,$$

解得

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

6. 设所给的函数可导, 证明:

(1) 奇函数的导函数是偶函数, 偶函数的导函数是奇函数;

(2) 周期函数的导函数仍是周期函数.

证 (1) 设 $f(x)$ 为奇函数, 则

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x+\Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[-f(x-\Delta x)] - [-f(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{-\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+(-\Delta x)) - f(x)}{-\Delta x} = f'(x), \end{aligned}$$

设 $f(x)$ 为偶函数, 则

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x+\Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= -\lim_{-\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+(-\Delta x)) - f(x)}{-\Delta x} = -f'(x). \end{aligned}$$

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 则

$$f'(x+T) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f((x+T)+\Delta x) - f(x+T)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

7. 求曲线 $xy + \ln y = 1$ 在 $M(1,1)$ 点的切线和法线方程.

解 对方程两边求导, 得到 $y + xy' + \frac{y'}{y} = 0$, 解得 $y' = -\frac{y^2}{xy+1}$, 将 $(1,1)$ 代入得到 $y'(1) = -\frac{1}{2}$. 于是切线方程为 $y-1 = -\frac{1}{2}(x-1)$, 即

$$x+2y-3=0,$$

法线方程为 $y-1=2(x-1)$, 即

$$2x-y-1=0.$$

8. 对下列参数形式的函数求 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) \begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = 1-t^2, \\ y = t-t^3; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = t^2 \sin t, \\ y = t^2 \cos t; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x = ae^{-t}, \\ y = be^t; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t; \end{cases} \quad (6) \begin{cases} x = \operatorname{sh} at, \\ y = \operatorname{ch} bt; \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}; \end{cases} \quad (8) \begin{cases} x = \sqrt{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t}; \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} x = e^{-2t} \cos^2 t, \\ y = e^{-2t} \sin^2 t; \end{cases} \quad (10) \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$$

解 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{3bt^2}{2at} = \frac{3bt}{2a}.$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{1-3t^2}{-2t} = \frac{3t^2-1}{2t}.$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{2t \cos t - t^2 \sin t}{2t \sin t + t^2 \cos t} = \frac{2 \cos t - t \sin t}{2 \sin t + t \cos t}.$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{be^t}{(-ae^{-t})} = -\frac{b}{a}e^{2t}.$

(5) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{3a \cos^2 t (-\sin t)} = -\tan t.$

$$(6) \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{b \operatorname{sh} bt}{a \operatorname{ch} at}.$$

$$(7) \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{(1-t^{-1})'}{(1+t^{-1})'} = \frac{t^{-2}}{-t^{-2}} = -1.$$

$$(8) \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}}{\frac{1}{2\sqrt{1+t}}} = -\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}.$$

$$(9) \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{-2e^{-2t}\sin^2 t + e^{-2t}2\sin t \cos t}{-2e^{-2t}\cos^2 t + e^{-2t}2\cos t(-\sin t)} = \frac{(\sin t - \cos t)\tan t}{\sin t + \cos t}.$$

$$(10) \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}.$$

9. 求曲线 $x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}$, $y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}$ 上与 $t=1$ 对应的点处的切线和法线方程.

解 将 $t=1$ 代入参数方程, 有 $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. 经计算,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{(2t+t^2)'(1+t^3) - (2t+t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2} = \frac{(2+2t)(1+t^3) - (2t+t^2)3t^2}{(1+t^3)^2} \\ &= \frac{2+2t-4t^3-t^4}{(1+t^3)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{(2t-t^2)'(1+t^3) - (2t-t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2} = \frac{(2-2t)(1+t^3) - (2t-t^2)3t^2}{(1+t^3)^2} \\ &= \frac{2-2t-4t^3+t^4}{(1+t^3)^2}. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4}.$$

当 $t=1$ 时, $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{-1} = 3$, 所以切线方程为

$$y = 3\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = 3x - 4,$$

法线方程为

$$y = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{x}{3} + 1.$$

10. 设方程 $\begin{cases} e^x = 3t^2 + 2t + 1, \\ t \sin y - y + \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$ 确定 y 为 x 的函数, 其中 t 为参变量, 求

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}.$$

解 将 $t=0$ 代入参数方程, 可得 $e^x = 1$, $-y + \frac{\pi}{2} = 0$, 即 $x=0$, $y = \frac{\pi}{2}$. 在两个方程的两端对 t 求导, 得到

$$\begin{cases} e^x x' = 6t + 2, \\ \sin y + t \cos y \cdot y' - y' = 0, \end{cases}$$

再将 $t=0$ 代入, 解得 $x'(0) = 2$, $y'(0) = 1$. 所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{1}{2}.$$

11. 证明曲线

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

上任一点的法线到原点的距离等于 $|a|$.

证 利用参数形式所表示的函数的求导公式,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(\cos t - \cos t + t \sin t)}{a(-\sin t + \sin t + t \cos t)} = \tan t,$$

曲线在对应于参数 t 的点处的法线方程为

$$y - a(\sin t - t \cos t) = -\cot t [x - a(\cos t + t \sin t)],$$

化简后为

$$\cos t \cdot x + \sin t \cdot y - a = 0,$$

法线到原点的距离为

$$d = \left| \frac{a}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right| = |a|.$$

12. 设函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, $y = f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 处连续. 请举例说明, 在以下情况中, 复合函数 $y = f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 处并非一定不可导:

- (1) $u = g(x)$ 在 x_0 处可导, 而 $y = f(u)$ 在 u_0 处不可导;
- (2) $u = g(x)$ 在 x_0 处不可导, 而 $y = f(u)$ 在 u_0 处可导;
- (3) $u = g(x)$ 在 x_0 处不可导, $y = f(u)$ 在 u_0 处也不可导.

解 (1) $u = g(x) = x^2$, $f(u) = |u|$, $x_0 = 0$, $u_0 = 0$, $y = f(g(x)) =$

$|x|^2 = x^2$ 在 $x = x_0$ 可导.

(2) $u = g(x) = |x|$, $f(u) = u^2$, $x_0 = 0$, $u_0 = 0$, $y = f(g(x)) = |x|^2 = x^2$ 在 $x = x_0$ 可导.

(3) $g(x) = \max\{0, x\}$, $f(u) = \min\{0, u\}$, 则 $u = g(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处不可导, $y = f(u)$ 在 $u_0 = g(0) = 0$ 处也不可导, 但 $y = f(g(x)) \equiv 0$ 处处可导.

13. 设函数 $f(u)$, $g(u)$ 和 $h(u)$ 可微, 且 $h(u) > 1$, $u = \varphi(x)$ 也是可微函数, 利用一阶微分的形式不变性求下列复合函数的微分:

- (1) $f(u)g(u)h(u)$; (2) $\frac{f(u)g(u)}{h(u)}$;
 (3) $h(u)^{g(u)}$; (4) $\log_{h(u)} g(u)$;
 (5) $\arctan\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right]$; (6) $\frac{1}{\sqrt{f^2(u) + h^2(u)}}$.

解 (1) $d[f(u)g(u)h(u)]$

$$= [f'(u)g(u)h(u) + f(u)g'(u)h(u) + f(u)g(u)h'(u)]du \\ = [f'(u)g(u)h(u) + f(u)g'(u)h(u) + f(u)g(u)h'(u)]\varphi'(x)dx.$$

$$(2) d\left[\frac{f(u)g(u)}{h(u)}\right]$$

$$= \frac{[f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]h(u) - [f(u)g(u)]h'(u)}{(h(u))^2} du \\ = \frac{f'(u)g(u)h(u) + f(u)g'(u)h(u) - f(u)g(u)h'(u)}{(h(u))^2} \varphi'(x)dx.$$

$$(3) d[h(u)^{g(u)}] = [e^{g(u)\ln(h(u))}]' du = e^{g(u)\ln(h(u))} [g(u)\ln(h(u))]' du$$

$$= h(u)^{g(u)} \left[g(u) \frac{h'(u)}{h(u)} + g'(u) \ln h(u) \right] \varphi'(x) dx.$$

$$(4) d(\log_{h(u)} g(u)) = d \frac{\ln g(u)}{\ln h(u)} = \frac{[\ln g(u)]' \ln h(u) - \ln g(u) [\ln h(u)]'}{\ln^2 h(u)} du$$

$$= \frac{h(u)g'(u)\ln h(u) - h'(u)g(u)\ln g(u)}{h(u)g(u)\ln^2 h(u)} \varphi'(x) dx.$$

$$(5) d\left(\arctan\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right]\right) = \frac{\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right]'}{1 + \left[\frac{f(u)}{h(u)}\right]^2} du = \frac{f'(u)h(u) - f(u)h'(u)}{f^2(u) + h^2(u)} \varphi'(x) dx.$$

$$(6) d \frac{1}{\sqrt{f^2(u) + h^2(u)}} = - \frac{[f^2(u) + h^2(u)]'}{2(f^2(u) + h^2(u))^{\frac{3}{2}}} du \\ = - \frac{f(u)f'(u) + h(u)h'(u)}{(f^2(u) + h^2(u))^{\frac{3}{2}}} \varphi'(x) dx.$$

§ 5

高阶导数和高阶微分

1. 求下列函数的高阶导数:

$$(1) y = x^3 + 2x^2 - x + 1, \text{求 } y'';$$

$$(2) y = x^4 \ln x, \text{求 } y'';$$

$$(3) y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}, \text{求 } y'';$$

$$(4) y = \frac{\ln x}{x^2}, \text{求 } y'';$$

$$(5) y = \sin x^3, \text{求 } y'', y''';$$

$$(6) y = x^3 \cos \sqrt{x}, \text{求 } y'', y''';$$

$$(7) y = x^2 e^{3x}, \text{求 } y''';$$

$$(8) y = e^{-x^2} \arcsin x, \text{求 } y'';$$

$$(9) y = x^3 \cos 2x, \text{求 } y^{(80)};$$

$$(10) y = (2x^2 + 1) \operatorname{sh} x, \text{求 } y^{(99)}.$$

解 (1) $y' = 3x^2 + 4x - 1, y'' = 6x + 4, y''' = 6.$

$$(2) y' = 4x^3 \ln x + x^3, y'' = 12x^2 \ln x + 4x^2 + 3x^2 = 12x^2 \ln x + 7x^2.$$

$$(3) y' = \frac{2x\sqrt{1+x} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{4x + 3x^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \frac{(4+6x)(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(4x+3x^2)(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2(1+x)^3} = \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(1+x)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$(4) y' = x^{-1} \cdot x^{-2} - 2 \ln x \cdot x^{-3} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3},$$

$$y'' = -2x^{-1} x^{-3} - 3(1 - 2 \ln x) x^{-4} = \frac{6 \ln x - 5}{x^4}.$$

$$(5) y' = \cos x^3 \cdot (3x^2) = 3x^2 \cos x^3,$$

$$y'' = 6x \cos x^3 + 3x^2 (-\sin x^3) (3x^2) = 6x \cos x^3 - 9x^4 \sin x^3,$$

$$y''' = 6 \cos x^3 - 6x \sin x^3 \cdot (3x^2) - 36x^3 \sin x^3 - 9x^4 \cos x^3 \cdot (3x^2) \\ = -54x^3 \sin x^3 - (27x^6 - 6) \cos x^3.$$

$$(6) y' = 3x^2 \cos \sqrt{x} + x^3 (-\sin \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 3x^2 \cos \sqrt{x} - \frac{1}{2} x^{\frac{5}{2}} \sin \sqrt{x},$$

$$y'' = 6x \cos \sqrt{x} + 3x^2 (-\sin \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{4} x^{\frac{3}{2}} \sin \sqrt{x}$$

$$- \frac{1}{2} x^{\frac{5}{2}} (\cos \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \left(6x - \frac{1}{4} x^2 \right) \cos \sqrt{x} - \frac{11}{4} x^{\frac{3}{2}} \sin \sqrt{x},$$

$$y''' = \left(6 - \frac{x}{2} \right) \cos \sqrt{x} + \left(6x - \frac{x^2}{4} \right) (-\sin \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{33}{8} x^{\frac{1}{2}} \sin \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\cos\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 & = \left(6 - \frac{15}{8}x\right)\cos\sqrt{x} + \left(\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{57}{8}x^{\frac{1}{2}}\right)\sin\sqrt{x}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad y' &= 2xe^{3x} + x^2e^{3x}(3x)' = (2x + 3x^2)e^{3x}, \\
 y'' &= (2 + 6x)e^{3x} + (2x + 3x^2)e^{3x}(3x)' = (9x^2 + 12x + 2)e^{3x}, \\
 y''' &= (18x + 12)e^{3x} + (9x^2 + 12x + 2)e^{3x}(3x)' \\
 &= (27x^2 + 54x + 18)e^{3x}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad y' &= (-x^2)'e^{-x^2}\arcsin x + e^{-x^2}(\arcsin x)' \\
 &= \left(-2x\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)e^{-x^2}, \\
 y'' &= (-x^2)'\left(-2x\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)e^{-x^2} \\
 &\quad + \left(-2x\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'e^{-x^2} \\
 &= (-2x)\left(-2x\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)e^{-x^2} \\
 &\quad + \left[-2\arcsin x - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(-2x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2} \\
 &= \left[2(2x^2-1)\arcsin x + \frac{x(4x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad y^{(80)} &= x^3\cos^{(80)}2x + C_{80}^1 3x^2\cos^{(79)}2x + C_{80}^2 6x\cos^{(78)}2x + C_{80}^3 6\cos^{(77)}2x \\
 &= 2^{80}x^3\cos 2x + 80\cdot 2^{79}\cdot 3x^2\sin 2x - 3\,160\cdot 2^{78}\cdot 6x\cos 2x \\
 &\quad - 82\,160\cdot 2^{77}\cdot 6\sin 2x \\
 &= 2^{80}[x(x^2 - 4\,740)\cos 2x + (120x^2 - 61\,620)\sin 2x].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad y^{(99)} &= (2x^2+1)\operatorname{sh}^{(99)}x + C_{99}^1 4x\operatorname{sh}^{(98)}x + C_{99}^2 4\operatorname{sh}^{(97)}x \\
 &= (2x^2+1)\operatorname{ch} x + 99\cdot 4x\operatorname{sh} x + 4\,851\cdot 4\operatorname{ch} x \\
 &= (2x^2+19\,405)\operatorname{ch} x + 396x\operatorname{sh} x.
 \end{aligned}$$

2. 求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$:

$$(1) y = \sin^2 \omega x; \quad (2) y = 2^x \ln x;$$

$$(3) y = \frac{e^x}{x}; \quad (4) y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6};$$

$$(5) y = e^{\alpha x} \cos \beta x; \quad (6) y = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

解 (1) $y^{(n)} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega x)^{(n)} = -2^{n-1}\omega^n \cos\left(2\omega x + \frac{n}{2}\pi\right)$

$$= 2^{n-1} \omega^n \sin\left(2\omega x + \frac{n-1}{2}\pi\right).$$

$$\begin{aligned} (2) \quad y^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k (2^x)^{(n-k)} (\ln x)^{(k)} \\ &= \ln^n 2 \cdot 2^x \ln x + \sum_{k=1}^n C_n^k 2^x \ln^{n-k} 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{(k-1)} \\ &= 2^x \left[\ln^n 2 \cdot \ln x + \sum_{k=1}^n C_n^k \ln^{n-k} 2 \cdot \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad y^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k (e^x)^{(n-k)} \left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^x \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \\ &= e^x \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}. \end{aligned}$$

$$(4) \quad \text{由于 } y = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2},$$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}} \right] \\ &= (-1)^n n! \frac{\sum_{k=0}^n (x-2)^k (x-3)^{n-k}}{(x-3)^{n+1} (x-2)^{n+1}} \\ &= (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x-2)^{n-k+1} (x-3)^{k+1}}. \end{aligned}$$

$$(5) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{ax})^{(n-k)} [\cos(\beta x)]^{(k)} = e^{ax} \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} \beta^k \cos\left(\beta x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} (6) \quad y &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4}, \end{aligned}$$

所以

$$y^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

3. 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

的各阶导数.

解 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = 2x$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = -2x$. 由

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{-(\Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = 0,$$

可知 $f'(x) = 2|x|$.

$$\text{由此得到 } f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0, \\ -2, & x < 0, \\ \text{不存在}, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{于是当 } n > 2 \text{ 时, } f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \text{不存在}, & x = 0. \end{cases}$$

4. 设 $f(x)$ 任意次可微, 求

$$(1) [f(x^2)]'''; \quad (2) \left[f\left(\frac{1}{x}\right) \right]''';$$

$$(3) [f(\ln x)]''; \quad (4) [\ln f(x)]'';$$

$$(5) [f(e^{-x})]'''; \quad (6) [f(\arctan x)]''.$$

解 (1) $[f(x^2)]' = f'(x^2)(x^2)' = 2xf'(x^2),$

$$[f(x^2)]'' = 2xf''(x^2)(x^2)' + (2x)'f'(x^2) = 4x^2f''(x^2) + 2f'(x^2),$$

$$\begin{aligned} [f(x^2)]''' &= 4x^2f'''(x^2)(x^2)' + (4x^2)'f''(x^2) + 2f''(x^2)(x^2)' \\ &= 8x^3f'''(x^2) + 12xf''(x^2). \end{aligned}$$

$$(2) \left[f\left(\frac{1}{x}\right) \right]' = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\left[f\left(\frac{1}{x}\right) \right]'' = -\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)'f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\begin{aligned} \left[f\left(\frac{1}{x}\right) \right]''' &= -\frac{1}{x^6}f''' \left(\frac{1}{x}\right) - \frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x^6} \left[f''' \left(\frac{1}{x}\right) + 6xf''\left(\frac{1}{x}\right) + 6x^2f'\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$(3) [f(\ln x)]' = f'(\ln x)(\ln x)' = \frac{f'(\ln x)}{x},$$

$$\begin{aligned} [f(\ln x)]'' &= \frac{f''(\ln x)(\ln x)' \cdot x - f'(\ln x)(x)'}{x^2} \\ &= \frac{f''(\ln x) - f'(\ln x)}{x^2}. \end{aligned}$$

$$(4) [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$[\ln f(x)]'' = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}.$$

$$(5) [f(e^{-x})]' = f'(e^{-x})(e^{-x})' = -e^{-x}f'(e^{-x}),$$

$$\begin{aligned} [f(e^{-x})]'' &= -e^{-x}f''(e^{-x})(e^{-x})' - (e^{-x})'f'(e^{-x}) \\ &= e^{-2x}f''(e^{-x}) + e^{-x}f'(e^{-x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f(e^{-x})]''' &= e^{-2x}f'''(e^{-x})(e^{-x})' + (e^{-2x})'f''(e^{-x}) \\ &\quad + e^{-x}f''(e^{-x})(e^{-x})' + (e^{-x})'f'(e^{-x}) \\ &= -e^{-3x}f'''(e^{-x}) - 3e^{-2x}f''(e^{-x}) - e^{-x}f'(e^{-x}). \end{aligned}$$

$$(6) [f(\arctan x)]' = f'(\arctan x)(\arctan x)' = \frac{f'(\arctan x)}{1+x^2},$$

$$\begin{aligned} [f(\arctan x)]'' &= \frac{(1+x^2)f''(\arctan x)(\arctan x)' - (1+x^2)'f'(\arctan x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{f''(\arctan x) - 2xf'(\arctan x)}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

5. 利用 Leibniz 公式计算 $y^{(n)}(0)$:

(1) $y = \arctan x$;

(2) $y = \arcsin x$.

解 (1) 由 $y' = \frac{1}{1+x^2}$,

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

令 $x=0$, 可得 $y'(0)=1, y''(0)=0$. 在等式 $y'(1+x^2)=1$ 两边对 x 求 n 阶导数 ($n>1$), 得到

$$\sum_{k=0}^n C_n^k y^{(n-k+1)}(1+x^2)^{(k)} = 0,$$

注意到 $(1+x^2)^{(n)}=0$, 上式简化为

$$y^{(n+1)}(1+x^2) + ny^{(n)} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2}y^{(n-1)} \cdot 2 = 0,$$

以 $x=0$ 代入, 得到递推公式

$$y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)y^{(n-1)}(0),$$

从而得到

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n \text{ 为奇数,} \\ 0, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

(2) 由 $y' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

$$y'' = \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x^2)' = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{xy'}{1-x^2},$$

令 $x=0$, 可得 $y'(0)=1, y''(0)=0$, 且 $xy' = (1-x^2)y''$. 在等式 $xy' = (1-x^2)y''$

两边对 x 求 n 阶导数 ($n \geq 1$), 得到

$$\sum_{k=0}^n C_n^k y^{(n-k+1)}(x)^{(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k y^{(n-k+2)}(1-x^2)^{(k)},$$

即

$$xy^{(n+1)} + ny^{(n)} = y^{(n+2)}(1-x^2) - 2xny^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)},$$

以 $x=0$ 代入, 得到递推公式

$$y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0),$$

从而得到

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} [(n-2)!!]^2, & n \text{ 为奇数,} \\ 0, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

6. 对下列隐函数求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$(1) e^{x^2+y} - x^2 y = 0; \quad (2) \tan(x+y) - xy = 0;$$

$$(3) 2y \sin x + x \ln y = 0; \quad (4) x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

解 (1) 在等式两边对 x 求导, 有

$$e^{x^2+y}(x^2+y)' - (x^2 y)' = e^{x^2+y}(2x+y') - 2xy - x^2 y' = 0,$$

再对 x 求导, 得到

$$\begin{aligned} & e^{x^2+y}(x^2+y)'(2x+y') + e^{x^2+y}(2x+y')' - (2xy + x^2 y')' \\ &= e^{x^2+y}(2x+y')^2 + e^{x^2+y}(2+y'') - 2y - 4xy' - x^2 y'' = 0, \end{aligned}$$

从而解出

$$y'' = \frac{4xy' + 2y - e^{x^2+y}[2 + 4x^2 + 4xy' + (y')^2]}{e^{x^2+y} - x^2},$$

$$\text{其中 } y' = \frac{2x(y - e^{x^2+y})}{e^{x^2+y} - x^2}.$$

(2) 在等式两边对 x 求导, 有

$$\sec^2(x+y)(x+y)' - (xy)' = \sec^2(x+y)(1+y') - y - xy' = 0,$$

再对 x 求导, 得到

$$\begin{aligned} & 2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(x+y)'(1+y') + \sec^2(x+y)(1+y')' - y' - (xy')' \\ &= 2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2 + \sec^2(x+y)y'' - 2y' - xy'' = 0, \end{aligned}$$

从而解出

$$y'' = \frac{2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2 - 2y'}{x - \sec^2(x+y)},$$

其中 $y' = \frac{\sec^2(x+y) - y}{x - \sec^2(x+y)}$.

(3) 在等式两边对 x 求导, 有

$$2y' \sin x + 2y \cos x + \ln y + \frac{x}{y} \cdot y' = 0,$$

再对 x 求导, 得到

$$2y'' \sin x + 4y' \cos x - 2y \sin x + \frac{y'}{y} - \frac{x}{y^2} \cdot (y')^2 + \frac{x}{y} \cdot y'' = 0,$$

从而解出

$$y'' = \frac{2y^3 \sin x - 4y^2 y' \cos x - yy' + x(y')^2}{xy + 2y^2 \sin x},$$

其中 $y' = -\frac{2y^2 \cos x + y \ln y}{x + 2y \sin x}$.

(4) 在等式两边对 x 求导, 有

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3ay - 3axy' = 0,$$

再对 x 求导, 得到

$$6x + 6y(y')^2 + 3y^2 y'' - 6ay' - 3axy'' = 0,$$

从而解出

$$y'' = \frac{2x + 2y(y')^2 - 2ay'}{ax - y^2},$$

其中 $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

7. 对下列参数形式的函数求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = at \cos t, \\ y = at \sin t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cos t; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = ae^{-t}, \\ y = be^t; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x = \sqrt{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t}; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x = \sin at, \\ y = \cos bt. \end{cases}$

解 (1) $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(bt^3)''(at^2)' - (bt^3)'(at^2)''}{[(at^2)']^3} = \frac{(6bt)(2at) - (3bt^2)(2a)}{(2at)^3}$

$$= \frac{3b}{4a^2 t}.$$

(2) $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(at \sin t)''(at \cos t)' - (at \sin t)'(at \cos t)''}{[(at \cos t)']^3}$

$$= \frac{(2a \cos t - a t \sin t)(a \cos t - a t \sin t) + (a \sin t + a t \cos t)(2a \sin t + a t \cos t)}{a^3 (\cos t - t \sin t)^3}$$

$$= \frac{(t^2 + 2)(\sin^2 t + \cos^2 t)}{a (\cos t - t \sin t)^3} = \frac{t^2 + 2}{a (\cos t - t \sin t)^3}.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{(t \cos t)'' [t(1 - \sin t)]' - (t \cos t)' [t(1 - \sin t)]''}{[t(1 - \sin t)]'^3} \\ &= \frac{(-2 \sin t - t \cos t)(1 - \sin t - t \cos t) - (\cos t - t \sin t)(-2 \cos t + t \sin t)}{(1 - \sin t - t \cos t)^3} \\ &= \frac{t^2 + 2 - 2 \sin t - t \cos t}{(1 - \sin t - t \cos t)^3}. \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(be^t)''(ae^{-t})' - (be^t)'(ae^{-t})''}{[(ae^{-t})']^3} = \frac{-be^t e^{-t} - be^t e^{-t}}{-a^2 e^{-3t}} = \frac{2b}{a^2} e^{3t}.$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{(\sqrt{1-t})''(\sqrt{1+t})' - (\sqrt{1-t})'(\sqrt{1+t})''}{[(\sqrt{1+t})']^3} \\ &= \left[\frac{-1}{4(\sqrt{1-t})^3(2\sqrt{1+t})} - \frac{1}{2(\sqrt{1-t})[4(\sqrt{1+t})^3]} \right] (2\sqrt{1+t})^3 \\ &= -2(1-t)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{(\cos bt)''(\sin at)' - (\cos bt)'(\sin at)''}{(\sin at)'^3} \\ &= \frac{b(-a \sin at \sin bt - b \cos at \cos bt)}{a^2 \cos^3 at} \\ &= -\frac{b(a \sin at \sin bt + b \cos at \cos bt)}{a^2 \cos^3 at}. \end{aligned}$$

8. 利用反函数的求导公式 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, 证明

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}; \quad (2) \quad \frac{d^3 x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (1) \quad \frac{d^2 x}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y'} \right) \\ &= -\frac{1}{(y')^2} \frac{dy'}{dy} = -\frac{1}{(y')^2} \frac{dy' dx}{dx dy} = -\frac{y''}{(y')^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{d^3 x}{dy^3} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 x}{dy^2} \right) = \frac{d}{dy} \left[-\frac{y''}{(y')^3} \right] = -\frac{1}{(y')^3} \frac{dy''}{dy} + 3 \frac{y''}{(y')^4} \frac{dy'}{dy} \\ &= -\frac{1}{(y')^3} \frac{dy'' dx}{dx dy} + 3 \frac{y''}{(y')^4} \frac{dy' dx}{dx dy} \\ &= -\frac{y'''}{(y')^3} \cdot \frac{1}{y'} + \frac{3(y'')^2}{(y')^4} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}. \end{aligned}$$

9. 求下列函数的高阶微分:

- (1) $y = \sqrt[3]{x - \tan x}$, 求 $d^2 y$; (2) $y = x^4 e^{-x}$, 求 $d^4 y$;
 (3) $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, 求 $d^2 y$; (4) $y = \frac{\sec x}{\sqrt{x^2-1}}$, 求 $d^2 y$;
 (5) $y = x \sin 3x$, 求 $d^3 y$; (6) $y = x^x$, 求 $d^2 y$;
 (7) $y = \frac{\ln x}{x}$, 求 $d^n y$; (8) $y = x^n \cos 2x$, 求 $d^n y$.

解 (1) $dy = \frac{1}{3}(x - \tan x)^{-\frac{2}{3}}(1 - \sec^2 x)dx$

$$= -\frac{1}{3}(x - \tan x)^{-\frac{2}{3}}\tan^2 x dx,$$

$$\begin{aligned} d^2 y &= \left[-\frac{2}{9}(x - \tan x)^{-\frac{5}{3}}(1 - \sec^2 x)^2 - \frac{1}{3}(x - \tan x)^{-\frac{2}{3}}(2\tan x \sec^2 x) \right] dx^2 \\ &= \frac{2\tan^4 x + 6\sec^2 x \tan x(x - \tan x)}{9(\tan x - x)^{\frac{5}{3}}} dx^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) d^4 y &= \sum_{k=0}^4 [C_4^k (x^4)^{(k)} (e^{-x})^{(4-k)}] dx^4 \\ &= \sum_{k=0}^4 C_4^k \frac{4!}{(4-k)!} x^{4-k} (-1)^{4-k} e^{-x} dx^4 \\ &= (x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)e^{-x} dx^4. \end{aligned}$$

$$(3) dy = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (2x) \cdot x - \sqrt{1+x^2} \cdot 1}{x^2} dx = -\frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx,$$

$$d^2 y = \left[\frac{2}{x^3 \sqrt{1+x^2}} + \frac{2x}{2x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dx^2 = \frac{3x^2 + 2}{x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx^2.$$

$$\begin{aligned} (4) dy &= \left[\frac{\tan x \sec x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sec x \cdot (2x)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \right] dx \\ &= \frac{\sec x [(x^2-1)\tan x - x]}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 y &= \left\{ \frac{\sec x \tan x [(x^2-1)\tan x - x] + \sec x [2x \tan x + (x^2-1)\sec^2 x - 1]}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sec x [(x^2-1)\tan x - x] \cdot (2x)}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}} \right\} dx^2 \\ &= \frac{\sec x [(x^2-1)^2(1+2\tan^2 x) - 2x(x^2-1)\tan x + 2x^2 + 1]}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}} dx^2. \end{aligned}$$

$$(5) d^3 y = [x(\sin 3x)''' + 3x'(\sin 3x)'] dx^3 = -27(\sin 3x + x \cos 3x) dx^3.$$

$$(6) dy = d(e^{x \ln x}) = e^{x \ln x} (1 + \ln x) dx = x^x (1 + \ln x) dx,$$

$$d^2 y = [(x^x)'(1 + \ln x) + x^x(1 + \ln x)'] dx^2$$

$$= x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^2.$$

$$(7) d^n y = \sum_{k=0}^n C_n^k (\ln x)^{(k)} \left(\frac{1}{x} \right)^{(n-k)} dx^n$$

$$= \left[\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \ln x \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k} (-1)^{n-k} \frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}} \left. \right] dx^n$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left(\ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) dx^n.$$

$$(8) d^n y = \sum_{k=0}^n C_n^k (x^n)^{(n-k)} (\cos 2x)^{(k)} dx^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{n!}{k!} x^k \right) \left[2^k \cos \left(2x + \frac{k\pi}{2} \right) \right] dx^n$$

$$= (n!)^2 \sum_{k=0}^n \frac{2^k x^k \cos \left(2x + \frac{k\pi}{2} \right)}{(k!)^2 (n-k)!} dx^n.$$

10. 求 $d^2(e^x)$, 其中

(1) x 是自变量;

(2) $x = \varphi(t)$ 是中间变量.

解 (1) $d(e^x) = (e^x)' dx = e^x dx,$

$$d^2(e^x) = d(e^x dx) = (e^x)' dx^2 = e^x dx^2.$$

(2) $d(e^x) = (e^x)' dx = e^x dx = e^{\varphi(t)} \varphi'(t) dt,$

$$d^2(e^x) = d(e^{\varphi(t)} \varphi'(t) dt) = [e^{\varphi(t)} \varphi'(t)]' dt^2$$

$$= e^{\varphi(t)} \{ [\varphi'(t)]^2 + \varphi''(t) \} dt^2.$$

11. 设 $f(u), g(u)$ 任意次可微, 且 $g(u) > 0$.

(1) 当 $u = \tan x$ 时, 求 $d^2 f$;

(2) 当 $u = \sqrt{v}, v = \ln x$ 时, 求 $d^2 g$;

(3) $d^2[f(u)g(u)]$;

(4) $d^2[\ln g(u)]$;

(5) $d^2 \left[\frac{f(u)}{g(u)} \right].$

$$\text{解 } (1) \, df = f'(u)u'(x)dx = f'(\tan x)\sec^2 x dx,$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= f''(u)[u'(x)]^2 dx^2 + f'(u)u''(x)dx^2 \\ &= [f''(\tan x)\sec^4 x + 2f'(\tan x)\sec^2 x \tan x]dx^2. \end{aligned}$$

$$(2) \, u = \sqrt{v} = \sqrt{\ln x},$$

$$dg = \frac{dg}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} dx = g'(u) \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \frac{1}{x} dx = g'(\sqrt{\ln x}) \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} dx,$$

$$\begin{aligned} d^2 g &= \left[\frac{g''(u) \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{g'(u)(2x\sqrt{\ln x})'}{(2x\sqrt{\ln x})^2} \right] dx^2 \\ &= \left\{ \frac{g''(u)}{(2x\sqrt{\ln x})^2} - \frac{g'(u) \left[2\sqrt{\ln x} + 2x \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \right) \right]}{(2x\sqrt{\ln x})^2} \right\} dx^2 \\ &= \frac{g''(\sqrt{\ln x})\sqrt{\ln x} - g'(\sqrt{\ln x})(1 + 2\ln x)}{4x^2 \ln^{\frac{3}{2}} x} dx^2. \end{aligned}$$

$$(3) \, d[f(u)g(u)] = [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]du,$$

$$\begin{aligned} d^2[f(u)g(u)] &= [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]d^2 u \\ &\quad + [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]' du^2 \\ &= [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]d^2 u \\ &\quad + [f''(u)g(u) + 2f'(u)g'(u) + f(u)g''(u)]du^2. \end{aligned}$$

$$(4) \, d[\ln g(u)] = \frac{g'(u)}{g(u)} du,$$

$$\begin{aligned} d^2[\ln g(u)] &= \frac{g'(u)}{g(u)} d^2 u + \left[\frac{g'(u)}{g(u)} \right]' du^2 \\ &= \frac{g'(u)}{g(u)} d^2 u + \frac{g''(u)g(u) - (g'(u))^2}{g^2(u)} du^2. \end{aligned}$$

$$(5) \, d\left[\frac{f(u)}{g(u)}\right] = \frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)} du,$$

$$\begin{aligned} d^2\left[\frac{f(u)}{g(u)}\right] &= \frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)} d^2 u \\ &\quad + \left[\frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)} \right]' du^2 \\ &= \frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)} d^2 u \end{aligned}$$

$$+ \frac{f''(u)g^2(u) - f(u)g(u)g''(u) - 2f'(u)g'(u)g(u) + 2f(u)(g'(u))^2}{g^3(u)} du^2.$$

12. 利用数学归纳法证明:

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

证 当 $n=1$ 时, $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = (e^{\frac{1}{x}})' = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, 命题成立.

假设 $n \leq k$ 时命题都成立. 则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned} (x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} &= [(x^k e^{\frac{1}{x}})']^{(k)} = \left[kx^{k-1}e^{\frac{1}{x}} + x^k e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' \right]^{(k)} \\ &= k[x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}]^{(k)} + [x^k e^{\frac{1}{x}}]^{(k-1)} \\ &= k \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} + \left[\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}} \right]' \\ &= k \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} + \left[k \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}, \end{aligned}$$

命题也成立. 由数学归纳法, 可知本命题对所有正整数都成立.

第五章 微分中值定理及其应用

§1 微分中值定理

1. 设 $f'_+(x_0) > 0, f'_-(x_0) < 0$, 证明 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.

证 由 $f'_+(x_0) > 0$, 可知当 $\delta > 0$ 足够小时, 若 $0 < x - x_0 < \delta$, 则 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, 于是 $f(x) - f(x_0) > 0$; 同理, 由 $f'_-(x_0) < 0$, 可知当 $\delta > 0$ 足够小时, 若 $-\delta < x - x_0 < 0$, 则 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, 于是也有 $f(x) - f(x_0) > 0$. 从而命题得证.

2. (Darboux 定理) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, $x_1, x_2 \in (a, b)$. 如果 $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$, 证明在 x_1 和 x_2 之间至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$.

证 显然 $x_1 \neq x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 若 $f'(x_1) > 0$, 则 $f'(x_2) < 0$, 仿照习题 1 可证存在 $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$, 使得 $f(x_1) < f(x_3), f(x_2) < f(x_4)$, 从而 x_1, x_2 都不是 $f(x)$ 的最大值点, 于是 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 的最大值点 $\xi \in (x_1, x_2)$, 并且成立 $f'(\xi) = 0$. 若 $f'(x_1) < 0$, 则 $f'(x_2) > 0$, 同样可证 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 的最小值点 $\xi \in (x_1, x_2)$, 并且成立 $f'(\xi) = 0$.

3. 举例说明 Lagrange 中值定理的任何一个条件不满足时, 定理结论就有可能不成立.

解 $[-1, 1]$ 上的符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 不连续, 所以 Lagrange 中值定理的条件不满足. 而 $\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 1$, 不存在 $\xi \in (-1, 1), f'(\xi) = 1$.

$[-1, 1]$ 上的绝对值函数 $|x|$ 连续, 但在 $x = 0$ 不可微, 所以 Lagrange 中值定理的条件不满足. 而 $\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 0$, 但 $\forall \xi \in (-1, 1), \xi \neq 0, f'(\xi) = \pm 1 \neq 0$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可微. 利用辅助函数

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}$$

证明 Lagrange 中值定理,并说明 $\psi(x)$ 的几何意义.

证 显然 $\psi(a) = \psi(b) = 0$, 并且满足 Rolle 定理条件. 由 Rolle 定理, 在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使得

$$\psi'(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) & 0 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} = f'(\xi)(b-a) - [f(b) - f(a)] = 0,$$

所以 Lagrange 中值定理成立.

几何意义: 以 $(x, f(x)), (a, f(a)), (b, f(b))$ 为顶点的三角形如果顶点逆时针排列, 则 $\psi(x)$ 就是三角形面积的两倍, 否则 $-\psi(x)$ 就是三角形面积的两倍.

5. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 证明在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

$$\text{证 令 } F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} (x-a) - (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix},$$

则 $F(a) = F(b) = 0$, 由 Rolle 定理, 在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使得

$$F'(\xi) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} - (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

6. 设非线性函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 则在 (a, b) 上至少存在一点 η , 满足

$$|f'(\eta)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|,$$

并说明它的几何意义.

证 由于 $f(x)$ 是非线性函数, 所以在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $(\xi, f(\xi))$ 不在 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的连线上.

假设 $(\xi, f(\xi))$ 在 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的连线的上方, 则

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(b) - f(\xi)}{b - \xi},$$

利用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a, \xi), \xi_2 \in (\xi, b)$, 使得

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > f'(\xi_2),$$

所以 $\max\{|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|\} > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$.

当 $(\xi, f(\xi))$ 在 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的连线下方时同理可证.

几何意义: 在 $[a, b]$ 上连续、在 (a, b) 上可导的非线性函数, 必定在某点切线斜率的绝对值大于 $[a, b]$ 间割线斜率的绝对值.

7. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right)$, 其中 $a \neq 0$ 为常数.

解 由 Lagrange 中值定理, $\frac{\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1}}{\frac{a}{n} - \frac{a}{n+1}} = \frac{1}{1 + \xi^2}$, 其中 ξ 位于

$\frac{a}{n+1}$ 与 $\frac{a}{n}$ 之间. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{1 + \xi^2}$ 趋于 1, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na}{n+1} \cdot \frac{\left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right)}{\frac{a}{n} - \frac{a}{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{na}{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \xi^2} \right) = a. \end{aligned}$$

8. 用 Lagrange 公式证明不等式:

(1) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$;

(2) $ny^{n-1}(x-y) < x^n - y^n < nx^{n-1}(x-y)$ ($n > 1, x > y > 0$);

(3) $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$ ($b > a > 0$);

(4) $e^x > 1 + x$ ($x > 0$).

证 (1) $|\sin x - \sin y| = |\cos \xi \cdot (x - y)| \leq |x - y|$, 其中 ξ 介于 x, y 之间.

(2) $x^n - y^n = n\xi^{n-1}(x - y)$, 其中 $x > \xi > y > 0$. 由 $x^{n-1} > \xi^{n-1} > y^{n-1} > 0$, 得到

$$ny^{n-1}(x - y) < x^n - y^n < nx^{n-1}(x - y) \quad (n > 1, x > y > 0).$$

(3) $\ln \frac{b}{a} = \ln b - \ln a = \frac{1}{\xi}(b - a)$, 其中 $b > \xi > a > 0$. 由于 $\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$, 所以

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

$$(4) e^x - 1 = e^x - e^0 = e^\xi(x-0) > x, x > \xi > 0.$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上定义, 且对任何实数 x_1 和 x_2 , 满足

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2,$$

证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为常数.

