数学奥林匹克小丛书

第二版

高中卷 9

Shuxue Aolinpike
XIAOCONG SHU

几何不等式

冷岗松 编著

ECNUP 上海市著名商标
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

数学奥林匹克小丛书

第二版

高中卷 9

Shuxue Aolinpike

XIAOCONG

SHU

几何不等式

冷岗松 著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 几何不等式/冷岗松著.
—2版. —上海:华东师范大学出版社,2011.12
ISBN 978-7-5617-9214-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①冷… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第282994号

数学奥林匹克小丛书(第二版)·高中卷
几何不等式(第二版)

著　　者　冷岗松
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　徐惟简
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　6.75
字　　数　115千字
版　　次　2012年7月第二版
印　　次　2012年7月第一次
印　　数　1—11000
书　　号　ISBN 978-7-5617-9214-8/G·5511
定　　价　15.00元

出 版 人　朱杰人

数学奥林匹克小丛书（第二版） 编委会

目　　录

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　言

"上帝总是在做几何"(God is always doing geometry — Plato). 但几何不等式作为数学中一个独立的方向被深入研究和广泛关注却是现代的事情.

不少几何不等式既是数学审美的典范,又是应用的工具. 著名的 Brunn-Minkowski 不等式就是一个典型的例子,"它像一只大章鱼,它的触角几乎伸及数学的各领域,它不但与代数几何的 Hodge 指标定理等高深的数学相关联,也在一些应用学科如体视学、统计力学和信息理论中扮演着重要的角色".

迄今,以几何不等式为主题的著作多达数十种. 其中 Yu. D. Burago 和 V. A. Zalgaller 的"Geometric Inequalities"(Springer-Verlag 出版社,1988)是国际上被广泛引用的专著. 国内单墫先生的《几何不等式》(上海教育出版社,1980)却是一本十分优秀的入门书.

本人写作的这本小册子,主要是向参加数学奥林匹克的中学生和中学教师介绍几何不等式,选材是初等的. 在写作过程中,力求做到:第一,精选近年来研究中出现的新成果、新方法和新技巧;第二,介绍的范例应有简单而不平凡的结论、有趣而深刻的背景;第三,尽量展现学生的优秀解法. 当然,书中也融入了作者自己的一些研究成果和体会. 现惶恐着将它呈现在读者面前,祈望批评指正.

谨以此书奉献给裘宗沪先生,祝贺他的七十寿辰,并纪念他为中国数学奥林匹克事业作出的巨大贡献.

最后,我要感谢倪明先生,他的信任和耐心促成了本书的出版. 我还要感谢我的博士研究生司林,他热心地帮我打字、绘图.

作者最大的心愿就是读者喜欢他的作品.

冷岗松
2004 年 12 月于上海

1 距离不等式中的化直法

在几何量(长度、角度、面积、体积等)的大小比较中,线段长度的比较是最基本的.我们把仅涉及到线段长度的几何不等式叫做距离不等式.

欧氏几何中一些简单的不等公理和定理常常是解决距离不等式的出发点,其中最常用的工具有:

命题1 连接A、B两点的最短线是线段AB.

这个命题的一个直接推论就是

命题2 (三角不等式)如果A、B、C为任意三点,则$AB\leqslant AC+CB$,当且仅当C位于线段AB上时等号成立.

由这个命题还可产生下面一些常用的推论.

命题3 三角形中大边对大角,大角对大边.

命题4 三角形中线的长度小于夹它的两边长度之和的一半.

命题5 如果一个凸多边形位于另一个凸多边形的内部,则外面的凸多边形的周长大于里面凸多边形的周长.

命题6 凸多边形内的线段长度,或者不超过凸多边形的最大边长,或者不超过凸多边形的最大对角线长.

下面看一些例题.

例1 设a、b、c是$\triangle ABC$的边长,求证:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$$

证明 由三角不等式$a<b+c$可得

$$\frac{a}{b+c}=\frac{2a}{2(b+c)}<\frac{2a}{a+b+c}.$$

同理

$$\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c},$$

$$\frac{c}{b+a}<\frac{2c}{a+b+c}.$$

将上面三个不等式相加即得所求证的不等式. □

例 2 在$\triangle ABC$中,AB是最长边,P是三角形内一点,证明:

$$PA+PB>PC.$$

证明 如图 1-1,延长CP交AB于点D,则$\angle ADC$和$\angle BDC$有一个不是锐角,不妨设$\angle ADC$不是锐角,则在$\triangle ADC$中,由命题 3 得

$$AC>CD,$$

因此

$$AB\geqslant AC>CD\geqslant PC, \qquad ①$$

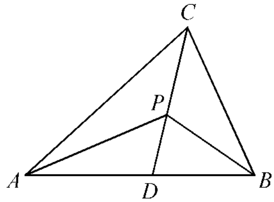


图 1-1

又在$\triangle PAB$中,由三角不等式

$$PA+PB>AB, \qquad ②$$

由①、②即得求证的不等式. □

注 (1) 若去掉条件"AB是最长边",则结论不一定成立.

(2) 当P是正三角形ABC所在平面上一点,且P不在这个正三角形的外接圆上,则PA、PB、PC中任意两个之和大于第三个,即它们构成某个三角形的三边.

例 3 设一条平面闭折线的周长为 1,证明:可以用一个半径是$\frac{1}{4}$的圆完全盖住这条折线.

分析 解决问题的关键是确定一个点(圆心),使得折线上的每一点到这个点的距离不超过$\frac{1}{4}$.

证明 如图 1-2,设A为闭折线上任意取定的一点,在闭折线上取点B,使折线AB(不论哪一段)的长恰为$\frac{1}{2}$.连接AB,取AB的中点O,则折线上任一点到O的距离不超过$\frac{1}{4}$.

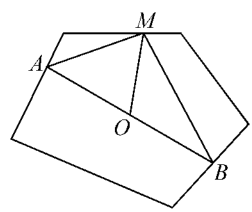


图 1-2

事实上,设M为折线上任一点,则由命题 4 可得

$$OM<\frac{1}{2}(AM+MB)\leqslant\frac{1}{2}(\text{折线 }AM+\text{折线 }BM)=\frac{1}{2}\text{折线 }AB=\frac{1}{4}.$$

现以 O 为圆心，$\frac{1}{4}$ 为半径作圆，则这个圆完全盖住了这条闭折线，证毕. □

上面几个例题的证明方法实际上都体现了一种"化直"的思想，我们称其为"化直法". 具体地说，化直法是以命题 1 或它的推论为理论依据，采用把曲线段化为折线段，再把折线段化为直线段来处理的方法. 化直法是证明几何不等式，特别是距离不等式最为常用的方法之一.

下面再看几个例子.

首先，我们介绍经典的 Pólya 问题.

例 4 求证：两端点在一圆周上且将此圆分成等面积的两部分的所有曲线中，以此圆的直径具有最短的长度.

证明 设$\widehat{AB}$是一条满足题设条件的曲线.

如果 A、B 两点正好是某一条直径的两个端点，那么显然$\widehat{AB}$的长度不会小于圆的直径.

如果弦 AB 不是直径，如图 1－3，那么令与弦 AB 平行的直径为 CD，曲线$\widehat{AB}$至少与 CD 交于不同的两点，设不是圆心的那个交点为 E，则

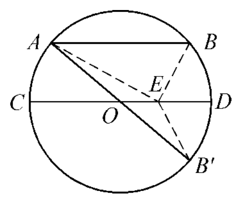


图 1－3

$$\text{曲线}\widehat{AB}\text{ 的长}=\text{曲线}\widehat{AE}\text{ 的长}+\text{曲线}\widehat{EB}\text{ 的长}$$
$$\geqslant AE+EB.\text{（这样将曲线化为了折线）}$$

下面再证折线$(AE+EB)>$圆的直径. 为此，作 B 关于 CD 的对称点 B'，则易证 AB'是圆的直径. 于是

$$AE+EB=AE+EB'>AB'=\text{圆的直径}.$$

综上便知所证结论成立. □

下面的例题源于我们对垂足三角形极值性质的研究.

例 5 设 P 是$\triangle ABC$ 内一点，P 在三边 BC、CA、AB 上的射影分别为 A'、B'、C'，直线 AP、BP、CP 与三条对边的交点分别为 A''、B''、C''. 已知$\triangle A''B''C''$的周长$=1$，求证：

$$\text{折线 }A'B''C'A''+\text{折线 }A'C''B'A''\leqslant 2.$$

证明 所求证的不等式等价于

$$A'B''+B''C'+C'A''+A'C''+C''B'+B'A''\leqslant 2. \qquad ①$$

要证①，只需证明局部不等式

$$A''B''+A''C''\geqslant A'B''+A'C''. \qquad ②$$

事实上，把②和类似的两个不等式

$$B''A''+B''C''\geqslant B'A''+B'C'',$$
$$C''A''+C''B''\geqslant C'A''+C'B'',$$

相加便得①.

下面是②的证明.

为证②，我们需要下面的引理.

引理 如图 1－4，设 P 是$\triangle ABC$ 的高 AD 上的一点，直线 BP 交 AC 于 E，直线 CP 交 AB 于 F，则

$$\angle FDA=\angle EDA.$$

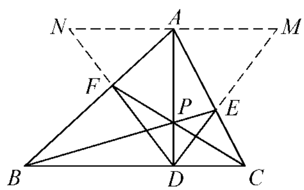


图 1－4

证明 过 A 作 BC 的平行线，与直线 DE、DF 交于M、N，则

$$\frac{AF}{BF}=\frac{AN}{BD},\ \frac{CE}{AE}=\frac{CD}{AM}.$$

由 Ceva 定理得

$$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

即 $$AM=AN.$$

又由 $$AD\perp MN,$$

所以 $$DM=DN,$$

故 $$\angle EDA=\angle ADM=\angle ADN=\angle FDA.$$

下面回转来证明②：

(1) 若 P 位于$\triangle ABC$ 的高 AD 上，则 $A'=A''$，②显然成立.

(2) 若 P 不位于$\triangle ABC$ 的高 AD 上，如图 1－5，不妨设 P、B 位于 AD 同侧，连接并延长 $A'P$ 交 AB 于 M，连接 MC 交 BB''于 M'，则由引理知

$$\angle B''A'P>\angle M'A'P=\angle C''A'P. \qquad ③$$

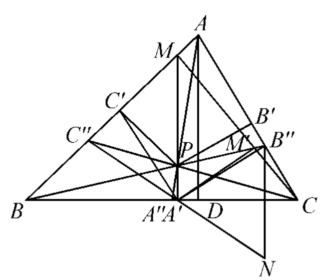


图 1－5

作 B''关于 BC 的对称点 N，则

$$\angle NA'C=\angle CA'B'',$$

又由③可得

$$\begin{aligned}&\angle NA'C+\angle C''A'C\\=&\angle NA'C+\angle C''A'P+\angle PA'C\\<&\angle PA'B''+\angle PA'N\\=&\pi,\end{aligned}$$

所以 A'、A''在 $C''N$ 同侧,即 A' 在$\triangle C''A''N$ 内,因此由命题 5 有

$$A''C''+A''N>A'C''+A'N.$$

注意到 $A''B''=A''N$, $A'B''=A'N$. 上式即是

$$A''B''+A''C''>A'B''+A'C''.$$

②得证. □

注 (1) 本例所用的反射对称方法是一种常用的化直手段.

(2) 利用不等式②,袁俊博士证明了刘健先生提出的一个猜想:

$$\triangle A'B'C' \text{ 的周长} \leqslant \triangle A''B''C'' \text{ 的周长}.$$

下面的例题是一个很有难度的问题.

例 6 设 P 为$\triangle ABC$ 内一点,证明:

$$\sqrt{PA}+\sqrt{PB}+\sqrt{PC}<\frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{BC}+\sqrt{CA}+\sqrt{AB}). \qquad ①$$

证明 下面的引理可由命题 5 直接得到.

引理 设 P 是凸四边形 $ABCD$ 的一个内点,则

$$PB+PC<BA+AD+DC.$$

下面证明①.

为简单计,设 $BC=a$, $AC=b$, $BA=c$, $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$.

如图 1-6,作出$\triangle ABC$ 三边的中点 A'、B'、C',则 P 必位于平行四边形$A'B'AC'$、$C'B'CA'$、$B'A'BC'$某一个之中. 不妨设 P 位于平行四边形 $A'B'AC'$内,则对凸四边形 $ABA'B'$应用引理有

$$PA+PB<BA'+A'B'+B'A,$$

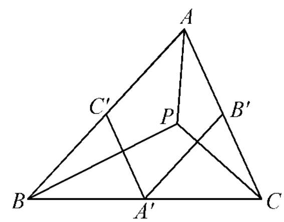


图 1-6

即

$$x+y<\frac{1}{2}(a+b+c). \qquad ②$$

同理由凸四边形 $ACA'C'$ 可得

$$PA+PC<AC'+C'A'+A'C,$$

即
$$x+z<\frac{1}{2}(a+b+c). \quad ③$$

将②、③两式相加可得

$$2x+y+z<a+b+c. \quad ④$$

现注意到原不等式等价于

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2<\frac{5}{4}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2,$$

即
$$x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$$
$$<\frac{5}{4}(a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}). \quad ⑤$$

因此我们仅需证明⑤.

由平均值不等式可得

$$2\sqrt{xy}\leqslant 2x+\frac{1}{2}y,$$

$$2\sqrt{xz}\leqslant 2x+\frac{1}{2}z,$$

$$2\sqrt{yz}\leqslant y+z.$$

利用这三个不等式和不等式④可得

⑤的左边 $\leqslant x+y+z+2x+\frac{1}{2}y+2x+\frac{1}{2}z+y+z$

$$=\frac{5}{2}(2x+y+z)<\frac{5}{2}(a+b+c).$$

因此要证⑤,只需证明

$$\frac{5}{2}(a+b+c)\leqslant\frac{5}{4}(a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}). \quad ⑥$$

而式⑥化简后等价于

$$a+b+c\leqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}), \quad ⑦$$

这是一个简单的不等式. 事实上,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则

⑦的右端 $\geqslant 2(b+c+c)>2\left(\frac{a}{2}+\frac{b+c}{2}+c\right)>a+b+c=$ ⑦的左端.

综上,①被证明. □

注 (1) 不等式①右边的常数$\frac{\sqrt{5}}{2}$是最优的,这留给读者考虑.

(2) 上面漂亮的证法由朱庆三同学(原华南师大附中学生,曾获2004年第45届IMO金牌)给出,巧妙的划分点P的位置和处理好变量的非完全对称性是这个解法的关键.

当然,上面的例6还可用等高线方法来证明.所谓等高线就是在讨论极值问题时引进的特殊平面曲线,如圆、椭圆等.这里用的等高线是椭圆.

例6的另证

设$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,且不妨设$a\leqslant b$, c.

现过P点作一个以B、C为焦点的椭圆,与AB、AC分别交于E和F,如图1-7,则

$$PA\leqslant \max(EA, FA).$$

不妨设$EA\geqslant FA$,则$PA\leqslant EA$.

又

$$\sqrt{PB}+\sqrt{PC}\leqslant\sqrt{2(PB+PC)}=\sqrt{2(EB+EC)},$$

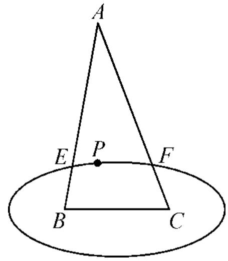


图1-7

因此

$$\begin{aligned}
&\sqrt{PA}+\sqrt{PB}+\sqrt{PC}\\
<&\sqrt{EA}+\sqrt{2(EB+EC)}\\
\leqslant&\left[5EA+\frac{5}{2}(EB+EC)\right]^{\frac{1}{2}}\\
=&\left[5(EA+EB)+\frac{5}{2}(EC-EB)\right]^{\frac{1}{2}}\\
<&\sqrt{5}\left(a+\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
<&\frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}),
\end{aligned}$$

得证. □

习 题 1

1 设A'为$\triangle ABC$的外角平分线AT上的任意一点,试证:

$$A'B + A'C \geqslant AB + AC.$$

2 **给定边长为** $a > b > c$ **的**$\triangle ABC$ **及其任意内点** O. **设直线** AO、BO、CO **与**$\triangle ABC$ **的边交于点** P、Q、R. **证明：**

$$OP + OQ + OR < a.$$

3 **设点** D、E、F **分别是**$\triangle ABC$ **的边** BC、CA、AB **上的点，**Δ、R **分别为**$\triangle ABC$ **的面积和外接圆半径. 求证：**

$$DE + EF + FD \geqslant \frac{2\Delta}{R}.$$

4 **设** E、F **分别是**$\triangle ABC$ **中以** A **为端点的射线** AC、AB **上的点，则**

$$|AB - AC| + |AE - AF| \geqslant |BE - CF|,$$

当且仅当 $AB = AC$ **且** $AE = AF$ **时等号成立.**

5 **在六边形** $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ **内存在一点** O，**使得** $\angle A_iOA_{i+1} = \frac{\pi}{3}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$（**约定** $A_7 = A_1$）. **如果** $OA_1 > OA_3 > OA_5$，$OA_2 > OA_4 > OA_6$，**则**

$$A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 < A_2A_3 + A_4A_5 + A_6A_1.$$

2 Ptolemy 不等式及其应用

著名的 Ptolemy 不等式是关于任意四边形的一个距离不等式，它可表述为

定理 （Ptolemy 不等式） 在四边形 $ABCD$ 中有

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD,$$

等号成立当且仅当 A、B、C、D 四点共圆.

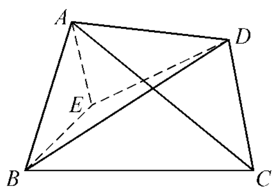


图 2-1

证明 如图 2-1，在四边形 $ABCD$ 内取点 E，使 $\angle BAE = \angle CAD$，$\angle ABE = \angle ACD$，则 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$. 因此 $AB \cdot CD = AC \cdot BE$. 又 $\angle BAC = \angle EAD$，且 $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AD}$，所以 $\triangle ABC \backsim \triangle AED$，$AD \cdot BC = AC \cdot DE$. 故

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE + DE) \geqslant AC \cdot BD,$$

等号成立当且仅当点 E 在 BD 上，此时 $\angle ABD = \angle ACD$，故四边形 $ABCD$ 内接于圆. □

应用 Ptolemy 不等式，我们可给出一些距离不等式的简洁证明.

例 1 （Klamkin 对偶不等式） 设$\triangle ABC$ 的三边分别为 a、b、c，已知边 b、c 上的中线分别为 m_b、m_c，求证：

$$4m_bm_c \leqslant 2a^2 + bc. \quad ①$$

下面的证明简直无需文字说明便知其意.

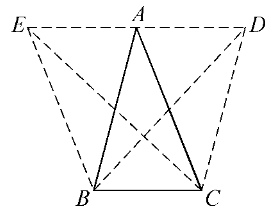


图 2-2

证明 如图 2-2，作平行四边形 $ABCD$ 和平行四边形 $ACBE$，连接 BD、CE. 注意到 $DE = 2a$，$BD = 2m_b$，$CE = 2m_c$，对四边形 $BCDE$ 应用 Ptolemy 不等式立得

$$BC \cdot DE + BE \cdot CD \geqslant BD \cdot EC,$$

这就是①. □

例 2 设△ABC 的三边分别为 a、b、c，三边上的中线分别为 m_a、m_b、m_c，求证：

$$m_a(bc-a^2)+m_b(ac-b^2)+m_c(ab-c^2)\geqslant 0. \quad ①$$

下面的证法的关键在于寻找一个特殊的四边形.

证明 如图 2-3，设△ABC 的三条中线分别为 AD、BE、CF，重心为 G.

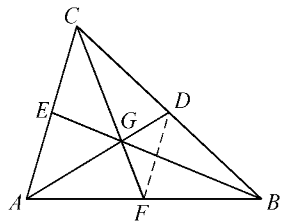


图 2-3

现对四边形 $BDGF$ 应用 Ptolemy 不等式可得

$$BG\cdot DF\leqslant GF\cdot DB+DG\cdot BF. \quad ②$$

注意到 $BG=\frac{2}{3}m_b$，$DG=\frac{1}{3}m_a$，$GF=\frac{1}{3}m_c$ 及 $DF=\frac{1}{2}b$，因此②可改写为

$$2bm_b\leqslant am_c+cm_a.$$

因此
$$2b^2m_b\leqslant abm_c+cbm_a. \quad ③$$

同理有
$$2c^2m_c\leqslant acm_b+bcm_a, \quad ④$$

$$2a^2m_a\leqslant abm_c+acm_b. \quad ⑤$$

③、④、⑤相加可得

$$2(m_abc+m_bca+m_cab)\geqslant 2(m_aa^2+m_bb^2+m_cc^2),$$

整理就得①. □

下面看一个用 Ptolemy 定理产生几何线性不等式的例子. 实际上，上例也是用 Ptolemy 定理先得到线性不等式.

例 3 已知 $A_1A_2\cdots A_n$ 是一个正 n 边形，M_1，M_2，…，M_n 是相应边的中点. 设 P 是这个 n 边形所在平面上的任意一点. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n}PM_i\geqslant\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}PA_i. \quad ①$$

证明 如图 2-4，M_{i-1}、M_i 分别是这个正 n 边形第 $i-1$ 条边和第 i 条边的中点. 对四边形 $PM_{i-1}A_iM_i$ 应用 Ptolemy 不等式可得局部不等式

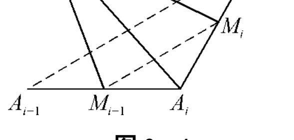


图 2-4

$$A_iM_{i-1}\cdot PM_i+PM_{i-1}\cdot A_iM_i\geqslant PA_i\cdot M_{i-1}M_i,$$

由此可得

$$PM_i + PM_{i-1} \geqslant 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \cdot PA_i, \qquad ②$$

这里 $i = 1, 2, \cdots, n$，并约定 $A_0 = A_n$，$M_0 = M_n$.

现对②求和可得

$$\sum_{i=1}^{n}(PM_i + PM_{i-1}) \geqslant 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sum_{i=1}^{n} PA_i,$$

这就是①. □

下面两例分别介绍利用 Ptolemy 定理处理有关四边形和三角形内(或所在平面上的)动点的不等式的基本构形技巧.

例 4　设 P 为平行四边形 $ABCD$ 内一点，求证：

$$PA \cdot PC + PB \cdot PD \geqslant AB \cdot BC, \qquad ①$$

并指出等号成立的条件.

证明　如图 2-5，作 PQ 平行并等于 CD，连接 CQ、BQ，则 $CDPQ$ 与 $ABQP$ 均是平行四边形，所以

$$CQ = PD,\ BQ = PA,\ PQ = AB.$$

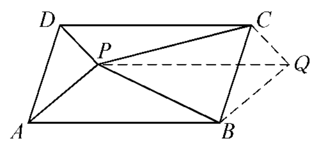


图 2-5

在四边形 $PBQC$ 中由 Ptolemy 不等式有

$$BQ \cdot PC + PB \cdot CQ \geqslant PQ \cdot BC,$$

即

$$PA \cdot PC + PB \cdot PD \geqslant AB \cdot BC,$$

等号成立当且仅当 P、B、Q、C 四点共圆，即 $\angle CPB + \angle CQB = \pi$，而 $\angle CQB = \angle APD$，所以式①等号成立的条件为

$$\angle APD + \angle CPB = \pi. \quad □$$

例 5　在△ABC 中，$\angle A = 60°$，P 为△ABC 所在平面上一点，且使得 $PA = 6$，$PB = 7$，$PC = 10$，求△ABC 面积的最大值.

解法 1　先证引理.

引理　在凸四边形 $XYZU$ 中，对角线 XZ 和 YU 交于点 O，$\angle XOY = \theta$，则

$$YZ^2 + UX^2 - XY^2 - ZU^2 = 2XZ \cdot YU \cdot \cos\theta.$$

证明　如图 2-6，在△OYZ、△OUX、△OXY 及△OZU 中分别应用余

弦定理可得

$$YZ^2=OY^2+OZ^2+2OY\cdot OZ\cdot\cos\theta,$$
$$UX^2=OU^2+OX^2+2OU\cdot OX\cdot\cos\theta,$$
$$XY^2=OX^2+OY^2-2OX\cdot OY\cdot\cos\theta,$$
$$ZU^2=OZ^2+OU^2-2OZ\cdot OU\cdot\cos\theta,$$

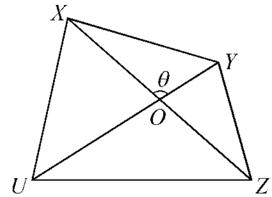


图 2-6

由这四个等式相加便可立得引理中的等式.

下面求解原问题.

如图 2-7,在$\triangle ABC$中,过P作AB的平行线,过A作PB的平行线,两条直线交于D. 设PD交AC于E,则$\angle CEP=60^\circ$.

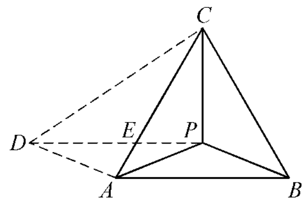


图 2-7

设$AC=x$, $AB=PD=y$, $CD=t$. 对四边形$APCD$应用引理可得

$$t^2+6^2-10^2-7^2=2\cos 60^\circ\cdot xy,$$

即 $$xy=t^2-113. \quad ①$$

另一方面,对四边形$APCD$应用 Ptolemy 不等式可得

$$xy\leqslant 6t+70. \quad ②$$

由①、②有 $$t^2-6t-183\leqslant 0,$$

所以 $$0\leqslant t\leqslant 3+8\sqrt{3}. \quad ③$$

将③代入②可得$xy\leqslant 88+48\sqrt{3}$,故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}xy\leqslant 36+22\sqrt{3},$$

等号成立当且仅当D、A、P、C四点共圆,即$\angle PBA=\angle PCA$. 故$S_{\triangle ABC}$的最大值为$36+22\sqrt{3}$. □

解法 2 先证引理.

引理 设P为一个平行四边形$ABCD$所在平面上的一点,则

$$PA^2+PC^2-PB^2-PD^2=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

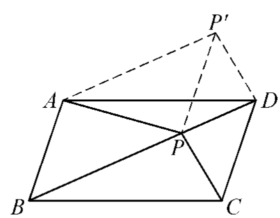


图 2-8

证明 如图 2-8,平移$\triangle BPC$至$\triangle ADP'$. 设$\overrightarrow{AP}=\alpha$, $\overrightarrow{PD}=\beta$, $\overrightarrow{DP'}=\gamma$,则

$$PA^2+PC^2=PA^2+P'D^2=\alpha^2+\gamma^2,$$

$$\begin{aligned}PD^2+PB^2&=PD^2+P'A^2\\&=\beta^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2\\&=2\beta^2+\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\cdot\beta+2\alpha\cdot\gamma+2\gamma\cdot\beta,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}PA^2+PC^2-PD^2-PB^2&=-2\beta^2-2\alpha\cdot\beta-2\gamma\cdot\beta-2\gamma\cdot\alpha\\&=-2(\alpha+\beta)\cdot(\beta+\gamma)\\&=2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{P'P}\\&=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

下面求解原问题.

如图 2-9,平移$\triangle APB$至$\triangle CP'D$,则$P'C=6$, $P'D=7$, $CD=AB$, $PP'=AC$.

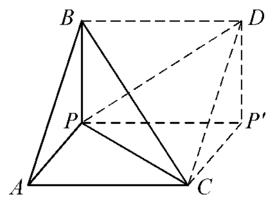


图 2-9

设$PD=d$,对四边形$CP'DP$应用 Ptolemy 不等式可得

$$70+6d\geqslant AB\cdot AC. \quad ①$$

再对平行四边形$ABDC$应用引理可得

$$7^2+10^2-6^2-d^2=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=-AB\cdot AC. \quad ②$$

由①、②可得

$$d^2-113\leqslant 6d+70,$$

所以
$$0\leqslant d\leqslant 3+8\sqrt{3}.$$

故由①可得$AB\cdot AC\leqslant 88+48\sqrt{3}$,进而得$S_{\triangle ABC}\leqslant 36+22\sqrt{3}$,等号成立当且仅当$\angle ACP=\angle APB$,故$S_{\triangle ABC}$的最大值为$36+22\sqrt{3}$. □

上例的解法 1 由李先颖同学(原湖南师大附中学生,曾获 2004 年第 45 届 IMO 金牌)给出,解法 2 由朱庆三同学给出,两种方法构形上有相似点,都是漂亮的解法.

下面的例子是著名的几何学家 Bottema 的一个不等式. 注意到 Ptolemy 不等式实际上对于空间四边形也是成立的,因此我们讨论的是关于空间任意点的 Bottema 不等式.

例 6 (Bottema 不等式) 设a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3分别是位于同一平面上的两个三角形$\triangle A_1A_2A_3$和$\triangle B_1B_2B_3$的三边,F、F'分别是它们的面积,x_1、x_2、x_3分别是空间任一点P到$\triangle A_1A_2A_3$三顶点的距离,记

$$M=b_1^2(-a_1^2+a_2^2+a_3^2)+b_2^2(a_1^2-a_2^2+a_3^2)+b_3^2(a_1^2+a_2^2-a_3^2).$$

求证：

$$\sum_{i=1}^{3} b_i x_i \geqslant \left(\frac{M}{2}+8FF'\right)^{\frac{1}{2}} \tag{①}$$

证明　如图 2－10，设 $A_1A_2=a_3$，**在直线** A_1A_2 **位于** $\triangle A_1A_2A_3$ **的异侧作** $\triangle A_1A_2C$，**使得** $\triangle A_1A_2C \backsim \triangle B_1B_2B_3$，**则**

$$A_1C=\frac{a_3b_2}{b_3},\ A_2C=\frac{a_3b_1}{b_3}.$$

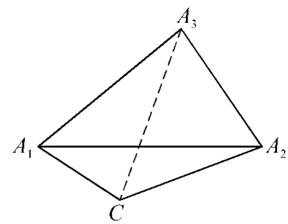


图 2－10

对空间四边形 PA_1CA_2 **应用** Ptolemy **不等式可得**

$$x_1\frac{a_3b_1}{b_3}+x_2\frac{a_3b_2}{b_3}\geqslant a_3\cdot PC,$$

即
$$b_1x_1+b_2x_2\geqslant b_3\cdot PC.$$

因此

$$\begin{aligned}b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3&\geqslant b_3\cdot PC+b_3x_3\\&=b_3(PC+x_3)\geqslant b_3\cdot A_3C,\end{aligned}$$

即有
$$2(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2\geqslant 2b_3^2\cdot A_3C^2. \tag{②}$$

另一方面，在$\triangle A_1A_3C$ **中应用余弦定理可得**

$$A_3C^2=a_2^2+\left(\frac{a_3b_2}{b_3}\right)^2-2a_2\cdot\frac{a_3b_2}{b_3}\cdot\cos(\angle A_3A_1A_2+\angle A_2A_1C).$$

因此

$$\begin{aligned}2b_3^2\cdot A_3C^2&=2a_2^2b_3^2+2a_3^2b_2^2-4a_2a_3b_2b_3\cos(\angle A_3A_1A_2+\angle A_2A_1C)\\&=2a_2^2b_3^2+2a_3^2b_2^2-4a_2a_3b_2b_3\cdot(\cos\angle A_3A_1A_2\cdot\cos\angle A_2A_1C-\\&\quad\sin\angle A_3A_1A_2\cdot\sin\angle A_2A_1C)\\&=2a_2^2b_3^2+2a_3^2b_2^2-4a_2a_3b_2b_3\cdot\frac{a_2^2+a_3^2-a_1^2}{2a_2a_3}\cdot\frac{b_2^2+b_3^2-b_1^2}{2b_2b_3}+\\&\quad 4(a_2a_3\sin\angle A_3A_1A_2)(b_2b_3\sin\angle A_2A_1C)\\&=2a_2^2b_3^2+2a_3^2b_2^2-(a_2^2+a_3^2-a_1^2)(b_2^2+b_3^2-b_1^2)+16FF'\\&=b_1^2(-a_1^2+a_2^2+a_3^2)+b_2^2(a_1^2-a_2^2+a_3^2)+b_3^2(a_1^2+a_2^2-a_3^2)+\\&\quad 16FF'\\&=M+16FF'.\end{aligned} \tag{③}$$

由②、③,式①得证. □

注 由著名的 Neuberg-Pedoe 不等式:$M \geqslant 16FF'$,从 Bottema 不等式可推出关于两个三角形的如下不等式

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3 \geqslant 4\sqrt{FF'}.$$

在这个不等式中取$\triangle B_1B_2B_3$ 为正三角形,则可得关于一个三角形内点到顶点距离的费马不等式

$$x_1+x_2+x_3 \geqslant 2\sqrt{\sqrt{3}F}.$$

当然,在 Bottema 不等式中取$\triangle B_1B_2B_3$ 为正三角形,则可得费马不等式的如下加强形式

$$x_1+x_2+x_3 \geqslant \left(\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}F\right)^{\frac{1}{2}}.$$

习 题 2

1 设 $ABCDEF$ 是凸六边形,且 $AB=BC$, $CD=DE$, $EF=FA$,证明:

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC} \geqslant \frac{3}{2},$$

并指出等号成立的条件.

2 $\triangle ABC$ 的边 BC 和边 AC 分别取定长 a 和 b,而边 AB 的长度可变动. 以边 AB 作为正方形的一边向三角形外作正方形. 设 O 是所作正方形的中心,并设 BC 和 AC 的中点分别为 M 和 N. 试求 $OM+ON$ 的最大值.

3 设 $ABCDEF$ 是凸六边形,且 $AB=BC=CD$, $DE=EF=FA$, $\angle BCD=\angle EFA=60°$. 设 G 和 H 是这个六边形内部的两点,使得 $\angle AGB=\angle DHE=120°$. 试证:

$$AG+GB+GH+DH+HE \geqslant CF.$$

(第 36 届 IMO 试题)

4 已知$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$, P 为$\triangle ABC$ 内任意一点,过点 P 引 AB、AC、BC 的平行线,分别交 BC、AC 于 F、E,交 AB、BC 于 K、I,交 AB、AC 于 G、H. AD 为$\odot O$ 过点 P 的弦,试证:

$$EF^2+KI^2+GH^2 \geqslant 4PA \cdot PD.$$

5 **设在**$\triangle ABC$ **中，**$\angle A$、$\angle B$ **与**$\angle C$ **的角平分线分别交**$\triangle ABC$ **的外接圆于** A_1、B_1、C_1，**求证：**

$$AA_1+BB_1+CC_1>AB+BC+CA.$$

（1982 **年澳大利亚竞赛题**）

3 圆内接四边形中的不等式

圆内接四边形不仅有着丰富的几何等量关系，也有很多有趣的极值性质. 因为圆内接四边形的边可用对应的圆心角的三角函数表示，这就使得三角方法在处理圆内接四边形的几何不等式时能派上用场. 下面就是这样的一个例子.

例 1 已知四边形 $ABCD$ 是圆的内接四边形，证明：

$$|AB-CD|+|AD-BC|\geqslant 2|AC-BD|.$$

（第 28 届美国数学奥林匹克试题）

证明 如图 3-1，设四边形 $ABCD$ 外接圆的圆心为 O，该外接圆的半径为 1，$\angle AOB=2\alpha$，$\angle BOC=2\beta$，$\angle COD=2\gamma$，$\angle DOA=2\delta$，则

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi.$$

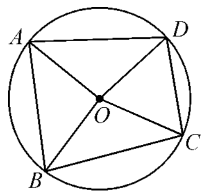


图 3-1

不妨设 $\alpha\geqslant\gamma$，$\beta\geqslant\delta$，则

$$\begin{aligned}|AB-CD|&=2|\sin\alpha-\sin\gamma|\\&=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right|=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\delta}{2}\right|.\end{aligned}$$

同理

$$|AD-BC|=4\left|\sin\frac{\beta-\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right|,$$

$$|AC-BD|=4\left|\sin\frac{\beta-\delta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|.$$

因此

$$\begin{aligned}|AB-CD|-|AC-BD|&=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\left(\left|\sin\frac{\beta+\delta}{2}\right|-\left|\sin\frac{\beta-\delta}{2}\right|\right)\\&=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\left(\sin\frac{\beta+\delta}{2}-\sin\frac{\beta-\delta}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= 4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\cdot\left(2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}\right)$$
$$\geqslant 0.$$

故 $$|AB-CD|\geqslant|AC-BD|.$$

同理 $$|AD-BC|\geqslant|AC-BD|.$$

将这两个不等式相加即得求证结果. □

圆内接四边形中又有一种更特殊的四边形叫双圆四边形. 所谓双圆四边形是既有外接圆又有内切圆的四边形.

下面的例子就是关于双圆四边形的一个不等式,这个不等式是陈计先生发现的. 这里介绍的证明 1 和证明 2 分别由龙云同学(原长沙市雅礼中学学生,1999 年入选全国数学冬令营)和朱庆三同学提供.

例 2 凸四边形 $ABCD$ 既有内切圆又有外接圆,已知它的外接圆半径为 R,面积为 S,四边形的边长分别为 a、b、c、d,证明:

$$abc+abd+acd+bcd\leqslant 2\sqrt{S}(S+2R^2). \quad ①$$

证明 1 如图 3-2,设四边形 $ABCD$ 的外接圆和内切圆的圆心分别为 O 和 I. 内切圆与边 $AB=a$、$BC=b$、$CD=c$、$DA=d$ 的切点分别为 K、L、M、N. 设 $\angle AIN=\angle 1$, $\angle BIK=\angle 2$, $\angle CIL=\angle 3$, $\angle DIM=\angle 4$,并记 $AK=AN=a'$, $BL=BK=b'$, $CL=CM=c'$, $DM=DN=d'$.

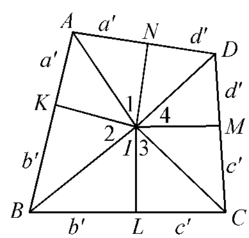


图 3-2

不妨设内切圆 I 的半径 r 为 1. 由 $ABCD$ 有内切圆知

$$a+c=b+d.$$

这时若记①的左边为 H,则

$$H=(a+c)bd+(b+d)ac=\frac{1}{2}(a+b+c+d)(ac+bd). \quad ②$$

又 $$a=a'+b',\ b=b'+c',\ c=c'+d',\ d=d'+a',$$

将这些表达式代入②的右边便得

$$H=(a'+b'+c'+d')[(a'+b')(c'+d')+(b'+c')(d'+a')]. \quad ③$$

又由 $\angle A+\angle C=180^\circ$, 可得

$$\angle 1+\angle 3=90^{\circ}.$$

因此 $\triangle AIN \backsim \triangle ICL$，由此得

$$a'c'=AN\cdot CL=NI\cdot IL=1. \qquad ④$$

同理 $$b'd'=1. \qquad ⑤$$

又注意到

$$S=\frac{a+b+c+d}{2}\cdot r=a'+b'+c'+d', \qquad ⑥$$

因此由④、⑤、⑥可得

$$H=S[4+(a'+c')(b'+d')]. \qquad ⑦$$

另一方面，由正弦定理并注意到 $\angle B+2\angle 2=180^{\circ}$，有

$$\begin{aligned} R&=\frac{AC}{2\sin\angle B}=\frac{AC}{2\sin 2\angle 2}=\frac{AC}{4}\left(\tan\angle 2+\frac{1}{\tan\angle 2}\right)\\ &=\frac{1}{4}AC(\tan\angle 2+\tan\angle 4)\\ &=\frac{1}{4}AC\cdot(b'+d'). \end{aligned}$$

同理 $$R=\frac{1}{4}BD\cdot(a'+c').$$

因此 $$R^2=\frac{1}{16}AC\cdot BD(a'+c')(b'+d'),$$

但是 $$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot BD,$$

这里 α 为对角线 AC 与 BD 夹角. 因此

$$R^2\geqslant\frac{1}{8}S(a'+c')(b'+d').$$

由上可知

$$\begin{aligned} ①\text{ 的右边}&\geqslant 2\sqrt{S}\left(S+\frac{S}{4}(a'+c')(b'+d')\right)\\ &=\frac{S^{\frac{3}{2}}}{2}[4+(a'+c')(b'+d')]. \end{aligned} \qquad ⑧$$

因此由⑦、⑧知，要证式①，只需证明 $\frac{1}{2}S^{\frac{1}{2}}\geqslant 1$，这等价于

$$\sqrt{a'+b'+c'+d'} \geqslant 2. \qquad ⑨$$

而由 $a'c'=1$, $b'd'=1$ 可知

$$a'+b'+c'+d' \geqslant 2\sqrt{a'c'}+2\sqrt{b'd'}=4,$$

⑨得证. □

上面的证明 1 采用精细的三角方法,步步推进,自然流畅. 此方法得到了不少奥林匹克高手们的赞赏.

证明 2 先证引理.

引理 设$\triangle ABC$ 中, $\angle A \geqslant 90°$,则$\dfrac{b+c}{a} \leqslant \sqrt{2}$.

证明

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=2\frac{\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}{\sin A}$$
$$\leqslant \frac{2\cos\dfrac{A}{2}}{2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}=\frac{1}{\sin\dfrac{A}{2}} \leqslant \sqrt{2}.$$

下面证明原题中的不等式.

如图 3-3,设四边形 $ABCD$ 的四边 AB、BC、CD、DA 的长分别为 a、b、c、d,再设 $ABCD$ 的内切圆的半径为 1. 注意到

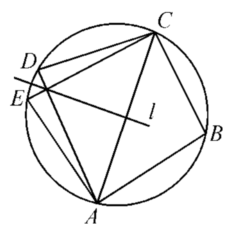


图 3-3

$$a+c=b+d=\frac{1}{2}(a+b+c+d)\cdot 1=S,$$

可得

$$\begin{aligned} H &= abc+abd+acd+bcd \\ &= ac(b+d)+bd(a+c)=(ac+bd)S. \end{aligned} \qquad ①$$

现设 AC 的中垂线为 l, D 关于 l 的对称点为 E,则

$$\triangle ACD \cong \triangle CAE.$$

因此 $AE=c$, $CE=d$,且 $\angle E=\angle D=\pi-\angle B$, 由此可知 A、E、C、B 四点共圆,故

$$S=\frac{1}{2}(ac+bd)\sin\alpha, \qquad ②$$

其中 $\alpha=\angle EAB$.

由①、②知原不等式等价于

$$\frac{2S}{\sin\alpha}\cdot S\leqslant 2\sqrt{S}(S+2R^2). \qquad ③$$

注意到 $R=\frac{BE}{2\sin\alpha}$, 因此③进一步等价于

$$S^{\frac{3}{2}}\leqslant S\sin\alpha+\frac{BE^2}{2\sin\alpha}, \qquad ④$$

但由平均值不等式 ④ 的右端 $\geqslant 2\sqrt{\frac{S\cdot BE^2}{2}}$.

因此要证④,只需证明 $\sqrt{2}BE\geqslant S.$ ⑤

事实上,由 $\angle EAB+\angle ECB=180^\circ$, 不妨设 $\angle EAB\geqslant 90^\circ$. 对$\triangle ABE$ 应用引理可知 $\frac{a+c}{BE}\leqslant\sqrt{2}$, 故

$$\sqrt{2}BE\geqslant a+c=S,$$

⑤式得证. □

上面的证法综合运用三角、几何的技巧,构造了一个新的共圆四边形,实现了问题的转化.

圆内接四边形有一个著名的极值性质:四条边给定的四边形中,内接于圆的四边形面积最大.

一个给定边长的圆内接四边形的面积有很好的解析公式,这就是下面的定理.

定理　设一个圆的内接凸四边形的边长依次为 a、b、c、d,又设 s 为该四边形周长的一半,则四边形的面积 F 为

$$F=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

这个定理是三角形熟知结果的推广. 如果取 $d=0$, 我们便得到通常的三角形面积的海伦公式.

下面介绍的证明引自 Roger A. Johnson 的书《近代欧氏几何学》(Modern Geometry,中译本:单墫译,上海教育出版社,1999).

证明 设定理中的四边形为 $ABCD$,如图 3-4,$AB=a$,$BC=b$,$CD=c$,$DA=d$.

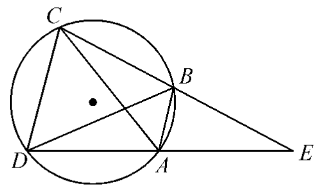


图 3-4

如果 $ABCD$ 是长方形,证明立即得出.

如果 $ABCD$ 不是长方形,设 BC 与 AD 相交于圆外的点 E. 记 $CE=x$,$DE=y$,则由三角形面积公式有

$$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+c)(x+y-c)(x-y+c)(-x+y+c)}. \qquad ①$$

但 $\triangle ABE \backsim \triangle CDE$,所以

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle CDE}}=\frac{a^2}{c^2},$$

由此推得

$$\frac{F}{S_{\triangle CDE}}=\frac{c^2-a^2}{c^2}, \qquad ②$$

又由比例式

$$\frac{x}{c}=\frac{y-d}{a},\ \frac{y}{c}=\frac{x-b}{a},$$

相加解出 $x+y$,得

$$x+y+c=\frac{c}{c-a}(-a+b+c+d),$$

$x+y-c$ 等等的类似表达式,都可以立即得到. 将它们代入①并化简,得

$$S_{\triangle CDE}=\frac{c^2}{c^2-a^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

代入式②,便知结论成立. □

推广 可以证明任一边长为 a、b、c、d,一对对角的和为 $2u$ 的凸四边形,面积 F 可由下式给出

$$F^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2 u.$$

由于证明包含长而乏味的三角化简,我们不在这里给出. 由这个公式立即看出:四条边给定的四边形中,内接于圆的面积最大.

下面的例子用到了圆内接四边形面积的这种极值性质.

例 3 (Popa 不等式) 如果一个凸四边形的四边满足 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$,面

积为 F，求证：

$$F \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2. \qquad ①$$

证明　由于边长给定的四边形中，圆内接四边形的面积最大，因此我们仅需对圆内接四边形证明①便可. 这时

$$F^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. 但是 $s-d=(a+b+c)-s$，因此由算术几何平均值不等式可得

$$\begin{aligned} F^2 &= 3^3\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}c\right)(a+b+c-s) \\ &\leqslant 3^3\left[\frac{\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}a\right)+\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}b\right)+\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}c\right)+(a+b+c-s)}{4}\right]^4 \\ &= 3^3\left(\frac{a+b+c}{3\cdot 2}\right)^4 \leqslant 3^3\left(\frac{c}{2}\right)^4. \end{aligned}$$

最后一步用了 $a \leqslant b \leqslant c$.

两边开方，由此便得

$$F \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2,$$

得证. □

再看一个典型问题.

例 4　(高灵不等式)　设凸四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 的四边分别为 a、b、c、d 和 a'、b'、c'、d'，它们的面积分别为 F、F'. 令

$$K = 4(ad+bc)(a'd'+b'c') - (a^2-b^2-c^2+d^2)(a'^2-b'^2-c'^2+d'^2).$$

求证：

$$K \geqslant 16FF'.$$

证明　由于给定边长的四边形以圆的内接四边形具有最大面积，因此仅需考虑 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 均为圆内接四边形的情况.