证 首先由 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2$, 可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 对任意固定的 $x_2 \in (a, b)$, $\lim_{x_1 \rightarrow x_2} \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq \lim_{x_1 \rightarrow x_2} |x_1 - x_2| = 0$, 故 $f'(x_2) = 0$, 再由 x_2 的任意性, 得到 $f'(x)$ 在 (a, b) 上恒等于 0. 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为常数.

10. 证明恒等式

$$(1) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [0, 1];$$

$$(2) 3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right];$$

$$(3) 2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi, x \in [1, +\infty).$$

证 (1) 令 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0, \forall x \in (0, 1).$$

由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 所以 $f(x) \equiv f(0) = \frac{\pi}{2}$.

(2) 令 $f(x) = 3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3)$, 注意到 $1 - 4x^2 > 0$, $\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 所以

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} \equiv 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

由于 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上连续, 所以 $f(x) \equiv f(0) = 3 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$.

(3) 令 $f(x) = 2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, 注意到 $x^2 - 1 > 0, \forall x > 1$, 所以

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} \equiv 0, \forall x > 1.$$

由于 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 所以 $f(x) \equiv f(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导. 证明: 若 (a, b) 中除至多有限个点有 $f'(x) = 0$ 之外, 都有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增加; 同时举例说明, 其逆命题不成立.

证 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 是 $f'(x)$ 全部的零点. 则 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \cdots, n-1$) 上严格单调增加. 从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增加.

构造函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 3 \cdot 2^{-(n+2)} + 2^{-(n+2)} \cos\left(\frac{1}{x} - n\right)\pi, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

由于 $f\left(\frac{1}{n}\right) = 2^{-n} = f\left(\frac{1}{n} + 1\right)$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续. 因为当 $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ 时, $f'(x) = \frac{2^{-(n+2)}\pi}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x} - n\right)\pi > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上严格单调增加. 但 $f'\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有无限多个零点.

12. 证明不等式:

$$(1) \frac{2}{\pi}x < \sin x < x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \quad (2) 3 - \frac{1}{x} < 2\sqrt{x}, x > 1;$$

$$(3) x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, x > 0;$$

$$(4) \tan x + 2\sin x > 3x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(5) \frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1, x \in [0, 1], p > 1;$$

$$(6) \frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

证 (1) 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 由于

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x (x - \tan x)}{x^2} < 0,$$

可知 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调减少, 所以 $\frac{2}{\pi} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} < \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 从而得到

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

(2) 令 $f(x) = 2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right)$, 则 $f(1) = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} > 0, x > 1.$$

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上严格单调增加, 故 $f(x) > 0$, 从而

$$3 - \frac{1}{x} < 2\sqrt{x}, x > 1.$$

(3) 令 $f(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0, x > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调增加, 由 $f(0) = 0$ 知 $f(x) > 0, \forall x > 0$, 从而

$$\ln(1+x) > \left(x - \frac{x^2}{2}\right), x > 0.$$

令 $g(x) = x - \ln(1+x)$, 则

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0, x > 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调增加, 由 $g(0) = 0$ 知 $g(x) > 0, x > 0$, 从而

$$x > \ln(1+x), x > 0.$$

(4) 令 $f(x) = \tan x + 2\sin x - 3x$, 则 $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) = \sec^2 x + 2\cos x - 3 \geq 3\sqrt[3]{\sec^2 x \cos x \cos x} - 3 = 0,$$

等号仅在 $x = 0$ 成立, 所以 $f(x)$ 严格单调增加, 从而 $f(x) > f(0) = 0$, 即

$$\tan x + 2\sin x > 3x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

(5) 令 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 则 $f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上

取负值, 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上取正值, 即 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上严格单调减少, 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上严

格单调增加, 所以 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 取到最小值 $\frac{1}{2^{p-1}}$. 又 $f(0) = f(1) = 1$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0, 1$ 取到最大值 1, 因而成立

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1, x \in [0, 1].$$

(6) 令 $f(x) = \sin x \tan x - x^2, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 则

$$f'(x) = \sin x + \sin x \sec^2 x - 2x,$$

$$f''(x) = \cos x + \frac{1}{\cos x} + \frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x} - 2$$

$$> 2\sqrt{\cos x \cdot \frac{1}{\cos x}} - 2 = 0.$$

由 $f'(0)=0$, 可知 $f'(x)>0$. 再由 $f(0)=0$, 得到 $f(x)>0$, 从而

$$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

13. 证明: 在 $(0,1)$ 上成立

$$(1) (1+x)\ln^2(1+x) < x^2;$$

$$(2) \frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}.$$

证 (1) 令 $f(x) = x^2 - (1+x)\ln^2(1+x)$, 则

$$f'(x) = 2x - \ln^2(1+x) - 2\ln(1+x),$$

$$f''(x) = 2 - 2\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2}{1+x} = \frac{2(x - \ln(1+x))}{1+x} > 0, x \in (0,1).$$

由 $f'(0)=0$, 可知 $f'(x)>0$, 再由 $f(0)=0$, 得到 $f(x)>0$, 即

$$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2, x \in (0,1).$$

$$(2) \text{ 令 } f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}, \text{ 由 (1),}$$

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)} < 0, x \in (0,1),$$

即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调减少. 令 $F(x) = x - \ln(1+x)$, $G(x) = x^2$, 它们在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $G'(x) = 2x > 0$, 利用 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (0, x)$, 使得

$$\frac{F(x) - F(0)}{G(x) - G(0)} = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{1+\xi}}{2\xi} = \frac{1}{2(1+\xi)},$$

由于当 $x \rightarrow 0^+$ 时有 $\xi \rightarrow 0^+$, 于是

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(1+\xi)} = \frac{1}{2}.$$

再由 $f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$, 得到

$$\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}, x \in (0,1).$$

14. 对于每个正整数 n ($n \geq 2$), 证明方程

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1$$

在 $(0, 1)$ 内必有惟一的实根 x_n , 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证 设 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时,

$$f'_n(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 > 0,$$

所以 $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上严格单调增加, 且当 $n \geq 2$ 时, $f_n(0) = -1$, $f_n(1) = n - 1 > 0$, 所以 $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 内必有惟一的实根 x_n . 显然 $\{x_n\}$ 单调减少有下界, 所以必定收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $0 \leq a < 1$, 且当 $n \geq 2$ 时, $0 < x_n \leq x_2 < 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$. 于是有

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n^2 + x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n(1 - x_n^n)}{1 - x_n} = \frac{a}{1 - a},$$

解得 $a = \frac{1}{2}$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

15. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 上可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $f(\xi) = \xi$;

(2) 对于任意实数 λ , 必存在 $\eta \in (0, \xi)$, 使得

$$f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1.$$

证 (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0, F(1) = -1 < 0,$$

所以存在 $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$.

(2) 令 $G(x) = e^{-\lambda x}[f(x) - x]$, 则 $G(0) = G(\xi) = 0$, 应用 Rolle 定理, 必存在 $\eta \in (0, \xi)$, 使得

$$G'(\eta) = e^{-\lambda \eta}[f'(\eta) - 1] - \lambda e^{-\lambda \eta}[f(\eta) - \eta] = 0,$$

于是成立

$$f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1.$$

16. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $g'(x) \neq 0$ ($x \in (a, b)$). 分别利用辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$



和

$$\phi(x) = \begin{vmatrix} g(x) & f(x) & 1 \\ g(a) & f(a) & 1 \\ g(b) & f(b) & 1 \end{vmatrix},$$

证明 Cauchy 中值定理,并说明 $\varphi(x)$ 和 $\phi(x)$ 的几何意义.

证 由于 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, 应用 Rolle 定理, 必存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0,$$

于是 Cauchy 中值定理成立.

$\varphi(t)$ 的几何意义: 参数方程 $\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t) \end{cases}$ 所表示的曲线上点的纵坐标与联结

点 $(g(a), f(a))$ 和点 $(g(b), f(b))$ 的直线段上点的纵坐标之差.

由于 $\phi(a) = \phi(b) = 0$, 应用 Rolle 定理, 必存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\phi'(\xi) = \begin{vmatrix} g'(\xi) & f'(\xi) & 0 \\ g(a) & f(a) & 1 \\ g(b) & f(b) & 1 \end{vmatrix} = g'(\xi)[f(a) - f(b)] - f'(\xi)[g(a) - g(b)] = 0,$$

于是 Cauchy 中值定理成立.

$\phi(x)$ 的几何意义: 其绝对值等于由 $(g(x), f(x)), (g(a), f(a)), (g(b), f(b))$ 为顶点的三角形面积的两倍, 如果三顶点按照逆时针方向排列, 则 $\phi(x)$ 的符号为正, 否则为负.

17. 设 $a, b > 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

证 令 $g(x) = x^2$, 对 $f(x), g(x)$ 应用 Cauchy 中值定理, 可知必存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

从而

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

18. 设 $a, b > 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$ae^b - be^a = (1 - \xi)e^\xi(a - b).$$

证 对于 $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ 应用 Cauchy 中值定理, 可知必存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{\frac{e^b}{b} - \frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{e^\xi(\xi-1)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = (1-\xi)e^\xi,$$

整理后即得到

$$ae^b - be^a = (1-\xi)e^\xi(a-b).$$

19. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 ($ab > 0$), 在 (a, b) 上可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{1}{b-a} \left| \begin{array}{cc} a & b \\ f(a) & f(b) \end{array} \right| = \xi f'(\xi) - f(\xi).$$

证 对 $\frac{f(x)}{x}$ 与 $\frac{1}{x}$ 应用 Cauchy 中值定理, 可知必定存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{f'(\xi)\xi - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = -[f'(\xi)\xi - f(\xi)],$$

于是成立

$$\frac{af(b) - bf(a)}{b-a} = f'(\xi)\xi - f(\xi),$$

由行列式定义知命题成立.

20. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 在 $(1, +\infty)$ 上可导, 已知函数 $e^{-x}f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有界, 证明函数 $e^{-x}f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上也有界.

证 首先 $e^{-x}f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 所以有界. 当 $x > 2$ 时, 由 Cauchy 中值定理,

$$|e^{-x}f(x)| < \frac{|f(x) - f(1)|}{e^x} + \frac{|f(1)|}{e^2} < \frac{|f(x) - f(1)|}{e^x - e^1} + \frac{|f(1)|}{e^2} = |e^{-\xi}f'(\xi)| + \frac{|f(1)|}{e^2}$$

也是有界的, 所以 $e^{-x}f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有界.

21. 设 $f'(x)$ 在 $(0, a]$ 上连续, 且存在有限极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}f'(x)$, 证明 $f(x)$ 在 $(0, a]$ 上一致连续.

证 由于

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}} = 2\sqrt{\xi}f'(\xi),$$

所以只要证明 $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0, a]$ 上有界就可以了. 显然 $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0, a]$ 连续

且极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} f'(x)$ 存在而且有限, 所以 $\sqrt{x} f'(x)$ 在 $(0, a]$ 上有界.

22. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有 n 阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, 用 Cauchy 中值定理证明

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \quad (0 < \theta < 1).$$

证 反复使用 Cauchy 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x^n} &= \frac{f(x) - f(0)}{x^n - 0^n} = \frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}} = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{n\xi_1^{n-1} - n0^{n-1}} = \frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}} \\ &= \cdots = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n! \xi_{n-1}} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(0)}{n! (\xi_{n-1} - 0)} \\ &= \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}, \xi_n \in (0, x), \end{aligned}$$

所以存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得 $\xi_n = \theta x$, 命题成立.

23. 证明不等式:

$$(1) \frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n, x, y > 0, n > 1; \quad (2) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}, x \neq y.$$

证 (1) 设 $f(x) = x^n$, 则当 $n > 1$ 时,

$$f'(x) = nx^{n-1},$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0, \forall x > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格下凸, 因而

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n, x, y > 0.$$

(2) 设 $f(x) = e^x$, 则

$$f'(x) = f''(x) = e^x > 0, x \in (-\infty, +\infty),$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格下凸, 因而

$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}, x \neq y.$$

24. (Jensen 不等式) 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续下凸函数, 证明对于任意 $x_i \in [a, b]$ 和 $\lambda_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 成立

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

证 应用数学归纳法, 当 $k=2$ 时, 由下凸函数定义知 Jensen 不等式成立.

现假设当 $k = n - 1$ 时 Jensen 不等式成立, 则当 $k = n$ 时,

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) &= f\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} + \lambda_n x_n\right] \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) f\left[\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}\right] + \lambda_n f(x_n) \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} f(x_i) + \lambda_n f(x_n) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).
 \end{aligned}$$

所以 Jensen 不等式对一切正整数 n 成立.

25. 利用上题结论证明: 对于正数 a, b, c 成立

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq a^a b^b c^c.$$

证 设 $f(x) = x \ln x$, 则

$$f'(x) = 1 + \ln x,$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格下凸, 因而

$$\frac{a+b+c}{3} \ln \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{a \ln a + b \ln b + c \ln c}{3}, \forall a, b, c > 0.$$

利用平均值不等式 $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$, $\forall a, b, c > 0$, 得到

$$\frac{a+b+c}{3} \ln \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \ln \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{a \ln a + b \ln b + c \ln c}{3},$$

即

$$(a+b+c) \ln \sqrt[3]{abc} = \ln(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq a \ln a + b \ln b + c \ln c = \ln(a^a b^b c^c),$$

命题得证.

26. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

证 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 可知 $\forall \epsilon > 0$, $\exists X' > 0$, $\forall x > X'$, 成立 $|f'(x)| <$

$\frac{\varepsilon}{2}$. 取定 $x_0 \geq X'$, 则 $\exists X > x_0, \forall x > X$, 成立 $\left| \frac{f(x_0)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, 应用 Lagrange 中值定理, 则有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} \right| &= \left| \frac{f(x_0)}{x} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{x} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x_0)}{x} \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \cdot \left| \frac{x - x_0}{x} \right| \\ &= \left| \frac{f(x_0)}{x} \right| + |f'(\xi)| \cdot \left| \frac{x - x_0}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 成立.

27. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上二阶可导, 证明存在 $\eta \in (a, b)$, 成立

$$f(b) + f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta).$$

证 设 $g(x) = f(x) - f\left(x - \frac{b-a}{2}\right)$. 由于

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a), g(b) = f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

在区间 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 上对 $g(x)$ 应用 Lagrange 中值定理, 即得到

$$\begin{aligned} f(b) + f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= g(b) - g\left(\frac{a+b}{2}\right) = g'(\xi) \left(\frac{b-a}{2}\right) \\ &= \left[f'(\xi) - f'\left(\xi - \frac{b-a}{2}\right) \right] \left(\frac{b-a}{2}\right) \\ &= f''(\eta) \left(\frac{b-a}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

§2 L'Hospital 法则

1. 对于

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty \text{ 或 } -\infty$$

的情况证明 L'Hospital 法则.

证 设 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, 则 $\forall G > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (a, a + \delta), \frac{f'(x)}{g'(x)} > G + 1$.

首先考虑 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ 的情况, 补充定义 $f(a) = g(a) = 0$, 则 $f(x), g(x)$ 在 $[a, a + \delta]$ 上连续, 满足 Cauchy 中值定理条件. 当 $x \in (a, a + \delta)$ 时

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > G, a < \xi < x < a + \delta,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

再考虑 $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$ 的情况, 任取 $x_0 \in (a, a + \delta)$, 再取 $0 < \delta_1 < x_0 - a$,

使得当 $x \in (a, a + \delta_1)$ 时, $\max \left\{ \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right|, \left| \frac{f(x_0)}{g(x)} \right| \right\} \leq \frac{1}{2}$, 于是由

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right] \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} + \frac{f(x_0)}{g(x)} \\ &= \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right] \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(x_0)}{g(x)}, \end{aligned}$$

可得当 $x \in (a, a + \delta_1)$ 时

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \geq \frac{1}{2}(G+1) - \frac{1}{2} = \frac{G}{2},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$ 的情况即为 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, 所以 L'Hospital 法则也成立.

2. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \quad (a \neq 0);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sec x - \cos x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right);$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right);$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x};$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x - \sin^2 x}{x^4};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x; \quad (14) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \tan \frac{x}{2}; \quad (16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x;$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}; \quad (18) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{\sin x}; \quad (20) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (-e^{-x})}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3 \cos 3x}{5 \sec^2 5x} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{2(\pi - 2x)(-2)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\csc^2 x}{-4(-2)} = -\frac{1}{8}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{m}{n} x^{m-n} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot 7x \sec^2 7x \cdot 7}{\cot 2x \sec^2 2x \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7 \sin 2x \cos 2x}{2 \sin 7x \cos 7x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7 \sin 4x}{2 \sin 14x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{28 \cos 4x}{28 \cos 14x} = 1.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cos 3x} = \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3 \sin 3x} = \frac{1}{3}.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(1+x)]' - (\ln x)'}{-\frac{1}{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 - x^2) \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x(1+x)} = 1.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\sec x \tan x + \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sin x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{2x} \right) \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x - \sin^2 x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{3x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{3x^2} \cdot 1 = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos 2x} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{1} = +\infty.$$

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \tan \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\pi - x)}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \sin \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-1}{-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}} \cdot 1 = 2.$$

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -\frac{2}{\pi},
 \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} = e^0 = 1.$$

$$\begin{aligned}
 (18) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}, \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (19) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(-\ln x)}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(-\ln x)(-x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin x}{x} \right) \left(\frac{\tan x}{\ln x} \right) = 0, \\
 &\quad \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\tan x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\cos^2 x} = 0 \right)
 \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

$$(20) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^{\frac{1}{1-x}}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$$

3. 说明不能用 L'Hospital 法则求下列极限:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}; & \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}; \\
 (3) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1) \sin x}{\ln(1 + \sin \frac{\pi}{2} x)}; & \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi}{2} x + e^{2x}}{x}.
 \end{aligned}$$

解 (1) 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\frac{d}{dx} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)}{\frac{d}{dx} \sin x} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 极限不存在, 所

以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 不能用 L'Hospital 法则求极限.

事实上, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0$, 极限存在.

(2) 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{(x + \sin x)'}{(x - \sin x)'} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ 极限不存在, 所以

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$ 不能用 L'Hospital 法则求极限.

事实上, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = 1$, 极限存在.

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1)\sin x}{\ln(1 + \sin \frac{\pi}{2}x)}$ 不是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的待定型, 所以不能用 L'Hospital

法则求极限. 事实上, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1)\sin x}{\ln(1 + \sin \frac{\pi}{2}x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)\sin x}{\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1 + \sin \frac{\pi}{2}x)} = \frac{2\sin 1}{\ln 2}$.

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi}{2}x + e^{2x}}{x}$ 不是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的待定型, 所以不能用 L'Hospital 法

则求极限. 事实上, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi}{2}x + e^{2x}}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (\sin \frac{\pi}{2}x + e^{2x})}{\lim_{x \rightarrow 1} x} = \frac{1 + e^2}{1} = 1 + e^2$.

4. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

其中 $g(0) = 0, g'(0) = 0, g''(0) = 10$. 求 $f'(0)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{2(x - 0)} = \frac{1}{2} g''(0) = 5. \end{aligned}$$

5. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ e^{-\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

解 显然函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续. 下面考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的右连续性. 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \\ &= \frac{1}{x} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - \ln e \right] = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

由对数函数的连续性, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-\frac{1}{2}} = f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续. 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

6. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$, 且 $f'(0)$ 存在, 证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1$.

$$\begin{aligned}\text{证 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot (x \ln x) \right] \\ &= f'(0) \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = e^0 = 1.$$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = k$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$.

$$\begin{aligned}\text{证 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = k.\end{aligned}$$

§ 3

Taylor 公式和插值多项式

1. 由 Lagrange 中值定理知

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta(x)x}, 0 < \theta(x) < 1,$$

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

证 由 $\theta(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$, 取极限即得到

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} \right) \cdot 1 = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

2. 设 $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$

($0 < \theta < 1$), 且 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, 证明: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

$$\begin{aligned}
 \text{证} \quad f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n \\
 &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)h^{n+1} + o(h^{n+1}),
 \end{aligned}$$

于是

$$\theta \cdot \frac{f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h} = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x) + o(1).$$

令 $h \rightarrow 0$, 得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta \cdot f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x),$$

再由 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, 两边消去 $f^{(n+1)}(x)$, 即得到 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

3. 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 取结点为 $x=1, 1.728, 2.744$, 求 $f(x)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$ 及其余项的表达式, 并计算 $p_2(2)$ ($\sqrt[3]{2} = 1.259\,921\,0\cdots$).

解 $f(1)=1, f(1.728)=1.2, f(2.744)=1.4$, 由 Lagrange 插值公式

$$\begin{aligned}
 f(x) &\approx p_2(x) \\
 &= 1 \cdot \frac{(x-1.728)(x-2.744)}{(1-1.728)(1-2.744)} + 1.2 \cdot \frac{(x-1)(x-2.744)}{(1.728-1)(1.728-2.744)} \\
 &\quad + 1.4 \cdot \frac{(x-1)(x-1.728)}{(2.744-1)(2.744-1.728)} \\
 &\approx 0.787\,6(x-1.728)(x-2.744) - 1.622\,4(x-1)(x-2.744) \\
 &\quad + 0.790\,1(x-1)(x-1.728) \\
 &\approx -0.044\,7x^2 + 0.396\,5x + 0.648\,1.
 \end{aligned}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}, \text{ 余项 } r_2(x) = \frac{5}{81\xi^{\frac{8}{3}}}(x-1)(x-1.728)(x-2.744).$$

$$p_2(2) \approx 1.2626.$$

4. 设 $f(x) = 2^x$, 取结点为 $x = -1, 0, 1$, 求 $f(x)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$ 及其余项的表达式, 并计算 $p_2\left(\frac{1}{3}\right)$. 请与上题的计算结果相比较并分析产生差异的原因.

解 $f(-1) = 0.5, f(0) = 1, f(1) = 2$, 由 Lagrange 插值公式

$$\begin{aligned} f(x) &\approx p_2(x) \\ &= 0.5 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 1 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + 2 \cdot \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} \\ &= 0.25x(x-1) - (x-1)(x+1) + (x+1)x \\ &= 0.25x^2 + 0.75x + 1. \end{aligned}$$

$$f'''(x) = \ln^3 2 \cdot 2^x, \text{ 余项 } r_2(x) = \frac{\ln^3 2}{6} 2^\xi (x+1)x(x-1).$$

$$p_2\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1.2778.$$

与上题相比, 本题误差较大的原因是 2 不在所取的三点 $x = -1, 0, 1$ 之间, 而上题 2 在所取的三点 $x = 1, 1.728, 2.744$ 之间, 因而误差较小.

5. 设 $f(x)$ 在若干个测量点处的函数值如下:

x	1.4	1.7	2.3	3.1
$f(x)$	65	58	44	36

试求 $f(2.8)$ 的近似值.

解 由 Lagrange 插值公式

$$\begin{aligned} f(x) &\approx p_3(x) \\ &= 65 \cdot \frac{(x-1.7)(x-2.3)(x-3.1)}{(1.4-1.7)(1.4-2.3)(1.4-3.1)} \\ &\quad + 58 \cdot \frac{(x-1.4)(x-2.3)(x-3.1)}{(1.7-1.4)(1.7-2.3)(1.7-3.1)} \\ &\quad + 44 \cdot \frac{(x-1.4)(x-1.7)(x-3.1)}{(2.3-1.4)(2.3-1.7)(2.3-3.1)} \end{aligned}$$

$$+ 36 \cdot \frac{(x-1.4)(x-1.7)(x-2.3)}{(3.1-1.4)(3.1-1.7)(3.1-2.3)} \\ \approx 5.602x^3 - 30.252x^2 + 29.944x + 67.000,$$

所以

$$f(2.8) \approx p_3(2.8) \approx 36.647.$$

6. 若 h 是小量, 问如何选取常数 a, b, c , 才能使得 $af(x+h) + bf(x) + cf(x-h)$ 与 $f''(x)h^2$ 近似的阶最高?

解 $af(x+h) + bf(x) + cf(x-h)$

$$= a \left[f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 \right] + bf(x)$$

$$+ c \left[f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 \right] + o(h^2)$$

$$= (a+b+c)f(x) + (a-c)f'(x)h + \frac{1}{2}(a+c)f''(x)h^2 + o(h^2),$$

得到方程组
$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ a-c=0, \\ a+c=2, \end{cases} \quad \text{解之得到 } a=c=1, b=-2.$$

7. 将插值条件取为 $n+1$ 个结点上的函数值和一阶导数值, 即 $p_n(x)$ 满足

$$\begin{cases} p_n(x_i) = f(x_i), \\ p'_n(x_i) = f'(x_i), \end{cases} \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

的插值多项式称为 Hermite 插值多项式, 在微分方程数值求解等研究领域中有重要作用. 它可以取为

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n [f(x_k)q_k^{(0)}(x) + f'(x_k)q_k^{(1)}(x)],$$

这里, $\{q_k^{(0)}(x), q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^n$ 是满足条件

$$q_k^{(0)}(x_i) = \delta_{ik}, [q_k^{(0)}]'(x_i) = 0, \quad i, k=0, 1, 2, \dots, n$$

和

$$q_k^{(1)}(x_i) = 0, [q_k^{(1)}]'(x_i) = \delta_{ik}, \quad i, k=0, 1, 2, \dots, n$$

的基函数. 试仿照 Lagrange 插值多项式的情况构造 $\{q_k^{(0)}(x), q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^n$.

解 显然当 $i \neq k$ 时,

$$q_k^{(0)}(x_i) = [q_k^{(0)}]'(x_i) = 0, q_k^{(0)}(x_k) = 1, [q_k^{(0)}]'(x_k) = 0,$$

$$\text{设 } q_k^{(0)}(x) = \left[\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \left(\frac{x-x_i}{x_k-x_i} \right)^2 \right] [1 - c(x-x_k)],$$

由 $[q_k^{(0)}]'(x_k) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{2}{x_k - x_i} - c = 0$ 解出 c , 得到

$$q_k^{(0)}(x) = \left[\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{2}{x_k - x_i} \right) (x - x_k) \right],$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n;$$

同理可得到

$$q_k^{(1)}(x) = \left[\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right)^2 \right] (x - x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

§ 4

函数的 Taylor 公式及其应用

1. 求下列函数在 $x=0$ 处的 Taylor 公式(展开到指定的 n 次):

$$(1) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, n=4; \quad (2) f(x) = \cos(x+a), n=4;$$

$$(3) f(x) = \sqrt{2+\sin x}, n=3; \quad (4) f(x) = e^{\sin x}, n=4;$$

$$(5) f(x) = \tan x, n=5; \quad (6) f(x) = \ln(\cos x), n=6;$$

$$(7) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} n=4; \quad (8) f(x) = \begin{cases} \ln \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} n=4;$$

$$(9) f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}, n=3.$$

解 (1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$

$$\begin{aligned} &= 1 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} (-x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} (-x)^2 \\ &\quad + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 3 \end{pmatrix} (-x)^3 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 4 \end{pmatrix} (-x)^4 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{2 \cdot 9}x^2 + \frac{28}{6 \cdot 27}x^3 + \frac{280}{24 \cdot 81}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

$$(2) f(x) = \cos(x+a) = \cos x \cos a - \sin x \sin a$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \cos a - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) \sin a$$

$$= \cos \alpha - \sin \alpha \cdot x - \frac{\cos \alpha}{2!} x^2 + \frac{\sin \alpha}{3!} x^3 + \frac{\cos \alpha}{4!} x^4 + o(x^4).$$

$$\begin{aligned} (3) \quad f(x) &= \sqrt{2 + \sin x} = \sqrt{2(1 + \frac{\sin x}{2})} = \sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{2} (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3 \right] \\ &= \sqrt{2} \left[1 + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{32} + \frac{x^3}{128} + o(x^3) \right] \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} x - \frac{\sqrt{2}}{32} x^2 - \frac{13\sqrt{2}}{384} x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad f(x) &= e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2} (x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2} (x^2 - \frac{x^4}{3}) + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad f(x) &= \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right] \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right]^{-1} \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right] \left[1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right)^2 + o(x^5) \right] \\ &= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}) + (x - \frac{x^3}{6}) \frac{x^2}{2} + x \cdot \frac{5x^4}{24} + o(x^5) \\ &= x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad f(x) &= \ln(\cos x) = \ln \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \right] \\ &= (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}) - \frac{1}{2} (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^2 + \frac{1}{3} (-\frac{x^2}{2})^3 + o(x^6) \\ &= (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}) - \frac{1}{2} (\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24}) - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^6}{8} + o(x^6) \\ &= -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{45} x^6 + o(x^6). \end{aligned}$$

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) \right]^{-1} \\
&= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \right)^3 + \left(\frac{x}{2} \right)^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} \right) - \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} \right) \\
&\quad + \frac{x^4}{16} + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(8) \quad f(x) &= \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{6} \right)^2 + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(9) \quad f(x) &= \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} \\
&= [1 + (-2x+x^3)]^{\frac{1}{2}} - [1 + (-3x+x^2)]^{\frac{1}{3}} \\
&= \left[1 + \frac{1}{2}(-2x+x^3) - \frac{1}{8}(-2x)^2 + \frac{1}{16}(-2x)^3 + o(x^3) \right] \\
&\quad - \left[1 + \frac{1}{3}(-3x+x^2) - \frac{1}{9}(-3x+x^2)^2 + \frac{5}{81}(-3x)^3 + o(x^3) \right] \\
&= \left(1 - x - \frac{1}{2}x^2 \right) - \left(1 - x - \frac{2}{3}x^2 - x^3 \right) + o(x^3) \\
&= \frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

2. 求下列函数在指定点处的 Taylor 公式:

(1) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2, x_0 = 1;$

(2) $f(x) = \ln x, x_0 = e;$

(3) $f(x) = \ln x, x_0 = 1;$

(4) $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6};$

(5) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 2.$

解 (1) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2$

$$\begin{aligned}
&= -2[(x-1)+1]^3 + 3[(x-1)+1]^2 - 2 \\
&= [-2(x-1)^3 - 6(x-1)^2 - 6(x-1) - 2] \\
&\quad + [3(x-1)^2 + 6(x-1) + 3] - 2
\end{aligned}$$

$$= -1 - 3(x-1)^2 - 2(x-1)^3.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x) &= \ln x = \ln[(x-e) + e] \\ &= \ln e + \ln\left(1 + \frac{x-e}{e}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{ne^n}(x-e)^n + o((x-e)^n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad f(x) &= \ln x = \ln(1 + (x-1)) \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n + o((x-1)^n). \end{aligned}$$

$$(4) \quad f(x) = \sin x, f^{(n)}(x_0) = \sin\left(x_0 + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 \\ &\quad + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{n!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n + o\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n + o\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad f(x) &= \sqrt{x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x-2}{2}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) - \frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^{2n-\frac{1}{2}}n!}(x-2)^n + o((x-2)^n). \end{aligned}$$

3. 通过对展开式及其余项的分析,说明用

$$\ln 2 = \ln \frac{1+x}{1-x} \bigg|_{x=\frac{1}{3}} \approx 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) \bigg|_{x=\frac{1}{3}}$$

比用

$$\ln 2 = \ln(1+x) \bigg|_{x=1}$$

$$\approx \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right) \Big|_{x=1}$$

效果好得多的两个原因.

解 利用第一个展开式计算时是用 $x = \frac{1}{3}$ 代入, 利用第二个展开式计算时是用 $x = 1$ 代入, 显然第一个展开式的通项(或余项)趋于零的速度快, 而第二个展开式的通项(或余项)趋于零的速度相对较慢, 所以在指定精度的条件下, 利用第一个展开式计算 $\ln 2$ 的值比利用第二个展开式计算量小, 效果好.

另外可以通过比较两者的误差来说明两种方法的优劣:

由

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi_1)^{2n+1}}, \\ \ln(1-x) &= - \sum_{k=1}^{2n} \frac{x^k}{k} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\xi_2)^{2n+1}},\end{aligned}$$

可知利用第一个展开式计算前 n 项之和, 余项为

$$r_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \left[\frac{1}{(1+\xi_1)^{2n+1}} + \frac{1}{(1-\xi_2)^{2n+1}} \right], \text{ 其中 } \xi_1, \xi_2 \text{ 位于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间.}$$

$$\text{取 } x = \frac{1}{3}, \left| r_{2n}\left(\frac{1}{3}\right) \right| \leq \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} \left[1 + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2n+1}} \right] < \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}.$$

而利用第二个展开式计算前 n 项之和, 余项为

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}, \text{ 其中 } \xi \text{ 位于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间,}$$

$$\text{取 } x = 1, |r_n(1)| > \frac{1^{n+1}}{(n+1)(1+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

显然 $\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} > \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$, 所以利用第一个展开式计算 $\ln 2$ 的值比利用第二个展开式误差小, 精度高.

4. 利用上题的讨论结果, 不加计算, 判别用哪个公式计算 π 的近似值效果更好, 为什么?

$$(1) \frac{\pi}{4} = \arctan 1 \approx \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] \Big|_{x=1};$$

$$(2) \frac{\pi}{4} = 4\arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \quad (\text{Machin 公式})$$

$$\approx 4 \left[x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] \Big|_{x=\frac{1}{5}}$$

$$-\left[x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right] \Big|_{x=\frac{1}{239}}.$$

解 两个计算 π 的公式都是利用了 $\arctan x$ 的 Taylor 公式, 但第一个公式是用 $x=1$ 代入, 而第二个公式是用 $x=\frac{1}{5}$ 与 $x=\frac{1}{239}$ 代入. 由于 $\frac{1}{5}$ 与 $\frac{1}{239}$ 比 1 小得多, 因此第二个公式的通项(或余项)比第一个公式的通项(或余项)趋于零的速度快得多, 所以用第二个公式计算 π 的近似值效果更好.

5. 利用 Taylor 公式求近似值(精确到 10^{-4}):

$$(1) \lg 11; \quad (2) \sqrt[3]{e}; \quad (3) \sin 31^\circ;$$

$$(4) \cos 89^\circ; \quad (5) \sqrt[5]{250}; \quad (6) (1.1)^{1.2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \lg(10+x) &= \frac{\ln(10+x)}{\ln 10} = 1 + \frac{1}{\ln 10} \ln\left(1 + \frac{x}{10}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{\ln 10} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k 10^k} + r_n(x), \end{aligned}$$

其中 $r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(\ln 10) 10^{n+1} (n+1) (1+\xi)^{n+1}}$, ξ 位于 0 与 $\frac{x}{10}$ 之间.

由 $|r_n(1)| = \frac{1}{(\ln 10) 10^{n+1} (n+1) (1+\xi)^{n+1}} < \frac{1}{(\ln 10) 10^{n+1} (n+1)}$,
得到 $|r_4(1)| < 0.89 \times 10^{-6}$, 满足精度要求, 所以

$$\lg 11 \approx 1 + \frac{1}{\ln 10} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1}{3 \cdot 10^3} - \frac{1}{4 \cdot 10^4} \right) \approx 1.04139.$$

$$(2) e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + r_n(x),$$

其中 $r_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$, ξ 位于 0 与 x 之间.

令 $x = \frac{1}{3}$, $n=4$, $\left| r_4\left(\frac{1}{3}\right) \right| \leq \frac{e^{\frac{1}{3}}}{5! 3^5} \approx 4.79 \times 10^{-5}$, 满足精度要求, 所以

$$\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{6 \cdot 27} + \frac{1}{24 \cdot 81} \approx 1.3956.$$

$$(3) \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)x - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)x^2 + r_2(x),$$

其中 $r_2(x) = -\frac{x^3}{3!} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \xi\right)$, ξ 位于 0 与 x 之间.

由于 $\left| r_2\left(\frac{\pi}{180}\right) \right| \leq \frac{\pi^3}{3! 180^3} \approx 0.88 \times 10^{-6}$, 满足精度要求, 所以

$$\sin 31^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \frac{\pi}{180}$$

$$\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \approx 0.515\,04.$$

(4) $\sin x = x + r_2(x)$, 其中 $r_2(x) = -\frac{x^3}{3!} \cos \xi$, ξ 位于 0 与 x 之间.

由于 $\left| r_2\left(\frac{\pi}{180}\right) \right| \leq 10^{-5}$, 满足精度要求, 所以

$$\cos 89^\circ = \sin 1^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{180} \approx 0.017\,45.$$

$$(5) f(x) = 3(1+x)^{\frac{1}{3}} = 3\left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{4}{25 \cdot 2}x^2\right) + r_2(x),$$

其中 $r_2(x) = \frac{18}{125(1+\xi)^{\frac{14}{3}}}x^3$, ξ 位于 0 与 x 之间.

由于 $\left| r_2\left(\frac{7}{243}\right) \right| < \frac{18}{125} \left(\frac{7}{243}\right)^3 \approx 0.34 \times 10^{-5}$, 满足精度要求, 所以

$$f\left(\frac{7}{243}\right) = 3\left(1 + \frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{3}} = 250^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx 3\left(1 + \frac{7}{5 \cdot 243} - \frac{4 \cdot 7^2}{25 \cdot 2 \cdot 243^2}\right) \approx 3.017\,08.$$

$$(6) f(x) = (1+x)^{1.2} = 1 + 1.2x + \frac{1.2 \cdot 0.2}{2}x^2 - \frac{1.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8}{6}x^3 + r_3(x),$$

其中 $r_3(x) = \frac{1.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 1.8}{24(1+\xi)^{2.8}}x^4$, ξ 位于 0 与 x 之间.

由于 $|r_3(0.1)| \leq 0.014\,4(0.1)^4 = 0.144 \times 10^{-5}$, 满足精度要求, 所以

$$f(0.1) = (1.1)^{1.2}$$

$$= 1 + 1.2 \cdot 0.1 + \frac{1.2 \cdot 0.2}{2} 0.1^2 - \frac{1.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8}{6} 0.1^3$$

$$\approx 1.121\,17.$$

6. 利用函数的 Taylor 公式求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \quad (a > 0);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \csc x \right);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt[5]{x^5 - x^4});$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right];$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x});$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 - 1} \right].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad e^x \sin x - x(1+x) &= (1+x+\frac{x^2}{2})(x-\frac{x^3}{6}) + o(x^3) - (x+x^2) \\ &= \frac{x^3}{3} + o(x^3), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a^x + a^{-x} - 2 &= (e^{x \ln a} - 1) + (e^{-x \ln a} - 1) \\ &= \left(\ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2} x^2 + o(x^2) \right) \\ &\quad + \left(-\ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2} x^2 + o(x^2) \right) \\ &= \ln^2 a \cdot x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \ln^2 a.$$

(3) 由于 $\sin x = x + o(x^2)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \csc x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0.$$

(4) 令 $u = \frac{1}{x}$, 由于

$$\begin{aligned} &(1+u)^{\frac{1}{5}} - (1-u)^{\frac{1}{5}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{5}u - \frac{2}{25}u^2 + o(u^2) \right) - \left(1 - \frac{1}{5}u - \frac{2}{25}u^2 + o(u^2) \right) \\ &= \frac{2}{5}u + o(u^2), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt[5]{x^5 - x^4}) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^{\frac{1}{5}} - (1-u)^{\frac{1}{5}}}{u} = \frac{2}{5}.$$

(5) 令 $u = \frac{1}{x}$, 由于 $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - \ln(1+u)}{u^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}u^2 + o(u^2)}{u^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(6) 由于 $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(7) 令 $u = \frac{1}{x}$, 由于

$$\begin{aligned}\sqrt{1+u} + \sqrt{1-u} - 2 &= (\sqrt{1+u} - 1) + (\sqrt{1-u} - 1) \\ &= \left(\frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2) \right) + \left(-\frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2) \right) \\ &= -\frac{u^2}{4} + o(u^2),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) \\ = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1+u} + \sqrt{1-u} - 2}{u^2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(8) 令 $u = \frac{1}{x}$, 由于

$$\begin{aligned}e^u (1 - u + \frac{u^2}{2}) - \sqrt{1-u^6} \\ = (1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6})(1 - u + \frac{u^2}{2}) - 1 + o(u^3) \\ = \frac{u^3}{6} + o(u^3),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 - 1} \right] \\ = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{e^u (1 - u + \frac{u^2}{2}) - \sqrt{1-u^6}}{u^3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

7. 利用 Taylor 公式证明不等式:

$$(1) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad x > 0;$$

$$(2) (1+x)^a < 1+ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2, \quad 1 < a < 2, x > 0.$$

证 (1) 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\xi)^3} > x - \frac{x^2}{2}, 0 < \xi < x,$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(1+\xi)^4} \\ &< x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, 0 < \xi < x. \end{aligned}$$

$$(2) (1+x)^a = 1+ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6(1+\xi)^{3-a}}x^3, 0 < \xi < x.$$

由于 $1 < a < 2$, 所以 $a(a-1)(a-2) < 0$, 从而 Lagrange 余项 $\frac{a(a-1)(a-2)}{6(1+\xi)^{3-a}}x^3$ 小于零, 于是得到

$$(1+x)^a < 1+ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2.$$

8. 判断下列函数所表示的曲线是否存在渐近线, 若存在的话求出渐近线方程:

$$(1) y = \frac{x^2}{1+x};$$

$$(2) y = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$(3) y = \sqrt{6x^2 - 8x + 3};$$

$$(4) y = (2+x)e^{\frac{1}{x}};$$

$$(5) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$(6) y = \ln \frac{1+x}{1-x};$$

$$(7) y = x + \operatorname{arccot} x;$$

$$(8) y = \sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2};$$

$$(9) y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$(10) y = x^5 \left(\cos \frac{1}{x} - e^{-\frac{1}{2x^2}} \right);$$

$$(11) y = x^2 \left(xe^{\frac{1}{2x}} - \sqrt{x^3 + x^2} \right); \quad (12) y = x^2 \left(xe^{\frac{1}{2x}} - \sqrt{x^2 + x} \right).$$

解 (1) 由于 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{1+x} = \infty$, 所以 $x = -1$ 是垂直渐近线; 由于

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(1+x)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - ax \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) = -1,$$

所以斜渐近线为 $y = x - 1$.

(2) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$, 所以 $y = 0$ 是水平渐近线.

(3) 解法一 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{6x^2 - 8x + 3}}{x} &= \sqrt{6}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{6x^2 - 8x + 3} - \sqrt{6}x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x + 3}{\sqrt{6x^2 - 8x + 3} + \sqrt{6}x} \\ &= -\frac{2\sqrt{6}}{3},\end{aligned}$$

所以当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 渐近线为 $y = \sqrt{6}x - \frac{2\sqrt{6}}{3}$;

由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{6x^2 - 8x + 3}}{x} &= -\sqrt{6}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{6x^2 - 8x + 3} + \sqrt{6}x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x + 3}{\sqrt{6x^2 - 8x + 3} - \sqrt{6}x} = \frac{2\sqrt{6}}{3},\end{aligned}$$

所以当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 渐近线为 $y = -\sqrt{6}x + \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

解法二

$$\begin{aligned}\sqrt{6x^2 - 8x + 3} - ax - b &= \frac{6x^2 - 8x + 3 - (ax + b)^2}{\sqrt{6x^2 - 8x + 3} + ax + b} \\ &= \frac{(6 - a^2)x^2 - (8 + 2ab)x + 3 - b^2}{\sqrt{6x^2 - 8x + 3} + ax + b},\end{aligned}$$

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax - b) = 0$, 解得 $a = \pm\sqrt{6}$, $b = -\frac{4}{a}$. 所以当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 渐近线为

$y = \sqrt{6}x - \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 渐近线为 $y = -\sqrt{6}x + \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(4) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2+x)e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, 所以 $x=0$ 是垂直渐近线; 令 $u = \frac{1}{x}$, 由

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} [(2+x)e^{\frac{1}{x}} - ax - b] &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(2u+1)e^u - a - bu}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1-a) + (3-b)u + o(u)}{u} = 0,\end{aligned}$$

解得 $a=1$, $b=3$, 所以斜渐近线为 $y=x+3$.

(5) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x} = \infty$, 所以曲线无渐近线.

(6) 函数定义域为 $(-1, 1)$, 且 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{1+x}{1-x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \frac{1+x}{1-x} = -\infty$, 所

以 $x = \pm 1$ 为两条垂直渐近线.

(7) 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0,$$

所以当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 渐近线为 $y = x$;

由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi,$$

所以当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 渐近线为 $y = x + \pi$.

(8) 令 $u = \frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2} - ax - b] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1-2u)^{\frac{1}{3}}(1+u)^{\frac{2}{3}} - a - bu}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{2}{3}u)(1 + \frac{2}{3}u) - a - bu + o(u)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - a - bu + o(u)}{u} = 0, \end{aligned}$$

解出 $a = 1, b = 0$, 所以曲线有渐近线 $y = x$.

(9) 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos(-1) = \pi,$$

所以曲线有水平渐近线 $y = \pi$.

(10) 令 $u = \frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x^5 \left(\cos \frac{1}{x} - e^{-\frac{1}{2x^2}} \right) - ax - b \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u - e^{-\frac{u^2}{2}} - au^4 - bu^5}{u^5} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}) - (1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2 \cdot 4}) - au^4 - bu^5 + o(u^5)}{u^5} = 0, \end{aligned}$$

解出 $a = -\frac{1}{12}, b = 0$, 所以曲线有渐近线 $y = -\frac{1}{12}x$.

(11) 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (xe^{\frac{1}{3x}} - \sqrt[3]{x^3 + x^2}) = +\infty,$$

所以 $x = 0$ 是一条垂直渐近线.

令 $u = \frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 (xe^{\frac{1}{2x}} - \sqrt{x^3 + x^2}) - ax - b] \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{u}{3}} - (1+u)^{\frac{1}{3}} - au^2 - bu^3}{u^3} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{2 \cdot 9} + \frac{u^3}{6 \cdot 27}) - (1 + \frac{u}{3} - \frac{2u^2}{2 \cdot 9} + \frac{10u^3}{6 \cdot 27}) - au^2 - bu^3 + o(u^3)}{u^3} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{6} - a)u^2 + (-\frac{1}{18} - b)u^3 + o(u^3)}{u^3} = 0,
 \end{aligned}$$

解出 $a = \frac{1}{6}, b = -\frac{1}{18}$, 所以斜渐近线为 $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{18}$.

(12) 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (xe^{\frac{1}{2x}} - \sqrt{x^2 + x}) = +\infty,$$

所以 $x=0$ 是一条垂直渐近线.

$$\text{令 } u = \frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 (xe^{\frac{1}{2x}} - \sqrt{x^2 + x}) - ax - b] \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{u}{2}} - \sqrt{1+u} - au^2 - bu^3}{u^3} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2 \cdot 4} + \frac{u^3}{6 \cdot 8}) - (1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{2 \cdot 4} + \frac{3u^3}{6 \cdot 8}) - au^2 - bu^3 + o(u^3)}{u^3} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(\frac{1}{4} - a)u^2 - (\frac{1}{24} + b)u^3 + o(u^3)}{u^3} = 0,
 \end{aligned}$$

解出 $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{24}$, 所以当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 渐近线为 $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{24}$.

由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{2x}} + \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} \right) = \infty,$$

所以当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 没有渐近线.

9. (1) 设 $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}, x_{n+1} = \sin x_n (n=1, 2, \dots)$, 证明:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$; (ii) $x_n^2 \sim \frac{3}{n} (n \rightarrow \infty)$;

(2) 设 $y_1 > 0, y_{n+1} = \ln(1 + y_n) (n=1, 2, \dots)$, 证明:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0; \quad (ii) y_n \sim \frac{2}{n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

证 (1) 易知数列 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界. 设其极限为 a , 对 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两端取极限, 有 $a = \sin a$ ($0 \leq a < \frac{\pi}{2}$), 所以 $a = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

利用 Stolz 定理,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}^2 \sin^2 x_{n-1}}{x_{n-1}^2 - \sin^2 x_{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}^4}{x_{n-1}^2 - \left[x_{n-1}^2 - \frac{1}{3} x_{n-1}^4 + o(x_{n-1}^4) \right]} = 3, \end{aligned}$$

所以

$$x_n^2 \sim \frac{3}{n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

(2) 易知数列 $\{y_n\}$ 单调减少且有下界. 设其极限为 b , 对 $y_{n+1} = \ln(1 + y_n)$ 两端取极限, 有 $b = \ln(1 + b)$ ($0 \leq b < y_1$), 所以 $b = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

利用 Stolz 定理,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n-1} \ln(1 + y_{n-1})}{y_{n-1} - \ln(1 + y_{n-1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n-1}^2}{y_{n-1} - \left[y_{n-1} - \frac{1}{2} y_{n-1}^2 + o(y_{n-1}^2) \right]} = 2, \end{aligned}$$

所以

$$y_n \sim \frac{2}{n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且满足 $|f''(x)| \leq 1$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内取到最大值 $\frac{1}{4}$. 证明: $|f(0)| + |f(1)| \leq 1$.

证 设 $x_0 \in (0, 1)$ 为函数的最大值点, 则 $f(x_0) = \frac{1}{4}$, $f'(x_0) = 0$. 以 $x = 0$, $x = 1$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(0 - x_0)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} f''(\xi) x_0^2, \quad \xi \in (0, x_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(1) &= f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2, \eta \in (x_0, 1),
 \end{aligned}$$

得到

$$|f(0)| + |f(1)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[x_0^2 + (1-x_0)^2] \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且在 $[0, 1]$ 上成立

$$|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 2.$$

证明在 $[0, 1]$ 上成立 $|f'(x)| \leq 3$.

证 利用例 5.4.13, 由于 $A=1, B=2$, 所以在 $[0, 1]$ 上成立

$$|f'(x)| \leq 2A + \frac{1}{2}B = 3.$$

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$. 证明:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \geq 8.$$

证 设 $x_0 \in (0, 1)$ 为函数的最小值点, 则 $f(x_0) = -1, f'(x_0) = 0$. 以 $x=0, x=1$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$\begin{aligned}
 f(0) &= f(x_0) + f'(x_0)(0-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2 \\
 &= -1 + \frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2 = 0, \xi \in (0, x_0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(1) &= f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2 \\
 &= -1 + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2 = 0, \eta \in (x_0, 1),
 \end{aligned}$$

得到

$$\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2 = \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2 = 1.$$

当 $x_0 \leq \frac{1}{2}$ 时, $f''(\xi) = \frac{2}{x_0^2} \geq 8$; 当 $x_0 > \frac{1}{2}$ 时, $f''(\eta) = \frac{2}{(1-x_0)^2} > 8$. 所以

$$\max_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \geq 8.$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

证 设 $|f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, 若 $x_0 = a$ 或 b , 则结论自然成立. 设 $a < x_0 < b$, 以 $x = a$ 和 $x = b$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(a - x_0)^2, \xi \in (a, x_0),$$

$$f(b) = f(x_0) + f'(x_0)(b - x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta)(b - x_0)^2, \eta \in (x_0, b),$$

将 $f(a) = f(b) = 0, f'(x_0) = 0$ 代入上面两式, 得到

$$|f(x_0)| \leq \frac{1}{2}(a - x_0)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|,$$

$$|f(x_0)| \leq \frac{1}{2}(b - x_0)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

当 $x_0 \in (a, \frac{a+b}{2})$ 时, $(a - x_0)^2 < \frac{1}{4}(b - a)^2$;

当 $x_0 \in [\frac{a+b}{2}, b)$ 时, $(b - x_0)^2 \leq \frac{1}{4}(b - a)^2$.

综合上述两种情况, 得到

$$|f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(b - a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

§5 应用举例

1. 求下列函数的极值点, 并确定它们的单调区间:

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$;

(2) $y = x + \sin x$;

(3) $y = \sqrt{x} \ln x$;

(4) $y = x^n e^{-x} \quad (n \in \mathbf{N}_+)$;

(5) $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x-2}}$;

(6) $y = \frac{1-x}{1+x^2}$;

(7) $y = 3x + \frac{4}{x}$;

(8) $y = x - \ln(1+x)$;

(9) $y = \cos^3 x + \sin^3 x$;

(10) $y = \arctan x - x$;

(11) $y = 2e^x + e^{-x}$;

(12) $y = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

(13) $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(14) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) 因为 $y'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$ 有两个零点 $-1, 2$, 根据一阶导数的符号, 可知函数在 $(-\infty, -1]$ 和 $[2, +\infty)$ 上单调增加, 在 $[-1,$

2]上单调减少,所以 $x = -1$ 是极大值点, $x = 2$ 是极小值点.

(2) 因为 $y'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加, 无极值点.

(3) $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + \ln x)$ 有零点 e^{-2} , 根据一阶导数的符号可知函数在 $(0, e^{-2}]$ 上单调减少, 在 $[e^{-2}, +\infty)$ 上单调增加, 所以 $x = e^{-2}$ 是极小值点.

(4) $y'(x) = (n-x)x^{n-1}e^{-x}$ 有零点 0 和 n .

当 n 是偶数时, 函数在 $(-\infty, 0]$ 和 $[n, +\infty)$ 上单调减少, 在 $[0, n]$ 上单调增加, 所以 $x = 0$ 是极小值点, $x = n$ 是极大值点;

当 n 是奇数时, 函数在 $(-\infty, n]$ 上单调增加, 在 $[n, +\infty)$ 上单调减少, 所以 $x = n$ 是极大值点.

(5) y 和 y^3 具有相同的单调性, $\frac{d(y^3)}{dx} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$ 有零点 $x = -1, 5$, $x = 2$ 是不可导点. 根据一阶导数的符号, 可知函数在 $(-\infty, -1]$ 和 $[5, +\infty)$ 上单调增加, 在 $[-1, 2)$ 和 $(2, 5]$ 上单调减少, 所以 $x = -1$ 是极大值点, $x = 5$ 是极小值点.

(6) $y'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(1+x^2)^2}$ 有零点 $x = 1 \pm \sqrt{2}$, 根据一阶导数的符号, 可知函数在 $(-\infty, 1-\sqrt{2}]$ 和 $[1+\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调增加, 在 $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ 上单调减少, 所以 $x = 1-\sqrt{2}$ 是极大值点, $x = 1+\sqrt{2}$ 是极小值点.

(7) $y'(x) = 3 - \frac{4}{x^2}$ 有零点 $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, 根据一阶导数的符号, 可知函数在 $(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}]$ 和 $[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty)$ 上单调增加, 在 $[-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$ 和 $(0, \frac{2}{\sqrt{3}}]$ 上单调减少, 所以 $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ 是极大值点, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 是极小值点.

(8) $y'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ 有零点 $x = 0$, 函数在 $x = -1$ 不可导, 根据一阶导数的符号, 可知函数在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 在 $(-1, 0]$ 上单调减少, 所以 $x = 0$ 是极小值点.

(9) $y'(x) = 3\sin x \cos x (\sin x - \cos x)$ 有零点 $x = \frac{k\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{4}$, 根据一阶导数的符号, 可知函数在 $[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$, $[2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}]$ 和 $[2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2k\pi + 2\pi]$ 上单调增加, 在 $[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{4}]$, $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi]$ 和 $[2k\pi + \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ 上单调减少, 所以 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 是极大值点, $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ 是极小值点.

$+\frac{3\pi}{2}]$ 上单调减少,所以 $x=2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$ 是极大值点, $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\pi, (2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ 是极小值点.

(10) $y'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} \leq 0$, 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调减少, 所以没有极值点.

(11) $y'(x) = 2e^x - e^{-x} = (2e^{2x} - 1)e^{-x}$ 有零点 $x = -\frac{1}{2}\ln 2$, 根据一阶导数的符号, 可知函数在 $[-\frac{1}{2}\ln 2, +\infty)$ 上单调增加, 在 $(-\infty, -\frac{1}{2}\ln 2]$ 上单调减少, 所以 $x = -\frac{1}{2}\ln 2$ 是极小值点.

(12) $y'(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}, x=1$ 是不可导点, 根据一阶导数的符号, 可知函数在 $(-\infty, 1]$ 上单调增加, 在 $[1, +\infty)$ 上单调减少, 所以 $x=1$ 是极大值点.

(13) $y'(x) = \frac{12-5x}{(4+5x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 有零点 $x = \frac{12}{5}$, 根据一阶导数的符号, 可知函数在 $(-\infty, \frac{12}{5}]$ 上单调增加, 在 $[\frac{12}{5}, +\infty)$ 上单调减少, 所以 $x = \frac{12}{5}$ 是极大值点.

(14) $y'(x) = x^{\frac{1}{x}} \frac{1-\ln x}{x^2}$ 有零点 $x=e$, 根据一阶导数的符号, 可知函数在 $(0, e]$ 上单调增加, 在 $[e, +\infty)$ 上单调减少, 所以 $x=e$ 是极大值点.

2. 求下列曲线的拐点, 并确定函数的保凸区间:

(1) $y = -x^3 + 3x^2;$

(2) $y = x + \sin x;$

(3) $y = \sqrt{1+x^2};$

(4) $y = xe^{-x};$

(5) $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x-2}};$

(6) $y = \frac{1-x}{1+x^2};$

(7) $y = x - \ln(1+x);$

(8) $y = \arctan x - x;$

(9) $y = (x+1)^4 + e^x;$

(10) $y = \ln(1+x^2);$

(11) $y = e^{\arctan x};$

(12) $y = x + \sqrt{x-1}.$

解 (1) $y'(x) = -3x^2 + 6x, y''(x) = -6x + 6$, 二阶导数有零点 $x=1$, 根据二阶导数的符号, 可知点 $(1, 2)$ 是曲线的拐点;

函数的保凸区间: $(-\infty, 1]$ 下凸, $[1, +\infty)$ 上凸.

(2) $y'(x) = 1 + \cos x, y''(x) = -\sin x$, 二阶导数有零点 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 根

据二阶导数的符号,可知点 $(k\pi, k\pi), k \in \mathbb{Z}$ 是曲线的拐点;

函数的保凸区间: $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 上凸, $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ 下凸.

$$(3) y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, y''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3} > 0,$$

所以曲线没有拐点;

函数的保凸区间: $(-\infty, +\infty)$ 下凸.

(4) $y'(x) = (1-x)e^{-x}, y''(x) = (x-2)e^{-x}$, 二阶导数有零点 $x=2$, 根据二阶导数的符号, 可知点 $(2, \frac{2}{e})$ 是曲线的拐点;

函数的保凸区间: $(-\infty, 2]$ 上凸, $[2, +\infty)$ 下凸.

$$(5) y'(x) = \frac{(x-5)}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{4}{3}}, y''(x) = \frac{-2(x^2-10x-2)}{9(x+1)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{7}{3}}},$$

阶导数有零点 $x = 5 \pm 3\sqrt{3}$, 根据二阶导数的符号, 可知点 $(5 \pm 3\sqrt{3}, \frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1 \pm \sqrt{3}))$ 是曲线的拐点;

函数的保凸区间: $(-\infty, -1], [-1, 5-3\sqrt{3}]$ 和 $(2, 5+3\sqrt{3}]$ 下凸, $[5-3\sqrt{3}, 2)$ 和 $[5+3\sqrt{3}, +\infty)$ 上凸.

(6) $y'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}, y''(x) = \frac{-2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$, 二阶导数有零点 $x = -1, 2 \pm \sqrt{3}$, 根据二阶导数的符号, 可知点 $(-1, 1), (2 \pm \sqrt{3}, \frac{1}{4}(1 \mp \sqrt{3}))$ 是曲线的拐点;

函数的保凸区间: $(-\infty, -1]$ 和 $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$ 下凸, $[2+\sqrt{3}, +\infty)$ 和 $[-1, 2-\sqrt{3}]$ 上凸.

$$(7) y'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}, y''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0, \text{曲线没有拐点};$$

函数的保凸区间: $(-1, +\infty)$ 下凸.

(8) $y'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1, y''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, 二阶导数有零点 $x=0$, 根据二阶导数的符号, 可知点 $(0, 0)$ 是曲线的拐点;

函数的保凸区间: $(-\infty, 0]$ 下凸, $[0, +\infty)$ 上凸.

(9) $y''(x) = 12(x+1)^2 + e^x > 0$, 曲线没有拐点;

函数的保凸区间: $(-\infty, +\infty)$ 下凸.

$$(10) y'(x) = \frac{2x}{1+x^2}, y''(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}, \text{二阶导数有零点 } x = \pm 1, \text{根据二}$$

阶导数的符号,可知点 $(\pm 1, \ln 2)$ 是曲线的拐点;

函数的保凸区间: $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$ 上凸, $[-1, 1]$ 下凸.

(11) $y'(x) = e^{\arctan x} \frac{1}{1+x^2}$, $y''(x) = e^{\arctan x} \frac{1-2x}{(1+x^2)^2}$, 二阶导数有零点 $x = \frac{1}{2}$, 根据二阶导数的符号,可知点 $(\frac{1}{2}, e^{\arctan \frac{1}{2}})$ 是曲线的拐点;

函数的保凸区间: $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 下凸, $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上凸.

(12) $y'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $y''(x) = -\frac{1}{4(x-1)^{\frac{3}{2}}} < 0$, 曲线没有拐点;

函数的保凸区间: $[1, +\infty)$ 上凸.

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 证明: $f(x)$ 在 x_0 处取到极大值(极小值)的必要条件是 $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) \leq 0$ ($f''(x_0) \geq 0$).

证 先设 $f(x)$ 在 x_0 处取到极大值, 则由于 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 所以 $f'(x_0) = 0$. 若 $f''(x_0) > 0$, 则由

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ &\quad + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \\ &= f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2), \end{aligned}$$

可知当 $x \neq x_0$ 充分接近 x_0 时, 有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^2} > 0$, 与 $f(x)$ 在 x_0 处取到极大值矛盾, 所以 $f''(x_0) \leq 0$.

$f(x)$ 在 x_0 处取到极小值的情况可同样证明.

4. 设 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续且 $\varphi(a) \neq 0$, 讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极值情况.

解 首先有 $f(a) = 0$.

当 n 为偶数时 $(x-a)^n \geq 0$, 当 $\varphi(a) > 0$ 时, $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$ 在 $x=a$ 附近非负, 所以 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点; 而当 $\varphi(a) < 0$ 时, 函数 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$ 在 $x=a$ 附近非正, 所以 $x=a$ 为函数的极大值点.

当 n 为奇数时 $(x-a)^n$ 在 $x=a$ 附近变号, $\varphi(a) \neq 0$, $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$ 在 $x=a$ 附近也变号, 所以 $x=a$ 非极值点.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有 n 阶连续导数, 且 $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0, f^{(n)}(a)\neq 0$, 讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极值情况.

解 $f(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n, \xi$ 位于 0 与 x 之间. 由于 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有 n 阶连续导数, $f^{(n)}(a)\neq 0$, 所以当 x 位于 $x=a$ 附近, $f^{(n)}(\xi)$ 不变号, 利用上题的结果可知:

当 n 为偶数时, 若 $f^{(n)}(a)>0$, 则 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点; 若 $f^{(n)}(a)<0$, 则 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点.

当 n 为奇数时, $x=a$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点.

6. 如何选择参数 $h>0$, 使得

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

在 $x=\pm\sigma$ ($\sigma>0$ 为给定的常数) 处有拐点?

解 $y'(x)=\frac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}, y''(x)=\frac{-2h^3(1-2h^2x^2)}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, 可知曲线在 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}h}$ 处有拐点, 所以取 $h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ 即可.

7. 求 $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ 在拐点处的切线方程.

解 $y'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}, y''(x)=\frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$, 可知 $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$ 是曲线的拐点, 由于 $y'(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}$, 得到在拐点处曲线的切线方程为

$$y-\frac{1}{4}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}(x\mp\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

即: $3\sqrt{3}x-8y-1=0$ 和 $3\sqrt{3}x+8y+1=0$.

8. 作出下列函数的图像(渐近线方程可利用上一节习题 8 的结果):

(1) $y=\frac{x^2}{1+x}$;

(2) $y=\frac{2x}{1+x^2}$;

(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$;

(4) $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$;

(5) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$;

(6) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$;

(7) $y=x+\operatorname{arccot} x$;

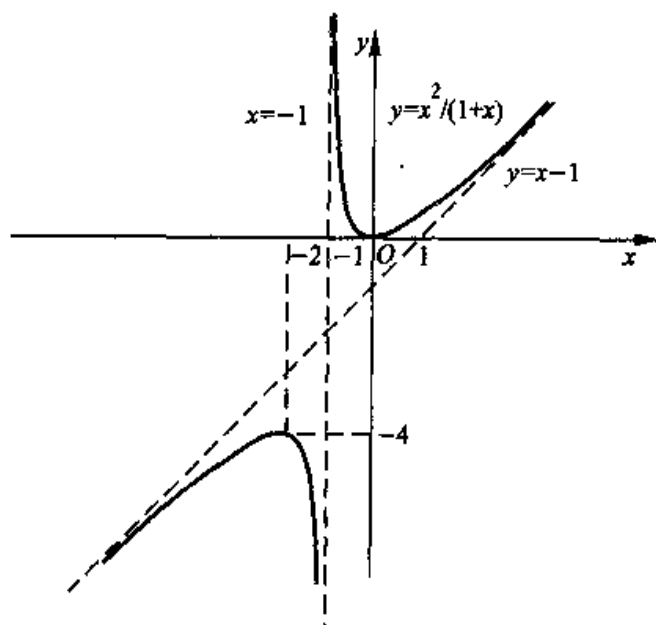
(8) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$;

$$(9) y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$\text{解 } (1) y = \frac{x^2}{1+x}, y' = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}, y'' = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	-	无定义	-	0	+
y''	-	-	-	无定义	+	+	+
y	\nearrow	极大值 -4	\searrow	无定义	\swarrow	极小值 0	\nearrow

渐近线为 $y = x - 1$ 和 $x = -1$.



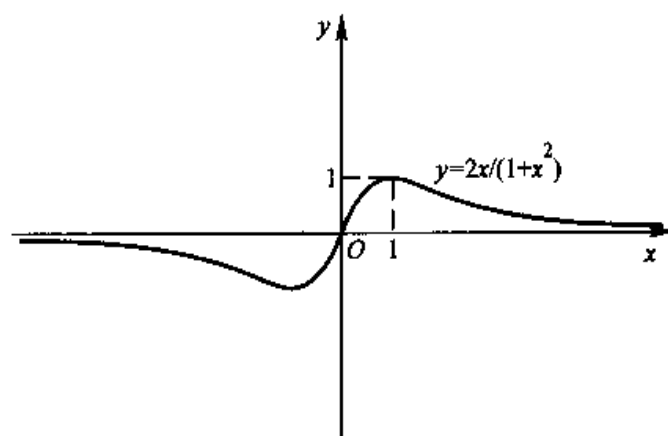
第8题图1

(2) 因为 y 为奇函数, 只要考虑 $x \geq 0$ 的情况.

$$y = \frac{2x}{1+x^2}, y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, y'' = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	+	+	0	-	-	-
y''	0	-	-1	-	0	+
y	0	\nearrow	极大值 1	\searrow	拐点 $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	\swarrow

渐近线是 $y=0$.



第8题图2

$$(3) y = \sqrt{6x^2 - 8x + 3}, y' = \frac{6x-4}{\sqrt{6x^2-8x+3}}, y'' = \frac{2}{\sqrt{(6x^2-8x+3)^3}}.$$

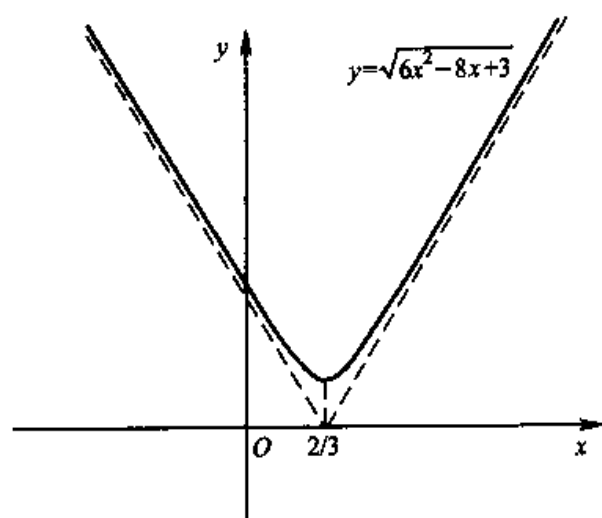
x	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
y'	-	0	+
y''	+	+	+
y	↖	极小值 $\frac{1}{\sqrt{3}}$	↗

渐近线为 $y = \sqrt{6}x - \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 和 $y = -\sqrt{6}x + \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

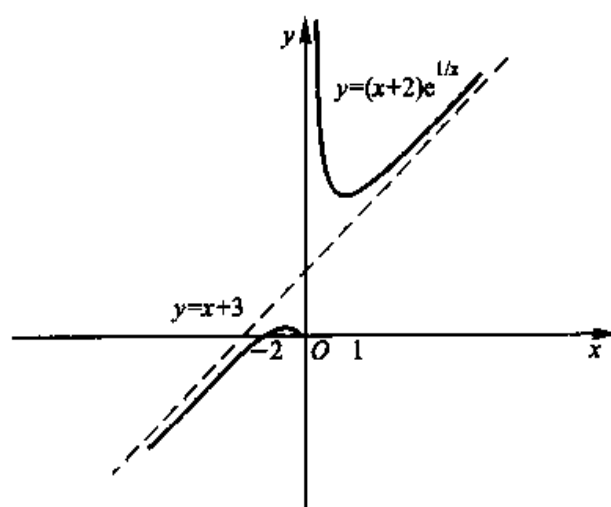
$$(4) y = (2+x)e^{\frac{1}{x}}, y' = \frac{x^2-x-2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, y'' = \frac{5x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}.$$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -\frac{2}{5})$	$-\frac{2}{5}$	$(-\frac{2}{5}, 0)$	0	(0,2)	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	-	-	-	无定义	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	无定义	+	+	+
y	↖	极大值 e^{-1}	↗	拐点 $(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$	↖	无定义	↖	极小值 $4e^{\frac{1}{2}}$	↗

渐近线为 $y = x + 3$ 和 $x = 0$.



第 8 题图 3



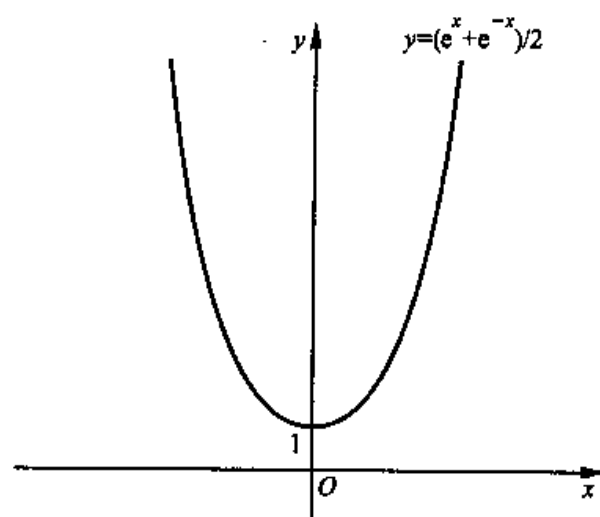
第 8 题图 4

(5) 由于 y 为偶函数, 只要考虑 $x > 0$ 情况.

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, y'' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	-	1	+
y''	+	+	+
y	ζ	极小值 1	η

无渐近线.

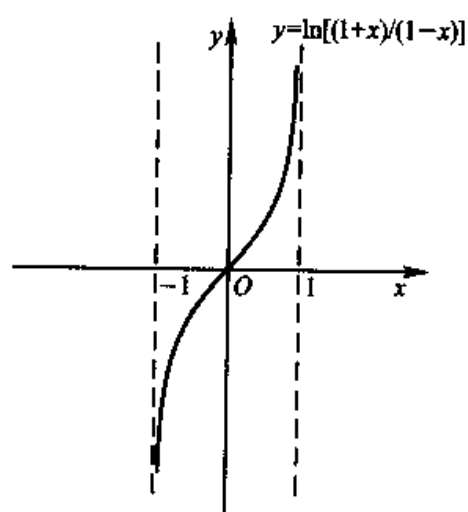


第 8 题图 5

$$(6) \ y = \ln \frac{1+x}{1-x}, y' = \frac{2}{1-x^2}, y'' = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

x	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$
y'	$+$	2	$+$
y''	$-$	0	$+$
y	ζ	拐点 $(0, 0)$	γ

$x = \pm 1$ 为两条垂直渐近线.

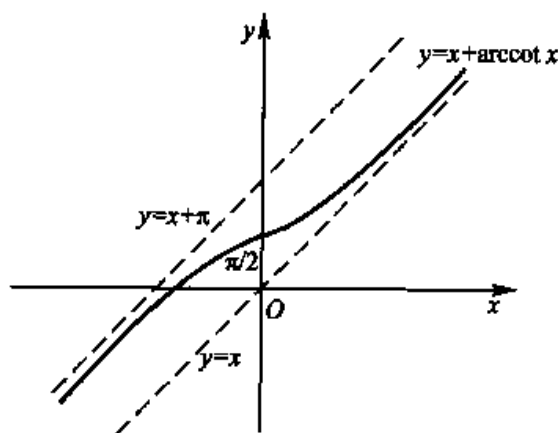


第 8 题图 6

$$(7) y = x + \operatorname{arccot} x, y' = \frac{x^2}{1+x^2}, y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	+
y''	-	+	+
y	↗	拐点 $(0, \frac{\pi}{2})$	↗

渐近线为 $y = x$ 和 $y = x + \pi$.



第8题图7

$$(8) y = \sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}, y' = \frac{x-1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}, y'' = \frac{-2}{(x-2)^{\frac{5}{3}}(x+1)^{\frac{4}{3}}}.$$

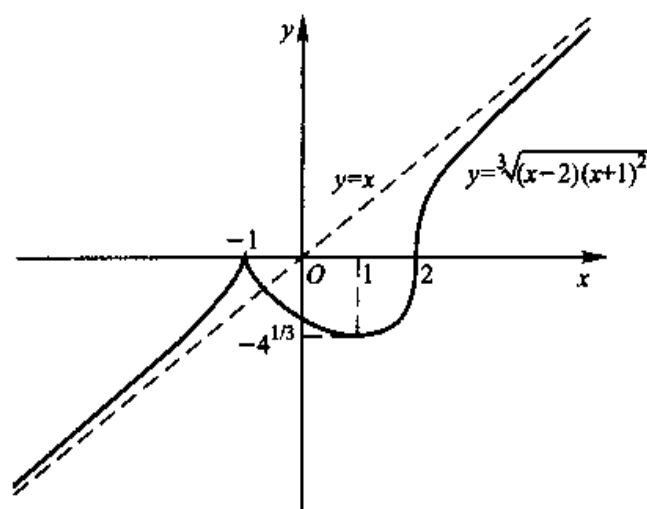
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	不存在	-	0	+	不存在	+
y''	+	不存在	+	$2^{-\frac{1}{3}}$	+	不存在	-
y	↗	极大值 0	↘	极小值 $-\sqrt[3]{4}$	↗	拐点(2, 0)	↗

渐近线为 $y = x$.

$$(9) y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ 是偶函数. } y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{2\operatorname{sgn}(x)}{1+x^2},$$

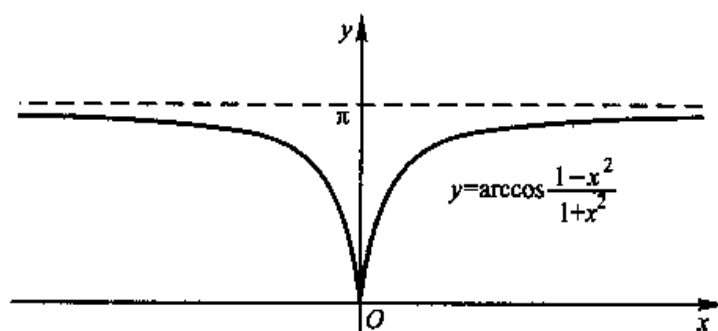
$$y'' = -\frac{4x\operatorname{sgn}(x)}{(1+x^2)^2}.$$



第 8 题图 8

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	-	不存在	+
y''	-	不存在	-
y	\searrow	极小值 0	\nearrow

渐近线为 $y = \pi$.



第 8 题图 9

9. 求下列数列的最大项:

- (1) $\left\{ \frac{n^{10}}{2^n} \right\};$ (2) $\{ \sqrt[n]{n} \}.$

解 (1) 令 $f(x) = \frac{x^{10}}{2^x}$, 则 $f'(x) = \frac{x^9}{2^x}(10 - \ln 2 \cdot x)$, $f(x)$ 的极大值点为 $\frac{10}{\ln 2} \approx 14.4$, 且 $f(14) - f(15) \approx 56\,730 > 0$, 所以最大项对应 $n = 14$.

(2) 令 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, 则 $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \frac{(1 - \ln x)}{x^2}$, 极大值点为 $x = e$, 而 $f(2) - f(3) < 0$, 所以最大项对应 $n = 3$.

10. 设 a, b 为实数, 证明

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

证 对于函数 $y = \frac{x}{1+x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$, 函数 y 单调增加, 所以

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

11. 设 $a > \ln 2 - 1$ 为常数, 证明当 $x > 0$ 时,

$$x^2 - 2ax + 1 < e^x.$$

证 令 $f(x) = e^x - (x^2 - 2ax + 1)$, 则

$$f'(x) = e^x - 2x + 2a, f''(x) = e^x - 2.$$

由于在 $(0, \ln 2)$ 上 $f''(x) < 0$, $f'(x)$ 在 $[0, \ln 2]$ 上严格单调减少; 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上 $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 在 $[\ln 2, +\infty)$ 上严格单调增加. 所以 $x = \ln 2$ 为 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值点. 由于 $f'(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 + 2a > 0$, 所以 $f'(x) > 0$. $\forall x > 0$, 再由 $f(0) = 0$, 得到 $f(x) > 0, \forall x > 0$.

12. 设 $k > 0$, 试问当 k 为何值时, 方程 $\arctan x - kx = 0$ 有正实根?

解 令 $f(x) = \arctan x - kx$, 则

$$f(0) = 0, f(+\infty) = -\infty, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - k.$$

当 $k \geq 1$ 时, $f'(x) < 0$ ($x \neq 0$), 所以 $f(x)$ 严格单调减少, 由 $f(0) = 0$ 可知方程无正实根; 当 $0 < k < 1$ 时, $f'(0) > 0$, 所以当 $x > 0$ 很小时 $f(x) > 0$, 由连续函数



的零点存在定理,可知方程必有正实根.

13. 对 a 作了 n 次测量后获得了 n 个近似值 $\{a_k\}_{k=1}^n$, 现在要取使得

$$s = \sum_{k=1}^n (a_k - \xi)^2$$

达到最小的 ξ 作为 a 的近似值, ξ 应如何取?

解 由

$$\frac{ds}{d\xi} = \sum_{k=1}^n -2(a_k - \xi) = -2\left(\sum_{k=1}^n a_k - n\xi\right) = 0,$$

可得 $\xi = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$, 这就是使 s 达到最小的 a 的近似值.

14. 证明: 对于给定了体积的圆柱体, 当它的高与底面的直径相等的时候表面积最小.

证 设圆柱体的底面半径为 r , 高为 h , 则圆柱体的体积 $V = \pi r^2 h$, 其表面积为

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi r}\right),$$

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left(2r - \frac{V}{\pi r^2}\right) = 0.$$

求解上述方程, 得到

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r,$$

此时圆柱体的表面积最小.

15. 在底为 a 高为 h 的三角形中作内接矩形, 矩形的一条边与三角形的底边重合, 求此矩形的最大面积?

解 设矩形的底边(与三角形底边重合者)长为 x , 宽为 y , 由

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h},$$

可知矩形面积为

$$S = xy = \frac{a}{h}(h-y)y,$$

$$\frac{dS}{dy} = \frac{a}{h}(h-2y) = 0,$$

解得

$$y = \frac{h}{2}, x = \frac{a}{2},$$

所以当 $y = \frac{h}{2}, x = \frac{a}{2}$ 时, 矩形面积最大, 最大面积为 $S = \frac{ah}{4}$.

16. 求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 边与椭圆的轴平行的面积最大的矩形.

解 设矩形的长与宽分别为 $2x$ 与 $2y$, 则 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 矩形的面积为

$$S = 4xy = \frac{4bx \sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{4b}{a} \left(\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) = 0,$$

解得 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}, y = \frac{b}{\sqrt{2}}$, 所以当矩形的边长分别为 $\sqrt{2}a$ 与 $\sqrt{2}b$ 时, 内接矩形的面积最大.

17. 将一块半径为 r 的圆铁片剪去一个圆心角为 θ 的扇形后做成一个漏斗, 问 θ 为何值时漏斗的容积最大?

解 可以求得漏斗的底面半径为 $\frac{(2\pi - \theta)r}{2\pi}$, 高度为

$$\sqrt{r^2 - \left[\frac{(2\pi - \theta)r}{2\pi} \right]^2} = \frac{r}{2\pi} \sqrt{4\pi\theta - \theta^2},$$

所以漏斗的容积为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \left[\frac{(2\pi - \theta)r}{2\pi} \right]^2 \cdot \frac{r}{2\pi} \sqrt{4\pi\theta - \theta^2} \\ &= \frac{r^3}{24\pi^2} (2\pi - \theta)^2 \sqrt{4\pi\theta - \theta^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{r^3(2\pi - \theta)}{24\pi^2 \sqrt{4\pi\theta - \theta^2}} (3\theta^2 - 12\pi\theta + 4\pi^2) = 0,$$

上式关于 θ 在 $(0, 2\pi)$ 中有惟一解

$$\theta = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right),$$

这就是使漏斗容积最大的角度 θ .

18. 要做一个容积为 V 的有盖的圆柱体容器, 上下两个底面的材料价格为每单位面积 a 元, 侧面的材料价格为每单位面积 b 元, 问直径与高的比例是多



少时造价最省?