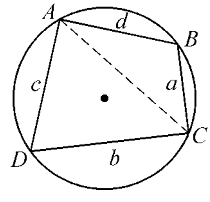


图 3－5

如图 3－5，因为 $\angle B + \angle D = 180°$，所以

$$2F = (ad+bc)\sin B, \qquad ①$$

类似的有

$$2F' = (a'd'+b'c')\sin B'. \qquad ②$$

另一方面，由余弦定理

$$\begin{aligned} AC^2 &= b^2+c^2+2bc\cos B \\ &= a^2+d^2-2ad\cos B, \end{aligned}$$

因此 $$a^2-b^2-c^2+d^2=2(ad+bc)\cos B, \qquad ③$$

类似的有 $$a'^2-b'^2-c'^2+d'^2=2(a'd'+b'c')\cos B'. \qquad ④$$

由①、④可得

$$K-16FF'=4(ad+bc)(a'd'+b'c')(1-\cos(B-B'))\geqslant 0,$$

故原不等式成立. □

注 由上面的证法，实际上可把高灵不等式写的更一般一些：

$$0\leqslant K-16FF'\leqslant 8(ad+bc)(a'd'+b'c'),$$

左边的不等式即为高灵不等式.

高灵不等式可看作是著名的 Neuberg-Pedoe 不等式在四边形中的推广.

在这一节的最后，我们研究一个难度较大的关于双圆四边形的极值问题，这里要介绍的解法由向振同学（原长沙市一中学生，曾获 2003 年第 44 届 IMO 金牌）给出.

例 5 给定外接圆半径 R 和面积 S 不变的双圆四边形 $ABCD$（这里 $S\leqslant 2R^2$），求 plm 的最大值，其中 p 是四边形 $ABCD$ 的半周长，l、m 分别为它的两条对角线长.

解 如图 3－6，我们可以用三个参数 r、α、$\beta\left(\gamma\in(0,+\infty),\ \alpha、\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$来确定一个双圆四边形 $ABCD$，这里的 r 是四边形 $ABCD$ 的内切圆半径，$\alpha=\angle AIK$，$\beta=\angle BIK$，其中 I 是四边形 $ABCD$ 的内切圆的圆心，K 是圆 I 与边 AB 的切点.

下面证明：

$$S=r^2\left(\frac{2}{\sin 2\alpha}+\frac{2}{\sin 2\beta}\right), \qquad ①$$

$$R^2=r^2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha\sin 2\beta}+\frac{1}{\sin^2 2\alpha\sin^2 2\beta}\right). \qquad ②$$

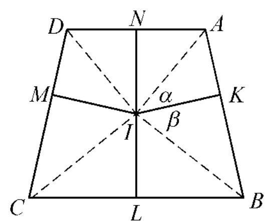


图 3－6

先证①. 因为半周长

$$p=r(\tan\alpha+\cot\alpha+\tan\beta+\cot\beta)=r\left(\frac{2}{\sin 2\alpha}+\frac{2}{\sin 2\beta}\right),$$

所以

$$S=rp=r^2\left(\frac{2}{\sin 2\alpha}+\frac{2}{\sin 2\beta}\right),$$

这就是①.

再证②. 在$\triangle ABD$中易知

$$AB=r(\tan\alpha+\tan\beta),\ AD=r(\tan\alpha+\cot\beta),\ \angle DAB=\pi-2\alpha,$$

故由余弦定理并通过三角化简可得

$$\begin{aligned}BD^2&=r^2[(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(\tan\alpha+\cot\beta)^2+\\&\quad 2\cos 2\alpha(\tan\alpha+\tan\beta)(\tan\alpha+\cot\beta)]\\&=r^2\left(\tan\alpha\cdot\frac{2}{\sin 2\beta}\cdot 4\cos^2\alpha+\frac{4}{\sin^2 2\beta}\right),\end{aligned}$$

故

$$R^2=\frac{BD^2}{4\sin^2 2\alpha}=r^2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha\sin 2\beta}+\frac{1}{\sin^2 2\alpha\sin^2 2\beta}\right),$$

这就是②.

现令$a=\sin 2\alpha$, $b=\sin 2\beta$, 则a, $b\in(0,1]$, 且①、②可写为

$$S=2r^2\frac{a+b}{ab},\qquad ③$$

$$R^2=r^2\frac{1+ab}{a^2b^2},\qquad ④$$

③除以④可得

$$\frac{ab(a+b)}{1+ab}=\frac{S}{2R^2}.\qquad ⑤$$

式⑤是a、b所满足的约束条件,我们在此条件下求plm的最大值.

易知

$$p=r\cdot\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right),$$

$$lm=4R^2ab,$$

所以

$$(plm)^2=64R^4r^2(a+b)^2=16R^2S^2(1+ab),$$

因此

$$plm=4RS\sqrt{1+ab}.\qquad ⑥$$

由⑤得

$$\frac{S}{2R^2}=\frac{ab(a+b)}{1+ab}\geqslant\frac{ab\cdot 2\sqrt{ab}}{1+ab}.\qquad ⑦$$

令 $\sqrt{ab}=x$，则 $x\in(0,1]$，于是⑦可写为

$$4R^2\cdot x^3-S\cdot x^2-S\leqslant 0. \qquad ⑧$$

令函数 $f(x)=4R^2\cdot x^3-Sx^2-S$，注意到

$$f(0)=-S<0,\ f(1)=4R^2-2S\geqslant 0,$$

且

$$f'(x)=\begin{cases}\geqslant 0, & x\geqslant \dfrac{S}{6R^2},\\ <0, & 0<x<\dfrac{S}{6R^2},\end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上先递减再递增. 由此知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一的实根 t，如图 3－7 所示.

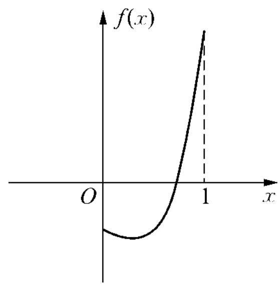


图 3－7

由⑧知 $f(\sqrt{ab})\leqslant 0$，因此

$$\sqrt{ab}\leqslant t,$$

于是 $ab\leqslant t^2$，从而代入⑥知

$$plm=4RS\sqrt{1+ab}\leqslant 4RS\sqrt{1+t^2},$$

当 $a=b=t$ 时，等号成立. 故所求的 plm 的最大值为 $4RS\sqrt{1+t^2}$，其中 t 是方程 $4R^2x^3-Sx^2-S=0$ 在区间 $(0,1]$ 上的根. □

习 题 3

1 设 $ABCD$ 是一个有内切圆的凸四边形，它的每个内角和外角都不小于 $60°$. 证明：

$$\frac{1}{3}|AB^3-AD^3|\leqslant|BC^3-CD^3|\leqslant 3|AB^3-AD^3|,$$

并指出等号成立的条件.（2004 年美国数学奥林匹克试题）

2 一个面积为 S 的凸四边形有外接圆，且其外接圆圆心在该四边形内部. 从此四边形对角线的交点向四条边作垂线，证明：以四个垂足为顶点的四边形的面积不超过 $\dfrac{S}{2}$.

3 **两个凸四边形** $ABCD$ **和** $A'B'C'D'$ **的边长分别为** a、b、c、d **和** a'、b'、c'、d'，**面积分别为** S **和** S'. **证明**：

$$aa'+bb'+cc'+dd'\geqslant 4\sqrt{SS'}.$$

4 **(安振平)设四边形** $ABCD$ **有内切圆，且其四边长分别为** a、b、c、d. **求证**：

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2d(c-d)+d^2a(d-a)\geqslant 0.$$

5 (Groenman)**设** $ABCD$ **是一个圆内接四边形且它的边长分别为** a、b、c、d. ρ_a **是该四边形外与边** AB **及边** CB、DA **的延长线相切的圆的半径**，ρ_b、ρ_c、ρ_d **与** ρ_a **的意义类似. 求证**：

$$\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}+\frac{1}{\rho_d}\geqslant\frac{8}{\sqrt[4]{abcd}},$$

当且仅当 $ABCD$ **是正方形时等号成立.**

4 特殊多边形的面积不等式

多边形的面积不等式与极值问题一直备受关注.

一些特殊多边形,如三角形、平行四边形的面积不等式更是在中学数学竞赛中经常出现.这节介绍一些有趣的结果,并力求体现处理面积问题的一般方法.

首先我们研究一下平行四边形和它内含的三角形的面积之间的关系.

关于这个问题的一个熟知结论是:任一平行四边形的内含三角形的面积不超过这个平行四边形面积的一半.

这个结论的证明十分简单,如图 4-1.只需过 $\triangle PQR$ 的顶点 Q 作 AB 的平行线,并考虑被平行线分成的小平行四边形和小三角形的面积关系便可.

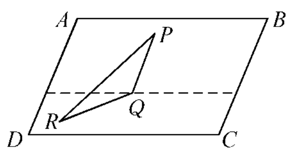


图 4-1

现考虑这个问题的反问题,三角形与其内含的平行四边形的面积有何关系?关于它的回答是下面有用的定理.

定理 1 任意一个三角形的内含平行四边形的面积不超过三角形面积的一半.

证明 设平行四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 是 $\triangle ABC$ 内的平行四边形.

如图 4-2,不妨设直线 P_1P_2、P_3P_4 交边 BC 于两点,分别记为 M_2、M_3,在这两直线上分别截取线段 M_2M_1 和 M_3M_4 使得

$$M_2M_1 = P_2P_1,\ M_3M_4 = P_3P_4,$$

则四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 是平行四边形且

$$S(M_1M_2M_3M_4) = S(P_1P_2P_3P_4).$$

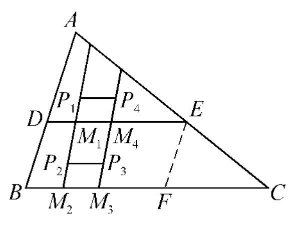


图 4-2

设直线 M_1M_4 分别交边 AB、AC 于两点 D、E,过点 E 作 AB 的平行线交 BC 于 F,则得平行四边形 $BDEF$,易见

$$S(BDEF) \geqslant S(M_1M_2M_3M_4) = S(P_1P_2P_3P_4).$$

因此要证
$$S(P_1P_2P_3P_4) \leqslant \frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

只需证明
$$S(BDEF) \leqslant \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}. \quad (*)$$

下证(*).

如图 4-3,设 $\lambda = \frac{AD}{AB}$,则由

$$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$$

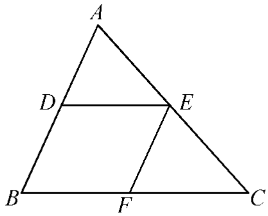


图 4-3

可知
$$S_{\triangle ADE} = \lambda^2 S_{\triangle ABC}.$$

同理
$$S_{\triangle EFC} = (1-\lambda)^2 S_{\triangle ABC}.$$

因此
$$S_{\triangle ADE} + S_{\triangle EFC} = [\lambda^2 + (1-\lambda)^2]S_{\triangle ABC} \geqslant \frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

所以
$$S(BDEF) = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle ADE} + S_{\triangle EFC}) \leqslant \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

(*)得证,且当 D、E、F 分别为三边的中点时等号成立. □

注 上面的证法是典型的化归法,即将一般的平行四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 转化为有一组边与边 BC 平行的平行四边形 $M_1M_2M_3M_4$,再转化为两组边分别平行于三角形两边的非常特殊的平行四边形 $BDEF$,从而使问题大大得到简化.

如图 4-4,设 P 是$\triangle ABC$ 内的一点,直线 AP、BP、CP 与三边的交点分别为 D、E、F,则$\triangle DEF$ 叫做点 P 的塞瓦(Ceva)三角形;

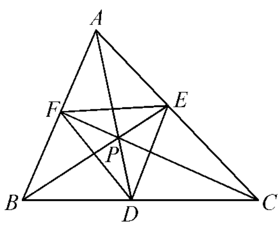


图 4-4

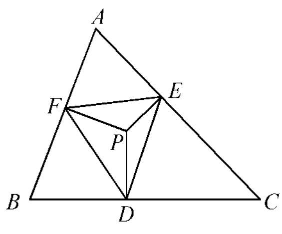


图 4-5

如图 4-5,若内点 P 在三边 BC、CA、AB 上的射影分别为 D、E、F,则$\triangle DEF$ 叫做点 P 的垂足三角形.

关于点 P 的塞瓦三角形和垂足三角形有下面著名的命题.

命题 1 若 P 是$\triangle ABC$ 的内点,则点 P 的塞瓦三角形 DEF 的面积不超过$\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

命题 2 若 P 是$\triangle ABC$ 的内点,则点 P 的垂足三角形 DEF 的面积不超过$\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

杨林先生首先注意到定理 1 和命题 1 的关系,他通过建立塞瓦三角形的扩张性质(下面的例 1)发现了命题 1 是定理 1 的推论.

例 1 设 P 是$\triangle ABC$ 内一点,P 的塞瓦三角形为 DEF,求证:总可以以$\triangle DEF$ 的某两边为邻边作一平行四边形使之位于$\triangle ABC$ 内.

证明 如图 4 - 6,设 G 是$\triangle ABC$ 的重心,N、M 分别是边 AC 和 AB 的中点. 不妨设 P 在 $ANGM$ 内部或边界上,则 E、F 分别在线段 AN、AM 的内部或端点处,所以

$$\frac{AF}{FB}\leqslant 1,\ \frac{AE}{EC}\leqslant 1,$$

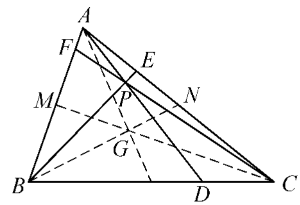


图 4 - 6

又不妨设

$$\frac{AF}{FB}\leqslant\frac{AE}{EC}.$$

由塞瓦定理可得

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

由此推得

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{CE}\cdot\frac{FB}{AF}\geqslant 1.$$

如图 4 - 7,作出以 EF、ED 为邻边的平行四边形 $FEDE'$,下面只需证 E' 位于$\triangle ABC$ 内部或边界上.

过 F 作 $FF' \parallel BC$,F'落在 AC 上,因为

$$\frac{AF}{FB}\leqslant\frac{AE}{EC},$$

故 F'在线段 AE 内部或端点上. 因为

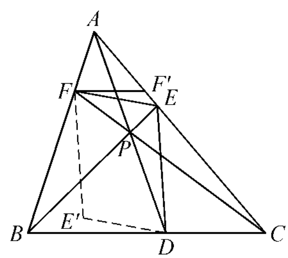


图 4 - 7

$$\angle E'DF = \angle EFD \leqslant \angle F'FD = \angle FDB,$$

所以 DE' 在$\angle FDB$ 内部.

同理

$$\frac{CE}{EA} \geqslant 1 \geqslant \frac{CD}{DB},$$

也可证明 FE' 在$\angle BFD$ 的内部或边界上,故 E' 在$\triangle FDB$ 的内部. 得证. □

注　定理 1 和命题 1 通过例 1 联合起来了,即由例 1,

定理 1$\Rightarrow$命题 1.

一个自然的问题是,内点 P 的垂足三角形是否有类似于塞瓦三角形的扩张性质呢?

易见钝角三角形的内点的垂足三角形一般不具有扩张性质,但对于锐角三角形有下面的正面回答.

例 2　设 P 是锐角三角形$\triangle ABC$ 内一点, 关于 P 的垂足三角形为$\triangle DEF$. 求证:总可以以$\triangle DEF$ 的某两边为邻边作一平行四边形使之位于$\triangle ABC$ 内.

证明　设 O 是$\triangle ABC$ 的外心,因为$\triangle ABC$ 为锐角三角形,所以 O 位于$\triangle ABC$ 内. 不妨设 P 落在$\triangle AOB$ 内,如图 4－8.

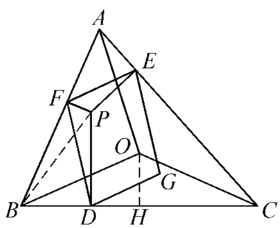


图 4－8

我们证明以 FE、FD 为邻边作的平行四边形 $DFEG$ 位于$\triangle ABC$ 内. 为此,只需证明

$$\angle FEG \leqslant \angle FEC, \quad ①$$

$$\angle FDG \leqslant \angle FDC. \quad ②$$

下证①,②类似可证.

因为

$$\angle FEG = \angle AFE + \angle BFD,$$
$$\angle FEC = \angle AFE + \angle A,$$

因此要证①,只需证明

$$\angle BFD \leqslant \angle A. \quad ③$$

事实上,由 B、F、P、D 四点共圆知

$$\angle BFD = \angle BPD. \quad ④$$

现过 O 作 $OH \perp BC$，垂足为 H，则由

$$\angle PBD \geqslant \angle OBH,$$

可知
$$\angle BPD \leqslant \angle BOH, \tag{5}$$

而 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，因此

$$\angle BOH = \angle BAC = \angle A. \tag{6}$$

由④、⑤、⑥，③得证. □

注　由例 2 我们知，对锐角三角形，由定理 1 可推出命题 2.

上例曾被用作第 2 届中国西部数学奥林匹克试题(笔者为了降低难度，加上了 P 位于 $\triangle AOB$ 内这一条件).

下面的话题转向三角形内的五点问题，这个问题是 A. Soifer 提供给 Colorado 数学奥林匹克的一个试题. 他提出并证明了：在单位面积的三角形内任给五点，则至少有三点组成的三角形的面积不超过 $\frac{1}{4}$.

不难证明，五点问题的点数不能减少，但着眼于结论中三角形的个数，我们仍能改进问题的结论. 下面的例 3 是黄仁寿先生最早发现并证明的.

例 3　在单位面积的三角形中任给五点，则其中必存在两个不同的三点组使得以它们为顶点构成的三角形的面积不超过 $\frac{1}{4}$.

证明　我们需要下面常用的引理.

引理　设凸四边形位于一个单位面积的三角形内，则这个凸四边形的四个顶点中必有三个顶点组成的三角形的面积不超过 $\frac{1}{4}$.

凸四边形的四个顶点本质上都可化归到三角形的边上，因此这个引理实质上就是大家熟知的首届冬令营的试题的第二题：设 P_1、P_2、P_3、P_4 位于 $\triangle ABC$ 的三边上，求证：$\triangle P_1P_2P_3$、$\triangle P_1P_3P_4$、$\triangle P_2P_3P_4$、$\triangle P_1P_2P_4$ 中必有一个面积小于或等于 $\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

下面回证原题.

当这五点的凸包为线段时，结论显然成立.

当这五点的凸包为三角形时，则可以以这五个点为顶点作出五个互不相交的三角形，如图 4－9，而且它们的总面积小于或等于 1，故必有两个三角形的面积不超过 $\frac{1}{4}$.

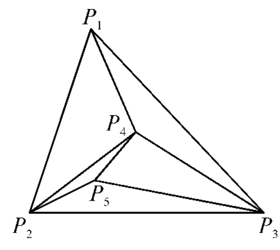


图 4－9

若这五点的凸包为凸四边形时，不妨设五点分布如图 4－10，即 P_5 位于凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 内，由引理可知 P_1、P_2、P_3、P_4 中必有三点组成的三角形的面积不超过$\frac{1}{4}$，又

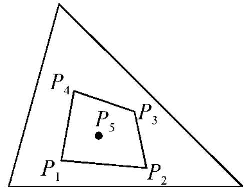


图 4－10

$$S_{\triangle P_1P_2P_5}+S_{\triangle P_2P_3P_5}+S_{\triangle P_3P_4P_5}+S_{\triangle P_4P_1P_5}$$
$$\leqslant S(P_1P_2P_3P_4)\leqslant S_{\triangle ABC}=1,$$

因此$\triangle P_1P_2P_5$、$\triangle P_2P_3P_5$、$\triangle P_3P_4P_5$、$\triangle P_4P_1P_5$ 中必有一个的面积小于或等于$\frac{1}{4}$，结论成立.

若这五点的凸包为凸五边形，则其中任何四顶点均可构成嵌入$\triangle ABC$ 中的凸四边形，如图 4－11，这样的凸四边形共有 $C_5^4=5$ 个. 因而包括重复计算，必有 5 个面积不超过$\frac{1}{4}$的三角形，又每个三角形至多重复两次，故面积不超过$\frac{1}{4}$的三角形的个数大于$\left[\frac{5}{2}\right]=2$，得证. □

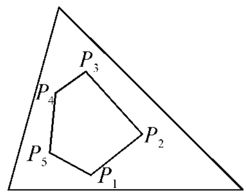


图 4－11

注 1 可以证明上例的结论还可以改进，其中存在的两个三角形可改进为三个三角形（不能改进为四个三角形）不超过$\frac{1}{4}$. 但这个证明篇幅很大，这里从略.

注 2 任给一个图形 F，令 $S(F)$表示满足下面条件的最小的正整数 n：在 F 的内部（含边界）任给 n 个点使得总存在其中的三个点，它们构成的三角形的面积不超过$\frac{|F|}{4}$，这里$|F|$表示 F 的面积. A. Soifer 的五点问题等价于下面的命题 3.

命题 3 对于任意的三角形 T，$S(T)=5$.

A. Soifer 进一步证明了

命题 4 对任意的平行四边形 P，$S(P)=5$.

一个自然的问题是：是否对任意的图形 F 都有 $S(F)=5$?

答案是否定的，A. Soifer 证明了

命题 5 对正五边形 F，$S(F)=6$.

对任意的凸的图形 F，$S(F)$都可以取什么样的值呢? A. Soifer 证明了 $S(F)$只能在很小的范围内取值，即有

命题 6 对任意的凸的图形 F，$4 \leqslant S(F) \leqslant 6$.

关于命题 6 的更为进一步的结论是：

命题 7 对任意的凸的图形 F，$S(F) \neq 4$.

命题 8 对任意的凸的图形 F，$S(F)=5$，或者 $S(F)=6$.

一个有趣的但尚未解决的问题是：什么样的凸图形 F 使得 $S(F)=5$，什么样的凸图形 F 使得 $S(F)=6$?

下面讨论的话题是面积为 1 的凸多边形能被怎样的平行四边形和三角形覆盖的问题. 我们有

例 4 证明：(1) 面积为 1 的凸多边形可被面积为 2 的平行四边形覆盖；

(2) 面积为 1 的凸多边形可被面积为 2 的三角形覆盖.

证明 (1) 设面积为 1 的凸多边形 M 位于它的一条支撑线 AB 的一侧，则 M 中存在一点到直线 AB 的距离最大，记这个点为 C(C 可能是 M 的一个顶点，也可能是 M 的一条平行于 AB 的边上的任意一点). 现在连接 AC(如图 4－12)，将 M 分成两部分 M_1 和 M_2(如果 AC 是 M 的一边，M_1、M_2 中有一个不存在). 假设 D_1 和 D_2 是 M 的点(它们分别位于 AC 的两侧)且到 AC 有最大的距离，再过 C 作直线平行于 AB，过 D_1、D_2 作直线 l_1 和 l_2 平行于 AC，则直线 AB、l、l_1、l_2 构成了包含 M 的一个平行四边形 P.

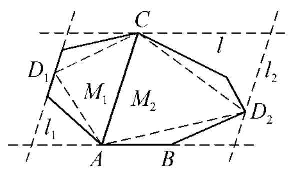


图 4－12

因为 M_1 和 M_2 是凸的，所以它们分别包含 $\triangle AD_1C$ 和 $\triangle AD_2C$.

设 P_1、P_2 是直线 AC 将 P 分成的两个平行四边形，则

$$S_{\triangle AD_1C}=\frac{1}{2}S(P_1),\ S_{\triangle AD_2C}=\frac{1}{2}S(P_2),$$

其中 $S(X)$ 表示 X 的面积. 因此

$$\begin{aligned}S(P)&=S(P_1)+S(P_2)=2S_{\triangle AD_1C}+2S_{\triangle AD_2C}\\&\leqslant 2S(M_1)+2S(M_2)=2S(M)=2.\end{aligned}$$

(1)得证.

(2) 设 u 是给定的面积为 1 的多边形. 现考虑 u 的最大面积的内接 $\triangle A_1A_2A_3$. 下面分两种情况讨论.