解 设圆柱体容器的底面直径为 D , 高为 H . 则容积 $V = \frac{1}{4}\pi D^2 H$, 造价为

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{4}\pi D^2 a + \pi DHb \\ &= \frac{1}{2}\pi D^2 a + \frac{4Vb}{D}, \\ \frac{dP}{dD} &= \pi Da - \frac{4Vb}{D^2} = 0, \end{aligned}$$

解得

$$D = \sqrt[3]{\frac{4Vb}{\pi a}}, H = \frac{4V}{\pi D^2},$$

这时 $\frac{D}{H} = \frac{\pi D^3}{4V} = \frac{b}{a}$, 所以, 当直径与高的比例为 $\frac{b}{a}$ 时造价最省.

19. 要建造一个变电站 M 向 A 、 B 两地送电(原教材图 5.5.6), M 与 A 之间的电缆每千米 a 元, 与 B 之间的电缆每千米 b 元, 为使总投资最小, 问变电站 M 的位置应满足什么性质?

解 设 C 与 M 之间距离为 x , 则

$$\begin{aligned} |AM| &= \sqrt{x^2 + 1.2^2}, \\ |BM| &= \sqrt{(3.2 - x)^2 + 1.8^2}, \end{aligned}$$

变电站所用电缆的总投资为

$$\begin{aligned} P &= a|AM| + b|BM| \\ &= a\sqrt{1.44 + x^2} + b\sqrt{3.24 + (3.2 - x)^2}, \end{aligned}$$

由

$$\frac{dP}{dx} = \frac{ax}{|AM|} - \frac{b(3.2 - x)}{|BM|} = 0,$$

得到

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\frac{|CM|}{|AM|}}{\frac{|DM|}{|BM|}} = \frac{b}{a},$$

这就是变电站 M 的位置应满足的性质.

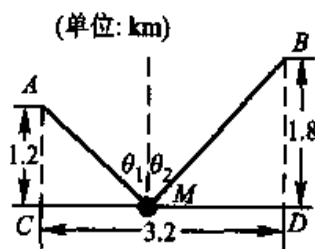


图 5.5.6

§ 6

方程的近似求解

计算实习题

(在教师的指导下,编制程序在计算机上实际计算)

说明 有很多计算机程序设计语言可以用来完成计算实习,例如 FORTRAN, C, PASCAL 语言等,而一些数学软件如 Mathematica, Maple, MATLAB 等更适合完成相应的计算.本书采用数学软件 MATLAB 来解数学实习题,习题解答包括主程序、程序调用命令和程序执行结果三个部分.

1. 用两分法求下列方程的一个近似解(精确到小数点后第 6 位):

(1) $x^3 + 3x - 5 = 0, x^* \in [1, 2];$

(2) $x = e^{-x}, x^* \in \left[\frac{1}{2}, \ln 2\right];$

(3) $x^2 = \cos x, x^* \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right];$

(4) $7x^2 - 3x + \frac{4}{x} - 30 = 0, x^* \in [2, 2.5].$

解 两分法主程序(bisect.m)

```
function res = bisect(f,a,b,delta)
% function res = bisect(f,a,b,delta)
% 输入
% f 已知函数,a,b 初始区间端点,delta 误差
% 输出
% 第一列迭代次数,第二列近似解,第三列函数值,第四列误差,
res = [];
ya = feval(f,a);
yb = feval(f,b);
if ya * yb > 0
    error('两个端点的函数值必须异号,否则本方法无效');
    break
end
max1 = 1 + round((log(b-a) - log(delta))/log(2));
for k = 1:max1
    c = (a+b)/2;
```

```

        yc = feval(f,c);
        if yc == 0
            a = c;
            b = c;
        elseif yb * yc > 0
            b = c;
            yb = yc;
        else
            a = c;
            ya = yc;
        end
        res = [res;k,c,yc,b-a];
        if b-a < delta, break; end
    end
    %显示结果
    fprintf(1,'迭代次数 = %u, 近似解 x = %3.15f, 函数值 y = %e, 误差 e = %e.',
[k,c,yc,b-a])
    %程序结束

```

程序调用命令和结果

(1) 命令:

```

f = inline('x^3 + 3 * x - 5','x');
bisect(f,1,2,.5e-6);

```

计算结果:

迭代次数 = 21, 近似解 $x = 1.154171466827393$, 函数值 $y = -1.983744e-007$, 误差 $e = 4.768372e-007$.

(2) 命令:

```

f = inline('x - exp(-x)','x');
bisect(f,0.5,log(2),.5e-6);

```

计算结果:

迭代次数 = 19, 近似解 $x = 0.567143298506382$, 函数值 $y = 1.268853e-008$, 误差 $e = 3.683990e-007$.

(3) 命令:

```

f = inline('x^2 - cos(x)','x');
bisect(f,pi/4,3 * pi/4,.5e-6);

```


计算结果:

迭代次数 = 22, 近似解 $x = 0.824132301812646$, 函数值 $y = -2.498923e-008$, 误差 $e = 3.745070e-007$.

(4) 命令:

```
f = inline('7 * x^2 - 3 * x + 4/x - 30', 'x');
```

```
bisect(f, 2, 2.5, .5e-6);
```

计算结果:

迭代次数 = 20, 近似解 $x = 2.233133792877197$, 函数值 $y = 9.193551e-006$, 误差 $e = 4.768372e-007$.

2. 用 Newton 法求下列方程的近似解(精确到小数点后第 10 位):

$$(1) x^3 - x + 4 = 0; \quad (2) x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x \quad (x > 1);$$

$$(3) x \lg x = 1; \quad (4) x + e^x = 0;$$

$$(5) \frac{x}{2} = \sin x, \quad (x > 0).$$

解 Newton 法主程序(Newton.m)

```
function res = newton(f, df, a, tor, ma)
```

```
% 输入
```

```
% f 是输入函数, df 是 f 的导函数, a 是初值, tor 是精度, ma 是最大迭代次数
```

```
% 输出
```

```
% a 近似解, err 误差估计, k 迭代次数, y 函数值
```

```
y = feval(f, a);
```

```
for k = 1:ma
```

```
    b = a - y/feval(df, a);
```

```
    err = abs(b - a);
```

```
    a = b;
```

```
    y = feval(f, a);
```

```
    if(err < tor) break; end
```

```
end
```

```
res = [k, a, y, err];
```

```
% 显示结果
```

```
fprintf(1, '迭代次数 = %u, 近似解 x = %3.15f, 函数值 y = %e, 误差 e = %e.',  
[k, a, y, err])
```

```
% 程序结束
```

调用命令和结果

(1) 方程只有一个根, 在 -1 附近.

命令:

```
f=inline('x^3-x+4','x');
df=inline('3*x^2-1','x');
newton(f,df,-1,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数 = 7, 近似解 $x = -1.796321903259442$, 函数值 $y = 0.000000e+000$, 误差 $e = 7.091105e-011$.

(2) 方程在 $(1, +\infty)$ 只有一个根, 在 10 附近.

命令:

```
f=inline('x^2+x*(-2)-10*x','x');
df=inline('2*x-2*x*(-3)-10','x');
newton(f,df,10,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数 = 3, 近似解 $x = 9.998999699849911$, 函数值 $y = 1.421085e-014$, 误差 $e = 1.776357e-015$.

(3) 方程只有一个根, 在 2 附近.

命令:

```
f=inline('x*log10(x)-1','x');
df=inline('log10(x)+1/log(10)','x');
newton(f,df,2,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数 = 5, 近似解 $x = 2.506184145588769$, 函数值 $y = 0.000000e+000$, 误差 $e = 0.000000e+000$.

(4) 方程只有一个根, 在 0 附近.

命令:

```
f=inline('x+exp(x)','x');
df=inline('1+exp(x)','x');
newton(f,df,0,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数 = 5, 近似解 $x = -0.567143290409784$, 函数值 $y = 1.110223e-016$, 误差 $e = 2.886580e-015$.

(5) 方程在 $(0, +\infty)$ 只有一个根, 在 1 附近.

命令:

```
f = inline('x/2 - sin(x)', 'x');
df = inline('1/2 - cos(x)', 'x');
newton(f, df, 1, 1e-10, 30);
```

计算结果:

迭代次数 = 14, 近似解 $x = 1.895494267033981$, 函数值 $y = 0.000000$
 $e + 000$, 误差 $e = 5.195844e - 014$.

3. 仿照例 5.6.2, 用 Newton 法导出计算机上求 $A^{\frac{1}{n}}$ ($A > 0, n$ 为非零整数) 和 $\frac{1}{A}$ 的算法 (即只用加、减、乘三种运算的算法), 并实际计算下列各值:

- (1) $\sqrt[3]{2}$; (2) $\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$;
 (3) $\frac{1}{7}$; (4) $\frac{1}{11}$.

解 设 $f(x) = x^n - A, f'(x) = nx^{n-1}$, 迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - A}{nx_k^{n-1}} = \frac{n-1}{n}x_k + \frac{A}{nx_k^{n-1}};$$

特别, 当 $n = -1$ 时, 有 $x_{k+1} = 2x_k - Ax_k^2, f(x) = x^n - A, f'(x) = nx^{n-1}$.

开 n 次方的 Newton 法程序代码 (Newton1.m)

```
function res = newton1(n, A, tor, ma)
% 输入
% n, A 是输入参数, tor 是精度, ma 是最大迭代次数
% 输出
% a 近似解, err 误差估计, k 迭代次数, y 函数值
a = 1;
for k = 1:ma
    b = (n-1)/n * a + A/n/a^(n-1);
    err = abs(b - a);
    if(err < tor) break; end
    a = b;
end
res = [k, a, err];
% 显示结果
fprintf(1, '迭代次数 = %u, 近似解 b = %2.10e, 误差 e = %e.', [k, b, err])
% 程序结束
```

求倒数的 Newton 法程序代码(Newton2.m)

```
function res=newton2(A,tor,ma)
% 输入
% A 是输入参数,tor 是精度,ma 是最大迭代次数
% 输出
% a 近似解,err 误差估计,k 迭代次数,y 函数值
a=1;
for k=1:ma
    b=2 * a + A * a^2;
    err=abs(b-a);
    if(err<tor)break,end
    a=b;
end
res=[k,a,err];
% 显示结果
fprintf(1,'迭代次数=%u,近似解 b=%2.10e,误差 e=%e',[k,b,err])
% 程序结束
```

(1) $n=3, A=2$. 使用命令:

```
newton1(3,2,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数=6, 近似解 $b=1.2599210499e+000$, 误差 $e=2.220446e-016$.

(2) $n=-5, A=9$. 使用命令:

```
newton1(-5,9,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数=7, 近似解 $b=6.4439401498e-001$, 误差 $e=0.000000e+000$.

(3) 7 的倒数. 使用命令:

```
newton2(7,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数=6, 近似解 $b=1.4285714286e-001$, 误差 $e=0.000000e+000$.

(4) 11 的倒数. 使用命令:

```
newton2(11,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数=5, 近似解 $b=9.0909090909e-002$, 误差 $e=$

0.000000e+000.

4. 当 $\varepsilon = 0.2$ 时, 计算 Kepler 方程

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

对应于 $x = \frac{k}{8}$ ($k = 1, 2, \dots, 8$) 的 y 的近似值.

解 $k = 1$ 时, 计算命令:

```
g = inline('y - 1/8 - 0.2 * sin(y)', 'y');
```

```
dg = inline('1 - 0.2 * cos(y)', 'y');
```

```
newton(g, dg, 0, eps, 30);
```

计算结果:

迭代次数 = 4, 近似解 $x = 0.156091729726963$, 函数值 $y = -6.938894e-018$, 误差 $e = 0.000000e+000$.

$k = 2$ 时, 计算命令:

```
g = inline('y - 1/4 - 0.2 * sin(y)', 'y');
```

```
newton(g, dg, 0, eps, 30);
```

计算结果:

迭代次数 = 4, 近似解 $x = 0.311249707209228$, 函数值 $y = 2.081668e-017$, 误差 $e = 1.110223e-016$.

$k = 3$ 时, 计算命令:

```
g = inline('y - 3/8 - 0.2 * sin(y)', 'y');
```

```
newton(g, dg, 0, eps, 30);
```

计算结果:

迭代次数 = 5, 近似解 $x = 0.464615888191004$, 函数值 $y = 0.000000e+000$, 误差 $e = 0.000000e+000$.

$k = 4$ 时, 计算命令:

```
g = inline('y - 4/8 - 0.2 * sin(y)', 'y');
```

```
newton(g, dg, 0, eps, 30);
```

计算结果:

迭代次数 = 5, 近似解 $x = 0.615468169489965$, 函数值 $y = 1.387779e-017$, 误差 $e = 0.000000e+000$.

$k = 5$ 时, 计算命令:

```
g = inline('y - 5/8 - 0.2 * sin(y)', 'y');
```

```
newton(g, dg, 0, eps, 30);
```

计算结果:



迭代次数 = 5, 近似解 $x = 0.763255498570944$, 函数值 $y = 2.775558e - 017$, 误差 $e = 0.000000e + 000$.

$k = 6$ 时, 计算命令:

```
g = inline('y - 6/8 - 0.2 * sin(y)', 'y');
```

```
newton(g, dg, 0, eps, 30);
```

计算结果:

迭代次数 = 5, 近似解 $x = 0.907606495249268$, 函数值 $y = 0.000000e + 000$, 误差 $e = 0.000000e + 000$.

$k = 7$ 时, 计算命令:

```
g = inline('y - 7/8 - 0.2 * sin(y)', 'y');
```

```
newton(g, dg, 0, eps, 30);
```

计算结果:

迭代次数 = 5, 近似解 $x = 1.048316907893773$, 函数值 $y = 0.000000e + 000$, 误差 $e = 0.000000e + 000$.

$k = 8$ 时, 计算命令:

```
g = inline('y - 8/8 - 0.2 * sin(y)', 'y');
```

```
newton(g, dg, 0, eps, 30);
```

计算结果:

迭代次数 = 5, 近似解 $x = 1.185324203861339$, 函数值 $y = -2.775558e - 017$, 误差 $e = 0.000000e + 000$.

5. 求方程

$$\tan x = x$$

的最小的三个正根, 精确到 10^{-12} .

解 首先粗略估计三个正根为 4.4, 7.6 和 10.9. 再定义函数

```
f = inline('tan(x) - x', 'x');
```

```
df = inline('(sec(x))^2 - 1', 'x');
```

计算第一个根的命令:

```
newton(f, df, 4.4, 1e - 12, 30);
```

计算结果:

迭代次数 = 7, 近似解 $x = 4.493409457909064$, 函数值 $y = 8.881784e - 016$, 误差 $e = 0.000000e + 000$.

计算第二个根的命令:

```
newton(f, df, 7.6, 1e - 12, 30);
```

计算结果:

迭代次数 = 14, 近似解 $x = 7.725251836937707$, 函数值 $y = -2.309264e-014$, 误差 $e = 0.000000e+000$.

计算第三个根的命令:

```
newton(f,df,10.9,1e-12,30);
```

计算结果:

迭代次数 = 5, 近似解 $x = 10.904121659428899$, 函数值 $y = -9.947598e-014$, 误差 $e = 0.000000e+000$.

6. 求方程

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

的两个正根, 精确到 10^{-12} .

解 显然, 方程有无穷多个正根, 粗略估计两个最小的正根为 2 和 6. 使用命令

```
f = inline('cot(x) - 1/x + x/2','x');
```

```
df = inline('-(csc(x))^2 + 1/x^2 + 1/2','x');
```

计算第一个正根:

```
newton(f,df,2,1e-12,30);
```

计算结果:

迭代次数 = 5, 近似解 $x = 2.08157597781810$, 函数值 $y = 0$, 误差 $e = 0$.

计算第二个正根:

```
newton(f,df,6,1e-12,30);
```

计算结果:

迭代次数 = 5, 近似解 $x = 5.94036999057271$, 函数值 $y = 0$, 误差 $e = 0.31e-12$.

第六章 不定积分

§ 1

不定积分的概念和运算法则

1. 求下列不定积分:

$$(1) \int (x^3 + 2x^2 - 5\sqrt{x}) dx;$$

$$(2) \int (\sin x + 3e^x) dx;$$

$$(3) \int (x^a + a^x) dx;$$

$$(4) \int (2 + \cot^2 x) dx;$$

$$(5) \int (2\csc^2 x - \sec x \tan x) dx;$$

$$(6) \int (x^2 - 2)^3 dx;$$

$$(7) \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx;$$

$$(8) \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) dx;$$

$$(9) \int \left(2^x + \frac{1}{3^x}\right)^2 dx;$$

$$(10) \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx;$$

$$(11) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$$

$$(12) \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx;$$

$$(13) \int (1-x^2)\sqrt{x}\sqrt{x} dx;$$

$$(14) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$$

解 (1) $\int (x^3 + 2x^2 - 5\sqrt{x}) dx = \int x^3 dx + 2 \int x^2 dx - 5 \int \sqrt{x} dx$
 $= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

$$(2) \int (\sin x + 3e^x) dx = \int \sin x dx + 3 \int e^x dx$$
$$= -\cos x + 3e^x + C.$$

$$(3) \int (x^a + a^x) dx = \int x^a dx + \int a^x dx$$
$$= \frac{1}{a+1}x^{a+1} + \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1).$$

$$(4) \int (2 + \cot^2 x) dx = \int (1 + \csc^2 x) dx = x - \cot x + C.$$

$$(5) \int (2\csc^2 x - \sec x \tan x) dx = 2 \int \csc^2 x dx - \int \sec x \tan x dx$$

$$= -2\cot x - \sec x + C.$$

$$\begin{aligned}(6) \int (x^2 - 2)^3 dx &= \int (x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8) dx \\ &= \frac{1}{7}x^7 - \frac{6}{5}x^5 + 4x^3 - 8x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(7) \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx &= \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8) \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) dx &= \int \left(2 + \frac{1}{\sqrt[6]{x^7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx \\ &= 2x - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(9) \int \left(2^x + \frac{1}{3^x}\right)^2 dx &= \int \left(4^x + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{1}{9^x}\right) dx \\ &= \frac{1}{\ln 4}4^x + \frac{2}{\ln 2 - \ln 3} \left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{1}{\ln 9} \frac{1}{9^x} + C.\end{aligned}$$

$$(10) \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx = \int 2 dx - 5 \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = 2x - \frac{5}{\ln 2 - \ln 3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + C.$$

$$(11) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C.$$

$$\begin{aligned}(12) \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx &= 2 \int \frac{dx}{1+x^2} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2\arctan x - 3\arcsin x + C.\end{aligned}$$

$$(13) \int (1-x^2)\sqrt{x}\sqrt{x} dx = \int (x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{11}{4}}) dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{15}x^{\frac{15}{4}} + C.$$

$$\begin{aligned}(14) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\ &= \int \csc^2 x dx - \int \sec^2 x dx \\ &= -\cot x - \tan x + C \\ &= -2\csc 2x + C.\end{aligned}$$

2. 曲线 $y=f(x)$ 经过点 $(e, -1)$, 且在任一点处的切线斜率为该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

解 由题意, 曲线 $y=f(x)$ 在点 (x, y) 处的切线斜率为 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, 于是 $y =$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, 将点 $(e, -1)$ 代入, 得 $C = -2$, 所以曲线的方程为 $y = \ln|x| - 2$.

3. 已知曲线 $y = f(x)$ 在任意一点 $(x, f(x))$ 处的切线斜率都比该点横坐标的立方根少 1,

- (1) 求出该曲线方程的所有可能形式, 并在直角坐标系中画出示意图;
- (2) 若已知该曲线经过 $(1, 1)$ 点, 求该曲线的方程.

解 (1) 由题意可得 $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x} - 1$, 所以 $y = \int (\sqrt[3]{x} - 1) dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - x + C$, 这就是所求曲线方程的所有可能形式.

(2) 将点 $(1, 1)$ 代入上述方程, 可得 $C = \frac{5}{4}$, 所以过点 $(1, 1)$ 的曲线方程为

$$y = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - x + \frac{5}{4}.$$

§2 换元积分法和分部积分法

1. 求下列不定积分:

- | | |
|--|--|
| (1) $\int \frac{dx}{4x-3};$ | (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}};$ |
| (3) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}};$ | (4) $\int e^{3x+2} dx;$ |
| (5) $\int (2^x + 3^x)^2 dx;$ | (6) $\int \frac{1}{2+5x^2} dx;$ |
| (7) $\int \sin^5 x dx;$ | (8) $\int \tan^{10} x \sec^2 x dx;$ |
| (9) $\int \sin 5x \cos 3x dx;$ | (10) $\int \cos^2 5x dx;$ |
| (11) $\int \frac{(2x+4)dx}{(x^2+4x+5)^2};$ | (12) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$ |
| (13) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{1-2x^3}};$ | (14) $\int \frac{1}{1-\sin x} dx;$ |
| (15) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx;$ | (16) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}};$ |
| (17) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2};$ | (18) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx;$ |

$$(19) \int \tan \sqrt{1+x^2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad (20) \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx.$$

解 (1) $\int \frac{dx}{4x-3} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x-3)}{4x-3} = \frac{1}{4} \ln|4x-3| + C.$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}x)}{\sqrt{1-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}x) + C.$$

$$(3) \int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{d(e^x)}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C.$$

$$(4) \int e^{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x+2} d(3x+2) = \frac{1}{3} e^{3x+2} + C.$$

$$(5) \int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (2^{2x} + 2 \cdot 6^x + 3^{2x}) dx \\ = \frac{1}{2 \ln 2} 2^{2x} + \frac{2}{\ln 6} 6^x + \frac{1}{2 \ln 3} 3^{2x} + C.$$

$$(6) \int \frac{1}{2+5x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{2+5x^2} d(\sqrt{5}x) \\ = \frac{1}{\sqrt{10}} \arctan \sqrt{\frac{5}{2}} x + C.$$

$$(7) \int \sin^5 x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx \\ = - \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d(\cos x) \\ = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

$$(8) \int \tan^{10} x \sec^2 x dx = \int \tan^{10} x d(\tan x) = \frac{1}{11} \tan^{11} x + C.$$

$$(9) \int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) dx \\ = -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

$$(10) \int \cos^2 5x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 10x) dx \\ = \frac{x}{2} + \frac{1}{20} \sin 10x + C.$$

$$(11) \int \frac{(2x+4)dx}{(x^2+4x+5)^2} = \int \frac{d(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+5)^2} = -\frac{1}{x^2+4x+5} + C.$$

$$(12) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sin \sqrt{x} d(\sqrt{x}) = -2 \cos \sqrt{x} + C.$$

$$(13) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{1-2x^3}} = -\frac{1}{6} \int \frac{d(1-2x^3)}{\sqrt[4]{1-2x^3}} = -\frac{2}{9} (1-2x^3)^{\frac{3}{4}} + C.$$

$$(14) \int \frac{1}{1-\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})} d(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$$

$$= -\cot(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) + C.$$

$$(15) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$$

$$= \frac{3}{2} (\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

$$(16) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$$

$$(17) \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \int \frac{d(x-1)}{1+(x-1)^2} = \arctan(x-1) + C.$$

$$(18) \int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{9-4x^2}} + \frac{1}{8} \int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} x + \frac{1}{4} \sqrt{9-4x^2} + C.$$

$$(19) \int \tan \sqrt{1+x^2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \tan \sqrt{1+x^2} d(\sqrt{1+x^2})$$

$$= -\ln |\cos \sqrt{1+x^2}| + C.$$

$$(20) \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x) + C.$$

2. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}};$$

$$(2) \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}};$$

$$(3) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$$

$$(4) \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx;$$

$$(5) \int (x-1)(x+2)^{20} dx;$$

$$(6) \int x^2(x+1)^n dx;$$

$$(7) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}};$$

$$(8) \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx;$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

$$(10) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}^3};$$

$$(11) \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx;$$

$$(12) \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx;$$

$$(13) \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}};$$

$$(14) \int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx;$$

$$(15) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}};$$

$$(16) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx;$$

$$(17) \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4} dx;$$

$$(18) \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}};$$

$$(19) \int \frac{x^{15}}{(x^4-1)^3} dx;$$

$$(20) \int \frac{1}{x(x^n+1)} dx.$$

解 (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}) + C$
 $= \ln(\sqrt{1+e^{2x}} - 1) - x + C.$

(2) 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^{-2}+1}} = - \int \frac{d(x^{-1})}{\sqrt{1+x^{-2}}} \\ &= -\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\right) + C = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C; \end{aligned}$$

当 $x < 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}} = \int \frac{d(-x)}{-x \sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{-x} + C,$$

故

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{|x|} + C.$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx &= 2 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{1+x} d(\sqrt{x}) = 2 \int \arctan \sqrt{x} d(\arctan \sqrt{x}) \\ &= \arctan^2 \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx = \int \frac{d(x \ln x)}{(x \ln x)^2} = -\frac{1}{x \ln x} + C.$$

$$\begin{aligned} (5) \int (x-1)(x+2)^{20} dx &= \int [(x+2)^{21} - 3(x+2)^{20}] dx \\ &= \frac{1}{22}(x+2)^{22} - \frac{3}{7}(x+2)^{21} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int x^2(x+1)^n dx &= \int [(x+1)^{n+2} - 2(x+1)^{n+1} + (x+1)^n] dx \\ &= \frac{1}{n+3}(x+1)^{n+3} - \frac{2}{n+2}(x+1)^{n+2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1} + C.$$

(7) 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{1+x^{-2}}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(x^{-2}+1-1)d(x^{-2})}{\sqrt{1+x^{-2}}} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C; \end{aligned}$$

当 $x < 0$ 时, 也有相同结果.

注 本题也可令 $x = \tan t$ 化简后解得.

(8) 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx &= \int \frac{x^2-9}{x \sqrt{x^2-9}} dx = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-9}} + 3 \int \frac{d(3x^{-1})}{\sqrt{1-9x^{-2}}} \\ &= \sqrt{x^2-9} + 3 \arcsin \frac{3}{x} + C; \end{aligned}$$

当 $x < 0$ 时, 也有相同结果.

注 本题也可令 $x = 3 \sec t$ 化简后解得.

(9) 令 $x = \sin t$, 则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int \sec^2 t dt = \tan t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

(10) 令 $x = a \tan t$, 则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \int \frac{\cos t}{a^2} dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

$$(11) \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx = \int \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C.$$

$$\begin{aligned} (12) \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} dx \\ &= - \int \sqrt{2ax-x^2} dx + \int \frac{2ax}{\sqrt{2ax-x^2}} dx \\ &= - \int \sqrt{2ax-x^2} dx - a \int \frac{d(2ax-x^2)}{\sqrt{2ax-x^2}} \\ &\quad + 2a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \\ &= -\frac{x-a}{2} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{3}{2} a^2 \arcsin \frac{x-a}{a} \\ &\quad - 2a \sqrt{2ax-x^2} + C \end{aligned}$$

$$= -\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{3}{2}a^2 \arcsin \frac{x-a}{a} + C.$$

注 本题答案也可写成 $-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} + C$.

(13) 令 $t = \sqrt{2x}$, 则 $x = \frac{1}{2}t^2$, $dx = t dt$, 于是

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}} = \int \frac{t dt}{1+t} = t - \ln|1+t| + C = \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C.$$

(14) 令 $t = \sqrt[3]{1-x}$, 则 $x = 1-t^3$, $dx = -3t^2 dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx &= -3 \int (1-t^3)^2 t^3 dt = -3 \int (t^3 - 2t^6 + t^9) dt \\ &= -\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10}(1-x)^{\frac{10}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$(15) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}} = -\int \frac{d(x^{-1})}{\sqrt{1-x^{-2}}} = \arccos \frac{1}{x} + C.$$

(16) 令 $x = a \sin t$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= \int a^2 \sin^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 - \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} t - \frac{a^2}{4} \sin 2t + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + C. \end{aligned}$$

(17) 令 $x = a \cos t$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4} dx &= -\frac{1}{a^2} \int \frac{\sin^2 t}{\cos^4 t} dt = -\frac{1}{a^2} \int \tan^2 t d(\tan t) \\ &= -\frac{1}{3a^2} \tan^3 t + C = -\frac{1}{3a^2} \cdot \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (18) \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{(1-\sqrt{1-x^2})dx}{x^2} = -\frac{1}{x} - \int \frac{1-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^{-2})}{\sqrt{x^{-2}-1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} + \arcsin x + C. \end{aligned}$$

注 本题也可令 $x = \sin t$ 后, 解得

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \tan\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) + C.$$

(19) 令 $t = x^4 - 1$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{15}}{(x^4-1)^3} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{x^{12}}{(x^4-1)^3} d(x^4) = \frac{1}{4} \int \frac{(t+1)^3}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 + \frac{3}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{4} t + \frac{3}{4} \ln|t| - \frac{3}{4t} - \frac{1}{8t^2} + C \\ &= \frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{4} \ln|x^4-1| - \frac{3}{4(x^4-1)} - \frac{1}{8(x^4-1)^2} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(20) \int \frac{1}{x(x^n+1)} dx &= \int \frac{1}{x^{n+1}(1+x^{-n})} dx = -\frac{1}{n} \int \frac{d(x^{-n})}{1+x^{-n}} \\ &= -\frac{1}{n} \ln|1+x^{-n}| + C = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| + C.\end{aligned}$$

3. 求下列不定积分:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| (1) $\int x e^{2x} dx;$ | (2) $\int x \ln(x-1) dx;$ |
| (3) $\int x^2 \sin 3x dx;$ | (4) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx;$ |
| (5) $\int x \cos^2 x dx;$ | (6) $\int \arcsin x dx;$ |
| (7) $\int \arctan x dx;$ | (8) $\int x^2 \arctan x dx;$ |
| (9) $\int x \tan^2 x dx;$ | (10) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx;$ |
| (11) $\int \ln^2 x dx;$ | (12) $\int x^2 \ln x dx;$ |
| (13) $\int e^{-x} \sin 5x dx;$ | (14) $\int e^x \sin^2 x dx;$ |
| (15) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx;$ | (16) $\int \cos(\ln x) dx;$ |
| (17) $\int (\arcsin x)^2 dx;$ | (18) $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx;$ |
| (19) $\int e^{\sqrt{x+1}} dx;$ | (20) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$ |

解 (1) $\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2x-1) + C.$

$$\begin{aligned}(2) \int x \ln(x-1) dx &= \frac{1}{2} x^2 \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x-1} dx \\ &= \frac{1}{2} (x^2-1) \ln(x-1) - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int x^2 \sin 3x dx &= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \int x \cos 3x dx \\
 &= \frac{1}{9}(2x \sin 3x - 3x^2 \cos 3x) - \frac{2}{9} \int \sin 3x dx \\
 &= \frac{2}{9}x \sin 3x - \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}\right) \cos 3x + C.
 \end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cot x + \int \cot x dx = -x \cot x + \ln |\sin x| + C.$$

$$\begin{aligned}
 (5) \int x \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int x(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{4}(x^2 + x \sin 2x) - \frac{1}{4} \int \sin 2x dx \\
 &= \frac{1}{4}(x^2 + x \sin 2x) + \frac{1}{8} \cos 2x + C.
 \end{aligned}$$

$$(6) \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$(7) \int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$\begin{aligned}
 (8) \int x^2 \arctan x dx &= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3} \int \frac{x dx}{1+x^2} \\
 &= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \int x \tan^2 x dx &= \int x(\sec^2 x - 1) dx = x \tan x - \frac{1}{2}x^2 - \int \tan x dx \\
 &= x \tan x - \frac{1}{2}x^2 + \ln |\cos x| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx &= -2 \int \arcsin x d(\sqrt{1-x}) \\
 &= -2 \sqrt{1-x} \arcsin x + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \\
 &= -2 \sqrt{1-x} \arcsin x + 4 \sqrt{1+x} + C.
 \end{aligned}$$

$$(11) \int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

$$(12) \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

$$\begin{aligned}
 (13) \int e^{-x} \sin 5x dx &= -e^{-x} \sin 5x + 5 \int e^{-x} \cos 5x dx \\
 &= -e^{-x}(\sin 5x + 5 \cos 5x) - 25 \int e^{-x} \sin 5x dx,
 \end{aligned}$$

所以

$$\int e^{-x} \sin 5x dx = -\frac{1}{26} e^{-x} (\sin 5x + 5 \cos 5x) + C.$$

$$(14) \int e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int e^x dx - \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx.$$

$$\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x) - 4 \int e^x \cos 2x dx,$$

从而

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C,$$

所以

$$\int e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{10} e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C.$$

$$\begin{aligned} (15) \int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx &= -\frac{\ln^3 x}{x} + 3 \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{\ln^3 x + 3 \ln^2 x}{x} + 6 \int \frac{\ln x}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x}{x} + 6 \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6}{x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (16) \int \cos(\ln x) dx &= x \cos(\ln x) + \int x \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx \\ &= x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] - \int \cos(\ln x) dx, \end{aligned}$$

所以

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{1}{2} x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$$

注 若令 $t = \ln x$, 则可看出本题与第(13)题本质上是同一种类型题.

$$\begin{aligned} (17) \int (\arcsin x)^2 dx &= x (\arcsin x)^2 - 2 \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx \\ &= x (\arcsin x)^2 + 2 \int \arcsin x d(\sqrt{1-x^2}) \\ &= x (\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C. \end{aligned}$$

(18) 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, 于是

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int t e^t t dt = 2e^t t^2 - 4 \int t e^t dt = 2e^t (t^2 - 2t) + 4 \int e^t dt \\ &= 2e^t (t^2 - 2t + 2) + C = 2e^{\sqrt{x}} (x - 2\sqrt{x} + 2) + C. \end{aligned}$$

(19) 令 $t = \sqrt{x+1}$, 则 $x = t^2 - 1$, 于是

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x+1}} dx &= 2 \int e^t t dt = 2te^t - 2 \int e^t dt = 2e^t(t-1) + C \\ &= 2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}-1) + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(20) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.\end{aligned}$$

4. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{1+x \sin x}$, 求 $\int f(x) f'(x) dx$.

解 由题意

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{1+x \sin x} \right)' = \frac{\cos x - \sin^2 x}{(1+x \sin x)^2},$$

于是

$$\begin{aligned}\int f(x) f'(x) dx &= \int f(x) d(f(x)) = \frac{1}{2} f^2(x) + C \\ &= \frac{(\cos x - \sin^2 x)^2}{2(1+x \sin x)^4} + C.\end{aligned}$$

5. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$, 求 $f(x)$.

解 设 $t = \sin^2 x$, 则

$$f'(t) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 - 2t + \frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t} - 2t,$$

从而

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{1}{1-x} - 2x \right) dx = -\ln|1-x| - x^2 + C.$$

6. 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x) dx$.

解 令 $t = \ln x$, 则 $x = e^t$, $f(t) = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$, 于是

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx = - \int \ln(1+e^x) d(e^{-x}) \\ &= - \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \int e^{-x} \frac{e^x}{1+e^x} dx \\ &= - \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} - \int \frac{1}{e^{-x}+1} d(e^{-x}) \\ &= - \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} - \ln(e^{-x}+1) + C\end{aligned}$$

$$= -(e^{-x} + 1)\ln(1 + e^x) + x + C.$$

7. 求不定积分 $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ 与 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

解 记 $I_1 = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$, $I_2 = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, 则

$$I_1 + I_2 = \int dx = x + C_1,$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x| + C_2,$$

于是

$$I_1 = \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|) + C, I_2 = \frac{1}{2}(x - \ln|\sin x + \cos x|) + C.$$

8. 求下列不定积分的递推表达式(n 为非负整数):

$$(1) I_n = \int \sin^n x dx;$$

$$(2) I_n = \int \tan^n x dx;$$

$$(3) I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x};$$

$$(4) I_n = \int x^n \sin x dx;$$

$$(5) I_n = \int e^x \sin^n x dx;$$

$$(6) I_n = \int x^\alpha \ln^n x dx \quad (\alpha \neq -1);$$

$$(7) I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(8) I_n = \int \frac{dx}{x^n \sqrt{1+x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) I_n &= \int \sin^n x dx = - \int \sin^{n-1} x d(\cos x) \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n), \end{aligned}$$

于是

$$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n=2,3,4,\cdots),$$

其中 $I_0 = x + C$, $I_1 = -\cos x + C$.

$$\begin{aligned} (2) I_n &= \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^{n-2} x d(\tan x) - I_{n-2} \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2} \quad (n=2,3,4,\cdots), \end{aligned}$$

其中 $I_0 = x + C$, $I_1 = -\ln|\cos x| + C$.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad I_n &= \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{d(\tan x)}{\cos^{n-2} x} = \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2) \int \frac{\tan x}{\cos^{n-1} x} \sin x dx \\
 &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2) \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^n x} dx = \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)(I_n - I_{n-2}),
 \end{aligned}$$

于是

$$I_n = \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \quad (n=2,3,4,\cdots),$$

其中 $I_0 = x + C$, $I_1 = \ln|\sec x + \tan x| + C$.

$$\begin{aligned}
 (4) \quad I_n &= \int x^n \sin x dx = - \int x^n d(\cos x) = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx \\
 &= -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x dx \\
 &= -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) I_{n-2} \quad (n=2,3,4,\cdots),
 \end{aligned}$$

其中 $I_0 = -\cos x + C$, $I_1 = -x \cos x + \sin x + C$.

$$\begin{aligned}
 (5) \quad I_n &= \int e^x \sin^n x dx = e^x \sin^n x - n \int e^x \sin^{n-1} x \cos x dx \\
 &= e^x \sin^n x - ne^x \sin^{n-1} x \cos x + n \int e^x [(n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x] dx \\
 &= e^x \sin^n x - ne^x \sin^{n-1} x \cos x + n[(n-1) I_{n-2} - n I_n],
 \end{aligned}$$

于是

$$I_n = \frac{1}{1+n^2} e^x (\sin^n x - n \sin^{n-1} x \cos x) + \frac{n(n-1)}{1+n^2} I_{n-2} \quad (n=2,3,4,\cdots),$$

其中 $I_0 = e^x + C$, $I_1 = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$.

(6) 当 $\alpha = -1$ 时,

$$I_n = \int x^{-1} \ln^n x dx = \int \ln^n x d(\ln x) = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} x + C;$$

当 $\alpha \neq -1$ 时,

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int x^\alpha \ln^n x dx = \frac{1}{1+\alpha} \left(x^{1+\alpha} \ln^n x - n \int x^{1+\alpha} \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{1+\alpha} x^{1+\alpha} \ln^n x - \frac{n}{1+\alpha} I_{n-1} \quad (n=1,2,3,\cdots),
 \end{aligned}$$

其中 $I_0 = \frac{1}{1+\alpha} x^{1+\alpha} + C$.

$$\begin{aligned}
 (7) \quad I_n &= \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int x^{n-1} d\sqrt{1-x^2} \\
 &= -x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1) \int x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1) \int \frac{x^{n-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)(I_{n-2} - I_n),
 \end{aligned}$$

于是

$$I_n = -\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n=2,3,4,\cdots),$$

其中 $I_0 = \arcsin x + C, I_1 = -\sqrt{1-x^2} + C$.

$$\begin{aligned}
 (8) \quad I_n &= \int \frac{dx}{x^n \sqrt{1+x}} = 2 \int \frac{d\sqrt{1+x}}{x^n} = 2 \frac{\sqrt{1+x}}{x^n} + 2n \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^{n+1}} dx \\
 &= 2 \frac{\sqrt{1+x}}{x^n} + 2n \int \frac{1+x}{x^{n+1}\sqrt{1+x}} dx \\
 &= 2 \frac{\sqrt{1+x}}{x^n} + 2n(I_{n+1} + I_n),
 \end{aligned}$$

于是

$$I_n = -\frac{1}{n-1} \frac{\sqrt{1+x}}{x^{n-1}} - \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \quad (n=2,3,4,\cdots).$$

其中 $I_0 = 2\sqrt{1+x} + C, I_1 = \ln \left| \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} \right| + C$.

9. 导出求 $\int \frac{(ax+b)dx}{x^2+2\xi x+\eta^2}, \int \frac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$ 和 $\int (ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2} dx$

型不定积分的公式.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{(ax+b)dx}{x^2+2\xi x+\eta^2} &= \frac{a}{2} \int \frac{d(x^2+2\xi x+\eta^2)}{x^2+2\xi x+\eta^2} + (b-a\xi) \int \frac{dx}{(x+\xi)^2+\eta^2-\xi^2} \\
 &= \begin{cases} a \ln|x+\xi| - \frac{b-a\xi}{x+\xi} + C, & |\xi| = |\eta|, \\ \frac{a}{2} \ln|x^2+2\xi x+\eta^2| + \frac{b-a\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}} \arctan \frac{x+\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}} + C, & |\xi| < |\eta|, \\ \frac{a}{2} \ln|x^2+2\xi x+\eta^2| + \frac{b-a\xi}{2\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \ln \left| \frac{x+\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{x+\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \right| + C, & |\xi| > |\eta|. \end{cases} \\
 \int \frac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}} &= \frac{a}{2} \int \frac{d(x^2+2\xi x+\eta^2)}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}} + (b-a\xi) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}} \\
 &= a\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2} + (b-a\xi) \ln|x+\xi+\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}| + C. \\
 \int (ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a}{2} \int \sqrt{x^2 + 2\xi x + \eta^2} d(x^2 + 2\xi x + \eta^2) + (b - a\xi) \int \sqrt{x^2 + 2\xi x + \eta^2} dx \\
 &= \frac{a}{3} (x^2 + 2\xi x + \eta^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{b - a\xi}{2} \left[(x + \xi) \sqrt{x^2 + 2\xi x + \eta^2} + (\eta^2 - \xi^2) \ln \left| (x + \xi) + \sqrt{x^2 + 2\xi x + \eta^2} \right| \right] \\
 &\quad + C.
 \end{aligned}$$

10. 求下列不定积分:

$$\begin{aligned}
 (1) & \int (5x + 3) \sqrt{x^2 + x + 2} dx; & (2) & \int (x - 1) \sqrt{x^2 + 2x - 5} dx; \\
 (3) & \int \frac{(x - 1) dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}; & (4) & \int \frac{(x + 2) dx}{\sqrt{5 + x - x^2}}.
 \end{aligned}$$

解 (1) $\int (5x + 3) \sqrt{x^2 + x + 2} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{2} \int \sqrt{x^2 + x + 2} d(x^2 + x + 2) + \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 + x + 2} dx \\
 &= \frac{5}{3} (x^2 + x + 2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2x + 1}{8} \sqrt{x^2 + x + 2} \\
 &\quad + \frac{7}{16} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 2} \right) + C.
 \end{aligned}$$

(2) $\int (x - 1) \sqrt{x^2 + 2x - 5} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 + 2x - 5} d(x^2 + 2x - 5) - 2 \int \sqrt{x^2 + 2x - 5} dx \\
 &= \frac{1}{3} (x^2 + 2x - 5)^{\frac{3}{2}} - (x + 1) \sqrt{x^2 + 2x - 5} \\
 &\quad + 6 \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 5} \right| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \frac{(x - 1) dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1}} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \\
 &= \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int \frac{(x + 2) dx}{\sqrt{5 + x - x^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(5 + x - x^2)}{\sqrt{5 + x - x^2}} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{5 + x - x^2}} \\
 &= -\sqrt{5 + x - x^2} + \frac{5}{2} \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{21}} + C.
 \end{aligned}$$

11. 设 n 次多项式 $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, 系数满足关系 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(i-1)!} = 0$, 证明

不定积分 $\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数.

证 设 $I_k = \int \frac{1}{x^k} e^x dx$, 则

$$\begin{aligned} I_k &= -\frac{1}{k-1} \int e^x d\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right) \\ &= -\frac{1}{k-1} \frac{e^x}{x^{k-1}} + \frac{1}{k-1} \int \frac{1}{x^{k-1}} e^x dx, \\ &= -\frac{1}{k-1} \frac{e^x}{x^{k-1}} + \frac{1}{k-1} I_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots, n), \end{aligned}$$

由此得到

$$I_k = q_{k-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^x + \frac{1}{(k-1)!} \int \frac{e^x}{x} dx \quad (k=2, 3, \dots, n),$$

其中 $q_{k-1}(t)$ 是 t 的 $k-1$ 次多项式. 当 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(i-1)!} = 0$ 时, 积分

$$\begin{aligned} \int p\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx &= a_0 e^x + \sum_{i=1}^n a_i \int \frac{e^x}{x^i} dx \\ &= a_0 e^x + \sum_{i=2}^n a_i q_{i-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^x + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(i-1)!} \int \frac{e^x}{x} dx \\ &= a_0 e^x + \sum_{i=2}^n a_i q_{i-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^x + C \end{aligned}$$

为初等函数.

§ 3

有理函数的不定积分及其应用

1. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2};$$

$$(2) \int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)} dx;$$

$$(3) \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3};$$

$$(4) \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2};$$

$$(5) \int \frac{3}{x^3+1} dx;$$

$$(6) \int \frac{dx}{x^4+x^2+1};$$

$$(7) \int \frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4} dx;$$

$$(8) \int \frac{x^3+1}{x^3+5x-6} dx;$$

$$(9) \int \frac{x^2}{1-x^4} dx;$$

$$(10) \int \frac{dx}{x^4+1};$$

$$(11) \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)};$$

$$(12) \int \frac{x^2+1}{x(x^3-1)}dx;$$

$$(13) \int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}dx;$$

$$(14) \int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx;$$

$$(15) \int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx;$$

$$(16) \int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx.$$

解 (1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$
 $= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{2(x+1)} + C.$

(2) 设 $\frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$, 则

$(Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1) \equiv 2x+3$, 于是

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D=0, \\ A-C=2, \\ B-D=3, \end{cases}$$

解得 $A=1, C=-1, B=\frac{3}{2}, D=-\frac{3}{2}$. 所以

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)} dx &= \int \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx + \frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{3}{2} \arctan x + C. \end{aligned}$$

(3) 设 $\frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3},$$

则 $A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+2)(x+3)^3 + C(x+1)(x+3)^3$
 $+ D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2 + E(x+1)(x+2)^2(x+3) + F(x+1)(x+2)^2 \equiv x.$

令 $x=-1$, 得到 $A=-\frac{1}{8}$; 令 $x=-2$, 得到 $C=2$; 令 $x=-3$, 得到 $F=\frac{3}{2}$;

再比较等式两边 x^5, x^4 的系数与常数项, 得到

$$\begin{cases} A+B+D=0, \\ 13A+12B+C+11D+E=0, \\ 108A+54B+27C+36D+12E+4F=0, \end{cases}$$

于是解得 $A=-\frac{1}{8}, B=-5, C=2, D=\frac{41}{8}, E=\frac{13}{4}, F=\frac{3}{2}$, 即



$$\begin{aligned} & \frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} \\ &= -\frac{1}{8(x+1)} - \frac{5}{x+2} + \frac{41}{8(x+3)} + \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{13}{4(x+3)^2} + \frac{3}{2(x+3)^3}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} \\ &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+3)^{41}}{(x+1)(x+2)^{40}} \right| - \frac{2}{x+2} - \frac{13}{4(x+3)} - \frac{3}{4(x+3)^2} + C. \end{aligned}$$

(4) 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2} &= \frac{1}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)} - \frac{1}{(x^2+4x+5)^2} \\ &= \frac{1}{x^2+4x+4} - \frac{1}{x^2+4x+5} - \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2} &= -\frac{1}{x+2} - \arctan(x+2) - \int \frac{d(x+2)}{[1+(x+2)^2]^2} \\ &= -\frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{2(x^2+4x+5)} - \frac{3}{2} \arctan(x+2) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int \frac{3}{x^3+1} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \text{ 解法一 } \int \frac{dx}{x^4+x^2+1} &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^3+1)-(x^3-1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{(x-1)dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &\quad - \frac{1}{4} \int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right] + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法二: } \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)dx}{x^4 + x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{(1-x^2)dx}{x^4 + x^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{x-x^{-1}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \ln \frac{x+x^{-1}+1}{x+x^{-1}-1} + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{3}x} + C.
 \end{aligned}$$

注 本题的答案也可以写成 $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}x}{1-x^2} + C$.

(7) 因为

$$\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4} = x^2 - 5x + 21 - \frac{80}{x+4},$$

所以

$$\int \frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4} dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 21x - 80 \ln|x+4| + C.$$

(8) 因为

$$\frac{x^3+1}{x^3+5x-6} = 1 - \frac{5x-7}{(x-1)(x^2+x+6)} = 1 + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4} \frac{x+22}{x^2+x+6},$$

所以

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+5x-6} dx = x + \frac{1}{8} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+6} - \frac{43}{4\sqrt{23}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{23}} + C.$$

$$(9) \int \frac{x^2}{1-x^4} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

$$\begin{aligned}
 (10) \int \frac{dx}{x^4+1} &= \int \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right] dx \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) dx \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} (\arctan(\sqrt{2}x+1) + \arctan(\sqrt{2}x-1)) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11) \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)} &= \int \left(\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

$$(12) \int \frac{x^2+1}{x(x^3-1)} dx = \int \frac{x^2+x^3-(x^3-1)}{x(x^3-1)} dx = \int \frac{x+x^2}{x^3-1} dx - \int \frac{dx}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{x}{x^3-1} dx + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3-1}{x^3} \right| \\
&= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1} \right) dx + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3-1}{x^3} \right| \\
&= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
&\quad + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3-1}{x^3} \right| \\
&= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\
&\quad + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3-1}{x^3} \right| + C \\
&= \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \ln|x| \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(13) \int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2} dx &= \int \frac{x^2+x+1-x+1}{(x^2+x+1)^2} dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{(x^2+x+1)^2} \right) dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2(x^2+x+1)} \\
&\quad + \frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right] + C \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{x+1}{x^2+x+1} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(14) \int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx &= \int \frac{1+x^7}{x(1+x^7)} dx - \int \frac{2x^6}{1+x^7} dx = \int \frac{1}{x} dx - \frac{2}{7} \int \frac{d(x^7)}{1+x^7} \\
&= \ln|x| - \frac{2}{7} \ln|1+x^7| + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(15) \int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2} dx &= \frac{1}{10} \int \frac{d(x^{10}+2x^5+2)}{(x^{10}+2x^5+2)^2} - \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5+1)}{[1+(x^5+1)^2]^2} \\
&= -\frac{1}{10(x^{10}+2x^5+2)} - \frac{x^5+1}{10(x^{10}+2x^5+2)} \\
&\quad - \frac{1}{10} \arctan(x^5+1) + C \\
&= -\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)} - \frac{1}{10} \arctan(x^5+1) + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (16) \int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2} dx &= \frac{1}{2n} \int \frac{x^n}{(x^{2n}+1)^2} d(x^{2n}) = -\frac{1}{2n} \int x^n d \frac{1}{x^{2n}+1} \\
 &= -\frac{1}{2n} \frac{x^n}{x^{2n}+1} + \frac{1}{2n} \int \frac{d(x^n)}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n} \frac{x^n}{x^{2n}+1} \\
 &\quad + \frac{1}{2n} \arctan x^n + C.
 \end{aligned}$$

2. 在什么条件下, $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x(x+1)^2}$ 的原函数仍是有理函数?

解 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x(x+1)^2}$ 可化为部分分式 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$, 于是

$$A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \equiv ax^2 + bx + c,$$

要使 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x(x+1)^2}$ 的原函数为有理函数, 必须 $A=0, B=0$, 由此可得 $a=0, c=0$.

3. 设 $p_n(x)$ 是一个 n 次多项式, 求

$$\int \frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx.$$

解 由于 $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$, 所以

$$\begin{aligned}
 \int \frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx &= \sum_{k=0}^n \frac{p_n^{(k)}(a)}{k!} \int \frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}} \\
 &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_n^{(k)}(a)}{k!} \frac{1}{(n-k)(x-a)^{n-k}} \\
 &\quad + \frac{p_n^{(n)}(a)}{n!} \ln|x-a| + C.
 \end{aligned}$$

4. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx;$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}};$$

$$(3) \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx;$$

$$(4) \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx;$$

$$(5) \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx;$$

$$(6) \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx;$$

$$(7) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}};$$

$$(8) \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}};$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$$

$$(10) \int \sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}} dx;$$

$$(11) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}};$$

$$(12) \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^4}}.$$

解 (1) $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx = \frac{1}{2} \int x d\sqrt{2+4x} = \frac{x}{2} \sqrt{2+4x} - \frac{1}{2} \int \sqrt{2+4x} dx$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{2+4x} - \frac{1}{12} \sqrt{(2+4x)^3} + C$$

$$= \frac{1}{6} (x-1) \sqrt{2+4x} + C.$$

(2) 不妨设 $a < b$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}} \\ &= \arcsin \frac{2x-a-b}{b-a} + C. \end{aligned}$$

注 本题也可令 $x = a \cos^2 t + b \sin^2 t$, 解得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx &= - \int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x-x^2)}{\sqrt{1+x-x^2}} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} \\ &= -\frac{1}{4} (2x+3) \sqrt{1+x-x^2} + \frac{7}{8} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{x^2+1}{x \sqrt{x^4+1}} dx &= \int \frac{x^2+1}{x^2 \sqrt{x^2+x^{-2}}} dx = \int \frac{d(x-x^{-1})}{\sqrt{(x-x^{-1})^2+2}} \\ &= \ln \left| \frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

注 这里假设 $x > 0$, 当 $x < 0$ 时可得到相同的答案.

$$\begin{aligned} (5) \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2} dx = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \int (x-\sqrt{x^2-1}) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln |x+\sqrt{x^2-1}| + C. \end{aligned}$$

注 本题也可通过作变换 $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 来求解.

$$(6) \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \sqrt{x^2-1} + \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C.$$

注 本题也可通过作变换 $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 来求解.

$$(7) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(1+x)} \right| + C$$

$$= 2\ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) + C.$$

(8) 设 $x = \tan t$, 则

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2 t dt}{\tan^4 t \sec t} = \int \frac{\cos^3 t dt}{\sin^4 t} = \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^4 t} d(\sin t)$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 t} + \frac{1}{\sin t} + C = \frac{2x^2 - 1}{3x^3} \sqrt{1+x^2} + C.$$

(9) 设 $t = \sqrt[4]{x}$, 则 $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$, 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3 dt}{t^2 + t} = 4 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= 2t^2 - 4t + 4\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x+1}) + C.$$

(10) 设 $t = \sqrt[3]{\frac{x-4}{x+1}}$, 则 $x = \frac{4+t^3}{1-t^3}$, $dx = \frac{15t^2}{(1-t^3)^2} dt$, 于是

$$\int \sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}} dx = \int t^2 \frac{(1-t^3)^2}{25} \frac{15t^2}{(1-t^3)^2} dx = \frac{3}{5} \int t^4 dt$$

$$= \frac{3}{25} t^5 + C = \frac{3}{25} \sqrt[3]{\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^5} + C.$$

(11) 设 $t = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}$, 则 $x = \frac{2+t^3}{1-t^3}$, $dx = \frac{9t^2}{(1-t^3)^2} dt$, 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1-t^3}{3} \cdot \frac{9t^2}{(1-t^3)^2} dt = 3 \int \frac{t dt}{1-t^3}$$

$$= - \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+t+1} \right) dt$$

$$= -\ln|t-1| + \frac{1}{2} \ln(t^2+t+1) - \sqrt{3} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}} - 1 \right)^2}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}} + 1}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{3} \arctan \frac{2\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}} + 1}{\sqrt{3}} + C \\
 & = -\frac{3}{2} \ln(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2}) \\
 & -\sqrt{3} \arctan \frac{\sqrt[3]{x+1} + 2\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x+1}} + C.
 \end{aligned}$$

(12) 设 $t = \sqrt[4]{1+x^4}$, $x^4 = t^4 - 1$, 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x \sqrt[4]{1+x^4}} &= \int \frac{t^3 dt}{(t^4-1)t} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2} \arctan t + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1} + \frac{1}{2} \arctan \sqrt[4]{1+x^4} + C.
 \end{aligned}$$

5. 设 $R(u, v, w)$ 是 u, v, w 的有理函数, 给出

$$\int R(x, \sqrt{a+x}, \sqrt{b+x}) dx$$

的求法.

解 设 $t = \sqrt{a+x}$, 则 $x = t^2 - a$, $dx = 2t dt$,

$$\int R(x, \sqrt{a+x}, \sqrt{b+x}) dx = 2 \int R(t^2 - a, t, \sqrt{t^2 - a + b}) t dt,$$

再令 $\sqrt{t^2 - a + b} = t + u$, 则 $t = \frac{b-a-u^2}{2u}$, $dt = \frac{1}{2} \frac{a-b-u^2}{u^2} du$, 从而

$$\begin{aligned}
 & \int R(x, \sqrt{a+x}, \sqrt{b+x}) dx \\
 &= 2 \int R\left(\left(\frac{b-a-u^2}{2u}\right)^2 - a, \frac{b-a-u^2}{2u}, \frac{b-a+u^2}{2u}\right) \frac{b-a-u^2}{2u} \cdot \frac{a-b-u^2}{2u^2} du
 \end{aligned}$$

为有理函数的积分.

6. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{4+5\cos x};$

(2) $\int \frac{dx}{2+\sin x};$

(3) $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x};$

(4) $\int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x};$

(5) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5};$

(6) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x};$

$$(7) \int \frac{dx}{\tan x + \sin x};$$

$$(8) \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)};$$

$$(9) \int \tan x \tan(x+a) dx;$$

$$(10) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx;$$

$$(11) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x};$$

$$(12) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

解 (1) 设 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $x = 2\arctan u$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$, 于是

$$\int \frac{dx}{4+5\cos x} = \int \frac{2du}{9-u^2} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3+u}{3-u} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3+\tan \frac{x}{2}}{3-\tan \frac{x}{2}} \right| + C.$$

(2) 设 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $x = 2\arctan u$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+\sin x} &= \int \frac{du}{1+u+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan \frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$(3) \int \frac{dx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{\csc^2 x dx}{3\csc^2 x + 1} = - \int \frac{d(\cot x)}{4+3\cot^2 x} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cot x \right) + C.$$

注 本题也可通过作变换 $t = \tan \frac{x}{2}$, 解得

$$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan \left(\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x} &= \int \frac{dx}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{2\left(\tan \frac{x}{2} + 1\right)} dx \\ &= \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| + C. \end{aligned}$$

(5) 设 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $x = 2\arctan u$,

$dx = \frac{2du}{1+u^2}$, 于是

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{du}{3u^2 + 2u + 2} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3u+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$$

$$\begin{aligned} (6) \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} &= \int \frac{\sin x dx}{(2+\cos x)\sin^2 x} = - \int \frac{d(\cos x)}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)} \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{2+\cos x+1-\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)} d(\cos x) \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} \\ &\quad - \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{1+\cos x} - \frac{1}{2+\cos x} \right) d(\cos x) \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1+\cos x}{2+\cos x} \right| + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \int \frac{dx}{\tan x + \sin x} &= \int \frac{\cos x dx}{\sin x(1+\cos x)} = - \int \frac{\cos x d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{(1+\cos x) - (1-\cos x)}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} d(\cos x) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{d(\cos x)}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| - \frac{1}{2(1+\cos x)} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8) \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)} &= \frac{1}{\cos(a-b)} \int \frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)} dx \\ &= \frac{1}{\cos(a-b)} \int \left(\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} + \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)} \right) dx \\ &= \frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)} \right| + C. \end{aligned}$$

$$(9) \int \tan x \tan(x+a) dx$$

当 $a = \frac{k\pi}{2}$ 时, 原积分容易求得.

当 $a \neq \frac{k\pi}{2}$ 时,

$$\int \tan x \tan(x+a) dx = \int \left(\frac{\tan(x+a) - \tan x}{\tan a} - 1 \right) dx$$

$$= \frac{1}{\tan a} \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right| - x + C.$$

$$\begin{aligned} (10) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \csc \left(x + \frac{\pi}{4} \right) d \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (11) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} \\ &= \tan x - \cot x + C = -2 \cot 2x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx &= \int \frac{1 + \sin^2 x - 1}{1 + \sin^2 x} dx = x - \int \frac{d(\tan x)}{1 + 2 \tan^2 x} \\ &= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C. \end{aligned}$$

7. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx;$$

$$(2) \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx;$$

$$(3) \int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx;$$

$$(4) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx;$$

$$(5) \int x^2 e^x \sin x dx;$$

$$(6) \int \ln(1+x^2) dx;$$

$$(7) \int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(8) \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 2x - 3}} dx;$$

$$(9) \int \arctan \sqrt{x} dx;$$

$$(10) \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx;$$

$$(11) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx;$$

$$(12) \int \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{\cos x} dx;$$

$$(13) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx;$$

$$(14) \int e^{\sin x} \frac{\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx;$$

$$(15) \int \frac{dx}{e^x - e^{-x}};$$

$$(16) \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0);$$

$$(17) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx;$$

$$(18) \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx;$$

$$(19) \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx;$$

$$(20) \int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 (1)} \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx &= - \int x e^x d \frac{1}{1+x} = - \frac{x e^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x} (e^x + x e^x) dx \\ &= \frac{e^x}{1+x} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \ln x d \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \ln x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2 \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2 \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\ &\quad + 2 \int \sqrt{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2 \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\ &\quad + 2x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx &= \frac{2}{3} \int \ln^2 x d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{4}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \ln x dx \\ &= \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln^2 x - 4 \ln x) + \frac{8}{9} \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{2}{27} x^{\frac{3}{2}} (9 \ln^2 x - 12 \ln x + 8) + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \int x^2 e^x \sin x dx &= \int x^2 \sin x d(e^x) = x^2 e^x \sin x - \int e^x (2x \sin x + x^2 \cos x) dx \\ &= e^x (x^2 \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x) \\ &\quad + \int e^x (2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x) dx,\end{aligned}$$

于是

$$\int x^2 e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (x^2 \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x) + \frac{1}{2} \int e^x (2 \sin x + 4x \cos x) dx.$$

由于

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C,$$

$$\begin{aligned}\int e^x x \cos x dx &= \int x \cos x d(e^x) = e^x x \cos x - \int e^x (\cos x - x \sin x) dx \\ &= e^x x \cos x - \int e^x \cos x dx + \int x \sin x d(e^x) \\ &= e^x x (\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x dx - \int e^x (\sin x + x \cos x) dx,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int e^x x \cos x dx &= \frac{1}{2} e^x x (\cos x + \sin x) - \frac{1}{2} \int e^x (\cos x + \sin x) dx \\ &= \frac{1}{2} e^x x (\cos x + \sin x) - \frac{1}{2} e^x \sin x + C,\end{aligned}$$

所以

$$\int x^2 e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x [(x^2 - 1) \sin x - (x - 1)^2 \cos x] + C.$$

$$\begin{aligned}(6) \int \ln(1+x^2) dx &= x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx \\ &= x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(7) \int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= - \int x \arcsin x d\sqrt{1-x^2} \\ &= -x \sqrt{1-x^2} \arcsin x \\ &\quad + \int \sqrt{1-x^2} \left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= -x \sqrt{1-x^2} \arcsin x + \frac{1}{2} x^2 + \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx \\ &= -x \sqrt{1-x^2} \arcsin x + \frac{1}{2} x^2 + \int \arcsin x d(\arcsin x) \\ &\quad - \int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx,\end{aligned}$$

所以

$$\int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \arcsin x + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} (\arcsin x)^2 + C.$$

$$\begin{aligned}(8) \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 2x - 3}} dx &= - \int \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^{-1} - 3x^{-2}}} d(x^{-1}) \\ &= - \int \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{4}{9} - \left(x^{-1} + \frac{1}{3}\right)^2}} d\left(x^{-1} + \frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3+x}{2x} + C.\end{aligned}$$

注 本题也可通过作变换 $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$, 解得

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 2x - 3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{\frac{3x+3}{x-3}} + C.$$

$$\begin{aligned}
 (9) \int \arctan \sqrt{x} dx &= x \arctan \sqrt{x} - \int \frac{x}{1+x} d\sqrt{x} = x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \int \frac{d\sqrt{x}}{1+x} \\
 &= (x+1) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

(10) 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, 于是

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx &= 2 \int t^2 \sin t dt = -2t^2 \cos t + 4 \int t \cos t dt \\
 &= -2t^2 \cos t + 4t \sin t - 4 \int \sin t dt \\
 &= (4 - 2t^2) \cos t + 4t \sin t + C \\
 &= (4 - 2x) \cos \sqrt{x} + 4\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx - \int \frac{d(1 + \cos x)}{1 + \cos x} \\
 &= x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} dx - \ln(1 + \cos x) \\
 &= x \tan \frac{x}{2} + 2 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| - \left(\ln 2 + 2 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right) + C_1 \\
 &= x \tan \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

注 本题也可以如下求解:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx \\
 &= x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} dx + \int \tan \frac{x}{2} dx = x \tan \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (12) \int \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{\cos x} dx &= \int \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{1 - \sin^2 x} d(\sin x) \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{\sqrt{1 + \sin x}}{1 - \sin x} + \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{1 + \sin x} \right) d(\sin x) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{1 - \sin x} d(\sin x) + \sqrt{1 + \sin x},
 \end{aligned}$$

在等式右边的积分中, 令 $t = \sqrt{1 + \sin x}$, 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{1 - \sin x} d(\sin x) &= \int \frac{2t^2 dt}{2 - t^2} = -2t + 4 \int \frac{dt}{2 - t^2} \\
 &= -2t + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + t}{\sqrt{2} - t} \right| + C,
 \end{aligned}$$

所以

$$\int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\sin x}} + C.$$

$$(13) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} d(\tan x)$$

$$= \tan^2 x \sin x - \int \tan x (\sin x + \tan x \sec x) dx,$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx &= \frac{1}{2} \tan^2 x \sin x - \frac{1}{2} \int \tan x \sin x dx \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x \sin x - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x \sin x - \frac{1}{2} \ln |\tan x + \sec x| + \frac{1}{2} \sin x + C \\ &= \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln |\tan x + \sec x| + C. \end{aligned}$$

$$(14) \int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx = \int e^{\sin x} x d(\sin x) - \int e^{\sin x} d(\sec x)$$

$$= e^{\sin x} (x - \sec x) - \int e^{\sin x} dx$$

$$+ \int \sec x e^{\sin x} \cos x dx$$

$$= e^{\sin x} (x - \sec x) + C.$$

$$(15) \int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{d(e^x)}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C.$$

$$(16) \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int \frac{d(\tan x)}{a^2 \tan^2 x + b^2} = \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{a}{b} \tan x \right) + C.$$

(17) 令 $t = \sqrt[6]{x}$, 则 $x = t^6$, 于是

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx = \int \frac{6}{t(t+1)} dt = 6 \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + C = 6 \ln \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} + 1} + C.$$

$$(18) \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \int x^2 \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + x - \int \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln \frac{1+x}{1-x} + x + C.$$

$$(19) \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx = x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int x \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{1}{2} x^2 \\
 &\quad - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx \\
 &= x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{1}{2} x^2 - \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx \\
 &\quad + \int \arcsin x d(\arcsin x),
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx &= \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} \int \arcsin x d(\arcsin x) \\
 &= \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} (\arcsin x)^2 + C.
 \end{aligned}$$

(20) 令 $t = e^x$, 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(1+e^x)^2} &= \int \frac{dt}{t(1+t)^2} = \int \left(\frac{1}{t(1+t)} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt \\
 &= \ln \left| \frac{t}{1+t} \right| + \frac{1}{1+t} + C = \ln \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} + C.
 \end{aligned}$$

第七章 定积分

§ 1

定积分的概念和可积条件

1. 用定义计算下列定积分:

$$(1) \int_0^1 (ax+b)dx; \quad (2) \int_0^1 a^x dx \quad (a>0).$$

解 (1) 取划分: $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$ 及 $\xi_i = \frac{i}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}, \text{ 于是 } \sum_{i=1}^n \left(a \frac{i}{n} + b \right) \frac{1}{n} = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + b \rightarrow \frac{a}{2} + b \quad (n \rightarrow \infty), \text{ 即}$$

$$\int_0^1 (ax+b)dx = \frac{a}{2} + b.$$

(2) 取划分: $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$ 及 $\xi_i = \frac{i}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}, \text{ 于是 } \sum_{i=1}^n a^{\frac{i}{n}} \frac{1}{n} = \frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})}. \text{ 因为 } \frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \rightarrow \ln a \quad (n \rightarrow \infty), a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n a^{\frac{i}{n}} \frac{1}{n} = \frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})} \rightarrow \frac{a-1}{\ln a}, \text{ 即}$$

$$\int_0^1 a^x dx = \frac{a-1}{\ln a}.$$

2. 证明, 若对 $[a, b]$ 的任意划分和任意 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 都存在, 则 $f(x)$ 必是 $[a, b]$ 上的有界函数.

证 用反证法. 设 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I$, 则取 $\varepsilon = 1, \exists \delta > 0$, 对任意的划分

P 与任意 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta x_i) < \delta$, 就有 $\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| < |I| + 1$. 取定了划分后, n 与 Δx_i ($i=1, 2, \dots, n$) 也就确定了. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界, 则必定存在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上无界. 取定 $\xi_1, \dots,$

$\xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n$, 必可取到 ξ_i , 使 $|f(\xi_i)\Delta x_i| > |I| + \left| \sum_{j \neq i} f(\xi_j)\Delta x_j \right| + 1$, 则

$$\begin{aligned} |I| + 1 &> \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x_j \right| \geq |f(\xi_i)\Delta x_i| - \left| \sum_{j \neq i} f(\xi_j)\Delta x_j \right| \\ &\geq |I| + \left| \sum_{j \neq i} f(\xi_j)\Delta x_j \right| + 1 - \left| \sum_{j \neq i} f(\xi_j)\Delta x_j \right| = |I| + 1, \end{aligned}$$

从而产生矛盾, 所以 $f(x)$ 必是 $[a, b]$ 上的有界函数.

3. 证明 Darboux 定理的后半部分: 对任意有界函数 $f(x)$, 恒有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{S}(P) = l.$$

证 $\forall \varepsilon > 0$, 因为 l 是 \underline{S} 的上确界, 所以 $\exists \underline{S}(P') \in \underline{S}$, 使得

$$0 \leq l - \underline{S}(P') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设划分 $P': a = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \dots < x'_p = b$, M, m 是 $f(x)$ 的上、下确界, 取

$$\delta = \min \left\{ \Delta x'_1, \Delta x'_2, \dots, \Delta x'_p, \frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)} \right\},$$

对任意一个满足 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta x_i) < \delta$ 的划分

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

记与其相应的小和为 $\underline{S}(P)$, 现将 P', P 的分点合在一起组成新的划分 P'' , 则由引理 7.1.1, $\underline{S}(P') - \underline{S}(P'') \leq 0$.

下面来估计 $\underline{S}(P'') - \underline{S}(P)$:

(1) 若在 (x_{i-1}, x_i) 中没有 P' 的分点, 则 $\underline{S}(P''), \underline{S}(P)$ 中的相应项相同, 它们的差为零;

(2) 若在 (x_{i-1}, x_i) 中含有 P' 的分点, 由于两种划分的端点重合, 所以这样的区间至多只有 $p-1$ 个. 由 δ 的取法, 可知

$$\Delta x_i \leq \delta \leq \Delta x'_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

所以在 (x_{i-1}, x_i) 中只有一个新插入的分点 x'_j , 这时 $\underline{S}(P''), \underline{S}(P)$ 中的相应项的差为

$$[m'_i(x'_j - x_{i-1}) + m''_i(x_i - x'_j)] - m_i(x_i - x_{i-1}) \leq (M-m)(x_i - x_{i-1}) < (M-m)\delta,$$

从而 $0 \leq \underline{S}(P'') - \underline{S}(P) < (p-1)(M-m)\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

综合上面的结论, 就有

$$0 \leq l - \underline{S}(P) = [l - \underline{S}(P')] + [\underline{S}(P') - \underline{S}(P'')] + [\underline{S}(P'') - \underline{S}(P)] < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{S}(P) = l.$$

4. 证明定理 7.1.3.

证 必要性是显然的,下面证明充分性.

设 $\forall \varepsilon > 0$, 存在一种划分 P' , 使得相应的振幅满足 $\sum_{i=1}^p \omega'_i \Delta x'_i < \frac{\varepsilon}{3}$, 即

$\bar{S}(P') - \underline{S}(P') < \frac{\varepsilon}{3}$. 取 $\delta = \min \left\{ \Delta x'_1, \Delta x'_2, \dots, \Delta x'_p, \frac{\varepsilon}{3(p-1)(M-m)} \right\}$, 对

任意一个满足 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta x_i) < \delta$ 的划分

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

现将 P', P 的分点合在一起组成新的划分 P'' , 则由 Darboux 定理的证明过程, 可得

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{S}(P) - \underline{S}(P) &= [\bar{S}(P) - \bar{S}(P'')] + [\bar{S}(P'') - \bar{S}(P')] + [\bar{S}(P') - \underline{S}(P')] \\ &\quad + [\underline{S}(P') - \underline{S}(P'')] + [\underline{S}(P'') - \underline{S}(P)] \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 0 + \frac{\varepsilon}{3} + 0 + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

由定理 7.1.1, 可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

5. 讨论下列函数在 $[0, 1]$ 的可积性:

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} -1, & x \text{ 为有理数}, \\ 1, & x \text{ 为无理数}; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数}, \\ x, & x \text{ 为无理数}; \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解 (1) $0 \leq f(x) < 1$, 且 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的不连续点为 $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ 与 $x = 0$. $\forall \varepsilon > 0$, 取定 $m > \frac{2}{\varepsilon}$, $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{m}, 1\right]$ 上只有有限个不连续点, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{m}, 1\right]$ 上可积, 即存在 $\left[\frac{1}{m}, 1\right]$ 的一个划分 P , 使得 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$, 将 P 的分点和 0 合在一起, 作为 $[0, 1]$ 的划分 P' , 则

$$\sum_{i=1}^{n+1} \omega'_i \Delta x'_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i + \omega'_1 \Delta x'_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

由定理 7.1.3, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积.

(2) 因为对 $[0, 1]$ 的任意划分 P , 总有 $\omega_i = 2$, 所以 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 2$, 由定理 7.1.2 可知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不可积.

(3) 因为对 $[0, 1]$ 的任意划分 P , $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅为 x_i , 于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n x_i (x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^n \frac{x_i + x_{i-1}}{2} (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) \\ &= \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不可积.

(4) $-1 \leq f(x) \leq 1$, 且 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的不连续点为 $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ 与 $x = 0$. $\forall \varepsilon > 0$, 取定 $m > \frac{4}{\varepsilon}$, 则 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{m}, 1]$ 上只有有限个不连续点, 所以 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{m}, 1]$ 上可积, 即存在 $[\frac{1}{m}, 1]$ 的划分 P , 使得 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$. 将 P 的分点与 0 合在一起作为 $[0, 1]$ 的划分 P' , 则

$$\sum_{i=1}^{n+1} \omega'_i \Delta x'_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i + \omega'_1 \Delta x'_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且在 $[a, b]$ 上满足 $|f(x)| \geq m > 0$ (m 为常数), 证明 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上也可积.

证 任取 $[a, b]$ 的一个划分: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, 则

$$\omega_i \left(\frac{1}{f} \right) = \sup_{x_{i-1} \leq x' < x'' \leq x_i} \left(\frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')} \right) \leq \frac{1}{m^2} \sup_{x_{i-1} \leq x' < x'' \leq x_i} (f(x') - f(x'')) = \frac{1}{m^2} \omega_i(f),$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta x_i) < \delta$ 时,

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < m^2 \varepsilon, \text{ 从而 } \sum_{i=1}^n \omega_i \left(\frac{1}{f} \right) \Delta x_i < \varepsilon, \text{ 所以 } \frac{1}{f(x)} \text{ 在 } [a, b] \text{ 上可积.}$$

7. 有界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的不连续点为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

证 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, 且 $c \in (a, b)$, 并设 $|f(x)| \leq M$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta =$

$\min \left\{ \frac{\varepsilon}{12M}, c-a, b-c \right\}$, 则 $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $|x_n - c| < \delta$.

由于 $f(x)$ 在 $[a, c-\delta]$ 和 $[c+\delta, b]$ 上只有有限个不连续点, 所以 $f(x)$ 在 $[a, c-\delta]$ 和 $[c+\delta, b]$ 上都可积, 即存在 $[a, c-\delta]$ 的一个划分 $P^{(1)}$ 和 $[c+\delta, b]$ 的一个划分 $P^{(2)}$, 使得 $\sum_i \omega_i^{(1)} \Delta x_i^{(1)} < \frac{\varepsilon}{3}$, $\sum_i \omega_i^{(2)} \Delta x_i^{(2)} < \frac{\varepsilon}{3}$. 将 $P^{(1)}, P^{(2)}$ 的分点合并在一起组成 $[a, b]$ 的一个划分 P , 则

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq \sum_i \omega_i^{(1)} \Delta x_i^{(1)} + \sum_i \omega_i^{(2)} \Delta x_i^{(2)} + 4M\delta < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

$c=a$ 或 $c=b$ 的情况可类似证明.

8. 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的有界函数. 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充分必要条件是对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 与 $\sigma > 0$, 存在划分 P , 使得振幅 $\omega_i \geq \varepsilon$ 的那些小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度之和 $\sum_{\omega_i \geq \varepsilon} \Delta x_i < \sigma$ (即振幅不能任意小的那些小区间的长度之和可以任意小).

证 充分性: 设 $|f(x)| \leq M$. $\forall \varepsilon = \sigma > 0$, 存在划分 P , 使得振幅 $\omega_i \geq \varepsilon$ 的那些小区间的长度之和 $\sum_{\omega_i \geq \varepsilon} \Delta x_i < \varepsilon$, 于是

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_{\omega_i < \varepsilon} \omega_i \Delta x_i + \sum_{\omega_i \geq \varepsilon} \omega_i \Delta x_i < [(b-a) + 2M]\varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

必要性: 用反证法, 如果存在 $\varepsilon_0 > 0$ 与 $\sigma_0 > 0$, 对任意划分 P , 振幅 $\omega_i \geq \varepsilon_0$ 的小区间的长度之和不小于 σ_0 , 于是

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_{\omega_i < \varepsilon_0} \omega_i \Delta x_i + \sum_{\omega_i \geq \varepsilon_0} \omega_i \Delta x_i \geq \varepsilon_0 \sum_{\omega_i \geq \varepsilon_0} \Delta x_i \geq \sigma_0 \varepsilon_0,$$

则当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i| \rightarrow 0$ 时, $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$ 不趋于零, 与 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积矛盾.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $A \leq f(x) \leq B$, $g(u)$ 在 $[A, B]$ 上连续, 证明复合函数 $g(f(x))$ 在 $[a, b]$ 上可积.

证 由于 $g(u)$ 在 $[A, B]$ 连续, 所以可设 $|g(u)| \leq M$, 且 $g(u)$ 一致连续, 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u', u'' \in [A, B]$, 只要 $|u' - u''| < \delta$, 就成立

$$|g(u') - g(u'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 由上题, 对上述 $\varepsilon > 0$ 与 $\delta > 0$, 存在划分 P , 使得振幅 $\omega_i(f) \geq \delta$ 的小区间的长度之和小于 $\frac{\varepsilon}{4M}$, 于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i(g \circ f) \Delta x_i &= \sum_{\omega_i(f) < \delta} \omega_i(g \circ f) \Delta x_i + \sum_{\omega_i(f) \geq \delta} \omega_i(g \circ f) \Delta x_i \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{\omega_i(f) < \delta} \Delta x_i + 2M \sum_{\omega_i(f) \geq \delta} \Delta x_i \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

即复合函数 $g(f(x))$ 在 $[a, b]$ 上可积.

§2 定积分的基本性质

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上定义, 且在 $[a, b]$ 中除了有限个点之外, 都有 $f(x) = g(x)$, 证明 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 并且有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

证 设仅在 $x = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) 处 $f(x) \neq g(x)$. 对区间 $[a, b]$ 作划分: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 则

$$\sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum' (g(\xi_i) - f(\xi_i)) \Delta x_i,$$

其中 \sum' 表示仅对含有 $\{c_i\}$ 中点的小区间 (至多 $2p$ 个) 求和.

记 $M_1 = \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)|$, $M_2 = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2p(M_1 + M_2)}$, 则当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} < \delta$ 时,

$$\left| \sum' (g(\xi_i) - f(\xi_i)) \Delta x_i \right| < \varepsilon,$$

所以由 $f(x)$ 可积, 可知 $g(x)$ 也可积, 且成立 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上都可积, 请举例说明在一般情况下有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \left(\int_a^b f(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x)dx \right).$$

解 例如 $f(x) = g(x) = 1, x \in [0, 2]$, 则 $\int_0^2 f(x)dx = 2, \int_0^2 g(x)dx = 2$, $\int_0^2 f(x)g(x)dx = 2$, 所以 $\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \left(\int_a^b f(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x)dx \right)$.

3. 证明:对任意实数 a, b, c , 只要 $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都存在, 就成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

证 如设 $a < b < c$, 则 $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, 于是

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

其他情形可类推.

4. 判断下列积分的大小:

$$(1) \int_0^1 x dx \text{ 和 } \int_0^1 x^2 dx; \quad (2) \int_1^2 x dx \text{ 和 } \int_1^2 x^2 dx;$$

$$(3) \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^x dx \text{ 和 } \int_0^1 2^x dx; \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \text{ 和 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx.$$

解 (1) 当 $x \in (0, 1)$ 时, $x > x^2$, 所以 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$.

(2) 当 $x \in (1, 2)$ 时, $x < x^2$, 所以 $\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$.