(a) 若 $S_{\triangle A_1A_2A_3} \leqslant \frac{1}{2}$. 这时如图 4－13，过 $\triangle A_1A_2A_3$ 的顶点分别作对边的平行线，这三条直线交成的三角形记作 T，则 T 的面积小于等于 2.

因此，这时我们只需证明多边形 u 位于 T 内便可. 假定 u 的某个点 M 位于 T 外，则 M 到 $\triangle A_1A_2A_3$ 某一边（不妨设为 A_1A_2）的距离大于这个三角形另一个顶点（A_3）到这一边的距离（见图 4－13）. 这时 $\triangle A_1A_2M$ 的面积大于 $\triangle A_1A_2A_3$ 的面积，这与 $\triangle A_1A_2A_3$ 是 u 中的最大面积的内接三角形矛盾. 这种情况得证.

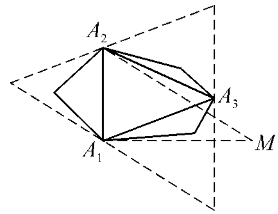


图 4－13

(b) 若 $S_{\triangle A_1A_2A_3}>\frac{1}{2}$. 这时在 u 被 $\triangle A_1A_2A_3$ 的每条边所在的直线切割的剩余部分内，分别以 $\triangle A_1A_2A_3$ 的一边为底构造面积最大的三角形. 设这样的三个三角形分别为 $\triangle B_1A_2B_3$、$\triangle B_2A_1B_3$、$\triangle B_3A_1A_2$，再过 B_1、B_2、B_3 分别作 A_2A_3、A_1A_3、A_1A_2 的平行线，我们就得到一个较大的三角形 $\triangle C_1C_2C_3$，记为 C（如图 4－14）. 同(a) 可证，u 一定在三角形 C 内.

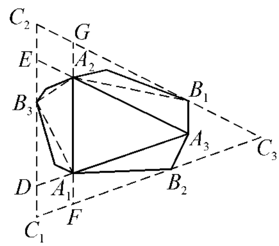


图 4－14

注意到 u 是一个凸多边形，因此

$$S(A_1B_3A_2B_1A_3B_2)\leqslant S(u)=1.$$

因此我们只需证明

$$S_{\triangle C_1C_2C_3}\leqslant 2S(A_1B_3A_2B_1A_3B_2), \qquad ①$$

便知结论成立.

因为 $\triangle C_1C_2C_3\backsim\triangle A_1A_2A_3$，所以为了计算 $\triangle C_1C_2C_3$ 的面积，我们记

$$\frac{S_{\triangle A_1A_2B_3}}{A_{\triangle A_1A_2A_3}}=\lambda_3,\ \frac{S_{\triangle A_1A_3B_2}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=\lambda_2,\ \frac{S_{\triangle A_2A_3B_1}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=\lambda_1,$$

则

$$\frac{S_{\triangle C_1C_2C_3}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1)^2. \qquad ②$$

又由假设 $S_{\triangle A_1A_2A_3}>\frac{1}{2}$ 可知

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=\frac{S_{\triangle A_1A_2B_3}+S_{\triangle A_1A_3B_2}+S_{\triangle A_2A_3B_1}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}\\&\leqslant\frac{S(u)-S_{\triangle A_1A_2A_3}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=\frac{1-S_{\triangle A_1A_2A_3}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}\\&<1.\end{aligned} \qquad ③$$

又明显的有

$$\begin{aligned}&\frac{S(A_1B_3A_2B_1A_3B_2)}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}\\=&\frac{S_{\triangle A_1A_2A_3}+S_{\triangle B_1A_2A_3}+S_{\triangle B_2A_1A_3}+S_{\triangle B_3A_1A_2}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}\\=&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1.\end{aligned}\quad ④$$

由②、③、④可得

$$\frac{S_{\triangle C_1C_2C_3}}{S(A_1B_3A_2B_1A_3B_2)}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1<2.$$

①得证.(2)证完. □

现在我们考虑另一个有趣的问题:一个面积为1的凸多边形,最大的内接三角形的面积有多大?下面的例子回答了这个问题.

例5 (1)设M是一个面积为1的凸多边形,l是任意给定的直线.求证:存在M的一个内接三角形,它有一条边平行于l,且面积大于或等于$\frac{3}{8}$;

(2)如果M是一个正六边形,l是任意给定的一条直线,证明M中不存在有一边平行于l且面积大于$\frac{3}{8}S(M)$的内接三角形.

证明 (1)如图4-15,作两条平行于l的M的支撑线,使得它们构成的带形包含M,且M的顶点A和B分别在这两条直线上.记这两条直线为l_1、l_2.设l_1、l_2间的宽度为d,再画三条直线l_1'、l_0、l_2'使得这个带形被分为四个等宽的小带形,每个小带形的宽为$\frac{1}{4}d$.

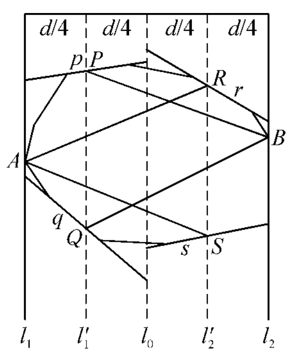


图4-15

假设M的边界与l_1'相交于P和Q,l_2'与M的边界相交于R和S(因为M是凸的,M不可能有整个边在这两条直线上).设p是M的通过点P的边(如果P是顶点则可以在两边中任选一条)所在的直线,q、r和s的记号意义类似.这时由p、q、l_0、l_1为边界形成的梯形T_1的面积是$\frac{d}{2}\cdot PQ$.类似的,由l_0、l_2、r、s为边界形成的梯形T_2的面积是$\frac{d}{2}\cdot RS$.因为T_1和T_2的并集整个包含M,故有

$$S(M) \leqslant S(T_1)+S(T_2)$$
$$=\frac{d}{2}\cdot PQ+\frac{d}{2}\cdot RS=\frac{d}{2}(PQ+RS).$$

现考虑两个三角形$\triangle ARS$和$\triangle BPQ$，这两个三角形都是M的内接三角形，且

$$S_{\triangle ARS}=\frac{1}{2}\cdot RS\cdot\frac{3}{4}d,\ S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot\frac{3}{4}d.$$

因此

$$\begin{aligned} S_{\triangle ARS}+S_{\triangle BPQ}&=(PQ+RS)\cdot\frac{3}{8}d\\ &=\frac{3}{4}(PQ+RS)\cdot\frac{1}{2}d\\ &\geqslant\frac{3}{4}S(M)=\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

故$S_{\triangle ARS}\geqslant\frac{3}{8}$和$S_{\triangle BPQ}\geqslant\frac{3}{8}$至少有一个成立，结论得证.

(2) 设M是一个正六边形$ABCDEF$，$l /\!/ AB$，如图4-16. 设$\triangle PQR$是M的最大面积的内接三角形且边$PQ /\!/ AB$. 不妨设P和Q分别位于FA和BC上，则明显的R一定位于DE上. 让我们假定正六边形M的边长有单位长度，并记$AP=BQ=a$，则

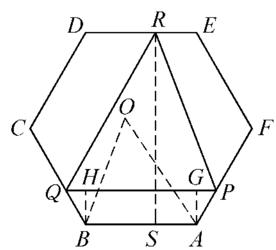


图4-16

$$PQ=AB+PG+QH=1+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=1+a,$$

且

$$h(PQR)=RS-AG=\sqrt{3}-\frac{a\sqrt{3}}{2}=(2-a)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned} S_{\triangle PQR}&=\frac{1}{2}(1+a)(2-a)\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &=\frac{\sqrt{3}}{4}(2+a-a^2)\\ &=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2+\frac{1}{4}-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

由此知当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$S_{\triangle PQR}$ 的面积最大,最大值为

$$(S_{\triangle PQR})_{\max}=\frac{9\sqrt{13}}{16},$$

但这个六边形的面积等于

$$6S(OAB)=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

其中 O 是正六边形 M 的中心.

这说明有一条边平行于给定直线 l 的 M 的最大内接三角形恰为 $\frac{3}{8}S(M)$,因此结论成立. □

习 题 4

1 已知钝角三角形 ABC 的外接圆半径为 1,证明:存在一个斜边长为 $\sqrt{2}+1$ 的等腰三角形覆盖 $\triangle ABC$.

2 如果一个凸多边形 M 不能覆盖任何一个面积为 1 的三角形,那么 M 必能被一个面积为 4 的三角形所覆盖.

3 (李世杰)设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上与顶点 A、B、C 不重合的任意三点. $\triangle ABC$、$\triangle AEF$、$\triangle BDF$、$\triangle CED$、$\triangle DEF$ 的面积分别记作 S、S_1、S_2、S_3、S_0,则

$$S_0\geqslant 2\sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{S}},$$

当且仅当 AD、BE、CF 交于 $\triangle ABC$ 内一点时等号成立.

4 证明:在边长为 1 的正方形内,不可能无重叠的放入两个边长大于 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 的正方形.

5 平面上任给 n 个点,其中任何三点可组成一个三角形,每个三角形都有一个面积. 令最大面积与最小面积之比为 u_n,求 u_5 的最小值.

线性几何不等式

许多线性几何不等式给人的印象是：简单而不平凡，特别容易被记住. 线性几何不等式的证明要么平凡，要么使人棘手. 数学竞赛中出现的线性几何不等式大都是富有挑战性的.

Erdös-Mordell 不等式是最著名的线性几何不等式之一，下面首先介绍这个不等式.

例 1 （Erdös-Mordell 不等式） 设 P 为$\triangle ABC$ 内任意一点，P 到三边 BC、CA、AB 的距离分别为 $PD=p$、$PE=q$、$PF=r$，并记 $PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，则

$$x+y+z\geqslant 2(p+q+r), \quad ①$$

等号成立当且仅当$\triangle ABC$ 为正三角形并且 P 为此三角形的中心.

这里介绍 Erdös-Mordell 不等式的五种证法. 证明 1 是 L. J. Mordell 在 1937 年给出的，比较简单且被广泛引用.

证明 1 如图 5－1，注意到 $\angle DPE=180^\circ-\angle C$，由余弦定理

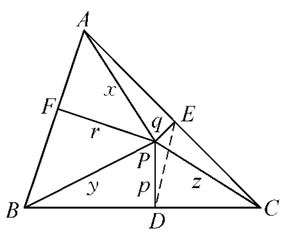


图 5－1

$$\begin{aligned}DE&=\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos C}\\&=\sqrt{p^2+q^2+2pq\sin A\sin B-2pq\cos A\cos B}\\&=\sqrt{(p\sin B+q\sin A)^2+(p\cos B-q\cos A)^2}\\&\geqslant\sqrt{(p\sin B+q\sin A)^2}\\&=p\sin B+q\sin A.\end{aligned}$$

又因 P、D、C、E 四点共圆，线段 CP 为这圆的直径，故

$$z=\frac{DE}{\sin C}\geqslant\left(\frac{\sin B}{\sin C}\right)p+\left(\frac{\sin A}{\sin C}\right)q,$$

同理
$$x \geqslant \left(\frac{\sin B}{\sin A}\right)r + \left(\frac{\sin C}{\sin A}\right)q,$$
$$x \geqslant \left(\frac{\sin A}{\sin B}\right)r + \left(\frac{\sin C}{\sin A}\right)p.$$

三式相加便得
$$\begin{aligned} x+y+z &\geqslant \left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)p + \left(\frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}\right)q + \left(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\right)r \\ &\geqslant 2(p+q+r), \end{aligned}$$

得证. □

下面的证明 2 是张景中先生给出的,巧妙的运用了面积,证法简洁明了.

证明 2 如图 5-2,过点 P 作直线 MN,使得 $\angle AMN = \angle ACB$,于是
$$\triangle AMN \backsim \triangle ACB.$$

从而
$$\frac{AN}{MN} = \frac{c}{a},\ \frac{AM}{MN} = \frac{b}{a}.$$

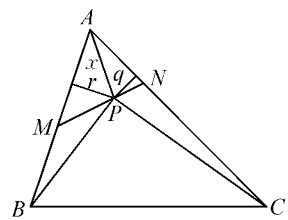


图 5-2

由于
$$S_{\triangle AMN} = S_{\triangle AMP} + S_{\triangle ANP},$$
所以有 $AP \cdot MN \geqslant q \cdot AN + r \cdot AM$,

所以
$$x = AP \geqslant q \cdot \frac{AN}{MN} + r \cdot \frac{AM}{MN}.$$

即
$$x \geqslant \frac{c}{a} \cdot q + \frac{b}{a} \cdot r, \quad ①$$

同理
$$y \geqslant \frac{c}{b} \cdot p + \frac{a}{b} \cdot r, \quad ②$$
$$z \geqslant \frac{b}{c} \cdot p + \frac{a}{c} \cdot q. \quad ③$$

将①、②、③相加得
$$x+y+z \geqslant p\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+q\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+r\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \geqslant 2(p+q+r).$$ □

下面介绍的对称点法已被多人注意到,我们这里采用的是邹明先生的证明,这个证明写的简洁易懂.

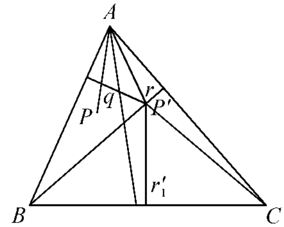


图 5-3

证明 3 如果 5-3,作点 P 关于 $\angle A$ 平分线的对称点 P',则易知 P' 到 CA、AB 的距离分别为 r、q,且 $P'A = PA = x$.

设 A、P' 到 BC 的距离分别为 h_1、r'_1，则

$$P'A + r'_1 = PA + r'_1 \geqslant h_1,$$

两端乘 a 可得

$$\begin{aligned} a \cdot PA + ar'_1 \geqslant & \, ah_1 \\ & = 2S_{\triangle ABC} \\ & = ar'_1 + cq + br. \end{aligned}$$

因此
$$x \geqslant \frac{c}{a} \cdot q + \frac{b}{a} \cdot r,$$

同理
$$y \geqslant \frac{a}{b} \cdot r + \frac{c}{b} \cdot p,$$

$$z \geqslant \frac{a}{c} \cdot q + \frac{b}{c} \cdot p.$$

将这三个不等式相加可得

$$x + y + z = \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)p + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)r \geqslant 2(p + q + r). \quad \square$$

下面的证明 4 很早也被注意到，它的要点是将三角形的高转化为内角平分线来处理，并运用嵌入不等式.

证明 4　如图 5 - 4，设 $\angle BPC = 2\alpha$，$\angle CPA = 2\beta$，$\angle APB = 2\gamma$，设它们的内角平分线长分别是 w_a、w_b、w_c，则我们只需证明更强的不等式

$$x + y + z \geqslant 2(w_a + w_b + w_c). \quad ①$$

事实上，注意到内角平分线公式有

$$w_a = \frac{2yz}{y+z}\cos\frac{1}{2}\angle BPC \leqslant \sqrt{yz}\cos\alpha,$$

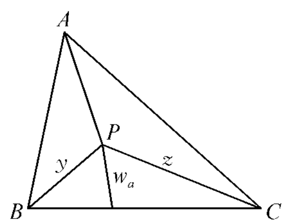


图 5 - 4

同理

$$w_b \leqslant \sqrt{xz}\cos\beta,$$
$$w_c \leqslant \sqrt{xy}\cos\gamma.$$

由于 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$，所以由嵌入不等式可得

$$\begin{aligned} 2(w_a + w_b + w_c) & \leqslant 2(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{xz}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma) \\ & \leqslant x + y + z. \end{aligned}$$

证完.　$\square$

下面的证明是深圳中学现高二学生康嘉引同学（2003 年曾入选国家集训队）告诉我的.

证明 5 如图 5-5，过 D、E 作 $DT_1 \perp FP$ 于 T_1，$ET_2 \perp FP$ 于 T_2. 由

$$DE \geqslant DT_1 + ET_2,\ DT_1 = p\sin B,\ ET_2 = q\sin A,$$

可得

$$z = \frac{DE}{\sin C} \geqslant \frac{p\sin B + q\sin A}{\sin C} = p\frac{\sin B}{\sin C} + q\frac{\sin A}{\sin C},$$

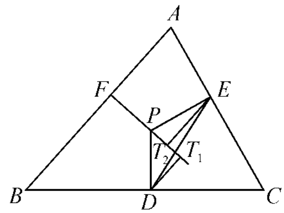


图 5-5

所以

$$\begin{aligned}
& x+y+z \\
= & PA+PB+PC \\
\geqslant & \left(p\frac{\sin B}{\sin C}+q\frac{\sin A}{\sin C}\right)+\left(q\frac{\sin C}{\sin A}+r\frac{\sin B}{\sin A}\right)+\left(r\frac{\sin A}{\sin B}+p\frac{\sin C}{\sin B}\right) \\
= & p\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)+q\left(\frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}\right)+r\left(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\right) \\
\geqslant & 2(p+q+r).
\end{aligned}$$

证完. □

注 关于 Erdös-Mordell 不等式研究已有众多成果，其中平面上的推广较为简单，很早由 N. Ozeki 和 H. Vigler 完成，后又被其他人多次重新发现. Erdös-Mordell 不等式在空间，特别是 n 维空间的推广是一个困难的问题，据我所知至今还未得到理想的结果.

例 2 设△ABC 的三边为 a、b、c，则

$$h_a + m_b + t_c \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c),$$

其中 h_a、m_b、t_c 分别表示边 BC、AC、AB 上的高、中线和内角平分线.

证明 如图 5-6，将高线 h_a 转化为内角平分线 t_a 来考虑. 为此仅需证明更强的不等式

$$t_a + m_b + t_c \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c). \quad ①$$

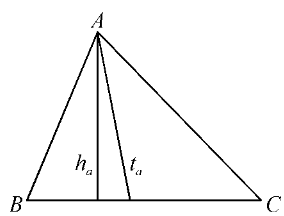


图 5-6

要证①，只需证明局部不等式

$$m_b + 2t_a \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(b+2c). \quad ②$$

事实上,若②成立,则类似的有

$$m_b+2t_c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(b+2a).\qquad ③$$

②、③相加便是①.

下证②.

由内角平分线公式易知

$$t_a^2=\frac{4}{(b+c)^2}\cdot bcp(p-a)\leqslant p(p-a)=\frac{1}{4}((b+c)^2-a^2),\qquad ④$$

又

$$m_b^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2).\qquad ⑤$$

因此由 Cauchy 不等式及④、⑤可得

$$\begin{aligned}m_b+2t_a&\leqslant\sqrt{3(m_b^2+2t_a^2)}\\&\leqslant\sqrt{\frac{3}{4}(2a^2+2c^2-b^2+2(b+c)^2-2a^2)}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}(b+2c).\end{aligned}$$

②得证,从而问题得证. □

注 (1) 仔细观察例 1 和例 2 的各种证法,我们认为将整体的线性几何不等式归结为局部的线性几何不等式是一个共同的技巧. 例 1 的各种证法的目标都在于寻找局部不等式

$$x\geqslant\lambda_1q+\lambda_2r,$$

其中 λ_1、λ_2 是与动点 P 无关的几何量,而例 2 却是通过转化为局部不等式

$$m_b+2t_a\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(b+2c)$$

来达到目标.

(2) 例 2 用内角平分线代替高线来加强命题的技巧已在例 1 的证法 4 中应用过,还将在本书最后一章“四面体的不等式”例 5 的证明中再次用到. 这种主动加强命题的技巧是十分有用的.

例 3 给定一个锐角$\triangle ABC$. 设 h_a、h_b、h_c 分别表示$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的高,s 表示半周长. 证明

$$\sqrt{3}\cdot\max\{h_a,h_b,h_c\}\geqslant s.$$

证明　如果三角形$\triangle ABC$是正三角形,等号成立.

下面证明:如果$\triangle ABC$不是正三角形,则问题可化归为等腰三角形的情形来证明.

事实上,如果$\angle A \geqslant \angle B > \angle C$,则$\angle A > \frac{\pi}{3}$,且

$$h_c > h_b \geqslant h_a.$$

设h表示最大高h_c,如图 5-7,延长$\triangle ABC$的最短边AB到D使得$AD = AC$. 连接CD. 因此如果$\sqrt{3}h \geqslant s$对等腰$\triangle ACD$成立,则对一般的锐角$\triangle ABC$也成立.

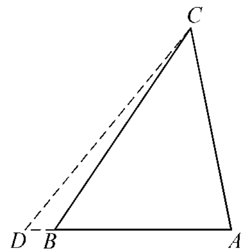


图 5-7

现在等腰$\triangle ACD$中证明$\sqrt{3}h \geqslant s$.

因为$s = AC + \frac{1}{2}CD$, $CD = 2AC \cdot \sin\frac{A}{2}$, $h_c = AC \cdot \sin A$,因此$\sqrt{3}h \geqslant s$等价于

$$\sqrt{3}\sin A \geqslant 1 + \sin\frac{A}{2} \quad \left(\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}\right). \tag{①}$$

现令$x = \sin\frac{A}{2}$,则$\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$,这时式①变为

$$12x^4 - 11x^2 + 2x + 1 \leqslant 0,$$

即

$$(2x-1)(x+1)(6x^2-3x-1) \leqslant 0. \tag{②}$$

注意到x的取值范围,易知$2x-1>0$, $x+1>0$, $6x^2-3x-1 \leqslant 0$,故②成立,得证. □

注　本例将一般三角形化归为等腰三角形证题的技巧值得注意,这样的化归有时可大大简化问题的处理.

例 4　(Zirakzadeh 不等式)　设P、Q、R分别位于$\triangle ABC$的三条边BC、CA、AB上且将三角形的周长三等分,则

$$QR + RP + PQ \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c).$$

证明　下面用投影方法产生局部的线性几何不等式.

如图 5-8,从Q、R分别向直线BC引垂线,垂足分别记为M、N,则

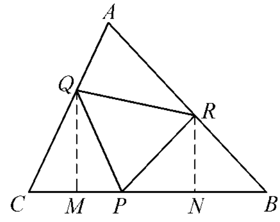


图 5-8

$$QR \geqslant MN = a-(BR \cdot \cos B + CQ \cdot \cos C),$$

同理有

$$RP \geqslant b-(CP \cdot \cos C + AR \cdot \cos A),$$
$$PQ \geqslant c-(AQ \cdot \cos A + BP \cdot \cos B).$$

将三式相加,并注意到

$$AQ + AR = BR + BP = CP + CQ = \frac{1}{3}(a+b+c),$$

即得

$$QR + RP + PQ \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)(3-\cos A-\cos B-\cos C),$$

又

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2},$$

立得

$$QR + RP + PQ \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c). \quad \square$$

注　上面的优美解法是杨学枝先生给出的. 这个问题曾在国内引起了较为广泛的讨论.

下面的例 5 是王振先生发现并证明的一个结果,难度稍大.

例 5　设 I、G 分别是$\triangle ABC$ 的内心和重心,求证

$$AI + BI + CI \leqslant AG + BG + CG.$$

证明　令 $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,如图 5 - 9. 下面我们证明 G 一定落在 $\triangle BIC$ 内或边界上.

先证 G 不落在$\triangle AIB$ 内,若不然,假设 G 落在$\triangle AIB$ 内,则有

$$S_{\triangle ABG} < S_{\triangle AIB},$$

而
$$S_{\triangle ABG} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC},$$

且
$$\frac{S_{\triangle AIB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{c}{a+b+c} \leqslant \frac{1}{3},$$

所以 $S_{\triangle AIB} \leqslant \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABG}$,矛盾.

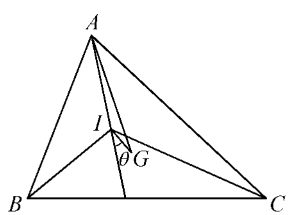


图 5 - 9

再证 G 也不落在$\triangle AIC$ 内，若不然，假设 G 落在$\triangle AIC$ 内，设 CI 交 AB 于 T，CG 交 AB 于 L，则 $AT>AL$，而 $AL=BL$，$\dfrac{AT}{BT}=\dfrac{b}{a}\leqslant 1$，所以 $AT\leqslant\dfrac{1}{2}AB=AL$，矛盾.

因此 G 落在$\triangle BIC$ 内或边界上，且可证 G 在 AI 右侧. 设$\angle AIG$ 的补角为 θ，则 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{A+C}{2}$. 由此可知 $AG\geqslant AI+GI\cos\theta$.

同理

$$BG\geqslant BI+GI\cos\left(90^\circ+\frac{C}{2}-\theta\right),$$

$$CG\geqslant CI-GI\cos\left(\frac{A+C}{2}-\theta\right).$$

因此

$$\begin{aligned}&AG+BG+CG-(AI+BI+CI)\\ \geqslant\ & GI\left(\cos\theta+\cos\left(90^\circ+\frac{C}{2}-\theta\right)-\cos\left(\frac{A+C}{2}-\theta\right)\right)\\ =\ & GI\left(\cos\theta-2\sin\frac{B+C}{4}\cos\left(\frac{B-C}{4}+\theta\right)\right).\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{B+C}{4}\leqslant 30^\circ$，$\theta\leqslant\dfrac{B-C}{4}+\theta<90^\circ$，所以

$$\cos\theta-2\sin\frac{B+C}{4}\cos\left(\frac{B-C}{4}+\theta\right)\geqslant\cos\theta-\cos\left(\frac{B-C}{4}+\theta\right)\geqslant 0,$$

故 $AG+BG+CG\geqslant AI+BI+CI$. $\square$

习 题 5

1 设 G 为$\triangle ABC$ 的重心，A_1、B_1、C_1 分别为 AG、BG、CG 与$\triangle ABC$ 的外接圆的交点，求证

$$GA_1+GB_1+GC_1\geqslant GA+GB+GC,$$

等号成立当且仅当$\triangle ABC$ 为正三角形.

2 在凸四边形内部标定四个点，求证：可在凸四边形的边界上找到一点使得它到四边形的各顶点的距离之和大于它到四个给定点的距离之和.（1993

年圣彼得堡数学竞赛试题)

3 设 $ABCDEF$ 是凸六边形,且 $AB \parallel ED$, $BC \parallel FE$, $CD \parallel AF$,又设 R_A、R_C、R_E 分别表示 $\triangle FAB$、$\triangle BCD$ 及 $\triangle DEF$ 的外接圆半径,P 表示六边形的周长,证明:$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{P}{2}$.(第 37 届 IMO 试题)

4 (Cavachi)设 a 是一个凸六边形 $ABCDEF$ 的最大边长,$d = \min\{AD, BE, CF\}$,求证 $d \leqslant 2\alpha$.

5 (朱结根)设 I 是$\triangle ABC$ 的内心. 记$\triangle IBC$、$\triangle ICA$、$\triangle IAB$ 的内切圆半径分别为 r_1、r_2、r_3,则

$$3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})r \leqslant r_1 + r_2 + r_3 \leqslant \frac{3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}R,$$

这里 r、R 分别是$\triangle ABC$ 的内切圆半径和外接圆半径.

6 代数方法

本书迄今为止所用的大多是几何方法和三角方法，这一节主要介绍代数方法的运用.

构造代数恒等式来证明一些距离不等式是十分方便的，这方面一个典型的例子是 M. S. Klamkin 早年的一个不等式.

例 1 设 P 是$\triangle ABC$ 所在平面上任一点，求证：

$$a \cdot PB \cdot PC + b \cdot PC \cdot PA + c \cdot PA \cdot PB \geqslant abc.$$

证明 视$\triangle ABC$ 所在平面为复平面，设 P、A、B、C 分别对应着复数 z、z_1、z_2、z_3，令

$$f(z) = \frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} + \frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)} + \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)},$$

则 $f(z)$是关于 z 的二次多项式，且易见

$$f(z_1) = f(z_2) = f(z_3) = 1,$$

故 $f(z) \equiv 1$. 因此

$$\begin{aligned}&\frac{PB \cdot PC}{bc} + \frac{PC \cdot PA}{ca} + \frac{PA \cdot PB}{ab}\\ &= \left|\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\right| + \left|\frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}\right| + \left|\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\right|\\ &\geqslant |f(z)| = 1.\end{aligned}$$

由此立得所证不等式. □

下面有趣的问题是 Tweedie 提出来的.

例 2 设$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$是同一个平面上的两个正三角形，且顶点排列方向相同，求证：三条线段 AA'、BB'、CC' 中任何两个之和大于或等于第三个.

证明 如图 6-1，对顶点排列方向相同的两个相似三角形$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$总有一恒等式

$$(z_1'-z_1)(z_2-z_3)+(z_2'-z_2)(z_3-z_1)+(z_3'-z_3)(z_1-z_2)=0, \quad ①$$

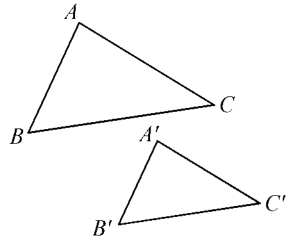


图 6-1

其中 z_1、z_2、z_3 分别是 A、B、C 对应的复数；z_1'、z_2'、z_3'分别是 A'、B'、C'对应的复数. 由复数模的性质从①可得

$$|z_1'-z_1|\cdot|z_2-z_3|+|z_2'-z_2|\cdot|z_3-z_1|\geqslant|(z_3'-z_3)(z_1-z_2)|.$$

注意到$\triangle ABC$是正三角形，即

$$|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=|z_1-z_2|,$$

故有

$$|z_1'-z_1|+|z_2'-z_2|\geqslant|z_3'-z_3|,$$

这就是

$$AA'+BB'\geqslant CC'.$$

同理可证另外的两个不等式. □

现回忆平面几何中一个简单的命题：三个正数 a、b、c 构成一个三角形三边的充要条件是存在正数 x、y、z 使得 $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$.（这个结论的充分性可直接验证，必要性可通过图 6-2 中的分解看出.）

依据这个命题，关于三角形的几何不等式总可以通过代换 $x=-a+b+c$, $y=a-b+c$, $z=a+b-c$ 将问题转化为涉及正数 x、y、z 的不等式.

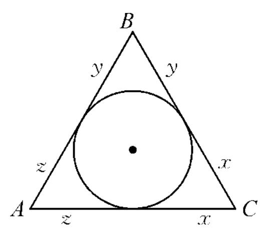


图 6-2

利用正数代换的一个十分典型的问题是第 24 届 IMO 试题：

在$\triangle ABC$中，求证：

$$b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b)\geqslant 0.$$

这个问题的一种简洁证法是利用正数代换转化为 x、y、z 的不等式

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geqslant x+y+z,$$

从而用一下 Cauchy 不等式便可. 这个问题的详细解题过程可参看几乎任一本奥赛教程.

下面看一个稍新颖一点的问题.

例 3 设 r_a、r_b、r_c 分别为$\triangle ABC$ 的三边 a、b、c 相应的旁切圆半径,求证:

$$\frac{a^2}{r_b^2+r_c^2}+\frac{b^2}{r_c^2+r_a^2}+\frac{c^2}{r_a^2+r_b^2}\geqslant 2.$$

证明 作正数代换

$$x=-a+b+c,$$
$$y=a-b+c,$$
$$z=a+b-c,$$

则 x, y, $z>0$. 注意到

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)xyz},$$

$$r_a=\frac{2S_{\triangle ABC}}{b+c-a}=\frac{1}{2x}\sqrt{(x+y+z)xyz},$$

等等,通过计算,原不等式等价变为下面的代数不等式

$$\frac{y^2z^2(y+z)^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2x^2(z+x)^2}{z^2+x^2}+\frac{x^2y^2(x+y)^2}{x^2+y^2}\geqslant 2xyz(x+y+z). \quad ①$$

为证①,只需证明下面有趣的局部不等式

$$\frac{y^2z^2(y+z)^2}{y^2+z^2}\geqslant\frac{2xyz(x+y+z)y^2z^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}. \quad ②$$

事实上,如果②式成立,将这样的三个不等式相加便得所证结果.

下证②.

$$\begin{aligned}② &\Leftrightarrow (y+z)^2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\geqslant 2xyz(x+y+z)(y^2+z^2),\\
&\Leftrightarrow (y^2+z^2)x^2(y+z)^2+y^2z^2(y+z)^2\geqslant 2xyz(x+y+z)(y^2+z^2),\\
&\Leftrightarrow (y^2+z^2)^2x^2+y^2z^2(y+z)^2\geqslant 2xyz(y+z)(y^2+z^2),\\
&\Leftrightarrow [(y^2+z^2)x-yz(y+z)]^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

得证. □

注 上例的不等式①是一个难度很大的代数不等式,上面化归为局部不等式②的方法是林嵩同学(原华南师大附中学生,曾入选 2003 年国家集训队)告诉我的.

下面谈一下坐标方法在处理几何不等式时的作用.

例 4 设 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3; x_1<x_2<x_3)$ 是直角坐标平面上的点，用 R 表示 $\triangle P_1P_2P_3$ 的外接圆半径. 求证：

$$\frac{1}{R}<2\left|\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right|,$$

并说明系数 2 是最佳的.

证明 当沿 X 轴方向平移 $\triangle P_1P_2P_3$ 时，x_1-x_2、x_2-x_3、x_3-x_1 均不变，所以原不等式两边的值不改变.

当沿 Y 轴方向平移 $\triangle P_1P_2P_3$ 时，由于有恒等式

$$\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=0,$$

所以原不等式两边的值也不改变.

因此，不妨设 P_1 为原点，即 $x_1=y_1=0$，此时原不等式成为

$$\frac{1}{2R}<\frac{1}{|x_2-x_3|}\left|\frac{y_3}{x_3}-\frac{y_2}{x_2}\right|.$$

如图 6-3，设直线 OP_3、OP_2 的倾斜角为 θ_3、θ_2，$\angle P_2P_1P_3=\alpha$，则 $\theta_3-\theta_2=\pm\alpha$，从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{|x_2-x_3|}\left|\frac{y_3}{x_3}-\frac{y_2}{x_2}\right| &= \frac{1}{|x_2-x_3|}\,|\tan\theta_3-\tan\theta_2| \\ &= \frac{1}{|x_2-x_3|}\left|\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\cos\theta_3\cos\theta_2}\right| \\ &= \frac{\sin\alpha}{|x_2-x_3|}\left|\frac{1}{\cos\theta_3\cos\theta_2}\right| \\ &> \frac{\sin\alpha}{|x_2-x_3|}\geqslant\frac{\sin\alpha}{P_2P_3} \\ &= \frac{1}{2R}, \qquad (*)\end{aligned}$$

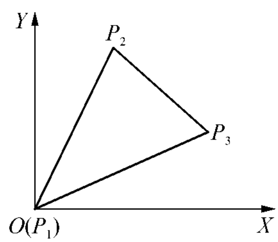


图 6-3

从而原不等式得证.

在上面的证明中，若 $y_1=y_3=x_1=0$，并且 $y_2\to 0$，则 $\cos\theta_3=1$，$\cos\theta_2\to 1$. 此时 $(*)$ 的左边 $\to\frac{1}{2R}$，故 2 是最优的. □

注 上例的解法由向振同学提供.

下面再看一例.

例 5 设 P 是锐角 $\triangle ABC$ 所在平面上任一点，u、v、w 分别为点 P 到 A、B、C 的距离. 求证：

$$u^2\tan A+v^2\tan B+w^2\tan C\geqslant 4\Delta,$$

并指出等号成立的条件,其中 Δ 为$\triangle ABC$ 的面积.

证明　如图 6－4,取 BC 所在的直线为 X 轴,过 A 的高线所在的直线为 Y 轴,建立平面直角坐标系.

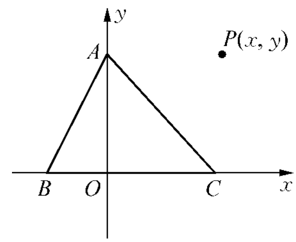


图 6－4

设 A、B、C 的坐标分别为$(0, a)$、$(-b, 0)$、$(c, 0)$(这里 $a, b, c>0$),于是

$$\tan B=\frac{a}{b},\ \tan C=\frac{a}{c},$$

$$\tan A=-\tan(B+C)=\frac{a(b+c)}{a^2-bc}.$$

由$\angle A$ 为锐角知 $a^2-bc>0$.

现设点 P 的坐标为(x, y),则

$$\begin{aligned}
&u^2\tan A+v^2\tan B+w^2\tan C\\
&=[x^2+(y-a)^2]\frac{a(b+c)}{a^2-bc}+\frac{a}{b}[(x+b)^2+y^2]+\frac{a}{c}[(x-c)^2+y^2]\\
&=(x^2+y^2+a^2-2ay)\frac{a(b+c)}{a^2-bc}+\frac{a(b+c)}{bc}(x^2+y^2+bc)\\
&=\frac{a(b+c)}{bc(a^2-bc)}[a^2x^2+(ay-bc)^2+2bc(a^2-bc)]\\
&\geqslant\frac{a(b+c)}{bc(a^2-bc)}\cdot 2bc(a^2-bc)\\
&=2a(b+c)=4\Delta.
\end{aligned}$$

从上面的证明过程可看出,等号成立的充要条件是 $x=0$ 且 $y=\frac{bc}{a}$,即点 P 为$\triangle ABC$ 的垂心$\left(0,\frac{bc}{a}\right)$.　□

代数恒等式的发现和构造常常是发现和证明几何不等式的最基本的方法.

例 6　设$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$的三边分别为 a、b、c 及 a'、b'、c',面积分别为 F 和 F'. 设

$$\mu=\min\left\{\frac{a^2}{a'^2},\frac{b^2}{b'^2},\frac{c^2}{c'^2}\right\},\ \upsilon=\max\left\{\frac{a^2}{a'^2},\frac{b^2}{b'^2},\frac{c^2}{c'^2}\right\},$$

则对 $\mu\leqslant\lambda\leqslant\upsilon$ 有

$$H \geqslant 8\left(\lambda F'^2 + \frac{1}{\lambda} F^2\right),$$

其中 $H = a'^2(-a^2+b^2+c^2)+b'^2(a^2-b^2+c^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)$.

证明 由三角形面积的海伦(Heron)公式有

$$16F^2 = (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4),$$

$$16F'^2 = (a'^2+b'^2+c'^2)^2 - 2(a'^4+b'^4+c'^4).$$

令 $D_1 = \sqrt{\lambda}a'^2 - \frac{a^2}{\sqrt{\lambda}}$, $D_2 = \sqrt{\lambda}b'^2 - \frac{b^2}{\sqrt{\lambda}}$, $D_3 = \sqrt{\lambda}c'^2 - \frac{c^2}{\sqrt{\lambda}}$,则有恒等式

$$H - 8\left(\lambda F'^2 + \frac{1}{\lambda}F^2\right) = \frac{1}{2}D_1^2 - D_1(D_2+D_3) + \frac{1}{2}(D_2-D_3)^2. \quad ①$$

注意到当 $\lambda = \mu = \frac{a^2}{a'^2}$ 时,$D_1 = 0$,因此由 ① 得

$$H - 8\left(\frac{a^2}{a'^2}F'^2 + \frac{a'^2}{a^2}F^2\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{a'}(b'^2-c'^2) - \frac{a'}{a}(b^2-c^2)\right]^2 \geqslant 0,$$

即

$$H \geqslant 8\left(\mu F'^2 + \frac{1}{\mu}F^2\right), \quad ②$$

同理

$$H \geqslant 8\left(\upsilon F'^2 + \frac{1}{\upsilon}F^2\right). \quad ③$$

对给定的 $\lambda \in [\mu, \upsilon]$,可令

$$\lambda = \theta\mu + (1-\theta)\upsilon,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

因此将②、③两式分别乘 θ 和 $1-\theta$ 后相加可得

$$H \geqslant 8\left[\lambda F'^2 + \left(\frac{\theta}{\mu} + \frac{1-\theta}{\upsilon}\right)F^2\right], \quad ④$$

易知

$$\frac{\theta}{\mu} + \frac{1-\theta}{\upsilon} \geqslant \frac{1}{\lambda}.$$

因此由④便得

$$H \geqslant 8\left(\lambda F'^2 + \frac{1}{\lambda}F^2\right). \quad \square$$

注 上例证明中的代数恒等式①的发现是一个关键的难点.

此例是陈计先生给出的著名的 Neuberg-Pedoe 不等式的一个加强.

习 题 6

1 设 P 为锐角$\triangle ABC$ 内部一点,求证

$$PA\cdot PB\cdot AB+PB\cdot PC\cdot BC+PC\cdot PA\cdot CA\geqslant AB\cdot BC\cdot CA,$$

等号成立当且仅当 P 为$\triangle ABC$ 的垂心.

2 分别以$\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 为边向外作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$,P、Q 为直线 EG 上的两点使得 BP 和 CQ 垂直于 BC,求证

$$BP+CQ\geqslant BC+EG,$$

等号成立当且仅当 $AB=AC$.

3 设 $P(z)$表示复平面上复数 z 的对应点,复数 $a=p+\mathrm{i}q\ (p,q\in\mathbf{R})$,已知点 $P(z_1)$,…,$P(z_5)$ 是凸五边形 Q 的顶点,并且原点及 $P(az_1)$,…,$P(az_5)$ 均在 Q 的内部,求证

$$p+q\cdot\tan\frac{\pi}{5}\leqslant 1.$$

4 $\triangle ABC$ 三边的长分别为 a、b、c,与之相对应的高线长和旁切圆的半径分别为 h_a、h_b、h_c 与 r_a、r_b、r_c,求证

$$\left(\frac{h_a}{r_b}\right)^2+\left(\frac{h_b}{r_c}\right)^2+\left(\frac{h_c}{r_a}\right)^2\geqslant 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right),$$

当且仅当$\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立.

5 (文家金)设 AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的角平分线,$\triangle ABC$ 内的动点 P 到其三边的距离的平方根构成某三角形的三条边长,求证

(1) P 的轨迹是一个椭圆 Γ 的内部,并且 Γ 与$\triangle ABC$ 的边 BC、AB、AC 分别相切于 D、E、F;

(2) 椭圆 Γ 的面积 S_Γ 满足

$$\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}S_{\triangle DEF}\leqslant S_\Gamma\leqslant\frac{\sqrt{3}\pi}{9}S_{\triangle ABC}.$$

7 等周极值问题

各种空间,各种形式的等周问题似乎是几何学永恒的研究主题之一.

平面几何中的等周定理反映着一些特殊几何图形,如圆,正 n 边形等特有的极值性质,因此特别引人注意.

下面叙述几个中学数学竞赛中常要用到的等周定理.

定理 1 (等周定理Ⅰ) 周长一定的所有图形中,以圆的面积为最大;反之,面积一定的所有图形中,以圆的周长为最小.

定理 2 (等周定理Ⅱ) 周长一定的所有 n 边形中,以正 n 边形的面积为最大;反之,面积一定的所有 n 边形中,以正 n 边形的周长为最小.

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为任一 n 边形的边长,F 为其面积,则由等周定理立得如下的等周不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geqslant 4n\tan\frac{\pi}{n}\cdot F,$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

下面的定理 3 是第 3 章的圆内接四边形极值性质的推广.

定理 3 (Steiner 定理) 边长给定的 n 边形中以存在外接圆者的面积为最大.

定理 4 圆内接 n 边形中以正 n 边形的面积为最大.

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是半径为 R 的圆内接 n 边形的边长,则由定理 4 可得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant 2nR\cdot\sin\frac{\pi}{n},$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

先看几个简单的例子.

例 1 给定半径为 r 的圆上的定点 P 的切线 l,由此圆上动点 R 引 RQ 垂直于 l,交 l 于 Q. 试确定$\triangle PQR$ 面积的最大值.(第 13 届加拿大试题)

解 如图 7-1,注意到 $OP \parallel RQ$,作 $RS \parallel l$,交圆周于 S,连接 PS. 易证

$S_{\triangle PQR}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle PRS}$.

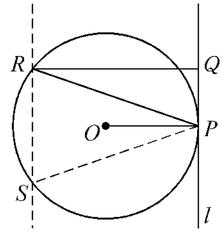


图 7－1

由定理 4，当圆内接三角形 PRS 为正三角形时面积最大，最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2$. 因此 $\triangle PQR$ 面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}r^2$. □

下面的例子是一个老问题.

例 2　如图 7－2，曲线 L 将正三角形 $\triangle ABC$ 分为两个等面积的部分. 证明：$l\geqslant\dfrac{\sqrt{\pi}a}{2\sqrt[4]{3}}$，其中 l 为 L 的长，a 为正三角形的边长.

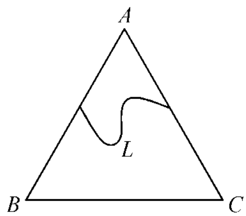


图 7－2

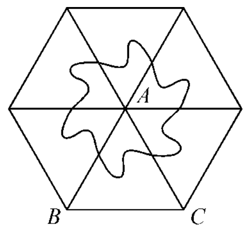


图 7－3

解　如图 7－3，我们将 $\triangle ABC$ 连续翻转六次，这时 L 形成一条闭曲线. 由于 L 所围成的区域的面积等于 $3S_{\triangle ABC}$ 为一定值，由定理 1，当此闭曲线为圆时周长为最小. 因此

$$6l\geqslant 2\pi\sqrt{\frac{3S_{\triangle ABC}}{\pi}}=2\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2},$$

由此即得 $l\geqslant\dfrac{\sqrt{\pi}a}{2\sqrt[4]{3}}$. □

下面再讨论 Popa 不等式(参考第 3 章例 3).

例 3　设一个凸四边形 Q 的四边满足 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，面积为 F，求证

$$F\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}c^2.$$

这里用等周定理给出证明.

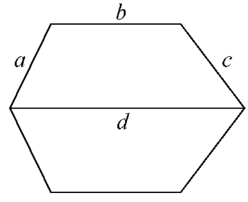


图 7－4

证明　如图 7－4，以四边形 Q 的最大边为轴将 Q 翻转过来，则形成一个六边形(有两种情况形成凸五边形和矩形，这时结论同理可证). 注意到这个凸六边形的周长等于 $2(a+b+c)$，为一定值. 由等周定理 Ⅱ，

周长一定的 n 边形中以正 n 边形的面积为最大，所以这个六边形的面积 $2F$ 满足

$$2F \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2,$$

再应用 a，$b \leqslant c$ 可得

$$F \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2. \quad \square$$

注　由这个证明方法，我们可将 Popa 不等式推广到 n 边形中（见本章习题第 5 题）.

张海娟和笔者用上面的方法建立了一个关于两个 n 边形的不等式.

例 4　设两个 n 边形 Ω_1、Ω_2 的边分别为 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n$ 和 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_{n-1} \leqslant b_n$，它们的面积分别为 F_1 和 F_2. 求证：

$$\frac{F_1}{a_n^2}+\frac{F_2}{b_n^2} < \frac{(n-1)^2}{4\pi}\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2.$$

证明　不妨设 A_nA_1 为 Ω_1 的最大边，以 A_nA_1 为一边，在与 Ω_1 相异的一侧作一多边形 Ω_2'，使得它与 Ω_2 相似，且 Ω_2' 的最大边 $B_n'B_1'$ 与 A_nA_1 重合，如图 7 - 5. 记 $\widetilde{\Omega} = \Omega_1 \cup \Omega_2$，那么 $\widetilde{\Omega}$ 的周长为

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i+\frac{a_n}{b_n}b_i\right),$$

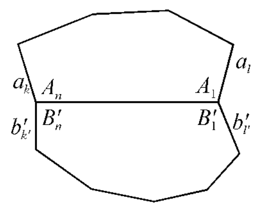


图 7 - 5

其面积为

$$F_1+\frac{a_n^2}{b_n^2}F_2.$$

记 $\angle A_n$、$\angle A_1$ 为 Ω_1 中以最长边为一边的两个角，$\angle B_n$、$\angle B_1$ 为 Ω_2' 中相应的角. 设 Ω_1 中 $\angle A_n$ 和 $\angle A_1$ 的另一边分别为 a_k、a_l，Ω_2' 中 $\angle B_n$ 和 $\angle B_1$ 的另一边分别为 $b_{k'}'$、$b_{l'}'$.