(3) 当 $x \in (-2, -1)$ 时, $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2$, 而当 $x \in (0, 1)$ 时, $2^x < 2$.

由积分第一中值定理, 可得 $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^x dx > \int_0^1 2^x dx$.

(4) 当 $x > 0$ 时, $\sin x < x$, 所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x) \geq 0$ 但不恒为 0, 证明

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

证法一 不妨设 $f(x_0) > 0$, $x_0 \in (a, b)$. 由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > 0$, 存在 $c > 0$ 与 $\delta > 0$ ($\delta < \min\{a - x_0, b - x_0\}$), 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 成立 $f(x) > c$. 于是

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq 2c\delta > 0.$$

$f(x_0) > 0$, $x_0 = a$ 或 $x_0 = b$ 的情况可类似证明.

证法二 (利用下一节的定理 7.3.1(2)) 用反证法. 若 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 则 $\forall t \in [a, b], \int_a^t f(x)dx = 0$. 由于 $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(t) = f(t), t \in [a, b]$, 所以有 $f(t) \equiv 0$, 与题设矛盾, 从而必定成立 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为 0.

证 反证法 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不恒为 0, 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 可知 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f^2(x) \geq 0$. 由上题知, $\int_a^b f^2(x)dx > 0$, 与 $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ 矛盾, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为 0.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且满足

$$\frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b).$$

证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证 由积分第一中值定理, $\exists \eta \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, 使得

$$f(\eta) = \frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b),$$

再对 $f(x)$ 在 $[\eta, b]$ 上应用 Rolle 定理, $\exists \xi \in (\eta, b) \subset (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

8. 设 $\varphi(t)$ 在 $[0, a]$ 上连续, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0$. 证明:

$$f\left(\frac{1}{a} \int_0^a \varphi(t)dt\right) \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(\varphi(t))dt.$$

证 将区间 $[0, a]$ 作划分: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = a$, 记 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\}$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. 由于 f 下凸, 由 Jensen 不等式 (习题 5.1 第 24 题), 得到

$$f\left(\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \frac{\Delta t_i}{a}\right) \leq \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i)) \frac{\Delta t_i}{a},$$

令 $\lambda \rightarrow 0$, 上述不等式就转化为

$$f\left(\frac{1}{a} \int_0^a \varphi(t)dt\right) \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(\varphi(t))dt.$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且单调减少, 证明对任意 $\alpha \in [0, 1]$, 成立

$$\int_0^\alpha f(x) dx \geq \alpha \int_0^1 f(x) dx.$$

证法一 问题等价于证明对任意 $\alpha \in [0, 1]$, 成立

$$(1-\alpha) \int_0^\alpha f(x) dx \geq \alpha \int_\alpha^1 f(x) dx.$$

对不等式两端应用积分第一中值定理, 则存在 $x_1 \in [0, \alpha]$ 及 $x_2 \in [\alpha, 1]$, 使得 $(1-\alpha) \int_0^\alpha f(x) dx = \alpha(1-\alpha)f(x_1)$ 及 $\alpha \int_\alpha^1 f(x) dx = \alpha(1-\alpha)f(x_2)$. 由于显然有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 所以得到 $(1-\alpha) \int_0^\alpha f(x) dx \geq \alpha \int_\alpha^1 f(x) dx$.

证法二 由下节定理 7.3.1(2) 设 $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx - \alpha \int_0^1 f(x) dx$, 则 $F'(\alpha) = f(\alpha) - \int_0^1 f(x) dx$. 由积分第一中值定理, $\exists \xi \in [0, 1]$ 使得 $f(\xi) = \int_0^1 f(x) dx$, 即 $F'(\alpha) = f(\alpha) - f(\xi)$.

由于 f 单调减少, 所以当 $0 < \alpha < \xi$ 时, $F'(\alpha) \geq 0$, 即 $F(\alpha)$ 单调增加; 当 $\xi < \alpha < 1$ 时, $F'(\alpha) \leq 0$, 即 $F(\alpha)$ 单调减少. 由 $F(0) = F(1) = 0$, 即可得到 $\forall \alpha \in [0, 1]$, 成立 $F(\alpha) \geq 0$.

证法三 当 $\alpha = 0$ 时, 不等式显然成立. 当 $\alpha \in (0, 1]$ 时, 令 $x = at$, 利用 $f(x)$ 单调减少, 就得到 $\int_0^\alpha f(x) dx = \alpha \int_0^1 f(at) dt \geq \alpha \int_0^1 f(t) dt$.

10. (Young 不等式) 设 $y = f(x)$ 是 $[0, \infty)$ 上严格单调增加的连续函数, 且 $f(0) = 0$, 记它的反函数为 $x = f^{-1}(y)$. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy \geq ab \quad (a > 0, b > 0).$$

证 先证当 $b = f(a)$ 时等号成立.

将区间 $[0, a]$ 作划分: $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a$, 记 $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n$), 则 $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = b$, 再记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, 于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i) \Delta y_i &= \sum_{i=1}^n y_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n x_i (y_i - y_{i-1}) \\ &= x_n y_n - x_0 y_0 = ab, \end{aligned}$$

记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i|$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Delta y_i$ 的极限为

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy,$$

这就证明了当 $b = f(a)$ 时, $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy = ab$.

在一般情况下, 设 $F(a) = \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy - ab$, 则 $F'(a) = f(a) - b$. 记 $f(T) = b$, 可知当 $0 < a < T$ 时, $F(a)$ 单调减少, 当 $a > T$ 时, $F(a)$ 单调增加, 所以 $F(a)$ 在 $a = T$ 处取到最小值. 由上面的讨论, 可知最小值 $F(T) = 0$, 从而 $F(a) \geq 0$, 这就是所要证明的.

注 当 $b = f(a)$ 时, $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy = ab$ 的结论也可直接从几何图形上看出.

11. 证明定积分的连续性: 设函数 $f(x)$ 和 $f_h(x) = f(x+h)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f_h(x) - f(x)|dx = 0.$$

证 由于 $f_h(x) = f(x+h)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 可知存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $[a-\delta, b+\delta]$ 上可积. 设 $|f(x)| \leq M$ ($x \in [a-\delta, b+\delta]$), 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $\forall \varepsilon > 0$, 存在对区间 $[a, b]$ n 等分的划分 P , 使得当 $\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{8M}$ 时, 成立

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{6}, \text{ 其中 } \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

另外, 当 $\frac{b-a}{n} < \delta$ 时, 记 ω_0, ω_{n+1} 分别是 $f(x)$ 在区间 $\left[a - \frac{b-a}{n}, a\right]$ 和 $\left[b, b + \frac{b-a}{n}\right]$ 上的振幅, 则 $\omega_0 \leq 2M, \omega_{n+1} \leq 2M$.

因为

$$\int_a^b |f_h(x) - f(x)|dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f_h(x) - f(x)|dx,$$

且当 $|h| < \frac{b-a}{n} < \min\left\{\frac{\varepsilon}{8M}, \delta\right\}$ 时, 由 $x \in [x_{i-1}, x_i]$, 可知

$$x+h \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \cup [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}],$$

其中 $x_{-1} = a - \frac{b-a}{n}, x_{n+1} = b + \frac{b-a}{n}$,

从而有 $|f(x+h) - f(x)| \leq \omega_{i-1} + \omega_i + \omega_{i+1}$, 于是

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_h(x) - f(x)| dx &\leq \sum_{i=1}^n (\omega_{i-1} + \omega_i + \omega_{i+1}) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + (\omega_0 + \omega_{n+1}) \frac{b-a}{n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f_h(x) - f(x)| dx = 0.$$

12. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上都可积, 证明不等式:

(1) (Schwarz 不等式) $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx;$

(2) (Minkowski 不等式)

$$\left\{ \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_a^b g^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

证 (1) 由于对任意的 t , 积分 $\int_a^b [tf(x) + g(x)]^2 dx \geq 0$, 即

$$t^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0,$$

所以其判别式恒为非正的, 也就是成立

$$\left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

(2) 由 $\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b g^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}$, 得到

$$\begin{aligned} &\int_a^b f^2(x) dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \\ &\leq \int_a^b f^2(x) dx + 2 \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b g^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x) dx, \end{aligned}$$

即

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \leq \left[\left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_a^b g^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2,$$

两边开平方, 即得到

$$\left\{ \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_a^b g^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

13. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0, g(x) > 0$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b [f(x)]^n g(x) dx \right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

证 因为在 $[a, b]$ 上 $g(x) > 0$, 所以有 $0 < m \leq g(x) \leq M < +\infty$. 记 $A = f(\xi) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, 不妨设 $A > 0$ (因为 $A = 0$ 时等式显然成立). 由 $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$, 可知 $\forall 0 < \varepsilon < A, \exists [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 使得 $\xi \in [\alpha, \beta]$, 且当 $x \in [\alpha, \beta]$ 时, 成立 $0 < A - \varepsilon < f(x) \leq A$, 于是

$$(A - \varepsilon)[m(\beta - \alpha)]^{\frac{1}{n}} \leq \left\{ \int_a^b f^n(x) g(x) dx \right\}^{\frac{1}{n}} \leq A[M(b - a)]^{\frac{1}{n}}.$$

由于当 $n \rightarrow \infty$ 时 $[m(\beta - \alpha)]^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1, [M(b - a)]^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$, 所以 $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 成立 $[m(\beta - \alpha)]^{\frac{1}{n}} > 1 - \frac{\varepsilon}{A}$ 与 $[M(b - a)]^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{2\varepsilon}{A}$, 从而当 $n > N$ 时, 成立

$A - 2\varepsilon < \left\{ \int_a^b f^n(x) g(x) dx \right\}^{\frac{1}{n}} < A + 2\varepsilon$, 即 $\left| \left\{ \int_a^b f^n(x) g(x) dx \right\}^{\frac{1}{n}} - A \right| < 2\varepsilon$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b [f(x)]^n g(x) dx \right\}^{\frac{1}{n}} = A = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

§3 微积分基本定理

1. 设函数 $f(x)$ 连续, 求下列函数 $F(x)$ 的导数:

$$(1) F(x) = \int_x^b f(t) dt; \quad (2) F(x) = \int_a^{\ln x} f(t) dt;$$

$$(3) F(x) = \int_a^{\left(\int_0^x \sin^2 t dt\right)} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

解 (1) $F(x) = - \int_b^x f(t) dt$, 所以 $F'(x) = -f(x)$.

$$(2) F'(x) = f(\ln x) \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x} f(\ln x).$$

$$(3) F'(x) = \frac{1}{1 + \left(\int_0^x \sin^2 t dt\right)^2} \cdot \sin^2 x = \frac{4\sin^2 x}{4 + (x - \sin x \cos x)^2}.$$

2. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\int_{\cos x}^1 e^{-w^2} dw};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan v)^2 dv}{\sqrt{1+x^2}}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{u^2} du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2} du}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 = 1.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\int_{\cos x}^1 e^{-w^2} dw} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-e^{-\cos^2 x}(-\sin x)} = 2e.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan v)^2 dv}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctan x^2)}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{u^2} du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2} du} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2} \int_0^{xe^{u^2}} du}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^x} = 0.$$

3. 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数且恒有 $f(x) > 0$, 证明

$$g(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

是定义在 $[0, +\infty)$ 上的单调增加函数.

证 因为

$$g'(x) = \frac{f(x) \left(x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt \right)}{\left(\int_0^x f(t)dt \right)^2} = \frac{f(x) \int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt \right)^2} \geq 0,$$

所以 $g(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的单调增加函数.

4. 求函数 $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$ 的极值.

解 $f'(x) = (x-1)(x-2)^2$, 令 $f'(x) = 0$, 得到 $x = 1, 2$. 因为当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $1 < x < 2$ 或 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $x = 1$ 是极小值点, $x = 2$ 不是极值点. 由



$$f(1) = \int_0^1 [(t-2)^3 + (t-2)^2] dt = -\frac{17}{12},$$

可知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极小值 $f(1) = -\frac{17}{12}$.

5. 利用中值定理求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx \quad (p \in \mathbf{N}_+).$$

解 (1) 由积分第一中值定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1} = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1).$$

(2) 由积分第一中值定理, $\exists \xi \in [n, n+p]$, 使得

$$\left| \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \frac{\sin \xi}{\xi} p \right| \leq \frac{p}{n},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

6. 求下列定积分:

$$(1) \int_0^1 x^2(2-x^2)^2 dx;$$

$$(2) \int_1^2 \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2} dx;$$

$$(3) \int_0^2 (2^x + 3^x)^2 dx;$$

$$(4) \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-4x^2)^{10} dx;$$

$$(5) \int_{-1}^1 \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)^2};$$

$$(6) \int_0^1 \arcsin x dx;$$

$$(7) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx;$$

$$(8) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx;$$

$$(9) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx;$$

$$(10) \int_1^e \sin(\ln x) dx;$$

$$(11) \int_0^1 x^2 \arctan x dx;$$

$$(12) \int_1^{e+1} x^2 \ln(x-1) dx;$$

$$(13) \int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx;$$

$$(14) \int_0^1 e^{\sqrt{x+1}} dx;$$

$$(15) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}};$$

$$(16) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

$$(17) \int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4 dx;$$

$$(18) \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx;$$

$$(19) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$$

$$(20) \int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}} dx.$$

解 (1) $\int_0^1 x^2(2-x^2)^2 dx = \int_0^1 (4x^2 - 4x^4 + x^6) dx = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7} = \frac{71}{105}.$

$$(2) \int_1^2 \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$(3) \int_0^2 (2^x + 3^x)^2 dx = \int_0^2 (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{15}{\ln 4} + \frac{70}{\ln 6} + \frac{40}{\ln 3}.$$

$$(4) \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-4x^2)^{10} dx = -\frac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x^2)^{10} d(1-4x^2) \\ = -\frac{1}{88} (1-4x^2)^{11} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{88}.$$

$$(5) \int_{-1}^1 \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d(x+1)^2}{[(x+1)^2+4]^2} = -\frac{1}{2(x^2+2x+5)} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{16}.$$

$$(6) \int_0^1 \arcsin x dx = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$(7) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = 0. \text{ (奇函数在对称区间上的积分为零)}$$

$$(8) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx \\ = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}.$$

$$(9) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (1 - \cos 2x) dx, \text{ 由}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x dx \\ = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2e^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx,$$

得到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{5}$, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1) + \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{10} = \frac{3e^{\frac{\pi}{2}} - 2}{5}.$$

$$(10) \int_1^e \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) \Big|_1^e - \int_1^e \cos(\ln x) dx \\ = e(\sin 1 - \cos 1) + 1 - \int_1^e \sin(\ln x) dx,$$

所以

$$\int_1^e \sin(\ln x) dx = \frac{e}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (11) \int_0^1 x^2 \arctan x dx &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\ln 2 - 1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12) \int x^2 \ln(x-1) dx &= \frac{1}{3} x^3 \ln(x-1) - \frac{1}{3} \int \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} (x^3 - 1) \ln(x-1) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x \right) + C, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_1^{e+1} x^2 \ln(x-1) dx &= \frac{1}{3} (x^3 - 1) \ln(x-1) \Big|_1^{e+1} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x \right) \Big|_1^{e+1} \\ &= \frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{2} e^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (13) \int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} \Big|_0^{\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\ln 2}} e^{-x^2} d(x^2) \\ &= -\frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{\sqrt{\ln 2}} = \frac{1 - \ln 2}{4}. \end{aligned}$$

(14) 令 $t = \sqrt{x+1}$, 则 $x = t^2 - 1$, 于是

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x+1}} dx = 2 \int_1^{\sqrt{2}} e^{2t} t dt = t e^{2t} \Big|_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} e^{2t} dt = e^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} e^2.$$

$$\begin{aligned} (15) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} &= - \int_0^1 \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+e^{-2x}}} = -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) \Big|_0^1 = \ln \frac{e(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{1+e^2}} \\ &= \ln(\sqrt{1+e^2} - 1) + \ln(\sqrt{2} + 1) - 1. \end{aligned}$$

(16) 令 $x = \sin t$, 则

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos^2 t} = 2 \tan t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3} \sqrt{3}.$$

(17) 令 $t = \frac{x-1}{x+1}$, 则 $x = \frac{1+t}{1-t}$, $dx = \frac{2dt}{(1-t)^2}$, 于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4 dx &= \int_{-1}^0 \frac{2t^4}{(1-t)^2} dt = 2 \int_{-1}^0 \left(t^2 + 2t + 3 - \frac{4}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} \right) dt \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} t^3 + t^2 + 3t + 4 \ln(1-t) + \frac{1}{1-t} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{17}{3} - 8 \ln 2. \end{aligned}$$

注 本题也可令 $t = x + 1$, 得到

$$\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4 dx = \int_1^2 \frac{(t-2)^4}{t^4} dt = \frac{17}{3} - 8 \ln 2.$$

$$(18) \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int_0^1 \frac{d(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

$$(19) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{d(x^{-1})}{\sqrt{1+x^{-2}}} = - \ln(x^{-1} + \sqrt{1+x^{-2}}) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} (20) \int_0^1 x \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx &= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx \\ &= - \int_0^1 \frac{2x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx = - \int_0^1 \frac{d(2x-x^2)}{\sqrt{2x-x^2}} + 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \\ &= - \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt - 2 \sqrt{2x-x^2} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} \\ &= -\frac{\pi}{4} - 2 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi - 2. \end{aligned}$$

注 本题也可令 $x = 1 + \sin t$, 得到

$$\int_0^1 x \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 + \sin t)^2 dt = \frac{3}{4}\pi - 2.$$

7. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

解 (1) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} \right) \frac{1}{n} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$

$$(2) \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^p \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

$$(3) \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sin \frac{i}{n} \pi \right) \frac{1}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}.$$

8. 求下列定积分:

$$(1) \int_0^{\pi} \cos^n x dx;$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x dx;$$

$$(3) \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx; \quad (4) \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 (1 - 4x^2)^{10} dx;$$

$$(5) \int_0^1 x^n \ln^m x dx; \quad (6) \int_1^e x \ln^n x dx.$$

解 (1) $\int_0^\pi \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^n x dx,$

在第二个积分中, 令 $t = \pi - x$, 则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^n x dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n (\pi - t) dt = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt,$$

所以当 n 为奇数时, $\int_0^\pi \cos^n x dx = 0$;

当 n 为偶数时, $\int_0^\pi \cos^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2} \pi.$

(2) 当 n 为奇数时, 显然 $\int_{-\pi}^\pi \sin^n x dx = 0$;

当 n 为偶数时,

$$\int_{-\pi}^\pi \sin^n x dx = 2 \int_0^\pi \sin^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x dx,$$

在积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x dx$ 中, 令 $t = \pi - x$, 则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n (\pi - t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt,$$

所以

$$\int_{-\pi}^\pi \sin^n x dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2} 2\pi.$$

(3) 令 $x = a \sin t$, 则

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx = a^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} a^{2n+1}.$$

(4) 令 $x = \frac{1}{2} \sin t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 (1 - 4x^2)^{10} dx &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{21} t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{21} t - \cos^{23} t) dt \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{20!!}{21!!} - \frac{22!!}{23!!} \right) = \frac{1}{184} \cdot \frac{20!!}{21!!}. \end{aligned}$$

(5) $\int_0^1 x^n \ln^m x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln^m x \Big|_0^1 - \frac{m}{n+1} \int_0^1 x^n \ln^{m-1} x dx$

$$= -\frac{m}{n+1} \int_0^1 x^n \ln^{m-1} x dx = \cdots = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^m} \int_0^1 x^n dx$$

$$= (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

$$(6) \int_1^e x \ln^n x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^n x \Big|_1^e - \frac{n}{2} \int_1^e x \ln^{n-1} x dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{n}{2} \int_1^e x \ln^{n-1} x dx$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - \frac{n}{2} \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{n-1}{2} \int_1^e x \ln^{n-2} x dx \right) = \cdots$$

$$= \frac{e^2}{2} \left[-1 \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2^2} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n-1}} \right] + (-1)^n \frac{n!}{2^n} \int_1^e x dx$$

$$= \frac{e^2}{2} \left[-1 \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2^2} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}} \right] + (-1)^{n+1} \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx;$$

$$(2) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

证 (1) 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

(2) 令 $t = \pi - x$, 则

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx,$$

所以

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

10. 利用上题结果计算:

$$(1) \int_0^{\pi} x \sin^4 x dx; \quad (2) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx;$$

$$(3) \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

解 (1) $\int_0^{\pi} x \sin^4 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^4 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{16} \pi^2.$

$$(2) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \arctan \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4} \pi^2.$$

$$(3) \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan x)}{1 + 2 \tan^2 x} \\ = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi^2.$$

11. 求下列定积分:

$$(1) \int_0^6 x^2 [x] dx; \quad (2) \int_0^2 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx;$$

$$(3) \int_0^1 x |x - a| dx; \quad (4) \int_0^2 [e^x] dx.$$

解 (1) $\int_0^6 x^2 [x] dx$
 $= \int_1^2 x^2 dx + 2 \int_2^3 x^2 dx + 3 \int_3^4 x^2 dx + 4 \int_4^5 x^2 dx + 5 \int_5^6 x^2 dx = 285.$

$$(2) \int_0^2 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^2 (-1) dx = 0.$$

(3) 当 $a \leq 0$ 时,

$$\int_0^1 x |x - a| dx = \int_0^1 x(x - a) dx = \frac{1}{3} - \frac{a}{2};$$

当 $0 < a < 1$ 时,

$$\int_0^1 x |x - a| dx = \int_0^a x(a - x) dx + \int_a^1 x(x - a) dx = \frac{1}{3} a^3 - \frac{a}{2} + \frac{1}{3};$$

当 $a \geq 1$ 时,

$$\int_0^1 x |x - a| dx = \int_0^1 x(a - x) dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}.$$

$$(4) \int_0^2 [e^x] dx = \int_0^{\ln 2} 1 dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2 dx + \int_{\ln 3}^{\ln 4} 3 dx + \int_{\ln 4}^{\ln 5} 4 dx \\ + \int_{\ln 5}^{\ln 6} 5 dx + \int_{\ln 6}^{\ln 7} 6 dx + \int_{\ln 7}^2 7 dx \\ = 14 - \ln(7!).$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且关于 $x = T$ 对称, 这里 $a < T < b$. 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{2T-b} f(x) dx + 2 \int_T^b f(x) dx.$$

并给出它的几何解释.

证 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{2T-b} f(x)dx + \int_{2T-b}^T f(x)dx + \int_T^b f(x)dx,$

由于 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称, 所以 $f(2T-x)=f(x)$, 于是, 令 $x=2T-t$, 则

$$\int_{2T-b}^T f(x)dx = - \int_b^T f(2T-t)dt = \int_T^b f(2T-t)dt = \int_T^b f(t)dt = \int_T^b f(x)dx,$$

所以

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{2T-b} f(x)dx + 2 \int_T^b f(x)dx.$$

从几何上说, 由于 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称, 所以积分 $\int_{2T-b}^T f(x)dx$ 与积分 $\int_T^b f(x)dx$ 表示的是相同的面积, 从而上述等式成立.

13. 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0. \end{cases}$ 计算 $I = \int_1^4 f(x-2)dx.$

解 令 $t = x-2$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^t}dt + \int_0^2 te^{-t^2}dt \\ &= - \int_{-1}^0 \frac{d(e^{-t}+1)}{e^{-t}+1} + \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-t^2}d(t^2) = \ln \frac{e+1}{2} + \frac{1}{2}(1-e^{-4}). \end{aligned}$$

14. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$, 其中函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$

上连续, 且 $g(1)=5$, $\int_0^1 g(t)dt=2$, 证明 $f'(x) = x \int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt$, 并计算 $f''(1)$ 和 $f'''(1)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x (x^2 - 2xt + t^2)g(t)dt \\ &= \frac{1}{2}x^2 \int_0^x g(t)dt - x \int_0^x tg(t)dt + \frac{1}{2} \int_0^x t^2 g(t)dt, \end{aligned}$$

等式两边求导, 得到

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \int_0^x g(t)dt + \frac{1}{2}x^2 g(x) - \left(\int_0^x tg(t)dt + x^2 g(x) \right) + \frac{1}{2}x^2 g(x) \\ &= x \int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt. \end{aligned}$$

再求导, 得到 $f''(x) = \int_0^x g(t)dt$, $f'''(x) = g(x)$ 所以

$$f''(1) = 2, f'''(1) = 5.$$

15. 设 $(0, +\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \ln x - \int_1^e f(x)dx$, 求 $\int_1^e f(x)dx$.

解 记 $\int_1^e f(x)dx = a$, 则 $f(x) = \ln x - a$, 于是

$$a = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \ln x dx - a(e-1),$$

所以

$$a = \frac{1}{e} \int_1^e \ln x dx = \frac{1}{e} (x \ln x - x) \Big|_1^e = \frac{1}{e}.$$

16. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^1 tf(2x-t)dt = \frac{1}{2} \arctan(x^2)$, $f(1) = 1$. 求 $\int_1^2 f(x)dx$.

解 在 $\int_0^1 tf(2x-t)dt$ 中, 令 $u = 2x - t$, 则

$$\int_0^1 tf(2x-t)dt = - \int_{2x}^{2x-1} (2x-u)f(u)du,$$

于是

$$2x \int_{2x-1}^{2x} f(u)du - \int_{2x-1}^{2x} uf(u)du = \frac{1}{2} \arctan(x^2),$$

两边求导, 得到

$$2 \int_{2x-1}^{2x} f(u)du + 4x(f(2x) - f(2x-1)) - 2(2xf(2x) - (2x-1)f(2x-1)) = \frac{x}{1+x^4},$$

将 $x=1$, $f(1)=1$ 代入上式, 得到

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{4}.$$

17. 求 $\int_0^{n\pi} x |\sin x| dx$, 其中 n 为正整数.

解 首先有

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x |\sin x| dx = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x \sin x dx = (4k+1)\pi,$$

$$\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} x |\sin x| dx = - \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} x \sin x dx = (4k-1)\pi.$$

当 $n = 2m$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x |\sin x| dx + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} x |\sin x| dx \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} [(4k+1) + (4k+3)\pi] = 4m^2\pi; \end{aligned}$$

当 $n = 2m+1$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x |\sin x| dx + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} x |\sin x| dx \right) + \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} x |\sin x| dx. \\ &= 4m^2\pi + (4m+1)\pi = (2m+1)^2\pi \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{n\pi} x |\sin x| dx = n^2\pi.$$

18. 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$.

解 设 $n\pi < x \leq (n+1)\pi$, n 为正整数, 则 $\frac{x}{n} \rightarrow \pi$ ($x \rightarrow +\infty$). 由于

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx = n \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2n, 0 \leq \int_{n\pi}^x |\cos x| dx \leq \pi,$$

可知

$$\frac{2n}{x} \leq \frac{S(x)}{x} \leq \frac{2n+\pi}{x},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

19. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且对于任何 $a > 0$ 有

$$g(x) = \int_x^{ax} f(t) dt \equiv \text{常数}, x \in (0, +\infty).$$

证明: $f(x) = \frac{c}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, 其中 c 为常数.

证 在 $g(x) = \int_x^{ax} f(t) dt$ 两边关于 x 求导, 得到

$$g'(x) = af(ax) - f(x) \equiv 0.$$

取 $x=1$, 则 $f(a) = \frac{f(1)}{a}$, 此式对任何 $a > 0$ 都成立. 记 $c = f(1)$, 就得到

$$f(x) = \frac{c}{x}, x \in (0, +\infty).$$

20. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 证明:

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx = (\ln 2) \int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{1}{x} dx.$$

证 令 $t = \frac{4}{x}$, 则 $x = \frac{4}{t}$, $dx = -\frac{4}{t^2} dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx &= \int_4^1 f\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}\right) \frac{t(\ln 4 - \ln t)}{4} \left(-\frac{4}{t^2}\right) dt \\ &= \int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln 4 - \ln x}{x} dx, \end{aligned}$$

所以

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx = (\ln 2) \int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{1}{x} dx.$$

21. 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

证 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 可设 $|f(\xi)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, $\xi \in [a, b]$ 及 $|f(\eta)| = \min_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, $\eta \in [a, b]$. 于是

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| - \min_{a \leq x \leq b} |f(x)| &= |f(\xi)| - |f(\eta)| \leq |f(\xi) - f(\eta)| \\ &= \left| \int_{\eta}^{\xi} f'(x) dx \right| \leq \int_a^b |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

另一方面, 由积分中值定理, $\exists \zeta \in [a, b]$, 使 $f(\zeta) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, 于是

$$\min_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq |f(\zeta)| = \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|.$$

所以

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| &= \min_{a \leq x \leq b} |f(x)| + (\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| - \min_{a \leq x \leq b} |f(x)|) \\ &\leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

22. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 证明:

$$\int_0^x f(u)(x-u) du = \int_0^x \left\{ \int_0^u f(x) dx \right\} du.$$

证 利用分部积分法,

$$\int_0^x \left\{ \int_0^u f(x) dx \right\} du = \left(u \int_0^u f(x) dx \right) \Big|_0^x - \int_0^x u f(u) du = \int_0^x f(u)(x-u) du.$$

注 本题也可令 $F(x) = \int_0^x f(u)(x-u) du - \int_0^x \left\{ \int_0^u f(x) dx \right\} du$, 证明 $F'(x) \equiv 0$.

23. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上二阶可导 ($a > 0$), 且 $f''(x) \geq 0$, 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq af\left(\frac{a}{2}\right).$$

证 将 $f(x)$ 在 $x = \frac{a}{2}$ 展开成 1 阶 Taylor 公式, 有

$$f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \quad (0 < \xi < a),$$

由 $f''(x) \geq 0$, 得到

$$f(x) \geq f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

对上述不等式两边从 0 到 a 积分, 由于 $\int_0^a \left(x - \frac{a}{2}\right) dx = 0$, 就得到

$$\int_0^a f(x) dx \geq af\left(\frac{a}{2}\right).$$

24. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) \leq 0, x \in [0, 1]$, 证明:

$$\int_0^1 f(x^2) dx \leq f\left(\frac{1}{3}\right).$$

证 将 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 展开成 1 阶 Taylor 公式, 有

$$f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \quad (0 < \xi < 1).$$

由 $f''(x) \leq 0$, 得到 $f(x) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right), x \in [0, 1]$, 再用 x^2 替换 x , 即得到

$$f(x^2) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

对上述不等式两边从 0 到 1 积分, 由于 $\int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = 0$, 就得到

$$\int_0^1 f(x^2) dx \leq f\left(\frac{1}{3}\right).$$

25. 设 $f(x)$ 为 $[0, 2\pi]$ 上的单调减少函数, 证明: 对任何正整数 n 成立

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \geq 0.$$

证 $\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x) \sin nx dx + \int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x) \sin nx dx \right),$
 在 $\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x) \sin nx dx$ 与 $\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x) \sin nx dx$ 中, 分别令 $x = \frac{2k\pi+t}{n}$ 与 $x = \frac{(2k+1)\pi+t}{n}$, 得到

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right) \sin t dt,$$

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x) \sin nx dx = -\frac{1}{n} \int_0^{\pi} f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right) \sin t dt.$$

由于 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上单调减少, $\sin t$ 在 $[0, \pi]$ 上非负, 所以

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \left(f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right) - f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right) \right) \sin t dt \geq 0.$$

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0, \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0.$

证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0.$

证法一 设 $g(x) = \int_0^x f(t) dt, h(x) = \int_0^x g(x) \sin x dx$, 则

$$g(0) = g(\pi) = 0,$$

$$h(0) = 0,$$

$$h(\pi) = \int_0^{\pi} g(x) \sin x dx = - \int_0^{\pi} g(x) d(\cos x)$$

$$= -g(x) \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0,$$

对 $h(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上应用 Rolle 定理, 可知存在 $\eta \in (0, \pi)$, 使得

$$h'(\eta) = g(\eta) \sin \eta = 0,$$

即 $g(\eta) = 0$, 再在 $[0, \eta]$ 和 $[\eta, \pi]$ 上对 $g(x)$ 分别运用 Rolle 定理, 可知 $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$, 使得

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0.$$

证法二 由 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$ 及零点存在合理, $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上必有零点. 用

反证法. 若不然, 只有一个点 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 由于 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连

续, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \xi)$ 和 (ξ, π) 上异号, 不妨设在 $(0, \xi)$ 中 $f(x) < 0$, 在 (ξ, π) 中 $f(x) > 0$.

设 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $g(0) = g(\pi) = 0$, $g'(x) = f(x)$, 可知 $g(x)$ 在 $(0, \xi)$ 中单调减少, 而在 (ξ, π) 中单调增加, 从而 $g(x) \leq 0, x \in [0, \pi]$.

另一方面, $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上不恒等于零 (否则 $f(x)$ 恒为零与反证法假设矛盾), 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx &= \int_0^{\pi} \cos x d(g(x)) = g(x) \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} g(x) \sin x dx \\ &= \int_0^{\pi} g(x) \sin x dx < 0, \end{aligned}$$

与题设矛盾.

§4

定积分在几何计算中的应用

1. 求下列曲线所围的图形面积:

(1) $y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2$;

(2) $y^2 = 4(x+1), y^2 = 4(1-x)$;

(3) $y = x, y = x + \sin^2 x, x = 0, x = \pi$;

(4) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$;

(5) $y = |\ln x|, y = 0, x = 0.1, x = 10$;

(6) 叶形线 $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3, \end{cases} 0 \leq t \leq 2$;

(7) 星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$;

(8) Archimedes 螺线 $r = a\theta, \theta = 0, \theta = 2\pi$;

(9) 对数螺线 $r = ae^{\theta}, \theta = 0, \theta = 2\pi$;

(10) 蚌线 $r = a \cos \theta + b (b \geq a > 0)$;

(11) $r = 3 \cos \theta, r = 1 + \cos \theta, (-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3})$;

(12) 双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$;

(13) 四叶玫瑰线 $r = a \cos 2\theta$;

(14) Descartes 叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy$;

(15) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

解 (1) 而积 $A = \int_1^2 (x - \frac{1}{x}) dx = (\frac{1}{2}x^2 - \ln x) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2$.

$$(2) \text{ 面积 } A = 2 \int_0^2 \left(\left(1 - \frac{y^2}{4}\right) - \left(\frac{y^2}{4} - 1\right) \right) dy = 2 \int_0^2 \left(2 - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{16}{3}.$$

$$(3) \text{ 面积 } A = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$(4) \text{ 面积 } A = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e + \frac{1}{e} - 2.$$

$$\begin{aligned} (5) \text{ 面积 } A &= \int_{0.1}^{10} |\ln x| dx = \int_1^{10} \ln x dx - \int_{0.1}^1 \ln x dx \\ &= x(\ln x - 1) \Big|_1^{10} - x(\ln x - 1) \Big|_{0.1}^1 \\ &= \frac{99}{10} \ln 10 - \frac{81}{10}. \end{aligned}$$

$$(6) \text{ 面积 } A = \left| \int_0^2 (2t^2 - t^3)(2 - 2t) dt \right| = 2 \left| \int_0^2 (2t^2 - 3t^3 + t^4) dt \right| = \frac{8}{15}.$$

$$\begin{aligned} (7) \text{ 面积 } A &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (\sin t) dt \\ &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \\ &= 12a^2 \left(\frac{3}{16}\pi - \frac{15}{96}\pi \right) = \frac{3}{8}\pi a^2. \end{aligned}$$

$$(8) \text{ 面积 } A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \theta^2 d\theta = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

$$(9) \text{ 面积 } A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 e^{2\theta} d\theta = \frac{1}{4}(e^{4\pi} - 1)a^2.$$

$$\begin{aligned} (10) \text{ 面积 } A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \theta + 2ab \cos \theta + b^2) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta + b^2 \pi = \frac{1}{2}\pi a^2 + \pi b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (11) \text{ 面积 } A &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [(3 \cos \theta)^2 - (1 + \cos \theta)^2] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (3 + 4 \cos 2\theta - 2 \cos \theta) d\theta = \pi. \end{aligned}$$

$$(12) \text{ 面积 } A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2.$$

$$(13) \text{ 面积 } A = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos^2 2\theta d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{2}\pi a^2.$$

(14) 解法一 令 $y = tx$, 则 $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $t: 0 \rightarrow +\infty$.

于是面积

$$A = \left| \int_0^{+\infty} \frac{3at^2}{1+t^3} \left(\frac{3at}{1+t^3} \right)' dt \right| = 9a^2 \left| \int_0^{+\infty} \frac{(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3} dt \right|,$$

令 $u = t^3$, 则

$$\begin{aligned} A &= 3a^2 \left| \int_0^{+\infty} \frac{(1-2u)}{(1+u)^3} du \right| = 3a^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{(1+u)^2} - \frac{3}{(1+u)^3} \right) du \\ &= \frac{3}{2}a^2. \end{aligned}$$

解法二 将 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 代入 $x^3 + y^3 = 3axy$ 中, 得到

$$r = \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

于是面积

$$\begin{aligned} A &= \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 \theta}{(\tan^3 \theta + 1)^2} d(\tan \theta) \\ &= -\frac{3a^2}{2} \cdot \frac{1}{\tan^3 \theta + 1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a^2. \end{aligned}$$

(15) 将 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 代入 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 中, 得到

$$r^2 = \frac{a^2}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta},$$

于是面积

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta} d\theta \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^4 \theta + 1} d(\tan \theta), \end{aligned}$$

令 $t = \tan \theta$, 则

$$\begin{aligned} A &= 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt = 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{d(t - t^{-1})}{(t - t^{-1})^2 + 2} \\ &= \sqrt{2}a^2 \arctan \frac{t - t^{-1}}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\pi a^2. \end{aligned}$$

2. 求由抛物线 $y^2 = 4ax$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

解 选取焦点 $(a, 0)$ 为极点, x 轴为极轴, 建立极坐标系. 则由 $x = r \cos \theta$

+a, $y = r \sin \theta$ 代入抛物线的方程 $y^2 = 4ax$ 中, 可得抛物线的极坐标方程为

$$r = \frac{2a}{1 - \cos \theta}.$$

设过焦点的弦的极角为 α , 则它与抛物线所围的面积为

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{4a^2}{(1 - \cos \theta)^2} d\theta.$$

由

$$A'(\alpha) = 2a^2 \left(\frac{1}{(1 + \cos \alpha)^2} - \frac{1}{(1 - \cos \alpha)^2} \right) = -\frac{8a^2 \cos \alpha}{\sin^4 \alpha},$$

令 $A'(\alpha) = 0$, 得到 $\alpha = \frac{\pi}{2}$. 由于当 $\alpha < \frac{\pi}{2}$ 时, $A'(\alpha) < 0$; 当 $\alpha > \frac{\pi}{2}$ 时, $A'(\alpha) > 0$,

所以 $A(\alpha)$ 在 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 取到极小值, 也就是最小值

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} d\theta \\ &= -a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 \frac{\theta}{2}) d(\cot \frac{\theta}{2}) = \frac{8}{3} a^2. \end{aligned}$$

3. 求下列曲线的弧长:

(1) $y = x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 4;$

(2) $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}, 1 \leq y \leq e;$

(3) $y = \ln \cos x, 0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2};$

(4) 星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi;$

(5) 圆的渐开线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi;$

(6) 心脏线 $r = a(1 - \cos \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi;$

(7) Archimedes 螺线 $r = a\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi;$

(8) $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}, 0 \leq \theta \leq 3\pi.$

解 (1) $L = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{80\sqrt{10} - 8}{27}.$

(2) $L = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4}(y - y^{-1})^2} dy = \int_1^e \frac{1}{2}(y + y^{-1}) dy = \frac{e^2 + 1}{4}.$

$$(3) L = \int_0^a \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^a \sec x dx = \ln(\tan a + \sec a).$$

$$(4) L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t dx = 6a.$$

(5) 由 $x'(t) = at \cos t, y'(t) = at \sin t$, 可得

$$L = \int_0^{2\pi} at dt = 2\pi^2 a.$$

$$(6) L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 8a.$$

$$(7) L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta$$

$$= \pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}).$$

$$(8) L = \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta = \frac{3}{2} \pi a.$$

4. 在旋轮线的第一拱上, 求分该拱的长度为 1:3 的点的坐标.

解 设所求点所对应的参数为 α , 则

$$L_1 = \int_0^{\alpha} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 4a(1 - \cos \frac{\alpha}{2}),$$

$$L_2 = \int_{\alpha}^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 4a(1 + \cos \frac{\alpha}{2}),$$

由 $L_2 = 3L_1$, 得 $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, 即 $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, 所以该点的坐标为 $((\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})a, \frac{3a}{2})$.