如果 $\angle A_n$、$\angle A_1$ 分别和 $\angle B_n$、$\angle B_1$ 不是互为补角，那么边 a_k、a_l 和边 $b_{k'}'$、$b_{l'}'$ 分别不共线，此时 $\widetilde{\Omega}$ 是一个 $2(n-1)$ 边形，应用等周不等式（定理 2）可得

$$\begin{aligned} F_1+\frac{a_n^2}{b_n^2}F_2 &\leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i+\frac{a_n}{b_n}b_i\right)\right)^2}{8(n-1)}\cdot\cot\frac{\pi}{2(n-1)} \\ &\leqslant \frac{\left((n-1)a_{n-1}+(n-1)\frac{a_n}{b_n}b_{n-1}\right)^2}{8(n-1)}\cdot\cot\frac{\pi}{2(n-1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n-1)\left(a_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}b_{n-1}\right)^2}{8} \cdot \cot \frac{\pi}{2(n-1)},$$

也即

$$\frac{F_1}{a_n^2}+\frac{F_2}{b_n^2} \leqslant \frac{n-1}{8}\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2 \cdot \cot \frac{\pi}{2(n-1)}. \qquad ①$$

当$\angle A_n$、$\angle A_1$ 其中之一和$\angle B_n$、$\angle B_1$ 其中之一互为补角时,$\widetilde{\Omega}$ 是一个 $2n-3$ 边形;当$\angle A_n$、$\angle A_1$ 和$\angle B_n$、$\angle B_1$ 分别互为补角时,$\widetilde{\Omega}$ 是一个 $2(n-2)$边形,和上面的讨论类似,在这两种情况下运用等周不等式分别可得

$$\frac{F_1}{a_n^2}+\frac{F_2}{b_n^2} \leqslant \frac{(n-1)^2}{4(2n-3)}\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2 \cdot \cot \frac{\pi}{2n-3}, \qquad ②$$

$$\frac{F_1}{a_n^2}+\frac{F_2}{b_n^2} \leqslant \frac{(n-1)^2}{8(n-2)}\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2 \cdot \cot \frac{\pi}{2(n-2)}. \qquad ③$$

注意到当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,有下式成立

$$\cot x < \frac{1}{x}. \qquad ④$$

将①、②、③分别和④式结合可得

$$\frac{F_1}{a_n^2}+\frac{F_2}{b_n^2} < \frac{(n-1)^2}{4\pi}\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2. \quad \square$$

最后,我们介绍 Ozeki 不等式的等周定理的证明.

例 5 (Ozeki 不等式) 设 $\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n=\pi$(其中 $n \geqslant 3$),$0<\varphi_i<\pi$,$i=1, 2, \cdots, n$. 求证对任意非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \sec \frac{\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} \cos \varphi_i\right),$$

其中 $x_{n+1}=x_1$.

证明 如图 7-6,从某一点 O 出发作 n 条射线 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n$,使得

$$\angle A_i O A_{i+1} = \varphi_i + \frac{\pi}{n},$$

其中 $A_{n+1}=A_1$,再在这 n 条射线上截取线段 $OA_i=x_i (i=1, 2, \cdots, n)$,这样便得到一个 n 边

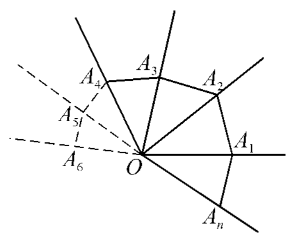


图 7-6

形 $A_1A_2\cdots A_n$.

现记 $A_iA_{i+1}=a_i$，记这个 n 边形的面积为 F.

在$\triangle OA_iA_{i+1}$中由余弦定理可得

$$a_i^2=x_i^2+x_{i+1}^2-2x_ix_{i+1}\cos\angle A_iOA_{i+1}，i=1，2，\cdots，n，x_{i+1}=x_1.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cos\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right), \qquad ①$$

又由 Cauchy 不等式和等周不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\geqslant 4F\tan\frac{\pi}{n}. \qquad ②$$

由①和②可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_i^2&\geqslant 2F\tan\frac{\pi}{n}+\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cos\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[x_ix_{i+1}\sin\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)\tan\frac{\pi}{n}+x_ix_{i+1}\cos\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)\right]\\&=\sec\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\left[\sin\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}\cos\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)\right]\\&=\sec\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cos\varphi_i. \quad \square\end{aligned}$$

注 (1) Ozeki 不等式是 N. Ozeki 在研究著名的 Erdös-Mordell 不等式的多边形推广时提出的，关于它的一些相关结果可参考“Ozeki N. On the P. Erdös inequality for the triangle. J. College Arts Sci. Chiba Univ，1957(2)：247－250”. 这个不等式 1961 年被 Lenhard 重新发现.

(2) Ozeki 不等式是三角形嵌入不等式的多边形推广. 三角形嵌入不等式可推广到三维甚至 n 维空间中，其中关于四面体的结果为：

设 θ_{ij} $(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 是四面体 Ω 的内二面角，则对任意实数 x_1，$\cdots$，x_4 有

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\cos\theta_{ij}.$$

其他推广和相关结果可参看张垚先生和笔者的论文(刊于 Linear Algebra and its Applications，1998;278).

(3) 用上面的证题方法可证明如下的代数不等式：设 x，y，$z\geqslant 0$，则

$$(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)\geqslant(xy+yz+zx)^2.$$

证明留给读者作练习.

习 题 7

1 在已知边 BC 和对角 α 的所有三角形中，证明：

(1) 底边为 BC 的等腰三角形面积最大；

(2) 底边为 BC 的等腰三角形周长最大.

2 两个等边三角形内接于一个半径为 r 的圆，设 K 为两个三角形重叠处的面积，求证 $2K\geqslant r^2\sqrt{3}$.

3 在 3 条边长为 1、一个内角是 30°的四边形中，找出具有最大面积 S 的四边形，并求出 S.

4 设凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内有一点 P 到边 A_1A_2，A_2A_3，…，A_nA_1 的距离分别为 d_1，d_2，…，d_n，求证：$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d_i}\geqslant 2n\tan\frac{\pi}{n}$，其中 $a_i=A_iA_{i+1}$（约定 $A_{n+1}=A_1$），并指出等号成立的充要条件.

5 设一个平面凸 n 边形的边长满足 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$F$ 为其面积，则

$$F<\frac{(n-1)^2}{2\pi}a_{n-1}^2.$$

8 嵌入不等式与惯性矩不等式

三角形嵌入不等式(简称嵌入不等式)在近年来初等几何不等式研究中扮演着一个重要的角色,是产生新的几何不等式的一个源头,嵌入不等式可叙述为

定理 1 (嵌入不等式) 设 $A+B+C=(2k+1)\pi$, x, y, $z\in\mathbf{R}$,则

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C, \tag{①}$$

等号成立当且仅当 $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$.

简证 ①的左右两边之差 $=(x-y\cos C-z\cos B)^2+(y\sin C-z\sin B)^2\geqslant 0$,得证. □

顾名思义,不等式①被称为嵌入不等式的几何解释是:如果 $0<A$, B, $C<\pi$,且对任意的实数 x、y、z 都使①成立,则 A、B、C 一定可成为某一个三角形的三个内角或某一个平行六面体共点的三个面两两所夹的内二面角.

三角形嵌入不等式的等价形式:

定理 2 设 $A+B+C=(2k+1)\pi$, x, y, $z\in\mathbf{R}$,则

(1) $xy\sin^2\dfrac{C}{2}+zx\sin^2\dfrac{B}{2}+yz\sin^2\dfrac{A}{2}\geqslant\dfrac{1}{4}(2xy+2yz+2xz-x^2-y^2-z^2)$,当且仅当 $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$ 时等号成立.

(2) $(x+y+z)^2\geqslant 4\left(xy\cos^2\dfrac{C}{2}+zx\cos^2\dfrac{B}{2}+yz\cos^2\dfrac{A}{2}\right)$,当且仅当 $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$ 时等号成立.

(3) $(x+y+z)^2\geqslant 4(yz\sin^2A+zx\sin^2B+xy\sin^2C)$,当且仅当 $x:y:z=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$ 时等号成立.

简证 (1) 用倍角公式 $\cos A=1-2\sin^2\dfrac{A}{2}$ 等代入式①整理即得.

(2) 用倍角公式 $\cos A=2\cos^2\dfrac{A}{2}-1$ 等代入式①整理即得.

(3) 用半角公式 $\sin^2A=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2A)$ 等代入式①整理即得. □

注 对(3)应用三角形的正弦定理有:在$\triangle ABC$中,$\lambda,\mu,\upsilon\in\mathbf{R}$,则

$$(\lambda+\mu+\upsilon)^2R^2\geqslant\mu\upsilon a^2+\mu\lambda b^2+\lambda\upsilon c^2$$
$$\Leftrightarrow(\lambda+\mu+\upsilon)^2(abc)^2\geqslant16\Delta^2(\mu\upsilon a^2+\mu\lambda b^2+\lambda\upsilon c^2).\qquad(*)$$

在$(*)$中令$\lambda=xa^2$,$\mu=yb^2$,$\upsilon=zc^2$,$x,y,z\in\mathbf{R}$,则有

$$(xa^2+yb^2+zc^2)^2\geqslant16\Delta^2(xy+yz+zx),\qquad(**)$$

等号成立当且仅当$\lambda:\mu:\upsilon=(b^2+c^2-a^2):(c^2+a^2-b^2):(a^2+b^2-c^2)$.

$(**)$有着广泛的应用,经常出现在初等几何不等式的研究文献中(如单墫著《几何不等式》.上海教育出版社,1980).

同时有几位研究者注意到了比$(**)$式更一般的代数不等式,这就是下面的例子.

例1 设λ_1、λ_2、λ_3中至少有两个正数,且满足$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1>0$,$x$、$y$、$z$为任意实数,求证:

$$(\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z)^2\geqslant(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2),$$

其中等号当且仅当$\dfrac{x}{\lambda_2+\lambda_3}=\dfrac{y}{\lambda_1+\lambda_3}=\dfrac{z}{\lambda_1+\lambda_2}$时成立.

证明1 (应用嵌入不等式)

由λ_1、λ_2、λ_3中至多只有一个负数及$\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2\lambda_3>0$易知$\lambda_2+\lambda_3>0$,同理$\lambda_1+\lambda_2>0$,$\lambda_1+\lambda_3>0$.

设$\lambda_1+\lambda_2=c^2$,$\lambda_2+\lambda_3=a^2$,$\lambda_1+\lambda_3=b^2(a,b,c>0)$,则

$$\lambda_1=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2),\ \lambda_2=\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2),\ \lambda_3=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2).$$

由$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1>0$展开得

$$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)>0.$$

从而a、b、c构成某个三角形的三条边,设这个三角形为$\triangle ABC$.因此

原不等式$\Leftrightarrow\sum\lambda_1^2x^2+2\sum\lambda_1\lambda_2xy\geqslant(\sum\lambda_1\lambda_2)(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2)$

$$\Leftrightarrow\sum x^2(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_3)\geqslant\sum\lambda_1\lambda_2(2yz+2xz)$$
$$\Leftrightarrow\sum x^2c^2b^2\geqslant\sum\frac{c^4-a^4-b^4+2a^2b^2}{4}(2yz+2xz)$$
$$\Leftrightarrow\sum(xcb)^2\geqslant\sum yza^2(b^2+c^2-a^2).\qquad①$$

事实上，由嵌入不等式

$$
\begin{aligned}
\sum (xbc)^2 &\geqslant \sum 2(yca)(zba)\cdot \cos A \\
&= \sum 2(yca)(zba)\cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
&= \sum yza^2(b^2+c^2-a^2).
\end{aligned}
$$

此即①式，从而原不等式成立.

等号成立当且仅当

$$
\begin{aligned}
&\frac{xbc}{\sin A}=\frac{yac}{\sin B}=\frac{zab}{\sin C} \\
\Leftrightarrow &\frac{x}{\sin^2 A}=\frac{y}{\sin^2 B}=\frac{z}{\sin^2 C} \\
\Leftrightarrow &\frac{x}{\lambda_2+\lambda_3}=\frac{y}{\lambda_1+\lambda_3}=\frac{z}{\lambda_1+\lambda_2}. \quad \square
\end{aligned}
$$

证明 2 （判别式法）

同证法 1 可说明 $\lambda_1+\lambda_2>0$，$\lambda_2+\lambda_3>0$，$\lambda_1+\lambda_3>0$. 这时原不等式等价于

$$
\begin{gathered}
(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_3)x^2-2[\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)y+\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)z]x+ \\
[(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)y^2+(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3)z^2-2\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)yz]\geqslant 0.
\end{gathered}
$$

将上式左边看作是关于 x 的二次函数，其二次项系数是正数，因此只需要证明它的判别式

$$\Delta\leqslant 0,$$

即

$$
\begin{aligned}
&\lambda_3^2(\lambda_1+\lambda_2)^2y^2+\lambda_2^2(\lambda_1+\lambda_3)^2z^2+2\lambda_3\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_3)yz \\
\leqslant\ &(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_3)[(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_2)y^2+(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_2)z^2- \\
&2\lambda_1(\lambda_3+\lambda_2)yz] \\
\Leftrightarrow\ &(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)[(\lambda_1+\lambda_2)y-(\lambda_1+\lambda_3)z]^2\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

由题设条件这是成立的，因此原不等式得证.

等号成立当且仅当

$$(\lambda_1+\lambda_2)y=(\lambda_1+\lambda_3)z\Leftrightarrow\frac{y}{\lambda_1+\lambda_3}=\frac{z}{\lambda_1+\lambda_2},$$

由 x、y、z 地位的对称性即知等号成立当且仅当

$$\frac{x}{\lambda_2+\lambda_3}=\frac{y}{\lambda_1+\lambda_3}=\frac{z}{\lambda_1+\lambda_2}. \quad \square$$

上例的证明 1 由向振同学提供，证明 2 属于黄志毅同学(原华南师大附中学生，曾获 2004 年第 45 届 IMO 金牌).

下面介绍嵌入不等式的应用.

例 2 设$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$的边长分别为 a、b、c 及 a'、b'、c'，对应内角平分线分别为 t_a、t_b、t_c 及 t'_a、t'_b、t'_c. 求证

$$t_a t'_a+t_b t'_b+t_c t'_c \leqslant \frac{3}{4}(aa'+bb'+cc'). \quad ①$$

证明 由角平分线公式可得

$$t_a=\frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{A}{2}\leqslant\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2},$$

同理 $t'_a\leqslant\sqrt{b'c'}\cos\frac{A}{2}$，等等. 因此

$$\begin{aligned}
t_a t'_a+t_b t'_b+t_c t'_c &\leqslant \sum\sqrt{bb'cc'}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A'}{2}\\
&=\frac{1}{2}\sum\sqrt{bb'cc'}\left(\cos\frac{A-A'}{2}+\cos\frac{A+A'}{2}\right)\\
&\leqslant\frac{1}{2}\sum\sqrt{bb'cc'}\left(1+\cos\frac{A+A'}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum\sqrt{bb'cc'}+\frac{1}{2}\sum\sqrt{bb'cc'}\cdot\cos\frac{A+A'}{2}. \quad ②
\end{aligned}$$

现注意到 $\frac{A+A'}{2}+\frac{B+B'}{2}+\frac{C+C'}{2}=\pi$，应用嵌入不等式并令 $x=\sqrt{aa'}$，$y=\sqrt{bb'}$，$z=\sqrt{cc'}$ 可得

$$2\sum\sqrt{bb'cc'}\cos\frac{A+A'}{2}\leqslant\sum aa', \quad ③$$

又由平均值不等式

$$\sum\sqrt{bb'cc'}\leqslant\frac{1}{2}\sum(bb'+cc')=\sum aa', \quad ④$$

由②、③及④即得所证不等式. $\square$

例 3 设 P 为$\triangle ABC$ 内部或边上任一点，记 $PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，

求证

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

证明 如图 8-1,分别过 A、B、C 作 PA、PB、PC 的垂线,三垂线两两相交于 A'、B'、C',于是 $\angle BPC=\pi-A'$,$\angle APB=\pi-C'$,$\angle APC=\pi-B'$. 由余弦定理可得

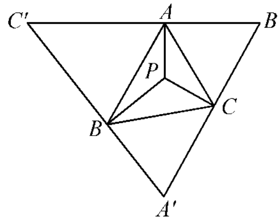


图 8-1

$$\begin{aligned}a^2&=y^2+z^2+2yz\cos A',\\ b^2&=x^2+z^2+2xz\cos B',\\ c^2&=x^2+y^2+2xy\cos C',\end{aligned}$$

相加并应用嵌入不等式便得

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=2(x^2+y^2+z^2)+2xy\cos C'+2xz\cos B'+2yz\cos A'\\ &\leqslant 2(x^2+y^2+z^2)+(x^2+y^2+z^2)\\ &=3(x^2+y^2+z^2),\end{aligned}$$

得证. □

下面用嵌入不等式证明加权正弦和的不等式. 这是一个十分有用的不等式,是杨学枝先生于 1988 年建立的.

定理 3 (加权正弦和的不等式) 对任意实数 x、y、z 及正数 u、v、w 及任意$\triangle ABC$ 有

$$2(yz\sin A+zx\sin B+xy\sin C)\leqslant\left(\frac{x^2}{u}+\frac{y^2}{v}+\frac{z^2}{w}\right)\sqrt{vw+wu+uv},$$

其中等号成立当且仅当 $x:y:z=\cos A:\cos B:\cos C$ 且 $u:v:w=\cot A:\cot B:\cot C$.

证明 令 $x'=\frac{x}{\sqrt{u}}$,$y'=\frac{y}{\sqrt{v}}$,$z'=\frac{z}{\sqrt{w}}$,则原不等式等价于

$$\begin{aligned}&2\sqrt{\frac{vw}{uv+vw+uw}}\cdot y'z'\sin A+2\sqrt{\frac{uw}{uv+vw+uw}}\cdot\\ &x'z'\sin B+2\sqrt{\frac{uv}{uv+vw+uw}}\cdot x'y'\sin C\\ \leqslant{}&x'^2+y'^2+z'^2.\end{aligned}\tag{①}$$

由 Cauchy 不等式,

①的左边$\leqslant 2\sqrt{\frac{vw}{uv+vw+uw}+\frac{uw}{uv+vw+uw}+\frac{uv}{uv+vw+uw}}\cdot$

$$\sqrt{y'^2z'^2\sin^2A+x'^2z'^2\sin^2B+x'^2y'^2\sin^2C}$$
$$=2\sqrt{y'^2z'^2\sin^2A+x'^2z'^2\sin^2B+x'^2y'^2\sin^2C},$$

因此要证①,只需证明

$$2\sqrt{y'^2z'^2\sin^2A+x'^2z'^2\sin^2B+x'^2y'^2\sin^2C}\leqslant x'^2+y'^2+z'^2$$
$$\Leftrightarrow 2y'^2z'^2(2\sin^2A-1)+2x'^2z'^2(2\sin^2B-1)+2x'^2y'^2(2\sin^2C-1)$$
$$\leqslant x'^4+y'^4+z'^4$$
$$\Leftrightarrow 2y'^2z'^2\cos(\pi-2A)+2x'^2z'^2\cos(\pi-2B)+2x'^2y'^2\cos(\pi-2C)$$
$$\leqslant x'^4+y'^4+z'^4 \qquad ②$$

而②可由嵌入不等式经过代换$(x,y,z)\to(x'^2,y'^2,z'^2)$和$(A,B,C)\to(\pi-2A,\pi-2B,\pi-2C)$得到,证毕. □

利用加权正弦和的不等式,我们可得下面关于两个三角形的有趣的不等式.

例4 设$\triangle ABC$的三条边为a、b、c,对应的内角分别为A、B、C. 记$s=a+b+c$. $\triangle A'B'C'$的三条边为a'、b'、c',$s'=a'+b'+c'$. 求证

$$\frac{a}{a'}\tan\frac{A}{2}+\frac{b}{b'}\tan\frac{B}{2}+\frac{c}{c'}\tan\frac{C}{2}\geqslant\frac{\sqrt{3}s}{2s'},$$

等号成立当且仅当$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$均为正三角形.

证明 在加权正弦和的不等式中作代换$A\to\frac{\pi-A}{2}$,$B\to\frac{\pi-B}{2}$,$C\to\frac{\pi-C}{2}$,再对所得不等式作代换$x\to yz$,$y\to zx$,$z\to xy$且同时作代换$u\to a'$,$v\to b'$,$w\to c'$,可得

$$\frac{yz}{a'x}+\frac{xz}{b'y}+\frac{xy}{c'z}\geqslant\frac{2\left(x\cos\frac{A}{2}+y\cos\frac{B}{2}+z\cos\frac{C}{2}\right)}{\sqrt{b'c'+a'c'+a'b'}}, \qquad ①$$

再在①中作代换$x\to\frac{bc}{s}\cos\frac{A}{2}$,$y\to\frac{ac}{s}\cos\frac{B}{2}$,$z\to\frac{ab}{s}\cos\frac{C}{2}$,并注意到

$$\frac{\frac{a}{s}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2R\sin A\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2R(\sin A+\sin B+\sin C)\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{1}{2}\tan\frac{A}{2},$$

等等,可得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}\tan\frac{A}{2}+\frac{b}{b'}\tan\frac{B}{2}+\frac{c}{c'}\tan\frac{C}{2}\right)\geqslant\frac{2\left(\frac{bc}{s}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{ac}{s}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{ab}{s}\cos^2\frac{C}{2}\right)}{\sqrt{b'c'+a'c'+a'b'}}. \tag{②}$$

又因为

$$b'c'+a'c'+a'b'\leqslant\frac{4}{3}s'^2, \tag{③}$$

且

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{bc}{s}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{ac}{s}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{ab}{s}\cos^2\frac{C}{2}\right)\\
=&\frac{1}{s}[bc(1+\cos A)+ac(1+\cos B)+ab(1+\cos C)]\\
=&\frac{1}{2s}[2bc+(a^2+b^2-c^2)+2ac+(a^2+c^2-b^2)+2ab+(-a^2+b^2+c^2)]\\
=&\frac{1}{2s}[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)]\\
=&\frac{1}{2s}(a+b+c)^2=\frac{s}{2}.
\end{aligned} \tag{④}$$

将③和④代入②立得所证不等式. □

应用嵌入不等式还可推出著名的 Neuberg-Pedoe 不等式及三角形内关于动点的许多不等式. 限于本书的任务,我们不再扩展这方面的主题.

另一个带实数权的著名几何不等式是惯性矩不等式.

定理 4 (惯性矩不等式) 设 P 为$\triangle ABC$ 所在平面上的任意一点,记 $PA=R_1$, $PB=R_2$, $PC=R_3$,则对任意实数 x, y, $z\in\mathbf{R}$ 有

$$(x+y+z)(xR_1^2+yR_2^2+zR_3^2)\geqslant yza^2+xzb^2+xyc^2, \tag{$*$}$$

等号成立当且仅当 $xR_1:yR_2:zR_3=\sin\alpha_1:\sin\alpha_2:\sin\alpha_3$,其中 $\alpha_i=\angle A_{i+1}PA_{i+2}(A_4=A_1, A_5=A_2, i=1,2,3)$(按同一方向取角).