5. 求下列几何体的体积:

(1) 正椭圆台: 上底是长半轴为 a 、短半轴为 b 的椭圆, 下底是长半轴为 A 、短半轴为 B 的椭圆 ($A > a, B > b$), 高为 h ;

(2) 椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$;

(3) 直圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 和 $x^2 + z^2 = a^2$ 所围的几何体;

(4) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和直圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 所围的几何体.

$$\begin{aligned} \text{解 (1) } V &= \int_0^h \pi(a + \frac{A-a}{h}x)(b + \frac{B-b}{h}x) dx \\ &= \frac{\pi h}{6} (2AB + 2ab + Ab + aB). \end{aligned}$$

$$(2) V = \int_{-c}^c \pi ab(1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = \frac{4}{3} \pi abc.$$

(3) 用平行于 Oyz 平面的平面去截这立体的第一卦限的部分, 截面为正方形, 于是

$$V = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} a^3.$$

(4) 用平行于 Oyz 平面的平面去截这立体, 则截面积为

$$\begin{aligned} A(x) &= 2 \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy \\ &= 2 \sqrt{ax - x^2} \sqrt{a^2 - ax} + 2(a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}}. \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned} & \int_0^a (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx \\ &= \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} d(a^2 x - \frac{1}{3} x^3) \\ &= (a^2 x - \frac{1}{3} x^3) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \Big|_0^a - \int_0^a (a^2 x - \frac{1}{3} x^3) \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}(a+x)} dx \\ &= (\frac{\pi}{3} - \frac{32}{45}) a^3, \end{aligned}$$

及

$$\int_0^a \sqrt{ax - x^2} \sqrt{a^2 - ax} dx = \sqrt{a} \int_0^a \sqrt{x(a-x)} dx = \frac{4}{15} a^3,$$

得到

$$V = (\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}) a^3.$$

6. 证明以下旋转体的体积公式:

(1) 设 $f(x) \geq 0$ 是连续函数, 由 $0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$ 所表示的区域绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx;$$

(2) 在极坐标下, 由 $0 \leq \alpha \leq \theta \leq \beta \leq \pi, 0 \leq r \leq r(\theta)$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin \theta d\theta.$$

证 (1) 作区间 $[a, b]$ 的划分 $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 则关于小区域 $\{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, 0 \leq y \leq f(x)\}$ 绕 y 轴旋转所得的体积为

$$\Delta V_i \approx \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2)f(x_i) \approx 2\pi x_i f(x_i)\Delta x_i,$$

于是 $V \approx \sum_{i=1}^n 2\pi x_i f(x_i)\Delta x_i$.

设 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i|$, 令 $\lambda \rightarrow 0$, 就有

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.$$

(2) 证法一 设 $x = r(\theta)\cos \theta, y = r(\theta)\sin \theta, a = r(\alpha)\cos \alpha, b = r(\beta)\cos \beta$, 则

$$\begin{aligned} V &= \int_b^a \pi y^2 dx - \frac{1}{3}\pi ar^2(\alpha)\sin^2 \alpha + \frac{1}{3}\pi br^2(\beta)\sin^2 \beta \\ &= \int_b^a \pi y^2 dx + \frac{1}{3}\pi \int_a^b d(y^2 x) \\ &= \int_\beta^\alpha \pi r^2 \sin^2 \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{3}\pi \int_\alpha^\beta (3r^2 r' \sin^2 \theta \cos \theta + 2r^3 \sin \theta \cos^2 \theta - r^3 \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

证法二 首先, 由 $0 \leq \theta \leq \beta \leq \pi, 0 \leq r \leq a$ 所表示的扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V = \frac{\pi}{3} a^2 \sin^2 \beta a \cos \beta + \pi \int_{a \cos \beta}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2\pi}{3} (1 - \cos \beta) a^3.$$

然后作 $[\alpha, \beta]$ 的划分: $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \beta$, 考察由 $\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i, 0 \leq r \leq r(\theta)$ 所表示的小曲边扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积, 这小块可近似看作扇形, 于是这小块的体积应近似等于

$$\begin{aligned} \Delta V_i &\approx \frac{2\pi}{3} r^3(\theta_i)(1 - \cos \theta_i) - \frac{2\pi}{3} r^3(\theta_i)(1 - \cos \theta_{i-1}) \\ &\approx \frac{2\pi}{3} r^3(\theta_i) \cdot \sin \theta_i \Delta \theta_i, \end{aligned}$$

从而

$$V \approx \sum_{i=1}^n \frac{2\pi}{3} r^3(\theta_i) \sin \theta_i \Delta \theta_i.$$

令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta \theta_i| \rightarrow 0$, 就有

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin \theta d\theta.$$

7. 求下列曲线绕指定轴旋转一周所围成的旋转体的体积:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 绕 x 轴;

(2) $y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$, (i) 绕 x 轴, (ii) 绕 y 轴;

(3) 星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$, 绕 x 轴;

(4) 旋轮线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} t \in [0, 2\pi], y = 0$, (i) 绕 y 轴, (ii) 绕直线 y

$= 2a$;

(5) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$), 绕 x 轴;

(6) 心脏线 $r = a(1 - \cos \theta)$, 绕极轴;

(7) 对数螺线 $r = ae^\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, 绕极轴;

(8) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, 绕 x 轴.

解 (1) $V = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi ab^2$.

(2) (i) $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \pi^2$;

(ii) $V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi^2$.

(3) $V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = 3\pi a^3 \int_0^\pi \sin^7 t \cos^2 t dt$

$$= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 t - \sin^9 t) dt = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

(4) (i) $V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx = 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = 6\pi^2 a^3$;

(ii) $V = \pi^2 (2a)^3 - \pi \int_0^{2\pi} [2a - a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t) dt = 7\pi^2 a^3$.

(5) $V = \pi \int_{-a}^a ((b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2) dx$

$$= 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b.$$

(6) 由第 6 题(2), 得

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3 (1 - \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{8}{3} \pi a^3.$$

(7) $V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3 e^{3\theta} \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{15} (e^{3\pi} + 1) a^3$.

(8) $V = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \sin \theta d\theta$, 令 $t = \cos \theta$, 则

$$V = \frac{4\pi}{3} a^3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt.$$

由

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt &= t(2t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 - 6 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 t^2 (2t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 1 - 3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt - 3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt, \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{8\sqrt{2}} (\sqrt{2}t \sqrt{2t^2 - 1} - \ln|\sqrt{2}t + \sqrt{2t^2 - 1}|) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{16} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

所以

$$V = \frac{4\pi}{3} a^3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{\pi}{4} \left[\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{2}{3} \right] a^3.$$

8. 将抛物线 $y = x(x - a)$ 与 $y = 0$ 所界的区域在 $x \in [0, a]$ 和 $x \in [a, c]$ 的弧段分别绕 x 轴旋转一周后, 所得到旋转体的体积相等, 求 c 与 a 的关系.

解
$$\pi \int_0^a x^2 (x - a)^2 dx = \pi \int_a^c x^2 (x - a)^2 dx,$$

积分后化简, 得到

$$2a^5 - 10a^2c^3 + 15ac^4 - 6c^5 = 0.$$

9. 记 $V(\xi)$ 是曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 与 $y = 0$ 所界的区域在 $x \in [0, \xi]$ 的弧段绕 x 轴旋转一周所围成的旋转体的体积, 求常数 a 使得满足

$$V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi).$$

解 由

$$V(a) = \pi \int_0^a \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi a^2}{2(1+a^2)},$$

可知 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi) = \frac{\pi}{2}$, 于是得到 $\frac{a^2}{1+a^2} = \frac{1}{2}$, 解得 $a = 1$.

10. 将椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 x 轴旋转一周围成一个旋转椭球体, 再沿 x 轴方向用半径为 r ($r < b$) 的钻头打一个穿心的圆孔, 剩下的体积恰为原来椭球体体积的一半, 求 r 的值.

解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 x 轴旋转一周所围成的旋转椭球体的体积为

$$V_1 = 2\pi \int_0^a \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 dx = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

割下部分的体积为

$$\begin{aligned} V_2 &= 2\pi r^2 \cdot \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - r^2} + 2\pi \int_{\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - r^2}}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(ab^2 - \frac{a}{b} (b^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned}$$

由 $V_1 = 2V_2$, 解得 $r = b \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

11. 设直线 $y = ax$ ($0 < a < 1$) 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的图形的面积为 S_1 , 且它们与直线 $x = 1$ 所围成图形的面积为 S_2 .

(1) 试确定 a 的值, 使得 $S_1 + S_2$ 达到最小, 并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1) $S_1 + S_2 = \int_0^a (ax - x^2) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx = \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{2} a + \frac{1}{3}$.

记 $f(a) = \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{2} a + \frac{1}{3}$, 则 $f'(a) = a^2 - \frac{1}{2}$, $f''(a) = 2a$. 令 $f'(a) = 0$, 得到 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 且 $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} > 0$. 所以 $S_1 + S_2$ 在 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 处取到最小值

$$\min |S_1 + S_2| = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

(2) 旋转体体积

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a [(ax)^2 - x^4] dx + \pi \int_a^1 [x^4 - (ax)^2] dx \\ &= \left(\frac{4}{15} a^5 - \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{5} \right) \pi. \end{aligned}$$

将 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 代入, 就得到

$$V = \frac{\sqrt{2} + 1}{30} \pi.$$

12. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 上大于零, 并满足

$$xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2 \quad (a \text{ 为常数}).$$

进一步, 假设曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1$ 和 $y = 0$ 所围的图形 S 的面积为 2.

(1) 求函数 $f(x)$;

(2) 当 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小?

解 (1) 由 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$, 可得 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{3a}{2}$,

所以 $\frac{f(x)}{x} = \frac{3a}{2}x + C$, 即

$$f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + Cx.$$

对 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$ 两边关于 x 积分, 有

$$\int_0^1 x d(f(x)) = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \frac{a}{2},$$

$$\text{由此可得 } f(1) = 2 \int_0^1 f(x) dx + \frac{a}{2} = 4 + \frac{a}{2},$$

从而 $C = 4 - a$, 于是

$$f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + (4 - a)x.$$

$$(2) \quad V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{\pi}{30}(a^2 + 10a + 160).$$

令 $V' = 0$, 得 $a = -5$, 且这时 $V'' = \frac{\pi}{15} > 0$, 所以在 $a = -5$ 时旋转体的体积取到最小值.

13. 求下列旋转曲面的面积:

(1) $y^2 = 2px, 0 \leq x \leq a$, 绕 x 轴;

(2) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$, 绕 x 轴;

(3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 绕 x 轴;

(4) 星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$, 绕 x 轴;

(5) 心脏线 $r = a(1 - \cos \theta)$, 绕极轴;

(6) 双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, (i) 绕极轴, (ii) 绕射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}\text{解 (1) 面积 } A &= 2\pi \int_0^a \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^a \sqrt{2x+p} dx \\ &= \frac{2\pi\sqrt{p}}{3} [(2a+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(2) 面积 } A &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \\ &= -\pi (\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \ln(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x})) \Big|_0^{\pi} \\ &= 2\sqrt{2}\pi + 2\pi \ln(\sqrt{2} + 1).\end{aligned}$$

(3) 面积

$$\begin{aligned}A &= 2\pi \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)^2} dx \\ &= \frac{4b}{a^2} \pi \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx \\ &= \begin{cases} 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}, & a < b, \\ 4\pi ab, & a = b, \\ 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, & a > b. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(4) 面积 } A &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt \\ &= 12a^2 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\sin t) = \frac{12}{5} \pi a^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(5) 面积 } A &= 2\pi \int_0^{\pi} r \sin \theta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 4a^2 \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos \theta) \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 16a^2 \pi \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{32}{5} \pi a^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(6) (i) 面积 } A &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \sin \theta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \\ &= (4 - 2\sqrt{2})\pi a^2;\end{aligned}$$

$$\text{(ii) 面积 } A = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta = 2\sqrt{2}\pi a^2.$$

14. 设曲线 $y = \sqrt{x-1}$, 过原点作其切线, 求由该曲线、所作切线及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积.

解 由 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, 可设曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 过点 (x_0, y_0) 的切线方程为

$$y - y_0 = \frac{1}{2y_0}(x - x_0),$$

而此切线过原点, 由此可得 $x_0 = 2, y_0 = 1$, 于是切线方程为

$$y = \frac{1}{2}x.$$

旋转体的表面积

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^2 \frac{x}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4}} dx + 2\pi \int_1^2 \sqrt{x-1} \sqrt{1 + \frac{1}{4(x-1)}} dx \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \pi \int_0^2 x dx + \pi \int_1^2 \sqrt{4x-3} dx = \frac{\pi}{6} (11\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

15. 证明: 由空间曲线

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [T_1, T_2] \\ z = z(t), \end{cases}$$

垂直投影到 Oxy 平面所形成的柱面的面积公式为

$$S = \int_{T_1}^{T_2} z(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt,$$

这里假设 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 在 $[T_1, T_2]$ 上连续, 且 $z(t) \geq 0$.

证 作 $[T_1, T_2]$ 的划分: $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T_2$, 设空间曲线对应于小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 的小弧段在 Oxy 平面的投影的长度为 Δs_i , 则

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \\ &= \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2} \Delta t_i, \end{aligned}$$

其中 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. 于是这段小弧段垂直投影到 Oxy 平面所形成的柱面的面积为

$$\Delta S_i \approx z(\xi_i) \Delta s_i = z(\xi_i) \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2} \Delta t_i.$$

令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta t_i|$, 就得到

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n z(\xi_i) \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2} \Delta t_i \\ &= \int_{T_1}^{T_2} z(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

16. 求下列曲线在指定点的曲率和曲率半径:

(1) $xy=4$, 在点 $(2,2)$;

(2) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ($a>0$), 在 $t=\pi/2$ 对应的点.

解 (1) $y' = -\frac{4}{x^2}$, $y'' = \frac{8}{x^3}$, 于是

$$K = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, R = 2\sqrt{2}.$$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1-\cos t)} = \cot \frac{t}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a} \csc^4 \frac{t}{2}$, 于是

$$K = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4a}, R = 2\sqrt{2}a.$$

17. 求下列曲线的曲率和曲率半径:

(1) 抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$);

(2) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

(3) 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a>0$);

(4) 圆的渐开线 $x=a(\cos t + t \sin t)$, $y=a(\sin t - t \cos t)$ ($a>0$).

解 (1) $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$, $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{p}$, 于是

$$K = \frac{\frac{1}{p}}{\left[1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{p^2}{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{p}}{(p+2x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$R = \frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}.$$

(2) 令 $x = a \sec t$, $y = b \tan t$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \frac{\sec^2 t}{\tan t \sec t} = \frac{b}{a} \csc t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{-\cot t \csc t}{\tan t \sec t} = -\frac{b}{a^2} \cot^3 t,$$

于是

$$K = \frac{\frac{b}{a^2} |\cot t|^3}{\left[1 + \left(\frac{b}{a} \csc t\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab |\cot t|^3}{(a^2 + b^2 \csc^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^4 b}{[(a^2 + b^2)x^2 - a^4]^{\frac{3}{2}}},$$

$$R = \frac{[(a^2 + b^2)x^2 - a^4]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}.$$

(3) 令 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\tan t, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{3a} \cdot \frac{1}{\sin t \cos^4 t},$$

于是

$$K = \frac{\frac{1}{3a} \left| \frac{1}{\sin t \cos^4 t} \right|}{(1 + \tan^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3a} \frac{1}{|\sin t \cos t|} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{|axy|}},$$

$$R = 3 \sqrt[3]{|axy|}.$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{a(\cos t - \cos t + t \sin t)}{a(-\sin t + \sin t + t \cos t)} = \tan t, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sec^2 t}{at \cos t} = \frac{1}{at \cos^3 t},$$

于是

$$K = \frac{\left| \frac{1}{at \cos^3 t} \right|}{(1 + \tan^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{at},$$

$$R = at.$$

18. 求曲线 $y = \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的曲率圆方程.

解 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$, 所以曲线在点 $(1, 0)$ 处的曲率为

$$K = \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

曲率半径为 $R = 2\sqrt{2}$. 由于曲线 $y = \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线斜率为 $y' = 1$, 所以法线方程为 $y = -x + 1$, 设 (a, b) 为曲率圆的圆心, 则 $b = -a + 1$. 再由 $(a - 1)^2 + (b - 0)^2 = 8$, 解得 $a = 3, b = -2$, 所以曲率圆的方程为

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8.$$

19. 设曲线的极坐标方程为 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta] (\subset [0, 2\pi])$, 且 $r(\theta)$ 二阶可导. 证明它在点 (r, θ) 处的曲率为

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

证 设曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ 则其曲率为

$$K = \frac{|y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

由 $x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta$, 可得

$$x' = r'\cos\theta - r\sin\theta, y' = r'\sin\theta + r\cos\theta,$$

$$x'' = r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta, y'' = r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta,$$

于是

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2 + r'^2, y''x' - y'x'' = r^2 + 2r'^2 - rr'',$$

所以

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

§5 微积分实际应用举例

1. 一根 10 m 长的轴, 密度分布为 $\rho(x) = (0.3x + 6)\text{kg/m}$ ($0 \leq x \leq 10$), 求轴的质量.

解 $m = \int_0^{10} (0.3x + 6)dx = 75 \text{ (kg)}$, 即轴的质量为 75 kg.

2. 已知抛物线状电缆 $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$) 上的任一点处的电荷线密度与该点到 y 轴的距离成正比, 在 (1, 1) 处的密度为 q , 求此电缆上的总电量.

解 设密度函数 $\rho = \rho(x) = k|x|$, 由 $q = k \cdot 1$ 知 $k = q$.

$$Q = q \int_{-1}^1 |x| \sqrt{1 + 4x^2} dx = q \left. \frac{1}{6} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \right|_0^1 = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 1)q,$$

即此电缆上的总电量为 $\frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 1)q$.

3. 水库的闸门是一个等腰梯形, 上底 36 m, 下底 24 m, 高 16 m, 水平面距上底 4 m, 求闸门所受到的水压力 (水的密度为 1000 kg/m^3).

解 以梯形的上底为 y 轴, 从上底的中点垂直向下为 x 轴正向, 则闸门上离上底距离为 x 处, 高度为 dx 的一段闸门一侧所受的水压力为

$$dF = 1000g(4 + x) \left[24 + \frac{3}{4}(16 - x) \right] dx,$$

于是闸门所受的总的水压力为

$$F = 1000g \int_0^{16} (4 + x) \left[24 + \frac{3}{4}(16 - x) \right] dx \approx 5.4 \times 10^7 \text{ (N)}.$$

4. 一个弹簧满足圆柱螺线方程

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, t > 0 \ (a > 0, b > 0), \\ z = bt, \end{cases}$$

其上任一点处的密度与它到 Oxy 平面的距离成正比, 试求其第一圈的质量.

解 质量 $m = \int_0^{2\pi} \rho b t \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\rho b \sqrt{a^2 + b^2} \pi^2.$

5. 一个圆柱形水池半径 10 m, 高 30 m, 内有一半的水, 求将水全部抽干所要做的功.

解 $W = \int_{15}^{30} x \cdot 10^3 g \cdot \pi 10^2 dx = 1.04 \times 10^9 \text{ (J)}.$

6. 半径为 r 的球恰好没于水中, 球的密度为 ρ , 现在要将球吊出水面, 最少要做多少功?

解 考虑对水下离水面距离为 x 处, 厚度为 dx 的圆形薄片的做功情况: 半径为 r 的球恰好离开水面, 则圆形薄片的位移恰为 $2r$, 其在水中移动的距离为 x , 在水上移动的距离为 $2r - x$. 薄片的面积为 $(2rx - x^2)\pi$, 设 ρ_0 为水的密度, 则将球恰好吊出水面至少要做的功为

$$\begin{aligned} W &= \rho g \pi \int_0^{2r} (2r - x)(2rx - x^2) dx + (\rho - \rho_0) g \pi \int_0^{2r} x(2rx - x^2) dx \\ &= \frac{4}{3} \pi r^4 g (2\rho - \rho_0). \end{aligned}$$

7. 半径为 r 密度为 ρ 的球壳以角速度 ω 绕其直径旋转, 求它的动能.

解 以球壳的左端为坐标原点, 向右为 x 轴, 向上为 y 轴, 将球壳看作是一个半圆 $y = \sqrt{2rx - x^2}$ 绕 x 轴旋转一周而成, 则在 x 处宽度为 dx 的球壳面积微元的质量为

$$\begin{aligned} dm &= 2\pi\rho \sqrt{2rx - x^2} ds \\ &= 2\pi\rho \sqrt{2rx - x^2} \sqrt{1 + y'^2} dx, \end{aligned}$$

W 转动惯量微元为

$$dI = (2rx - x^2) dm,$$

所以球壳的动能为

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \int_0^{2r} \rho (2rx - x^2) 2\pi \sqrt{2rx - x^2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\omega^2}{2} \int_0^{2r} \rho(2rx - x^2) 2\pi \sqrt{2rx - x^2} \frac{r}{\sqrt{2rx - x^2}} dx \\
 &= \rho \omega^2 r \pi \int_0^{2r} (2rx - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi \rho \omega^2 r^4.
 \end{aligned}$$

8. 使某个自由长度为 1 m 的弹簧伸长 2.5 cm 需费力 15 N, 现将它从 1.1 m 拉至 1.2 m, 问要做多少功?

解 由 $F = kx$, 当 $x = 0.025$ m 时, $F = 15$ N, 代入得 $k = 600$. 于是所做的功为

$$W = \int_{0.1}^{0.2} kx dx = 9 \text{ (J)}.$$

9. 一物体的运动规律为 $s = 3t^3 - t$, 介质的阻力与速度的平方成正比, 求物体从 $t = 1$ 运动至 $t = T$ 时阻力所做的功.

解 设介质的阻力为 F , 速度 $v = s' = 9t^2 - 1$, 则 $F = k(9t^2 - 1)^2$. 于是

$$\begin{aligned}
 W &= \int_1^T F s' dt = \int_1^T k(9t^2 - 1)^3 dt \\
 &= k \left(\frac{729}{7} T^7 - \frac{243}{5} T^5 + 9T^3 - T - \frac{2}{35} \right).
 \end{aligned}$$

10. 半径为 1 m, 高为 2 m 的直立的圆柱形容器中充满水, 拔去底部的一个半径为 1 cm 的塞子后水开始流出, 试导出水面高度 h 随时间变化的规律, 并求水完全流空所需的时间. (水面比出水口高 h 时, 出水速度 $v = 0.6 \times \sqrt{2gh}$.)

解 设 t 时刻水面的高度为 h , 过了 dt 时间后水面的高度降低了 dh , 则

$$\pi 1^2 dh = -\pi (0.01)^2 v dt = -\pi (0.01)^2 \times 0.6 \sqrt{2gh} dt,$$

即

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -6 \times 10^{-5} \sqrt{2g} dt.$$

对上式两边积分, 注意 $t = 0$ 时, $h = 2$, 得到

$$h = 2(1 - 3 \times 10^{-5} \sqrt{gt})^2,$$

以 $h = 0$ 代入, 解得

$$t = \frac{10^5}{3\sqrt{g}} \approx 1.06 \times 10^4 \text{ (s)}.$$

11. 上题中的圆柱形容器改为何种旋转体容器, 才能使水流出时水面高度下降是匀速的.

解 根据题意,只要在上题的第一个等式的左边含有因子 \sqrt{h} 即可,也即在时刻 t 水面的半径 r 须满足 $r^2 = k\sqrt{h}$,其中 k 为常数.所以可选用曲线 $y = cx^4$ 绕 y 轴旋转一周后所得旋转曲面作为容器,从而使得水流出时水面高度下降是匀速的.

12. 镭的衰变速度与它的现存量成正比,设 t_0 时有镭 Q_0 g,经1600年它的量减少了一半,求镭的衰变规律.

解 设在时刻 t 镭的现存量为 $Q = Q(t)$,则

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ,$$

对等式两边积分,注意在时刻 t_0 有镭 Q_0 g,得到

$$Q(t) = Q_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

由题意,当 $t - t_0 = 1600$ 时, $Q(t) = \frac{Q_0}{2}$,代入上式,得到 $k = \frac{\ln 2}{1600}$,所以

$$Q = Q_0 2^{-\frac{t-t_0}{1600}}.$$

13. 将A物质转化为B物质的化学反应速度与B物质的浓度成反比,设反应开始时有B物质20%,半小时后有B物质25%,求B物质的浓度的变化规律.

解 设在时刻 t ,B物质的浓度为 $y(t)$,则

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{y},$$

解得

$$y = \sqrt{2kt + C}.$$

因为 $y(0) = \frac{1}{5}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$,所以 $C = \frac{1}{25}$, $k = \frac{9}{400}$,于是得到

$$y = \frac{\sqrt{18t + 16}}{20}.$$

14. 设 $[t, t + dt]$ 中的人口增长量与 $p_{\max} - p(t)$ 成正比,试导出相应的人口模型,画出入口变化情况的草图并与Malthus和Verhulst人口模型加以比较.

解 由题意可知

$$\frac{dp(t)}{dt} = k(p_{\max} - p(t)), p(t_0) = p_0,$$

由此可解得

$$p(t) = p_{\max} - (p_{\max} - p_0)e^{-k(t-t_0)}.$$

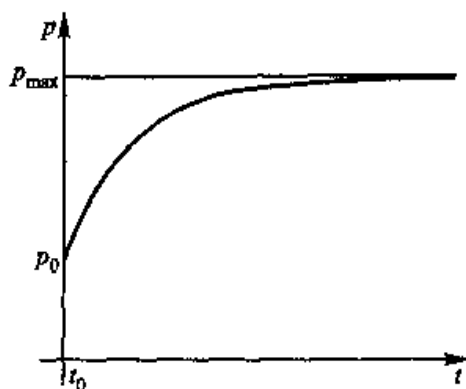


图 1

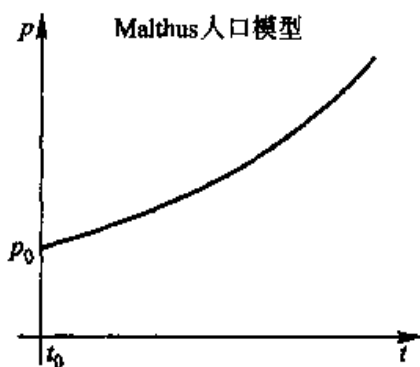


图 2

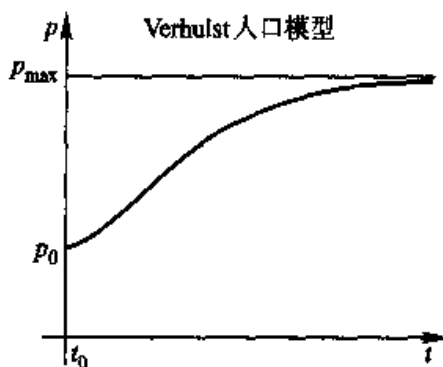


图 3

第 14 题图

15. 核反应堆中, t 时刻中子的增加速度与当时的数量 $N(t)$ 成正比. 设 $N(0) = N_0$, 证明

$$\left[\frac{N(t_2)}{N_0} \right]^{t_1} = \left[\frac{N(t_1)}{N_0} \right]^{t_2}.$$

证 由题意可知

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

对等式两边积分, 再注意 $N(0) = N_0$, 可解得

$$N(t) = N_0 e^{kt},$$

由此即可得到

$$\left(\frac{N(t_2)}{N_0} \right)^{t_1} = e^{kt_1 t_2} = \left(\frac{N(t_1)}{N_0} \right)^{t_2}.$$

16. 一个 1000 m^3 的大厅中的空气内含有 $a\%$ 的废气, 现以 $1 \text{ m}^3/\text{min}$ 注入新鲜空气, 混合后的空气又以同样的速率排出, 求 t 时刻空气内含有的废气浓

度,并求使废气浓度减少一半所需的时间.

解 设在时刻 t 空气内含有的废气浓度为 $y(t)$, 则

$$dy = -\frac{1}{1000}y(t)dt, y(0) = \frac{a}{100},$$

解此方程,即得到

$$y(t) = \frac{a}{100}e^{-\frac{t}{1000}}.$$

当 $y(t) = \frac{a}{200}$ 时,有 $e^{-\frac{t}{1000}} = 2$, 从而得到 $t = 1000 \ln 2$ min, 即废气浓度减少一半所需的时间为 $1000 \ln 2$ min.

§ 6

定积分的数值计算

计算实习题

(在教师的指导下,编制程序在计算机上实际计算)

1. 利用 $\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$,

(1) 用普通的梯形公式、Simpson 公式和 Cotes 公式,计算圆周率 π 的近似值并与精确值加以比较;

(2) 将区间 $[0,1]$ 分成 4、8 等份,用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算 π 的近似值,并与精确值加以比较;

(3) 用 Romberg 方法计算 π 的近似值,使它的精度达到 $O(10^{-8})$;

(4) 分别用 $n=1,2,4$ 的 Gauss-Legendre 公式计算 π 的近似值,并与前面的计算结果加以比较.

解 (1) 主程序(integral.m)

```
function res = integral(f,a,b,method)
```

```
% 输入
```

```
% f 是输入函数,a,b 区间端点
```

```
% method = 1 梯形方法
```

```
% 2 Simpson 方法
```

```
% 3 Cotes 方法
```

```
% 输出
```

```
% res 近似解
```

```
switch method
```

```
case 1
```

```
res = (b-a)/2 * (feval(f,a) + feval(f,b));
```

case 2

```
res = (b - a)/6 * (feval(f, a) + feval(f, b) + 4 * feval(f, (a + b)/2));
```

case 3

```
res = (b - a)/90 * (7 * (feval(f, a) + feval(f, b)) + 32 * (feval(f, 3 * a/4 +  
b/4) + feval(f, a/4 + 3 * b/4)) + 12 * feval(f, (a + b)/2));
```

end

% 程序结束

定义函数:

```
f = inline('4/(1 + x^2)', 'x');
```

梯形公式计算命令:

```
integral(f, 0, 1, 1)
```

计算结果: 3

Simpson 公式计算命令:

```
integral(f, 0, 1, 2)
```

计算结果: 3.1333

Cotes 公式

```
integral(f, 0, 1, 3)
```

计算结果: 3.1421

Cotes 公式精度最高, Simpson 公式其次, 梯形公式最低.

(2) 复化梯形公式主程序(trapezoid.m)

```
function res = trapezoid(f, n, a, b)
```

```
% 梯形公式数值积分
```

```
% 输入
```

```
% f 是输入函数, n 区间等分数, a, b 区间端点
```

```
% 输出
```

```
% res 近似解
```

```
h = (b - a)/n;
```

```
res = feval(f, a) + feval(f, b);
```

```
x = a;
```

```
for k = 1:n-1
```

```
    x = x + h;
```

```
    res = res + 2 * feval(f, x);
```

```
end
```

```
res = res * h/2;
```


% 程序结束

复化 Simpson 公式主程序(simpson.m)

```
function res = simpson(f,n,a,b)
% Simpson 公式数值积分
% 输入
% f 是输入函数,n 区间等分数,a,b 区间端点
% 输出
% res 近似解
h = (b - a)/n;
res = feval(f,a) + feval(f,b);
x = a;
for k = 1:n-1
    y = x + h/2;
    x = x + h;
    res = res + 2 * feval(f,x) + 4 * feval(f,y);
end
y = x + h/2;
res = (res + 4 * feval(f,y)) * h/6;
% 程序结束
```

用复化梯形公式计算, $n=4$ 时命令:

```
trapezoid(f,4,0,1)
```

计算结果:3.1312

$n=8$ 时命令:

```
trapezoid(f,8,0,1)
```

计算结果:3.1390.

用复化 Simpson 公式计算, $n=4$ 时命令:

```
simpson(f,4,0,1)
```

计算结果:3.14159250245871,

$n=8$ 时命令:

```
simpson(f,8,0,1)
```

计算结果:3.14159265122482.

$n=8$ 比 $n=4$ 计算精度高,Simpson 公式计算精度比梯形公式高得多.

(3) Romberg 方法计算数值积分主程序(romberg.m)

```

function res = romberg(f,a,b,err)
% Romberg 方法数值积分
% 输入
% f 是输入函数,a,b 区间端点,err 精度
% 输出
% res 近似解
m=1;k=1;
T=trapezoid(f,m,a,b);
for k=2:20
m=2*m;
s=trapezoid(f,m,a,b);
T=[s,T];s=T(k);
for p=1:k-1
    T(p+1)=(4^p*T(p)-T(p+1))/(4^p-1);
end
if abs(s-T(k))<err,break,end
end
s=[k,T(k)];
% 显示结果
fprintf(1,'迭代次数 = %u,近似值 = %e',[k,T(k)]);
% 程序结束

```

计算命令:

```
romberg(f,0,1,.5e-5)
```

计算结果:

迭代次数 = 6, 近似值 = 3.14159265363824.

(4) Gauss - Legendre 公式主程序(GaussLegendre.m)

```

function res = GaussLegendre(f,n,a,b)
% Gauss Legendre 方法数值积分
% 输入
% f 是输入函数,n+1 多项式次数,a,b 区间端点
% 输出
% res 近似解

```

```
A=[1];
```

```

A=[A,0;5/9,8/9];
A=[A;1/2+1/12*sqrt(10/3),1/2-1/12*sqrt(10/3)];
A=[A,[0,0,0]';3/10*(-0.7+5*sqrt(0.7))/(-2+5*sqrt(0.7)),3/10*
(0.7+5*sqrt(0.7))/(2+5*sqrt(0.7)),128/225];
A=[A;0.171324492379170,0.360761573048193,0.467913934572691];
A=[A,[0,0,0,0]';0.129484966168870,0.279705391489277,
0.381830050505119,0.417959183373469];
A=[A;0.101228536290376,0.222381034453374,0.313706645877887,
0.362683783378362];
A(1,5)=0;
A=[A;0.081274388361574,0.180648160694857,0.260610696402935,
0.312347077040003,0.330239255001260];

X=1/sqrt(3);
X=[X;sqrt(3/5)];
X=[X,[0;0];sqrt((3-4*sqrt(0.3))/7),sqrt((3+4*sqrt(0.3))/7)];
X=[X;sqrt(5-2*sqrt(10/7))/3,sqrt(5+2*sqrt(10/7))/3];
X(1,3)=0;
X=[X;0.9324695142,0.6612093865,0.2386191861;0.9491079123,
0.7415311856,0.4058451514];
X(1,4)=0;
X=[X;0.9602398565,0.7966664774,0.5255524099,0.1834346425;
0.9681602395,0.8360311073,0.6133714327,0.3242534234];
% 区间变换
a1=(b-a)/2;b1=(a+b)/2;
fv=0;m=floor((n+1)/2);
for p=1:m
    fv=fv+A(n,p)*(feval(f,a1*X(n,p)+b1)+feval(f,-a1*X(n,p)+
b1));
end
if m<(n+1)/2
    fv=fv+A(n,m+1)*(feval(f,b1));
end
res=fv*a1;
% 程序结束

```

$n=1$ 时,使用命令:

GaussLegendre(f,1,0,1)

计算结果:3.14754098360656

$n=2$ 时,使用命令:

GaussLegendre(f,2,0,1)

计算结果:3.14106813996317

$n=4$ 时,使用命令:

GaussLegendre(f,4,0,1)

计算结果:3.14159263988475

在相同 n 的情况下,Gauss-Legendre 公式的精度比复化 Simpson 公式还要高.

2. 设河面宽 20 m,从河的一岸向另一岸每隔 2 m 测得的水深如下:(单位:m)

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0	0.6	1.4	2.0	2.3	2.1	2.5	1.9	1.2	0.7	0

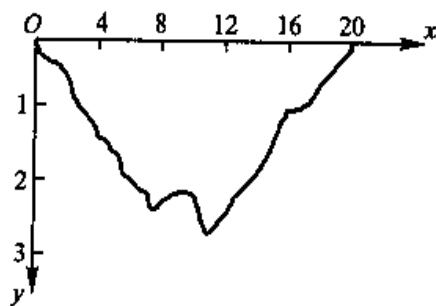


图 7.6.3

求河流的横断面积(原教材图 7.6.3).

解 用复化梯形公式, $a=0$, $b=20$, $n=10$. 程序如下:

```
x=0:2:20;
```

```
y=[0,0.6,1.4,2.0,2.3,2.1,2.5,1.9,1.2,0.7,0];
```

```
A=y(1)+y(11);
```

```
for k=2:10
```

```
A=A+y(k)*2;
```

```
end
```

```
A=A*2/2
```

计算结果:29.4.

3. 分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 e^{x^2} dx, m = 16;$$

$$(2) \int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{x} dx, m = 8$$

$$(\text{可看成连续函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 的积分});$$

$$(3) \int_0^1 \sqrt{1 - x^3} dx, m = 8;$$

$$(4) \int_0^2 \frac{e^{-x}}{1 + x^2} dx, m = 8.$$

解 (1) 定义函数:

```
f = inline('exp(x^2)','x');
```

用复化梯形公式:

```
trapezoid(f,16,0,1)
```

计算结果:1.46442031014948;

用复化 Simpson 公式:

```
simpson(f,16,0,1);
```

计算结果:1.46265203342541.

(2) 定义函数

```
function s = f1(x)
```

```
if x == 0
```

```
s = 0;
```

```
else
```

```
s = (1 - cos(x))/x;
```

```
end
```

```
f = inline('f1(x)','x')
```

用复化梯形公式:

```
trapezoid(f,8,0,pi)
```

计算结果:1.63923368266042

用复化 Simpson 公式:

```
simpson(f,8,0,pi)
```

计算结果:1.64828120745954.

(3) 定义函数

`f = inline('sqrt(1-x^3)','x')`

用复化梯形公式:

`trapezoid(f,8,0,1)`

计算结果:0.82551763467415.

用复化 Simpson 公式:

`simpson(f,8,0,1)`

计算结果:0.83910039548314.

(4) 定义函数

`f = inline('exp(-x)/(1+x^2)','x')`

用复化梯形公式:

`trapezoid(f,8,0,2)`

计算结果:0.61030966279098;

用复化 Simpson 公式:

`simpson(f,8,0,2)`

计算结果:0.60531871307583.

4. 用 Romberg 方法计算 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, 精确到小数点后第 8 位.

解 定义函数

`f = inline('1/x','x');`

用 Romberg 方法计算:

`romberg(f,1,2,.5e-8)`

计算结果:

迭代次数 = 6, 近似值 = 0.69314718056230.

5. 用一般的积分区间上的 Gauss - Legendre 公式(取 $n = 4$)计算积分 $I(N)$
 $= \int_0^N e^{-x^2} dx$:

(1) $N = 1$;

(2) $N = 3$;

(3) $N = 10$.

并与 $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 的结果相比较.

解 先定义函数

`f = inline('exp(-x^2)','x')`

计算 $[0,1]$ 上的积分:

GaussLegendre(f,4,0,1)

计算结果 = 0.74682412676625

计算 $[1,3]$ 上的积分:

GaussLegendre(f,4,1,3)

计算结果 = 0.13938155832888

计算 $[3,10]$ 上的积分:

GaussLegendre(f,4,3,10)

计算结果 = $1.281085345471258e-005$

于是 $[0,3]$ 上积分近似于前两段积分之和 0.88620568509513, $[0,10]$ 上积分近似于三段积分之和 0.88621849594859, 而 $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.886227$, 精确到小数点后第 5 位.

6. 按第 3 题(2)同样的观点, 计算

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \left(x = \frac{k\pi}{3}, k = 1, 2, \dots, 6 \right),$$

并作出 $f(x)$ 的大致图形.

解 定义函数

f = inline('sin(x)/x','x')

$k=1$, 用 Gauss-Legendre 公式, 取 $n=4$ 计算命令:

I1 = GaussLegendre(f,4,0,pi/3)

计算结果 = 0.98545884379637

$k=2$, 计算命令:

I2 = GaussLegendre(f,4,0,2 * pi/3)

计算结果 = 1.64638788070625

$k=3$, 计算命令:

I3 = GaussLegendre(f,4,0,pi)

计算结果 = 1.85193705329543

$k=4$, 计算命令:

I4 = GaussLegendre(f,4,0,4 * pi/3)

计算结果 = 1.72069043455490

$k=5$, 计算命令:

I5 = GaussLegendre(f,4,0,5 * pi/3)

计算结果 = 1.50763538595016

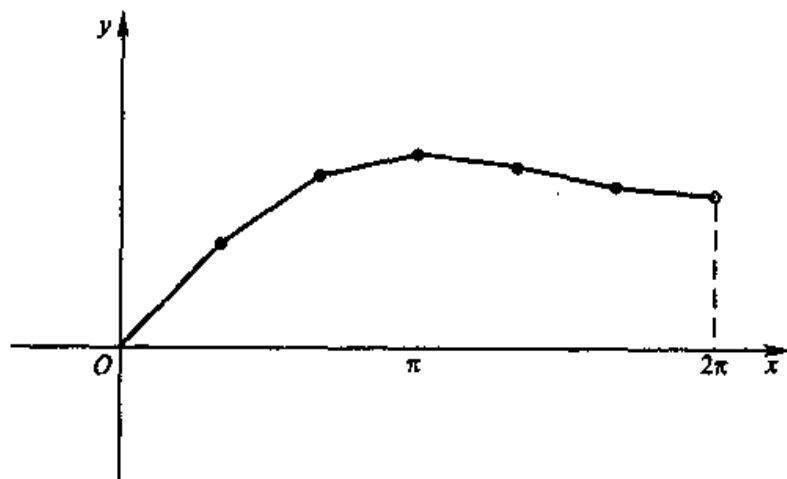
第七章 定积分

$k=6$, 计算命令:

$I_6 = \text{GaussLegendre}(f, 4, 0, 2 * \pi)$

计算结果 $= 1.41813455240854$.