证明 令 $\overrightarrow{PQ}=\frac{\sum x\overrightarrow{PA}}{\sum x}$,则

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \left(\sum x\right)^2 |\overrightarrow{PQ}|^2 = \left|\sum x \overrightarrow{PA}\right|^2 \\
&= \sum x^2 |\overrightarrow{PA}|^2 + 2\sum xy \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \\
&= \sum x^2 |\overrightarrow{PA}|^2 + \sum xy(|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) \\
&= \left(\sum x\right)\left(\sum x |\overrightarrow{PA}|^2\right) - \sum xy |\overrightarrow{AB}|^2 \\
&= \left(\sum x\right)\left(\sum x R_1^2\right) - \sum xyc^2.
\end{aligned}
$$

因此(*)得证. □

注 P 是$\triangle ABC$ 的内点时,惯性矩不等式等号成立的条件可写作

$$\frac{ar_1}{x} = \frac{br_2}{y} = \frac{cr_3}{z},$$

这里 r_1、r_2、r_3 分别是 P 点到边 BC、AC、AB 的距离.

例 5 (Klamkin 不等式) 设 P、P'是$\triangle A_1A_2A_3$ 所在平面上任意两点,记 $PA_i = R_i$, $P'A_i = R_i'$,三边 $a_i = A_{i-1}A_{i+1}$,其中 $A_4 = A_1$, $A_0 = A_3$, $i = 1$, 2, 3. 求证

$$a_1R_1R_1' + a_2R_2R_2' + a_3R_3R_3' \geqslant a_1a_2a_3, \tag{①}$$

并指明等号成立的条件.

证明 应用惯性矩不等式.

在惯性矩不等式中,令 $x = \dfrac{a_1R_1'}{R_1}$, $y = \dfrac{a_2R_2'}{R_2}$, $z = \dfrac{a_3R_3'}{R_3}$, 可得

$$\left(\sum \frac{a_iR_i'}{R_i}\right)\left(\sum a_iR_i'R_i\right) \geqslant \sum a_1^2\left(\frac{a_2R_2'}{R_2}\right)\left(\frac{a_3R_3'}{R_3}\right),$$

整理即得

$$\left(\sum a_1R_1'R_2R_3\right)\left(\sum a_1R_1R_1'\right) \geqslant a_1a_2a_3\left(\sum a_1R_1R_2'R_3'\right). \tag{②}$$

类似的有

$$\left(\sum a_1R_1R_2'R_3'\right)\left(\sum a_1R_1R_1'\right) \geqslant a_1a_2a_3\left(\sum a_1R_1'R_2R_3\right). \tag{③}$$

②、③两式相加,两边约去相同的项便得所证不等式①.

注意到②中等号成立的条件为

$$\frac{r_1R_1}{R_1'} = \frac{r_2R_2}{R_2'} = \frac{r_3R_3}{R_3'}, \tag{④}$$

而③中等号成立的条件为

$$\frac{r'_1 R'_1}{R_1}=\frac{r'_2 R'_2}{R_2}=\frac{r'_3 R'_3}{R_3}, \qquad ⑤$$

这里 r_i、r'_i 分别是 P 和 P' 到 a_i 的距离.

④、⑤相等可得

$$r_1 r'_1 = r_2 r'_2 = r_3 r'_3,$$

即 P 和 P' 到三边的距离成反比. 这说明 P 和 P' 是关于 $\triangle A_1A_2A_3$ 的一对等角共轭点. □

注 (1) 关于等角共轭点的概念及性质可参见 Roger A. Johnson 的书《Modern Geometry》的第八章(中译本:单墫译,上海教育出版社,1999).

(2) 上例证法的巧妙之处在于:对称的应用惯性矩不等式.

下面是唐立华建立的一个不等式.

例 6 设 P 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 所在平面上的任意一点, $PA_i=R_i(i=1,2,3)$, $\triangle A_1A_2A_3$ 的面积为 Δ, $\triangle A_1A_2A_3$ 的边长分别为 a_1、a_2、a_3,则

$$(R_2^2+R_3^2-R_1^2)\sin A_1+(R_3^2+R_1^2-R_2^2)\sin A_2+(R_1^2+R_2^2-R_3^2)\sin A_3 \geqslant 2\Delta, \qquad ①$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=a_3$ 且

$$R_1:R_2:R_3=\sin\alpha_1:\sin\alpha_2:\sin\alpha_3,$$

其中 $\angle\alpha_i=\angle A_{i+1}PA_{i+2}(A_4=A_1, A_5=A_2, i=1,2,3)$(按同一方向取角).

证明 先证下面的引理.

引理 设 $\triangle A_1A_2A_3$ 的边长分别为 a_1、a_2、a_3,则

$$a_1(a_1+a_2-a_3)(a_1+a_3-a_2)+a_2(a_2+a_1-a_3)(a_2+a_3-a_1)+$$
$$a_3(a_3+a_1-a_2)(a_3+a_2-a_1)\geqslant 3a_1a_2a_3, \qquad ②$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=a_3$.

证明 令

$$x=\frac{1}{2}(a_2+a_3-a_1),\ y=\frac{1}{2}(a_3+a_1-a_2),\ z=\frac{1}{2}(a_1+a_2-a_3),$$

则 $x, y, z>0$, 且

$$a_1=y+z,\ a_2=z+x,\ a_3=x+y.$$

于是②等价于

$$4[yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)] \geqslant 3(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\Leftrightarrow 4[x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)] \geqslant 3[x^2(y+z)+ y^2(z+x)+z^2(x+y)]+6xyz$$
$$\Leftrightarrow x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) \geqslant 6xyz. \tag{3}$$

而由均值不等式知式③成立,故引理中的不等式②得证,等号成立当且仅当 $x=y=z$,即 $a_1=a_2=a_3$.

下面证明①.

由正弦定理及 $\Delta=\dfrac{a_1a_2a_3}{4R}$ 知,①式等价于

$$(a_2+a_3-a_1)R_1^2+(a_1+a_3-a_2)R_2^2+(a_1+a_2-a_3)R_3^2 \geqslant a_1a_2a_3. \tag{4}$$

不妨设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 > 0$,则

$$a_1+a_2-a_3 \geqslant a_3+a_1-a_2 \geqslant a_2+a_3-a_1 > 0.$$

记 $\lambda_i=(a_1+a_2+a_3-2a_i)\ (i=1,2,3)$,从而

$$\lambda_2\lambda_3a_1 \geqslant \lambda_3\lambda_1a_2 \geqslant \lambda_1\lambda_2a_3,$$

故由引理、惯性矩不等式及 Tchebychef(切比雪夫)不等式可得

$$\begin{aligned}&(a_2+a_3-a_1)R_1^2+(a_1+a_3-a_2)R_2^2+(a_1+a_2-a_3)R_3^2\\ =&\lambda_1R_1^2+\lambda_2R_2^2+\lambda_3R_3^2 \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{3}\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}\cdot a_i^2}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i}\\ =&\frac{\sum_{i=1}^{3}(\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}\cdot a_i)\cdot a_i}{\sum_{i=1}^{3}a_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}\cdot a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\right)}{3\sum_{i=1}^{3}a_i}\\ \geqslant& a_1a_2a_3,\end{aligned}$$

故式④成立,从而①得证. 由引理及 Tchebychef 不等式等号成立的条件易知式①等号成立当且仅当 $a_1=a_2=a_3$ 且 $R_1:R_2:R_3=\sin\alpha_1:\sin\alpha_2:\sin\alpha_3$.

□

习 题 8

1 设 a、b、c 是任意三角形的三边,x、y、z 是任意三个实数,求证

$$a^2(x-y)(x-z)+b^2(y-x)(y-z)+c^2(z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

2 **在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,求证**

$$\cot A+\cot B+\cot C\geqslant\frac{\cos A'}{\sin A}+\frac{\cos B'}{\sin B}+\frac{\cos C'}{\sin C}.$$

3 (Garfunkel-Baukoff)

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

4 **(杨学枝)设** $x, y, z, w\in\mathbf{R}^+$, $\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,**则**

$$|x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma+w\sin\theta|\leqslant\sqrt{\frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}}.$$

5 **(唐立华)设** P **是**$\triangle A_1A_2A_3$ **所在平面上的任意一点,则**

$$(a_2^2+a_3^2-a_1^2)R_1^2+(a_3^2+a_1^2-a_2^2)R_2^2+(a_1^2+a_2^2-a_3^2)R_3^2\geqslant\frac{16}{3}\Delta^2,$$

其中 Δ **表示**$\triangle A_1A_2A_3$ **的面积**,a_1、a_2、a_3 **是它的边长**,$PA_i=R_i$, $i=1, 2, 3$.

9 Tsintsifas 的不等式轨迹问题

欧氏几何中下面的结论是熟知的.

如果 A、B、C、D 是一个平面上的任意四点,则 $AD \cdot BC$、$BD \cdot CA$ 和 $CD \cdot AB$ 是某一个三角形的三边长;当 A、B、C、D 四点共圆时,这个三角形是退化的(在这种情况下,我们有著名的 Ptolemy 定理).

这个结论的证明并不难,用复数就更为简单.

事实上,设 A、B、C、D 对应的复数分别为 z_1、z_2、z_3、z_4,用下面的恒等式

$$(z_1-z_4)(z_2-z_3)+(z_2-z_4)(z_3-z_1)+(z_3-z_4)(z_1-z_2)=0,$$

便可立得结论.

Tsintsifas 在 1983 年的 Crux. Math. (9)上提出问题:

问题　设 T 是一个给定的$\triangle ABC$, P 是 T 所在平面上的一点,现记以 $a \cdot PA$、$b \cdot PB$、$c \cdot PC$ 为边的三角形为 T_0(可能是退化的). 现设 R、R_0 分别是 T、T_0 的外接圆半径,求使得不等式

$$PA \cdot PB \cdot PC \leqslant RR_0$$

成立的点 P 的轨迹.

这是一个极富挑战性的问题. 下面的解法 1 由朱庆三同学给出,其关键是应用关于一点 P 的垂足三角形的面积公式.

解法 1　先证引理.

引理　设 P 为$\triangle A_1A_2A_3$ 所在平面上一点,则 P 关于$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂足三角形的有向面积为

$$F=\frac{R^2-\overline{OP}^2}{4R^2}S_{\triangle A_1A_2A_3},$$

其中 O 为$\triangle A_1A_2A_3$ 的外心.

证明　如图 9-1,设垂足三角形为$\triangle P_1P_2P_3$,又设 A_2P 交$\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圆于 B_2,则

$$\angle A_2PA_3=\angle P_2P_1P_3+\angle A_2A_1A_3$$
$$=\angle A_2B_2A_3+\angle B_2A_3P,$$

注意,这里的$\angle$表示有向角. 因此

$$\angle P_2P_1P_3=\angle B_2A_3P.$$

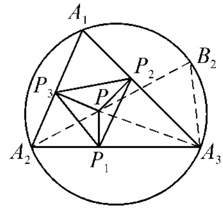


图 9-1

这时

$$F=\frac{1}{2}\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1P_3}\sin\angle P_2P_1P_3$$
$$=\frac{1}{2}\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1P_3}\sin\angle B_2A_3P$$
$$=\frac{1}{2}\overline{PA_3}\sin\alpha_3\ \overline{PA_2}\sin\alpha_2\sin\angle B_2A_3P,$$

又

$$\frac{\sin\angle B_2A_3P}{\sin\angle A_2B_2A_3}=\frac{\overline{PB_2}}{\overline{PA_3}},$$

因此

$$F=\frac{1}{2}\overline{PA_2}\cdot\overline{PB_2}\sin\angle A_2B_2A_3\sin\alpha_2\sin\alpha_3$$
$$=\frac{1}{2}(R^2-\overline{OP}^2)\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3$$
$$=\frac{R^2-\overline{OP}^2}{4R^2}S_{\triangle A_1A_2A_3},$$

引理得证.

下面回到原题.

设 $PA=a'$, $PB=b'$, $PC=c'$, 则

$$R=\frac{abc}{4S_T},\ R_0=\frac{abca'b'c'}{4S_{T_0}},$$

因此
$$RR_0\geqslant PA\cdot PB\cdot PC$$

等价于
$$\frac{(abc)^2}{16S_TS_{T_0}}\geqslant 1,$$

亦即
$$S_{T_0}\leqslant\frac{(abc)^2}{16S_T}.\qquad ①$$

如图 9-2,设 P 在 BC、CA、AB 上的射影分别为 A'、B'、C',则

$$B'C' = PA\sin A = \frac{a \cdot PA}{2R},$$

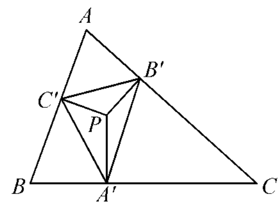


图 9-2

同理

$$C'A' = \frac{b \cdot PB}{2R},\ A'B' = \frac{c \cdot PC}{2R},$$

故$\triangle A'B'C'$与T_0相似且相似比为$2R$. 因此由①知

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{4R^2}S_{T_0} \leqslant \frac{1}{4R^2} \cdot \frac{a^2b^2c^2}{16S_T}, \qquad ②$$

再应用引理得

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{|R^2 - \overline{OP}^2|}{4R^2}S_T. \qquad ③$$

因此由从②、③可得

$$\frac{|R^2 - \overline{OP}^2|}{4R^2}S_T \leqslant \frac{1}{4R^2} \cdot \frac{a^2b^2c^2}{16S_T}.$$

这等价于

$$|R^2 - \overline{OP}^2| \leqslant \frac{a^2b^2c^2}{16S_T^2} = R^2,$$

故

$$|\overline{OP}| \leqslant \sqrt{2}R.$$

这说明P的轨迹是一个以T的外心O为圆心,$\sqrt{2}R$为半径的圆及内部. □

注　上面解法中的引理叫做 Gergonne 公式,它是平面几何中的一个经典结论(见 Roger A. Johnson 的书《现代欧氏几何学》(Modern Geometry)的§198(中译本:单墫译,上海教育出版社,1999). 由这个引理可导出一个有趣的结论:垂足三角形面积为一定的点的轨迹是一个以外接圆的圆心为圆心的圆;在外接圆内的点中,外心的垂足三角形的面积最大.

下面的解法是李先颖同学在向振同学的解法基础上改进得到的,其关键点是巧妙的运用了反演变换.

解法 2　设$\triangle ABC$的外心为O,现以P为反演中心,$\lambda = PA \cdot PB \cdot PC$为反演幂做反演变换.

设A、B、C反演后变为A'、B'、C',则

$$B'C' = BC \cdot \frac{\lambda}{PB \cdot PC} = a \cdot PA.$$

同理

$$C'A'=b\cdot PB,\ A'B'=c\cdot PC.$$

因此$\triangle A'B'C'$即为以$a\cdot PA$、$b\cdot PB$、$c\cdot PC$为边的三角形.

而$\odot(O,R)$反演后的半径为

$$R_0=R\frac{\lambda}{|PO|^2-R^2},$$

因此$PA\cdot PB\cdot PC\leqslant RR_0$等价于

$$\lambda\leqslant R^2\cdot\frac{\lambda}{|PO|^2-R^2},$$

这又等价于

$$|PO|\leqslant\sqrt{2}R.$$

这说明P的轨迹是以O为圆心,半径为$\sqrt{2}R$的圆及内部. □

注 (1) 向振同学的解法选取O为反演中心,因此篇幅较长,李先颖同学却改以P为反演中心,从而大大缩短了解题篇幅.

(2) 由上面的解法看出存在$\triangle ABC$的反演像与点P的垂足三角形相似.

习 题 9

1 设P是$\triangle ABC$所在平面上的一个动点,点P的垂足三角形的面积为F_P,$\triangle ABC$的面积为F,求平面上使得不等式

$$F_P\leqslant\frac{1}{4}F$$

成立的点P的轨迹.

2 (Tsintsifas)设P是$\triangle ABC$的一个内点,$\triangle A'B'C'$是点P的垂足三角形,$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的三边分别是a、b、c和a'、b'、c',求证:

$$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}<2.$$

3 (Tsintsifas和Klamkin)设O、I分别是$\triangle ABC$外心和内心,点P在三边BC、AC、AB上的射影分别为D、E、F,r、r'分别是$\triangle ABC$和$\triangle DEF$的内切圆半径,已知$OP\geqslant OI$,求证:

$$r'\leqslant\frac{r}{2}.$$

10 Shum 的最小圆问题

这里介绍组合几何的一个计数极值问题，它是 George F. Shum 在 Amer. Math. Monthly (1978, 824, E2746)上提出的一个公开问题(提出时无解答).

问题 设 $\tau=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是平面上 n 个不共线的点的集合. 若一个中心在 O，半径为 r 的圆过 τ 中至少三个点，且 $A_kO\leqslant r$ 对所有 $k\in\{1, 2, \cdots, n\}$ 都成立，则称这个圆是点集 τ 的一个最小圆. 对固定的 n，问 τ 的最小圆最多有多少个?

这里我们分别介绍三种解法.

下面的解法 1 属于 Strauss.

解法 1 问题的答案是 $n-2$.

首先注意到出现在最小圆上的点 A_i 一定在 $\{A_i\}$ 的凸包的边界上，因此我们可假定这 n 个点是一个凸 n 边形 P_n 的 n 个顶点.

假设 A_i 和 A_j 在最小圆 C_1 上，而 A_k 和 A_h 在最小圆 C_2 上. 若线段 A_iA_j 和 A_kA_h 相交(有公共内点)，则 $C_1=C_2$. 为了看出这一点，只需考虑凸四边形 $Q=A_iA_kA_jA_h$. 因 Q 在 C_1 内，所以

$$\angle A_kA_jA_h+\angle A_hA_iA_k\leqslant 180^\circ, \qquad ①$$

又因 Q 在 C_2 内，所以

$$\angle A_iA_kA_j+\angle A_jA_hA_i\leqslant 180^\circ, \qquad ②$$

①、②相加便得 Q 的四个内角之和小于等于 360°，因此①、②必须同时取等号，因此 Q 是一个圆的内接四边形.

这样可知决定不同最小圆的三角形的边没有交点(公共内点). 因为 P_n 最多能剖分成 $n-2$ 个没有公共内点且以原顶点为顶点的三角形，因此 P_n 的最小圆最多有 $n-2$ 个.

下面证明 $n-2$ 个最小圆是可以达到的.

我们归纳构造 n 元点集 $\{A_k\}$ 使得它的所有最小圆是过 A_1、A_{k-1}、A_k 的

外接圆$C_k(k=3,\cdots,n)$. 首先选择非共线的三点组A_1、A_2、A_3. 现假设$A_1,\cdots,A_k(k\geqslant 3)$已被选择好,它们的最小圆为$C_3,\cdots,C_k$. 现在以弦$A_1A_k$和圆$C_k$上不包含点$A_{k-1}$的弧所形成的区域$S_k$中取一个内点作为$A_{k+1}$,如图10-1,则圆$C_{k+1}$包含$S_k$在圆$C_k$中的补集$S_k'$,因此包含了所有点$A_1,\cdots,A_{k+1}$. 另一方面,我们有

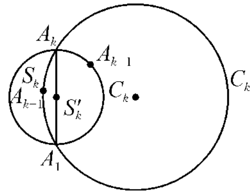


图 10-1

$$S_3\supset S_4\supset\cdots\supset S_k.$$

因此A_k都位于圆C_i内$(i=1,2,\cdots,k)$. 这样我们就达到了目标. 实际上不难看出,没有四个顶点共圆的任何凸n边形都存在$n-2$个最小圆. □

再看朱庆三同学的解法.

解法 2 τ的最小圆至多为$n-2$个.

我们先对n用归纳法证明:存在凸n边形至少有$n-2$个最小圆.

当$n=3$时结论显然成立.

假设结论在$n=k$时成立,即凸k边形$A_1A_2\cdots A_k$有$k-2$个最小圆. 如图10-2,延长A_2A_1与$A_{k-1}A_k$,我们在A_1A_2、A_kA_{k-1}的内侧和A_1A_k的外侧区域中取一点A_{k+1},令A_{k+1}到A_1A_k的距离足够小,使A_{k+1}在原凸k边形的任一最小圆内,且使$\triangle A_1A_{k+1}A_k$的外接圆内部包含了所有$A_i(i=2,\cdots,k-1$,只需使$\angle A_1A_{k+1}A_k$大于所有$\angle A_1A_iA_k$的补角即可). 这时凸$k+1$边形$A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$至少有$k-1$个最小圆.

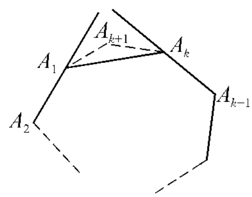


图 10-2

下面再证明τ至多有$n-2$个最小圆.

首先不妨设τ构成一个凸n边形$P_n=A_1A_2\cdots A_n$(否则考虑其凸包集τ',显然最小圆的点必须为凸包上的点),并设其无四点共圆.

下面先证明四条引理.

引理 1 P_n的每条边上有且仅有一个最小圆过此边两端点.

证明 如图10-3,对边A_1A_2,τ中其余点均在A_1A_2同侧. 若$\triangle A_1A_2A_k$的外接圆为最小圆,则A_i在$\odot A_1A_2A_k$内且与A_k在A_1A_2同侧,所以$\angle A_1A_kA_2$为所有$\angle A_1A_iA_2(i=3,\cdots,n)$中的最小者,因此过$A_1A_2$只能有一个最小圆,引理1得证.

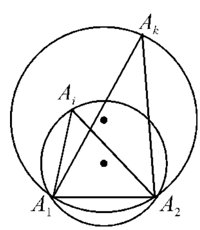


图 10-3

引理 2 对 P_n 的每一条对角线，或者有两个最小圆或无最小圆过其两端点.

证明 如图 10－4，对于对角线 A_1A_k，在其一侧所有以 P_n 的顶点为顶点的角中，设 $\angle A_1A_iA_k$ 最小，在另一侧 $\angle A_1A_jA_k$ 最小. 若 $\angle A_1A_iA_k + \angle A_1A_jA_k < \pi$，则无覆盖圆过 A_1A_k；若 $\angle A_1A_iA_k + \angle A_1A_jA_k > \pi$，则 $\triangle A_1A_iA_k$ 和 $\triangle A_1A_jA_k$ 的外接圆均为最小圆，引理 2 得证.

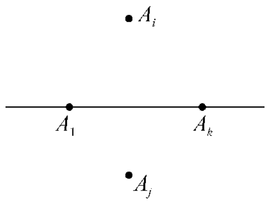


图 10－4

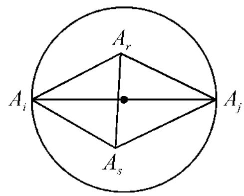


图 10－5

引理 3 若有最小圆过对角线 A_1A_k 的两端，则称 A_1A_k 为"好对角线". P_n 的"好对角线"不在非端点处相交.

证明 如图 10－5，假设"好对角线"A_iA_j、A_rA_s 相交于非端点处.

因 A_r、A_s 均在过 A_iA_j 的最小圆内，注意到这时 A_i、A_r、A_s、A_j 不共圆，因此

$$\angle A_iA_rA_j + \angle A_iA_sA_j > \pi,$$

同理

$$\angle A_rA_iA_s + \angle A_rA_jA_s > \pi,$$

相加即得凸四边形的内角和大于 2π，矛盾.

引理 4 P_n 的"好对角线"至多有 $n-3$ 条.

证明 设有 k 条"好对角线"，则将 P_n 分成 $k+1$ 个凸多边形.

因"好对角线"不相交于 P_n 内部，故这 $k+1$ 部分的内角和等于原 n 边形的内角和，而每部分内角之和大于等于 π，但 P_n 的内角和为 $(n-2)\pi$，故有

$$(k+1)\pi \leqslant (n-2)\pi,$$

因此得 $k \leqslant n-3$.

下再证 P_n 的最小圆的个数不超过 $n-2$.