大致图形如下:



第 6 题图

第八章 反常积分

§ 1

反常积分的概念和计算

1. 物理学中称电场力将单位正电荷从电场中某点移至无穷远处所做的功为电场在该点处的电位. 一个带电量 $+q$ 的点电荷产生的电场对距离 r 处的单位正电荷的电场力为 $F = k \frac{q}{r^2}$ (k 为常数), 求距电场中心 x 处的电位 (原教材图 8.1.4).

解
$$U = \int_x^{+\infty} k \frac{q}{r^2} dr = \frac{kq}{x}.$$

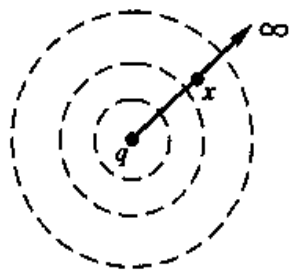


图 8.1.4

2. 证明: 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, k_1 和 k_2 为常数, 则 $\int_a^{+\infty} [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx$ 也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1 \int_a^{+\infty} f(x)dx + k_2 \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

证 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A g(x)dx$, 则

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx \\ &= k_1 \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx + k_2 \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A g(x)dx \\ &= k_1 \int_a^{+\infty} f(x)dx + k_2 \int_a^{+\infty} g(x)dx. \end{aligned}$$

3. 计算下列无穷区间上的反常积分 (发散也是一种计算结果):

(1) $\int_a^{+\infty} e^{-2x} \sin 5x dx;$

(2) $\int_a^{+\infty} e^{-3x} \cos 2x dx;$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx;$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx \quad (a > 0, b > 0);$

$$(5) \int_0^{+\infty} x e^{ax^2} dx \quad (a \in \mathbf{R}); \quad (6) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx \quad (p \in \mathbf{R});$$

$$(7) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} dx; \quad (8) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} dx;$$

$$(9) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx; \quad (10) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

解 (1) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin 5x dx = -\frac{1}{5} \int_0^{+\infty} e^{-2x} d(\cos 5x)$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos 5x dx$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{25} \int_0^{+\infty} e^{-2x} d(\sin 5x)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{4}{25} \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin 5x dx,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin 5x dx = \frac{5}{29}.$$

$$(2) \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-3x} d(\sin 2x) = \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} e^{-3x} \sin 2x dx$$

$$= -\frac{3}{4} \int_0^{+\infty} e^{-3x} d(\cos 2x) = \frac{3}{4} - \frac{9}{4} \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 2x dx,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 2x dx = \frac{3}{13}.$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

(4) 当 $a \neq b$ 时,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = \frac{1}{b^2-a^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+b^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2} \left(\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2b} \right) = \frac{\pi}{2ab(a+b)};$$

当 $a = b$ 时,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx &= \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2a^3} + \frac{1}{2a^2} \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{x^2+a^2} \right) = \frac{\pi}{2a^3} - \frac{1}{2a^3} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} \\ &= \frac{\pi}{2a^3} - \frac{\pi}{4a^3} = \frac{\pi}{4a^3},\end{aligned}$$

此结果等于在 $a \neq b$ 时的结果中以 $b = a$ 代入后的结果.

(5) 当 $a \geq 0$ 时积分发散; 当 $a < 0$ 时,

$$\int_0^{+\infty} x e^{ax^2} dx = \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} e^{ax^2} d(ax^2) = -\frac{1}{2a}.$$

(6) 当 $p \leq 1$ 时积分发散; 当 $p > 1$ 时,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx = \frac{1}{-p+1} (\ln x)^{-p+1} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{p-1} (\ln 2)^{-p+1}.$$

(7) 令 $x = \tan t$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2.$$

(8) 令 $e^x = t$, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2(1+t^2)} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4}.$$

(9) 利用习题 6.3 第 1(10) 题的结果

$$\int \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x-1) + C,$$

即可得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$(10) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx,$$

对等式右端任一积分(例如第二个积分)作变量代换 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0.$$

4. 计算下列无界函数的反常积分(发散也是一种计算结果):

第八章 反常积分

$$(1) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(2) \int_1^e \frac{1}{x \sqrt{1-\ln^2 x}} dx;$$

$$(3) \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx;$$

$$(4) \int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx;$$

$$(5) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} dx;$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx.$$

解 (1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = (-\sqrt{1-x^2}) \Big|_0^1 = 1.$

$$(2) \int_1^e \frac{1}{x \sqrt{1-\ln^2 x}} dx = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}} d(\ln x) = \arcsin(\ln x) \Big|_1^e = \frac{\pi}{2}.$$

(3) 令 $\sqrt{x-1} = t$, 则

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = 2 \int_0^1 (1+t^2) dt = \frac{8}{3}.$$

(4) 令 $\sqrt{1-x} = t$, 则

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx = 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$(5) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} dx.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sin \frac{1}{x^2} d\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{x^2}\right) \Big|_{0+}^1,$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{x^2}\right)$ 极限不存在, 所以积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} dx$ 发散; 同理积分

$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} dx$ 也发散.

(6) 令 $\sqrt{\tan x} = t$, 再利用上面第 3(9)题, 得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n} = \int_0^1 \ln x dx = -1,$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

6. 计算下列反常积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx; \quad (2) \int_0^{\pi} x \ln \sin x dx;$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x dx; \quad (4) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx;$$

$$(5) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

解 (1) 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 再利用例 8.1.11, 得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

(2) 令 $x = \pi - t$, 由

$$\int_0^{\pi} x \ln \sin x dx = \int_0^{\pi} \pi \ln \sin t dt - \int_0^{\pi} t \ln \sin t dt,$$

得到

$$\int_0^{\pi} x \ln \sin x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2.$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\ln \sin x) = (x \ln \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

(4) 令 $t = \arcsin x$, 得到

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cot t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$\begin{aligned} (5) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^1 \ln x d(\arcsin x) = (\ln x \arcsin x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

7. 求下列反常积分的 Cauchy 主值:

$$(1) (\text{cpv}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx; \quad (2) (\text{cpv}) \int_1^4 \frac{1}{x-2} dx;$$

$$(3) (\text{cpv}) \int_{1/2}^2 \frac{1}{x \ln x} dx.$$

$$\text{解 (1) } (\text{cpv}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] \Big|_{-A}^{+A} = \pi.$$

$$(2) \text{ (cpv)} \int_1^4 \frac{1}{x-2} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[(\ln|x-2|) \Big|_{2+\eta}^4 + (\ln|x-2|) \Big|_1^{2-\eta} \right] = \ln 2.$$

$$(3) \text{ (cpv)} \int_{1/2}^2 \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[(\ln|\ln x|) \Big|_{1+\eta}^2 + (\ln|\ln x|) \Big|_{1/2}^{1-\eta} \right] = 0.$$

8. 说明一个无界函数的反常积分可以化为无穷区间的反常积分.

证 设 $\int_a^b f(x) dx$ 是一个无界函数的反常积分, $x=b$ 是 $f(x)$ 的惟一奇点

(即 $f(x)$ 在 $x=b$ 的左邻域无界). 令 $t = \frac{b-a}{b-x}$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_1^{+\infty} f\left(b - \frac{b-a}{t}\right) \frac{dt}{t^2},$$

等式右端就是一个无穷区间的反常积分.

9. (1) 以 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 为例, 叙述并证明反常积分的保序性和区间可加性;

(2) 举例说明, 对于反常积分不再成立乘积可积性.

解 (1) 保序性:

设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 且在 $[a, +\infty)$ 成立 $f(x) \geq g(x)$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

证 由定积分的保序性, 可知 $\int_a^A f(x) dx \geq \int_a^A g(x) dx$, 再令 $A \rightarrow +\infty$.

区间可加性:

设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则对任意 $c \in [a, +\infty)$, $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

证 由定积分的区间可加性, 可知 $\int_a^A f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^A f(x) dx$, 再令 $A \rightarrow +\infty$.

(2) 设 $f(x) = g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, 则 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 但 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 不收敛.

10. 证明: 当 $a > 0$ 时, 只要下式两边的反常积分有意义, 就有

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx = \ln a \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{1}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx - \ln a \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{\ln x - \ln a}{x} dx \\ &= \int_0^a f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{\ln x - \ln a}{x} dx + \int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{\ln x - \ln a}{x} dx, \end{aligned}$$

对上式右端两积分中任意一个(例如第二个)作变量代换 $x = \frac{a^2}{t}$, 则当 $x: a \rightarrow$

$+\infty$ 时, $t: a \rightarrow 0$; 且 $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{t}{a} + \frac{a}{t}$, $\frac{\ln x - \ln a}{x} dx = \frac{\ln t - \ln a}{t} dt$. 于是由

$$\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{\ln x - \ln a}{x} dx = - \int_0^a f\left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right) \frac{\ln t - \ln a}{t} dt,$$

得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx - \ln a \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^a f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{\ln x - \ln a}{x} dx - \int_0^a f\left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right) \frac{\ln t - \ln a}{t} dt = 0. \end{aligned}$$

11. 设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. 证明 $A = 0$.

证 用反证法. 不妨设 $A > 0$, 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}A > 0$, $\exists X > a$, $\forall x > X$, 成立

$|f(x) - A| < \frac{1}{2}A$, 从而 $f(x) > \frac{1}{2}A$. 由

$$\int_a^B f(x) dx = \int_a^X f(x) dx + \int_X^B f(x) dx > \int_a^X f(x) dx + \frac{1}{2}A(B - X),$$

可知 $\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx = +\infty$, 与 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛发生矛盾.

同理也可证明不可能有 $A < 0$, 所以 $A = 0$.

12. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可导, 且 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$ 都收敛, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\text{证} \quad \int_a^{+\infty} f'(x) dx = \int_a^{+\infty} d(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - f(a),$$

由 $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$ 的收敛性, 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且有限, 再利用第 11 题的结论,



得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

计算实习题

在教师的指导下,试编制一个通用的 Gauss - Legendre 求积公式程序,在计算机上实际计算下列反常积分值,并与精确值比较:

$$(1) \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx, \quad \text{精确值} -\frac{\pi^2}{6};$$

$$(2) \int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx, \quad \text{精确值} 2 - \frac{\pi^2}{6};$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx, \quad \text{精确值} -\frac{\pi}{2} \ln 2;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{精确值} \frac{\pi}{2};$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx, \quad \text{精确值} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

解 (1) 定义函数

`f = inline('log(1-x)/x','x')`

用 $n=8$ 的 Gauss - Legendre 公式计算:

`GaussLegendre(f,8,0,1)`

计算结果 = -1.6380

积分近似值 = -1.6449.

(2) 定义函数

`f = inline('log(1-x)*log(x)','x')`

用 $n=8$ 的 Gauss - Legendre 公式计算:

`GaussLegendre(f,8,0,1)`

计算结果 = 0.3551

积分近似值 = 0.3551.

(3) 定义函数

`f = inline('log(cos(x))','x')`

用 $n=8$ 的 Gauss - Legendre 公式计算:

`GaussLegendre(f,8,0,pi/2)`

计算结果 = -1.0778

积分近似值 = -1.0888.

(4) 定义函数

```
f = inline('sin(x)/x','x')
```

由于积分收敛较慢,根据 Gauss - Legendre 公式计算特点,取 $n = 8$,并将积分分段计算再求和,编写程序如下(ex4.m):

```
Arial = 8;
```

```
aa = 0;
```

```
for i = 1:k
```

```
    aa = aa + GaussLegendre(f,n,(2 * i - 2) * pi,2 * i * pi);
```

```
end
```

```
aa
```

```
k = 100,ex4
```

计算结果:1.56920478540775

```
k = 1000,ex4
```

计算结果:1.57063717184103

```
k = 10000,ex4
```

计算结果:1.57078041128177

积分近似值 = 1.57079632679490,积分上限 A 计算到 20000π 可得较高的精度.

(5) 首先作变换 $u = x^2$,积分化为 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du$,然后利用上一小题的方法计算.

定义函数

```
f = inline('sin(u)/2/sqrt(u)','u');
```

```
k = 100,ex4
```

计算结果:0.60766007491998

```
k = 1000,ex4
```

计算结果:0.62129931986090

```
k = 10000,ex4
```

计算结果:0.62561243964455

积分近似值 = 0.62665706865775,积分上限 A 计算到 20000π 得到的结果精度不高,这是由于原积分收敛速度较慢的原因.

§ 2

反常积分的收敛判别法

1. (1) 证明比较判别法(定理 8.2.2);

(2) 举例说明,当比较判别法的极限形式中 $l = 0$ 或 $+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 和

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的敛散性可以产生各种不同的情况.

解 (1) 定理 8.2.2(比较判别法) 设在 $[a, +\infty)$ 上恒有 $0 \leq f(x) \leq K\varphi(x)$, 其中 K 是正常数, 则

当 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛;

当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ 也发散.

证 当 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ 收敛时, 应用反常积分的 Cauchy 收敛原理,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 \geq a, \forall A, A' \geq A_0, \text{成立 } \left| \int_A^{A'} \varphi(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

于是

$$\left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| \leq \left| \int_A^{A'} K\varphi(x)dx \right| < \varepsilon,$$

所以 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛;

当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, 应用反常积分的 Cauchy 收敛原理,

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall A_0 \geq a, \exists A, A' \geq A_0, \text{成立 } \left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| \geq K\varepsilon_0.$$

于是

$$\left| \int_A^{A'} \varphi(x)dx \right| \geq \left| \int_A^{A'} \frac{1}{K} f(x)dx \right| \geq \varepsilon_0,$$

所以 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ 也发散.

注 本题下半部分也可采用反证法: 假设 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ 收敛, 由上述结果可知 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛, 这与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散相矛盾.

(2) 设在 $[a, +\infty)$ 上有 $f(x) \geq 0, \varphi(x) \geq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, 则当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ 也发散; 但当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ 可能收敛, 也可能发散.

例如 $f(x) = \frac{1}{x^2}, \varphi(x) = \frac{1}{x^p}$ ($0 < p < 2$), 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$. 显然有 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 而对于 $\int_1^{+\infty} \varphi(x)dx$, 则当 $1 < p < 2$ 时收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时

发散.

设在 $[a, +\infty)$ 上有 $f(x) \geq 0, \varphi(x) \geq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$, 则当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ 也收敛; 但当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ 可能发散, 也可能收敛.

例如 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \varphi(x) = \frac{1}{x^p} \left(p > \frac{1}{2} \right)$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$. 显然有 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 而对于 $\int_1^{+\infty} \varphi(x)dx$, 则当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时发散, 当 $p > 1$ 时收敛.

2. 证明 Cauchy 判别法及其极限形式(定理 8.2.3 及其推论).

证 定理 8.2.3 (Cauchy 判别法) 设在 $[a, +\infty) \subset (0, +\infty)$ 上恒有 $f(x) \geq 0, K$ 是正常数.

(1) 若 $f(x) \leq \frac{K}{x^p}$, 且 $p > 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(2) 若 $f(x) \geq \frac{K}{x^p}$, 且 $p \leq 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

推论(Cauchy 判别法的极限形式) 设在 $[a, \infty) \subset (0, +\infty)$ 上恒有 $f(x) \geq 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = l,$$

则

(1) 若 $0 \leq l < +\infty$, 且 $p > 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(2) 若 $0 < l \leq +\infty$, 且 $p \leq 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

证 直接应用定理 8.2.2(比较判别法)及其推论(比较判别法的极限形式), 将函数 $\varphi(x)$ 取为 $\frac{1}{x^p}$.

3. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - e^{-2x} + \ln x + 1}} dx;$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^3} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x|\sin x|} dx;$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx \quad (p, q \in \mathbf{R}_+).$$

解 (1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{x^3 - e^{-2x} + \ln x + 1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

所以积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - e^{-2x} + \ln x + 1}} dx$ 收敛.

(2) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{\arctan x}{1+x^3} \sim \frac{\pi}{2x^3},$$

所以积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^3} dx$ 收敛.

(3) 因为当 $x \geq 0$ 时, 有

$$\frac{1}{1+x|\sin x|} \geq \frac{1}{1+x},$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$ 发散, 所以积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x|\sin x|} dx$ 发散.

(4) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{x^q}{1+x^p} \sim \frac{1}{x^{p-q}},$$

所以在 $p-q > 1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx$ 收敛, 在其余情况下积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx$ 发散.

4. 证明: 对非负函数 $f(x)$, $(\text{cpv}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛与 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛是等价的.

证 显然, 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛可推出 $(\text{cpv}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 现证明当 $f(x) \geq 0$ 时可由 $(\text{cpv}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛推出 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

由于 $(\text{cpv}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 可知极限

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$$

存在而且有限. 由 Cauchy 收敛原理,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > 0, \forall A, A' \geq A_0: |F(A) - F(A')| < \varepsilon,$$

于是 $\forall A, A' \geq A_0$ 与 $\forall B, B' \geq A_0$, 成立

$$|\int_A^{A'} f(x) dx| \leq |F(A) - F(A')| < \varepsilon \text{ 与 } |\int_B^{B'} f(x) dx| \leq |F(B) - F(B')| < \varepsilon,$$

这说明积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 都收敛, 所以积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

5. 讨论下列反常积分的敛散性(包括绝对收敛、条件收敛和发散,下同):

$$(1) \int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx; \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p \in \mathbf{R}_+);$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x \arctan x}{x^p} dx \quad (p \in \mathbf{R}_+); \quad (4) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx;$$

$$(5) \int_a^{+\infty} \frac{p_m(x)}{q_n(x)} \sin x dx \quad (p_m(x) \text{ 和 } q_n(x) \text{ 分别是 } m \text{ 和 } n \text{ 次多项式, } q_n(x)$$

在 $x \in [a, +\infty)$ 范围无零点.)

解 (1) 因为 $F(A) = \int_2^A \sin x dx$ 有界, $\frac{\ln \ln x}{\ln x}$ 在 $[16, +\infty)$ 单调, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} = 0$, 由 Dirichlet 判别法, 积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$ 收敛; 由于

$$\left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x \right| \geq \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \right| \sin^2 x = \frac{1}{2} \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \right| (1 - \cos 2x),$$

而积分 $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \right| dx$ 发散, $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \right| \cos 2x dx$ 收敛, 所以积分 $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x \right| dx$ 发散, 即积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$ 条件收敛.

(2) 当 $p > 1$ 时, $\frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛, 所以当 $p > 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 绝对收敛;

当 $0 < p \leq 1$ 时, 因为 $F(A) = \int_1^A \sin x dx$ 有界, $\frac{1}{x^p}$ 在 $[1, +\infty)$ 单调, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$, 由 Dirichlet 判别法, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 收敛; 但因为当 $0 < p \leq 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ 发散, 所以当 $0 < p \leq 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 条件收敛.

(3) 当 $p > 1$ 时, $\frac{|\sin x \arctan x|}{x^p} \leq \frac{\pi}{2x^p}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛, 所以当 $p > 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \arctan x}{x^p} dx$ 绝对收敛;

当 $0 < p \leq 1$ 时, 因为积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 收敛, $\arctan x$ 在 $[1, +\infty)$ 单调有界, 由 Abel 判别法, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \arctan x}{x^p} dx$ 收敛; 但因为当 $0 < p \leq 1$ 时积分

$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} |\sin x| dx$ 发散, 所以当 $0 < p \leq 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \arctan x}{x^p} dx$ 条件收敛.

(4) 令 $t = x^2$, $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$, 由于 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$ 条件收敛, 可知积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ 条件收敛.

(5) 当 $n > m + 1$ 且 x 充分大时, 有 $\left| \frac{p_m(x)}{q_n(x)} \sin x \right| \leq \frac{K}{x^2}$, 可知当 $n > m + 1$ 时积分 $\int_a^{+\infty} \frac{p_m(x)}{q_n(x)} \sin x dx$ 绝对收敛.

当 $n = m + 1$ 时, 因为 $F(A) = \int_1^A \sin x dx$ 有界, 且当 x 充分大时, $\frac{p_m(x)}{q_n(x)}$ 单调且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = 0$, 由 Dirichlet 判别法可知 $\int_a^{+\infty} \frac{p_m(x)}{q_n(x)} \sin x dx$ 收敛; 但由于当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{p_m(x)}{q_n(x)} \sim \frac{c}{x}$, 易知 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{p_m(x)}{q_n(x)} \sin x \right| dx$ 发散, 所以当 $n = m + 1$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{p_m(x)}{q_n(x)} \sin x dx$ 条件收敛.

当 $n < m + 1$ 时, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = A$, A 为非零常数、 $+\infty$ 或 $-\infty$, 易知积分 $\int_a^{+\infty} \frac{p_m(x)}{q_n(x)} \sin x dx$ 发散.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 只有一个奇点 $x = b$, 证明定理 8.2.3' 和定理 8.2.5'.

定理 8.2.3' (Cauchy 判别法) 设在 $[a, b)$ 上恒有 $f(x) \geq 0$, 若当 x 属于 b 的某个左邻域 $[b - \eta_0, b)$ 时, 存在正常数 K , 使得

(1) $f(x) \leq \frac{K}{(b-x)^p}$, 且 $p < 1$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛;

(2) $f(x) \geq \frac{K}{(b-x)^p}$, 且 $p \geq 1$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

证 (1) 当 $p < 1$ 时, 积分 $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$ 收敛, 由反常积分的 Cauchy 收敛原理,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \eta, \eta' \in (0, \delta), \text{ 成立 } \left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} \frac{1}{(b-x)^p} dx \right| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

由于 $\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} \frac{K}{(b-x)^p} dx \right| < \varepsilon$, 所以 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛.

(2) 当 $p \geq 1$ 时, 积分 $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$ 发散, 由反常积分的 Cauchy 收敛原理,

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists \eta, \eta' \in (0, \delta), \text{ 成立 } \left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} \frac{1}{(b-x)^p} dx \right| \geq \frac{\varepsilon_0}{K}.$$

由于 $\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x) dx \right| \geq \left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} \frac{K}{(b-x)^p} dx \right| \geq \varepsilon_0$, 所以 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

推论 (Cauchy 判别法的极限形式) 设在 $[a, b)$ 上恒有 $f(x) \geq 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^p f(x) = l,$$

则

(1) 若 $0 \leq l < +\infty$, 且 $p < 1$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛;

(2) 若 $0 < l \leq +\infty$, 且 $p \geq 1$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

证 (1) 由 $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^p f(x) = l$ ($p < 1, 0 \leq l < +\infty$), 可知

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (b-\delta, b), \text{ 成立 } f(x) < \frac{l+1}{(b-x)^p},$$

再应用定理 8.2.3' 的 (1).

(2) 由 $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^p f(x) = l$ ($p \geq 1, 0 < l \leq +\infty$), 可知

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (b-\delta, b), \text{ 成立 } f(x) > \frac{c}{(b-x)^p},$$

其中 $0 < c < l$, 再应用定理 8.2.3' 的 (2).

定理 8.2.5' 若下列两个条件之一满足, 则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛:

(1) (Abel 判别法) $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a, b)$ 上单调有界;

(2) (Dirichlet 判别法) $F(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x)dx$ 在 $(0, b-a]$ 上有界, $g(x)$ 在 $[a, b)$ 上单调且 $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$.

证 (1) 设 $|g(x)| \leq G$, 因为 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 由 Cauchy 收敛原理,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A, A' \in (b-\delta, b), \text{ 成立 } \left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2G}.$$

由积分第二中值定理,

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{A'} f(x)g(x)dx \right| &\leq |g(A)| \cdot \left| \int_A^\xi f(x)dx \right| + |g(A')| \cdot \left| \int_\xi^{A'} f(x)dx \right| \\ &\leq G \left| \int_A^\xi f(x)dx \right| + G \left| \int_\xi^{A'} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) 设 $|F(\eta)| \leq M$, 于是 $\forall A, A' \in [a, b]$, 有 $\left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| < 2M$. 因为 $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (b - \delta, b)$, 有 $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$. 由积分第二中值定理,

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{A'} f(x) g(x) dx \right| &\leq |g(A)| \cdot \left| \int_A^{\xi} f(x) dx \right| + |g(A')| \cdot \left| \int_{\xi}^{A'} f(x) dx \right| \\ &\leq 2M |g(A)| + 2M |g(A')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以无论哪个判别法条件满足, 由 Cauchy 收敛原理, 都有 $\int_a^b f(x) g(x) dx$ 收敛的结论.

7. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性:

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} dx; \quad (2) \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx;$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx; \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^p} dx;$$

$$(5) \int_0^1 |\ln x|^p dx; \quad (6) \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx;$$

$$(7) \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} |\ln x| dx.$$

解 (1) 因为 $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} \sim \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} (x \rightarrow 0+), \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} \sim \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} (x \rightarrow 1-)$, 所以积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} dx$ 收敛.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1-x} \frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{1}{2}$, 且对任意 $0 < \delta < 1, \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\delta \ln x}{x^2-1} = 0$, 即当 $x > 0$ 充分小时, 有 $\left| \frac{\ln x}{x^2-1} \right| < \frac{1}{x^\delta}$, 所以积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$ 收敛.

(3) 因为 $\frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} \sim \frac{1}{x^2} (x \rightarrow 0+), \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} \left(x \rightarrow \frac{\pi}{2}-\right)$,

所以积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$ 发散.

(4) 因为 $\frac{1-\cos x}{x^p} \sim \frac{1}{2x^{p-2}} (x \rightarrow 0+)$, 所以当 $p < 3$ 时积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^p} dx$

收敛, 当 $p \geq 3$ 时积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$ 发散.

(5) 首先对任意的 $0 < \delta < 1$ 与任意的 p , 有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^\delta |\ln x|^p] = 0$, 即当 $x > 0$ 充分小时, 有 $|\ln x|^p < \frac{1}{x^\delta}$; 且 $|\ln x|^p \sim \frac{1}{(1-x)^{-p}}$ ($x \rightarrow 1^-$). 所以当 $p > -1$ 时, 积分 $\int_0^1 |\ln x|^p dx$ 收敛, 当 $p \leq -1$ 时, 积分 $\int_0^1 |\ln x|^p dx$ 发散.

(6) $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim \frac{1}{x^{1-p}}$ ($x \rightarrow 0^+$), $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim \frac{1}{(1-x)^{1-q}}$ ($x \rightarrow 1^-$), 所以在 $p > 0, q > 0$ 时积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ 收敛, 在其余情况下积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ 发散.

(7) $x^{p-1}(1-x)^{q-1} |\ln x| \sim \frac{1}{(1-x)^{1-q}}$ ($x \rightarrow 1^-$), 且当 $p > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^{1-\frac{p}{2}}(x^{p-1}(1-x)^{q-1} |\ln x|)] = 0$, 即当 $x > 0$ 充分小时, 有 $x^{p-1}(1-x)^{q-1} |\ln x| < \frac{1}{x^{1-\frac{p}{2}}}$, 所以当 $p > 0, q > -1$ 时积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} |\ln x| dx$ 收敛, 在其余情况下积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} |\ln x| dx$ 发散.

8. 讨论下列反常积分的敛散性:

$$(1) \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{\ln x} dx \quad (p, q \in \mathbf{R}_+); \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx; \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx;$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} dx; \quad (6) \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx;$$

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx; \quad (8) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx.$$

解 (1) $\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{\ln x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{p-1}}{\ln x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{q-1}}{\ln x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{\ln x} dx.$

当 $p > 0, q > 0$ 时积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{p-1}}{\ln x} dx$ 与积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{q-1}}{\ln x} dx$ 显然收敛, 且当 $x \rightarrow 1^-$ 时,

$$\frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{\ln x} = \frac{[(1+(x-1))^{p-1} - 1] - [(1+(x-1))^{q-1} - 1]}{\ln(1+(x-1))}$$

$$\sim \frac{(p-q)(x-1)}{x-1} = p-q,$$

即 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{\ln x} dx$ 不是反常积分, 所以积分 $\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{\ln x} dx$ 收敛.

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx \\ &+ \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx. \end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \quad (x \rightarrow 0+),$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim -\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \quad (x \rightarrow 1-),$$

所以积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx$ 收敛;

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim -\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \quad (x \rightarrow 1+),$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}} \quad (x \rightarrow 2-),$$

所以积分 $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx$ 收敛;

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}} \quad (x \rightarrow 2+)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \quad (x \rightarrow +\infty),$$

所以积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx$ 收敛.

由此可知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx$ 收敛.

$$(3) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx.$$

由 $\frac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}}$ ($x \rightarrow 0+$), 可知当 $p < 2$ 时, 积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛,
当 $p \geq 2$ 时, 积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 发散;

当 $p > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^{\frac{p+1}{2}} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^p} \right] = 0$, 即当 $x > 0$ 充分大时, 有 $\frac{\ln(1+x)}{x^p} < \frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$, 其中 $\frac{p+1}{2} > 1$, 可知当 $p > 1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛, 当 $p \leq 1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 发散;

综上所述, 当 $1 < p < 2$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛, 在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 发散.

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx.$$

由 $\frac{\arctan x}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}}$ ($x \rightarrow 0+$), 可知当 $p < 2$ 时积分 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^p} dx$ 收敛;

由 $\frac{\arctan x}{x^p} \sim \frac{\pi}{2x^p}$ ($x \rightarrow +\infty$), 可知当 $p > 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx$ 收敛.

所以当 $1 < p < 2$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx$ 收敛, 在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx$ 发散.

$$(5) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} dx.$$

由 $\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-\frac{1}{2}}}$ ($x \rightarrow 0+$), 可知当 $p < \frac{3}{2}$ 时积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} dx$ 收敛, 当 $p \geq \frac{3}{2}$ 时积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} dx$ 发散;

由 $\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} \sim \frac{2^p}{\pi^p \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{1}{2}}}$ ($x \rightarrow \frac{\pi}{2}-$), 可知积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} dx$ 收敛.

所以当 $p < \frac{3}{2}$ 时积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} dx$ 收敛, 当 $p \geq \frac{3}{2}$ 时积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} dx$ 发

散.

● 第八章 反常积分

$$(6) \quad \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

由于积分 $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ 收敛, 及 $x^{p-1} e^{-x} \sim \frac{1}{x^{1-p}}$ ($x \rightarrow 0+$), 所以当 $p > 0$ 时积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ 收敛, 当 $p \leq 0$ 时积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ 发散.

$$(7) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx.$$

当 $p = q$ 时, 显然积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ 发散;

当 $p \neq q$ 时, 由于

$$\frac{1}{x^p + x^q} \sim \frac{1}{x^{\min(p, q)}} (x \rightarrow 0+), \quad \frac{1}{x^p + x^q} \sim \frac{1}{x^{\max(p, q)}} (x \rightarrow +\infty),$$

所以当 $\min(p, q) < 1$, 且 $\max(p, q) > 1$ 时积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ 收敛, 其余情况下积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ 发散.

(8) 设 $p > 1$, 则对任意的 q , 当 x 充分大时, 有 $\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$, 因为 $\frac{p+1}{2} > 1$, 可知积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 收敛.

设 $p < 1$, 则对任意的 q , 当 x 充分大时, 有 $\frac{1}{x^p \ln^q x} > \frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$, 因为 $\frac{p+1}{2} < 1$, 可知积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 发散.

设 $p = 1$, 令 $\ln x = t$, 则 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^q}$, 由此可知当 $p > 1$ 或 $p = 1$, $q > 1$ 时积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 收敛, 在其余情况下积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 发散.

9. 讨论下列反常积分的敛散性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx; \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{x^q \sin x}{1+x^p} dx \quad (p \geq 0);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} dx; \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx;$$

$$(5) \int_0^1 \frac{1}{x^p} \cos \frac{1}{x^2} dx; \quad (6) \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx \quad (p > 0).$$

$$\text{解 (1)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx.$$

由 $\frac{x^{p-1}}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^{1-p}} (x \rightarrow 0+)$, $\frac{x^{p-1}}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^{3-p}} (x \rightarrow +\infty)$, 可知当 $0 < p < 2$ 时积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx$ 收敛, 在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx$ 发散.

(2) 当 $q < p-1$ 时, 由 $\frac{x^q |\sin x|}{1+x^p} < \frac{1}{x^{p-q}}$, 可知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^q \sin x}{1+x^p} dx$ 绝对收敛.

当 $p-1 \leq q < p$ 时, 因为 $F(A) = \int_1^A \sin x dx$ 有界, 当 x 充分大时 $\frac{x^q}{1+x^p}$ 单调减少, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{1+x^p} = 0$, 由 Dirichlet 判别法, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^q \sin x}{1+x^p} dx$ 收敛; 但因为积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^q |\sin x|}{1+x^p} dx$ 发散, 所以当 $p-1 \leq q < p$ 时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^q \sin x}{1+x^p} dx$ 条件收敛.

当 $q \geq p$ 时, 由于 $n \rightarrow \infty$ 时 $\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{x^q \sin x}{1+x^p} dx$ 不趋于零, 可知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^q \sin x}{1+x^p} dx$ 发散.

$$(3) \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} dx.$$

由 $\frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} \sim \frac{1}{x^p} (x \rightarrow 0+)$, 可知当 $p < 1$ 时积分 $\int_0^1 \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} dx$ 收敛, 在其余情况下积分 $\int_0^1 \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} dx$ 发散.

当 $p < 1$ 时, 不难看出积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} |\cos x|}{x^p} dx$ 发散; 当 $p \leq 0$ 时, 不难看出积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} dx$ 发散.

当 $0 < p < 1$ 时, 因为 $\left| \int_1^A e^{\sin x} \cos x dx \right| < 2e$, $\frac{1}{x^p}$ 单调减少, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$, 由 Dirichlet 判别法, 可知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} dx$ 收敛.

综上所述, 当 $0 < p < 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} dx$ 条件收敛, 在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} dx$ 发散.

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx.$$

由 $\frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \sim \frac{2}{x^{p-1}}$ ($x \rightarrow 0+$), 可知当 $p < 2$ 时积分 $\int_0^1 \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$ 收敛,

在其余情况下积分 $\int_0^1 \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$ 发散.

当 $1 < p < 2$ 时, 显然积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} |\sin 2x|}{x^p} dx$ 收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 不难看出积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} |\sin 2x|}{x^p} dx$ 发散; 当 $p \leq 0$ 时, 不难看出积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$ 发散.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 因为 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{\sin x} \sin 2x dx = 0$, 可知 $\left| \int_0^A e^{\sin x} \sin 2x dx \right|$ 有界, 且 $\frac{1}{x^p}$ 单调减少, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$, 由 Dirichlet 判别法, 可知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$ 收敛.

综上所述, 当 $1 < p < 2$ 时积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$ 绝对收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$ 条件收敛, 在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$ 发散.

(5) 令 $t = \frac{1}{x^2}$, 则

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} \cos \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3-p}{2}}} \cos t dt.$$

于是可知当 $p < 1$ 时积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \cos \frac{1}{x^2} dx$ 绝对收敛; 当 $1 \leq p < 3$ 时积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \cos \frac{1}{x^2} dx$ 条件收敛, 当 $p \geq 3$ 时积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \cos \frac{1}{x^2} dx$ 发散.

(6) 当 $p > 1$ 时, 因为 $\frac{\left| \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \right|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}$, 可知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$ 绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 因为 $\int_{n\pi + \frac{\pi}{6}}^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\left| \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \right|}{x^p} dx > \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^p}$, 而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^p}$ 发散, 所以积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\left| \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \right|}{x^p} dx$ 发散; 又因为

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x} \cos x + \cos \frac{1}{x} \sin x}{x^p} dx,$$
 注意到当 x 充分大时, $\frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p}$ 与 $\frac{\cos \frac{1}{x}}{x^p}$ 都是单调减少的, 由 Dirichlet 判别法可知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$ 收敛, 所以积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$ 条件收敛.

10. 证明反常积分 $\int_0^{+\infty} x \sin x^4 \sin x dx$ 收敛.

证 对任意 $A'' > A' > 0$, 由分部积分法,

$$\begin{aligned}
 \int_{A'}^{A''} x \sin x^4 \sin x dx &= - \int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{4x^2} d(\cos x^4) \\
 &= \left(-\frac{\sin x \cos x^4}{4x^2} \right) \Big|_{A'}^{A''} + \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x^4 \cos x}{4x^2} dx \\
 &\quad - \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x^4 \sin x}{2x^3} dx.
 \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\sin x \cos x^4}{4x^2} \right) = 0$,

$\exists A_1 > 0$, $\forall x > A_1$, 成立 $\left| -\frac{\sin x \cos x^4}{4x^2} \right| < \frac{\varepsilon}{4}$,

于是对任意 $A'' > A' > A_1$, 成立 $\left(-\frac{\sin x \cos x^4}{4x^2} \right) \Big|_{A'}^{A''} < \frac{\varepsilon}{2}$;

因为积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^4 \cos x}{4x^2} dx$ 收敛,

$\exists A_2 > 0$, 对任意 $A'' > A' > A_2$, 成立 $\left| \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x^4 \cos x}{4x^2} dx \right| < \frac{\varepsilon}{4}$;

因为积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^4 \sin x}{2x^3} dx$ 收敛,

$\exists A_3 > 0$, 对任意 $A'' > A' > A_3$, 成立 $\left| \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x^4 \sin x}{2x^3} dx \right| < \frac{\varepsilon}{4}$.

取 $A = \max\{A_1, A_2, A_3\}$, 对任意 $A'' > A' > A$, 成立

$$\left| \int_{A'}^{A''} x \sin x^4 \sin x dx \right| < \varepsilon,$$

由 Cauchy 收敛原理, 可知反常积分 $\int_0^{+\infty} x \sin x^4 \sin x dx$ 收敛.

11. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 证明 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛.

证 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\exists A > a$, $\forall x > A$, 成立 $|f(x)| < 1$, 于是 $f^2(x) \leq |f(x)|$. 由于 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 由非负函数反常积分的比较判别法, 可知积分 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛.

12. 设 $f(x)$ 单调, 且当 $x \rightarrow 0+$ 时 $f(x) \rightarrow +\infty$, 证明: $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛的必要条件是 $\lim_{x \rightarrow 0+} xf(x) = 0$.

证 首先由 $f(x)$ 的单调性, 对于充分小的 $0 < x < 1$, 有

$$0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt.$$

由于 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛, 由 Cauchy 收敛原理, $\lim_{x \rightarrow 0+} \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt = 0$, 于是得到

$$\lim_{x \rightarrow 0+} xf(x) = 0.$$

13. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $xf(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调减少, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)f(x) = 0.$$

证 首先容易知道当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $xf(x)$ 单调减少趋于 0, 于是有 $xf(x) \geq 0$, 且

$$0 \leq \frac{1}{2} x(\ln x)f(x) \leq \int_{\sqrt{x}}^x tf(t) \cdot \frac{1}{t} dt = \int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt.$$

由于 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 由 Cauchy 收敛原理, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt = 0$, 于是得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)f(x) = 0.$$

14. 设 $f(x)$ 单调下降, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 证明: 若 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 则反常积分 $\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x dx$ 收敛.

证 首先由分部积分法,

$$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x dx = \int_0^{+\infty} \sin^2 x d(f(x)) = - \int_0^{+\infty} f(x)\sin 2x dx.$$

由于 $F(A) = \int_0^A \sin 2x dx$ 有界, $f(x)$ 单调下降, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 由

Dirichlet 判别法, 可知积分 $\int_0^{+\infty} f(x) \sin 2x dx$ 收敛, 从而积分 $\int_0^{+\infty} f'(x) \sin^2 x dx$ 收敛.

15. 若 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 则称 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上平方可积 (类似可定义无界函数在 $[a, b]$ 上平方可积的概念).

(1) 对两种反常积分分别探讨 $f(x)$ 平方可积与 $f(x)$ 的反常积分收敛之间的关系;

(2) 对无穷区间的反常积分, 举例说明平方可积与绝对收敛互不包含;

(3) 对无界函数的反常积分, 证明: 平方可积必定绝对收敛, 但逆命题不成立.

解 (1) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 例如: $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, 则 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 但 $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$ 发散;

$\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 例如: $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 但 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

(2) $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛, 例如: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则 $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 但 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 不是绝对收敛的;

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 例如:

$$f(x) = \begin{cases} n, & x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[n, n + \frac{1}{n^3} \right], \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛, 但 $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$ 发散.

(3) 由 $|f(x)| \leq \frac{1}{2}[1 + f^2(x)]$, 可知 $\int_a^b f^2(x) dx$ 收敛保证 $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛; 但 $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛不能保证 $\int_a^b f^2(x) dx$ 收敛, 例如: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

则 $\int_0^1 f(x) dx$ 绝对收敛, 但 $\int_0^1 f^2(x) dx$ 发散.