因每个最小圆恰有三条弦以凸 n 边形 P_n 的顶点为端点，且每条弦或为 P_n 的边或为"好对角线"，故

$$\text{最小圆个数} \leqslant \frac{n+2(n-3)}{3} = n-2.$$

最后若 P_n 中有四点共圆,则有两条“好对角线”交于内部. 现抹去其中一条“好对角线”,剩下的“好对角线”的条数小于 $n-2$,这时同样可推得最小圆的个数小于等于 $n-2$. $\square$

下面的解法 3 是由龙云同学提供的.

解法 3 τ 的最小圆最多有 $n-2$ 个.

下面用归纳法来证明.

(i) $n=3$ 时,$\tau'=\{A_1, A_2, A_3\}$ 的最小圆恰有一个.

(ii) 假设 $n=k$ 时结论成立. 设 $\tau''=\{A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}\}$,在 τ'' 的所有最小圆中,不妨设 $\odot O$ 是半径最大的一个,且设 τ'' 中的三个点 A_1、A_2、A_3 在 $\odot O$ 上,τ'' 中的其余点都在 $\odot O$ 内或 $\odot O$ 上.

不妨设 $\triangle A_1A_2A_3$ 中 $\angle A_1$ 最大,则 $\angle A_2$、$\angle A_3$ 均为锐角. 下面证明:除 $\odot O$ 外,不存在过 A_1 的其他最小圆. 否则若 $\odot K$ 过 A_1,因最小圆覆盖住了所有的点,所以 A_2、A_3 在 $\odot K$ 上或 $\odot K$ 内,且至少有一个在 $\odot K$ 内,不妨设 A_2 在 $\odot K$ 内. 延长 A_2A_3 交 $\odot K$ 于 B、C,如图 10-6,则

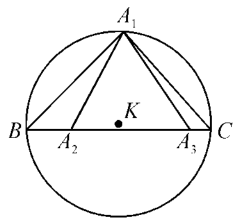


图 10-6

$$\angle BA_2A_1 > 90^\circ.$$

因此 $A_1B > A_1A_2$ 且有 $\angle A_1CA_3 \leqslant \angle A_1A_3A_2$,所以有

$$\odot K \text{ 的半径} = \frac{A_1B}{2\sin\angle A_1CA_2} > \frac{A_1A_2}{2\sin\angle A_1A_3A_2} = \odot O \text{ 的半径},$$

矛盾! 因此过 A_1 的仅有一个最小圆.

因此 τ''中不过 A_1 的最小圆均为$\{A_2, \cdots, A_{k+1}\}$的最小圆,由归纳假设这样的圆的个数至多为 $k-2$ 个,故 τ''的最小圆至多为 $k-1$ 个.

这就用归纳法证明了 τ 的最小圆个数小于等于 $n-2$ 个.

再证对任意的 $n\geqslant 3$, $n\in\mathbf{N}$,存在点集 $\tau=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$,其中 $A_1A_2\cdots A_n$为凸 n 边形,使 τ 的最小圆个数恰为 $n-2$ 个,下面也用归纳法来证明这一点.

(i) 当 $n=3$ 时,取一个三角形的三个顶点便可.

(ii) 假设 $n=k$ 时,存在凸k边形$A_1A_2\cdots A_k$,其最小圆恰有 $k-2$ 个. 当 $n=k+1$ 时,如图 10-7,设 $A_1A_2\cdots A_k$ 为归纳假设中的凸 k 边形,延长 A_2A_1、$A_{k-1}A_k$ 交于 B. 设 $\angle A_1A_iA_k (i=2, 3, \cdots, k-1)$ 中最小的为 α,则在 $\triangle BA_1A_k$ 中取点 A_{k+1} 使得

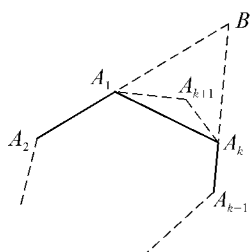


图 10-7

$\angle A_1A_{k+1}A_k > 180^\circ - \alpha$，这时 $A_1A_2\cdots A_k$ 的 $k-2$ 个最小圆仍为 $A_1A_2\cdots A_{k+1}$ 的最小圆，且 $\triangle A_{k+1}A_1A_k$ 的外接圆为新的最小圆，故 $A_1A_2\cdots A_{k+1}$ 中有 $k-1$ 个最小圆.

综上，问题全部解答完成. □

注　上面的三个解法各有特色，都是好的解答，龙云同学提供的解法更是集中了前两种解法的优点，清晰简明，给人以启迪.

习　题　10

1 求最大正整数 n，使平面内存在 n 个凸多边形（包括三角形），其中每两个都有一条公共边但没有公共的内部.

2 （陈计）平面五点间的最小距离为 1，若最大距离小于 $2\sin 70^\circ$，证明或否定：这五点是凸五边形的顶点.

3 （熊斌）已知一个凸集被两个单位圆覆盖，求证：它的面积不超过 $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2\sqrt{2}$.

11 四面体中的不等式

三角形是平面上最简单的多边形,四面体是三维空间中最简单的多面体,因此四面体可看作是三角形在空间的推广. 三角形中的许多不等式都可推广到四面体中. 关于四面体的几何不等式和极值问题已有丰富的结果,这里介绍几个典型例题.

例 1 设 d 是一个四面体的三组相对棱距离的最小值,h 是四面体的最小高,求证:

$$2d > h.$$

(第 24 届苏联奥林匹克试题)

本例是一个典型的立体几何问题,解决的关键是寻找或者确定一个数量关系比较集中的平面,从而将问题化归为平面问题来处理.

证明 如图 11-1. 不妨设 $AH = h$, AC 与 BD 的距离为 d. 现作 AF、CN 分别垂直 BD 于 F、N,显然

$$HF \parallel CN,$$

于是可在平面 BCD 内作矩形 $FECN$.

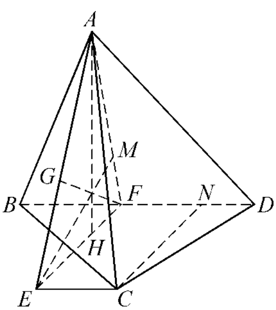


图 11-1

现考虑$\triangle AEF$, AH 为其边 EF 上的高,边 AE 上的高 $FG = d$,高 EM 为C 到面ABD 的距离,因此 $EM \geqslant AH$.

这样一来,题中的数量关系都集中到了平面 AEF 内,问题就转化为一个平面几何问题. 即在$\triangle AEF$ 中求证$\frac{AH}{FG} < 2$.

这是不难的,事实上由 $AH \leqslant EM$ 可知

$$AF \leqslant EF.$$

再注意到 $\triangle AEH \backsim \triangle FEG$,便有

$$\frac{h}{d}=\frac{AH}{FG}=\frac{AE}{EF}<\frac{(AF+EF)}{EF}\leqslant 2. \quad \square$$

注 本例的结果实际上给出了四面体宽度的最好的下界估计(常数 2 是最佳的),这个结果被袁淑峰和笔者推广到了一般的 n 维单形. 一般 n 维单形宽度的严格上界估计已由杨路、张景中两位先生得到,对于四面体,这个结果就是

$$d\leqslant\frac{9\sqrt{6}}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i^2}},$$

等号成立当且仅当这个四面体为正四面体,由此还可推出"一切维数相同体积相等的四面体中,正四面体具有最大的宽度". 有兴趣的读者可参看论文"杨路,张景中. 度量方程用于 Sallee 猜想. 数学学报,1983,26(4):488~493".

下面例题的解法主要用到了四面体中的一些度量公式.

例 2 设四面体 $ABCD$ 的内切球半径为 r,一组对棱 $AB=a$, $CD=b$,求证:

$$r<\frac{ab}{2(a+b)}.$$

(第 22 届苏联奥林匹克试题)

证明 设四面体的体积为 V,表面积为 S,则熟知

$$r=\frac{3V}{S}, \tag{①}$$

又由熟知的 Steiner 定理

$$V=\frac{1}{6}abd\sin\theta, \tag{②}$$

其中 d 为对棱 AB 与 CD 之间的距离,θ 为它们所成的角.

由①、②有

$$r\leqslant\frac{1}{2}\frac{abd}{S}. \tag{③}$$

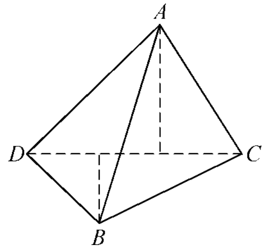


图 11-2

另一方面,如图 11-2,由四面体的棱 AB 之端点到棱 CD 的距离均不小于 d,且其中必有一个大于 d,这样一来

$$S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BDC}>bd,$$

同理

$$S_{\triangle DAB}+S_{\triangle CAB}>ad.$$

相加即得

$$S>(a+b)d. \tag{④}$$

由③、④可得

$$r<\frac{abd}{2(a+b)d}=\frac{ab}{2(a+b)}. \quad \square$$

下面的例题难度较大.

例 3 设 r 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切球半径，r_1、r_2、r_3、r_4 分别是四个面 $\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_1A_3A_4$、$\triangle A_1A_2A_4$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆半径，求证

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\leqslant\frac{2}{r^2},$$

等号成立当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 是正四面体.

证明　先证一个简单的引理.

引理　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，记 S_1 为 $\triangle A_2A_3A_4$ 的面积，等等. 记 $\widetilde{a_{12}}$ 表示棱 A_3A_4 的长，等等. 则对任意的 $1\leqslant i<j\leqslant 4$ 有

$$\frac{\widetilde{a_{ij}}}{S_iS_j\sin\theta_{ij}}=\frac{2}{3V},$$

其中 θ_{ij} 为顶点 A_i 所对的面与顶点 A_j 所对的面所夹的二面角.

证明　只需证明

$$\frac{\widetilde{a_{12}}}{S_1S_2\sin\theta_{12}}=\frac{2}{3V}.$$

事实上，如图 11－3，作 $A_1H\perp$ 面 $A_2A_3A_4$，垂足为 H. 作 $HD\perp A_3A_4$，则

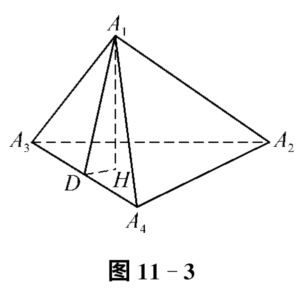


图 11－3

$$\begin{aligned}3V&=A_1H\cdot S_1\\&=S_1\cdot A_1D\cdot\sin\theta_{12}\\&=S_1\,\frac{A_1D\cdot A_3A_4}{\widetilde{a_{12}}}\sin\theta_{12}\\&=\frac{2S_1S_2\sin\theta_{12}}{\widetilde{a_{12}}}.\end{aligned}$$

引理得证.

下证原题.

设 $A_1A_2A_3A_4$ 的表面积为 S，由引理和公式 $3V=rS$ 有

$$\widetilde{a_{ij}}=\frac{2}{rS}S_iS_j\sin\theta_{ij},$$

于是

$$\sum_{j\neq i}\widetilde{a_{ij}}=\left(\frac{2}{rS}\right)S_i\sum_{j\neq i}S_j\sin\theta_{ij}. \qquad ①$$

又由四面体的射影公式

$$S_i=\sum_{j\neq i}S_j\cos\theta_{ij},$$

并应用 Cauchy 公式有

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq i}S_j\sin\theta_{ij}&=\sum_{j\neq i}\sqrt{(S_j+S_j\cos\theta_{ij})(S_j-S_j\cos\theta_{ij})}\\&\leqslant\Big(\sum_{j\neq i}S_j+S_j\cos\theta_{ij}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j\neq i}S_j-S_j\cos\theta_{ij}\Big)^{\frac{1}{2}}\\&=S^{\frac{1}{2}}(S-2S_i)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \qquad ②$$

注意到

$$\frac{2S_i}{\sum_{j\neq i}\widetilde{a_{ij}}}=r_i, \qquad ③$$

由①、②、③可得

$$\frac{1}{r_i}\leqslant\left(\frac{1}{rS}\right)\cdot S^{\frac{1}{2}}(S-2S_i)^{\frac{1}{2}},$$

由此得

$$\frac{r}{r_i}\leqslant\left(\frac{S-2S_i}{S}\right)^{\frac{1}{2}},$$

故有

$$\sum_{i=1}\frac{r^2}{r_i^2}\leqslant\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{S-2S_i}{S}\right)=2,$$

此即

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\leqslant\frac{2}{r^2}. \qquad \square$$

注 问题产生的背景:关于三角形的面积有著名的 Pölya 不等式

$$S\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}.$$

在上世纪五十年代末到六十年代初,几位作者同时独立的将 Pölya 不等式推广到了 n 维单形,现称为单形的体积优化定理. 特别地,对于四面体有

$$V\leqslant\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{7}{4}}}\left(\prod_{k=1}^{4}S_k\right)^{\frac{3}{8}}.$$

一个自然的平行问题是:四面体的内切球半径和各个面的内切圆的半径是否有类似的优化不等式?

为了回答这个问题,笔者在 1992 年和加拿大数学家 Klamkin 的一次私人通信中介绍了上例中的不等式及推论 $r_1r_2r_3r_4\geqslant 4r^4$. 随后这个结果被 Klamkin 推荐发表在 Crux. Math.(Problem. 1990,1994)上. 这个结果不久便被唐立华和笔者推广到了 n 维单形,发表在 Geom. Dedicata,1996:61 上. 上面提供的证明和 Crux. Math. 上发表的证明有些不同,完全适用于 n 维空间.

值得指出,关于单形体积优化定理一类更深刻的推广被张景中和杨路两位先生得到,这已成为距离几何和几何不等式研究中被广泛引用的经典结果. 这可参考论文:张景中,杨路. 关于质点组的一类几何不等式. 中国科学技术大学学报,1981,11(2):1~8.

关于面积优化定理的另一个平行的自然问题是"四面体的外接球半径与各个面的外接圆半径有何关系?"下例就是我们的一个回答.

例 4 设 R 是一个含外心的四面体的外接球半径,R_1、R_2、R_3、R_4 分别是$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_1A_3A_4$、$\triangle A_1A_2A_4$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圆半径,求证

$$1\leqslant\frac{R}{\max(R_1,R_2,R_3,R_4)}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{4}. \qquad ①$$

证明 记 $\Sigma=A_1A_2A_3A_4$ 并设 O 是四面体 Σ 的外心且 O 在体内. 显见 O 在某个面上的射影 O_i 一定是面三角形的外心. 由 $A_iO_i\leqslant A_iO$,$i=1,2,3,4$ 便得 $R_i\leqslant R$,且等号可以成立,① 左边的不等式得证.

现以 O 为中心作一个包含在 Σ 内的最大球,设这个最大球的半径为 d,这个球至少与 Σ 的某一个面相切,不妨设与面 $A_2A_3A_4$ 相切,则切点一定是 $A_2A_3A_4$ 的外心,因此

$$R_1^2=R^2-d^2. \qquad ②$$

因包含于 Σ 中的球以内切球半径为最大，由著名不等式 $r\leqslant\frac{R}{3}$ 可得

$$d\leqslant\frac{R}{3}. \qquad ③$$

由①、②、③便得

$$R^2-R_1^2\leqslant\frac{R^2}{9},$$

由此得

$$R\leqslant\frac{3}{\sqrt{8}}R_1\leqslant\frac{3}{\sqrt{8}}\max(R_1, R_2, R_3, R_4),$$

右边的不等式得证. □

例 5 设 G 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心，G 到棱 A_iA_j 的距离为 h_{ij}，G 到 A_i 的距离为 D_i，求证：

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}h_{ij}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{i=1}^{4}D_i. \qquad ①$$

证明 一个基本的想法是将 $\triangle A_iA_jG$ 中的高 h_{ij} 转化为这个三角形中相应的内角平分线来处理. 为此先证引理.

引理 设 AT 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线，则

$$AT^2\leqslant\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|).$$

证明 由角平分线公式有

$$AT=\frac{bc}{2(b+c)}\cos\frac{A}{2}\leqslant\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}.$$

因此

$$AT^2\leqslant bc\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}bc(1+\cos A)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|).$$

引理得证.

下面回证原题.

为简单起见，记 $\overrightarrow{GA_i}=\overrightarrow{A_i}$，$i=1, 2, 3, 4$，则

$$\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{A_i}=\vec{0},$$

因此

$$(\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{A_i})^2=0,$$

也即
$$\sum_{i=1}^{4} D_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \overrightarrow{A_i}\cdot\overrightarrow{A_j} = 0. \qquad ②$$

另一方面,由引理知
$$h_{ij}^2 \leqslant \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_i}\cdot\overrightarrow{A_j} + |\overrightarrow{A_i}|\cdot|\overrightarrow{A_j}|),$$
因此
$$\begin{aligned}(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} h_{ij})^2 &\leqslant 6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} h_{ij}^2\\ &\leqslant 3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(\overrightarrow{A_i}\cdot\overrightarrow{A_j} + |\overrightarrow{A_i}|\cdot|\overrightarrow{A_j}|)\\ &= 3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\overrightarrow{A_i}\cdot\overrightarrow{A_j} + 3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} D_i\cdot D_j, \qquad ③\end{aligned}$$
将②代入③可得
$$\begin{aligned}(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} h_{ij})^2 &\leqslant -\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{4} D_i^2 + 3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} D_i\cdot D_j\\ &= \frac{3}{2}(-\sum_{i=1}^{4} D_i^2 + [(\sum_{i=1}^{4} D_i)^2 - \sum_{i=1}^{4} D_i^2])\\ &= \frac{3}{2}[(\sum_{i=1}^{4} D_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{4} D_i^2]\\ &\leqslant \frac{3}{2}\left[(\sum_{i=1}^{4} D_i)^2 - \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{4} D_i)^2\right]\\ &= \frac{3}{4}(\sum_{i=1}^{4} D_i)^2, \qquad ④\end{aligned}$$
上面的最后一个不等式用到了 Cauchy 不等式.

由④便立得所证的不等式. □

注　本例是陈计先生一个猜想的特例. 陈计先生的猜想是:设 P 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内一点,P 到棱 A_iA_j 的距离为 h_{ij},P 到顶点 A_i 的距离为 R_i,则
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} h_{ij} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{i=1}^{4} R_i.$$
据笔者所知,这个猜想还没有解决.

习　题　11

1 设 P、Q 是正四面体 $ABCD$ 内的二点,求证:$\angle PAQ < 60°$.

2 证明如果四面体相对棱间的距离分别为 d_1、d_2、d_3，则四面体的体积 $V \geqslant \frac{1}{3} d_1 d_2 d_3$.（第 48 届莫斯科竞赛题）

3 半径为 1 的球面上的两点用球内长度小于 2 的曲线段连接起来. 证明这条曲线段一定落在这个球的某个半球内.（第 3 届美国数学奥林匹克试题）

4 设 I 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内心，并记$\triangle A_iIA_j$ 的面积为 I_{ij}，A_i所对的面三角形的面积为 S_i，试证

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} I_{ij} \leqslant \frac{\sqrt{6}}{4} \sum_{i=1}^{4} S_i .$$

5 设 R、r 分别是一个四面体的外接球半径和内切球半径，O、I 分别是这两个球的中心. 求证：$R^2 \geqslant 9r^2 + OI^2$.

习　题　1

1. 延长 BA 到 C' 使得 $AC' = AC$，连接 $A'C'$. 显然 $A'B + A'C' > BC' = BA + AC$. 再由 $\triangle AA'C' \cong \triangle AA'C$ 便知 $A'C' = A'C$，代入便得.

2. 在边 BC、CA、AB 上分别取点 A_1 和 A_2、B_1 和 B_2、C_1 和 C_2，使得 B_1C_2、C_1A_2、A_1B_2 过点 O，且 $B_1C_2 \parallel BC$，$C_1A_2 \parallel CA$，$A_1B_2 \parallel AB$. 在 $\triangle A_1A_2O$、$\triangle B_1B_2O$、$\triangle C_1C_2O$ 中最大的边分别为 A_1A_2、B_1O、C_2O. 因此 $OP < A_1A_2$，$OQ < B_1O$，$OR < C_2O$，从而 $OP + OQ + OR < A_1A_2 + B_1O + C_2O = A_1A_2 + CA_2 + BA_1 = BC$.

3. 提示：不妨设 $A \leqslant 90°$. 将 $\triangle ABC$ 以边 AC 为轴翻转一次，得 $\triangle AB'C$；再将 $\triangle AB'C$ 以边 AB' 为轴翻转一次，得 $\triangle AB'C'$. 同时 $\triangle DEF$ 依次变为 $\triangle D'EF'$，$\triangle D''E''F'$，则 $DE + EF + FD = DE + EF' + F'D'' \geqslant DD''$. 再证 $DD'' \geqslant \frac{2\Delta}{R}$ 便可.

4. 这里仅就 E、F 分别在边 AC、AB 上的情况给出提示，在其他情况下类似可得. 不妨设 $AC \geqslant AB$，在 AC 上取点 D 使得 $AD = AB$，又在 AB（或 AB 的延长线）上取点 G，使得 $AG = AE$，则 $|AB - AC| + |AE - AF| = |CD| + |FG| \geqslant |CG - DG| + |CF - CG| \geqslant |CG - DG + CF - CG| = |CF - DG| = |BE - CF|$.

5. 作射线 PX、PY 使得 $\angle XPY = \frac{\pi}{3}$. B_1、B_3、B_5 和 B_2、B_4、B_6 分别位于 PX、PY 上且使得 $PB_i = OA_i$，这样 $B_iB_{i+1} = A_iA_{i+1}$. 因为 $PB_1 > PB_3 > PB_5$，$PB_6 < PB_4 < PB_2$，所以线段 B_1B_6 必与线段 B_2B_3、B_3B_4、B_4B_5 分别交于某三点 C_1、C_2、C_3. 因为 $B_1B_2 < B_1C_1 + C_1B_2$，$B_3C_2 < B_3C_1 + C_1C_2$，$C_2B_4 < C_2C_3 + C_3B_4$，$B_5B_6 < B_5C_3 + C_3B_6$，相加便得 $B_1B_2 + B_3B_4 + B_5B_6 < B_2B_3 + B_4B_5 + B_6B_1$.

习 题 2

1. 记 $AC=a,\ CE=b,\ AE=c$，对四边形 $ACEF$ 运用 Ptolemy 不等式得 $AC\cdot EF+CE\cdot AF\geqslant AE\cdot CF$. 因为 $EF=AF$，所以$\dfrac{FA}{FC}\geqslant\dfrac{c}{a+b}$. 同理$\dfrac{DE}{DA}\geqslant\dfrac{b}{c+a},\ \dfrac{BC}{BE}\geqslant\dfrac{a}{b+c}$. 故$\dfrac{BC}{BE}+\dfrac{DE}{DA}+\dfrac{FA}{FC}\geqslant\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$. 等号成立的条件为 $ABCDEF$ 是圆内接六边形且 $a=b=c$.

2. 设正方形为 $ABDE$，则 $OM=\dfrac{CE}{2},\ ON=\dfrac{CD}{2}$，所以 $OM+ON=\dfrac{1}{2}(CD+CE)$. 设 $AB=c$，则 $BD=AE=c,\ AD=BE=\sqrt{2}c$. 对四边形 $ACBD$ 和 $ACBE$ 分别应用广义 Ptolemy 定理可得 $OM+ON=\dfrac{1}{2}(CD+CE)\leqslant\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}(a+b)$. 所以 $OM+ON$ 的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}(a+b)$.

3. 连 BD、AE，因为 $AB=BC=CD,\ \angle BCD=60^\circ$，所以 $BD=AB$. 同理 $AE=ED$，所以 A、D 关于直线 BE 对称. 以直线 BE 为对称轴，作 C 和 F 关于该直线的轴对称点 C' 和 F'. 于是 $\triangle ABC'$ 和 $\triangle DEF'$ 都是正三角形；G 和 H 分别在这两个三角形的外接圆上. 分别对四边形 $AGBC'$ 和 $DHEF'$ 应用 Ptolemy 定理并注意到线段 CF 与 $C'F'$ 关于直线 BE 对称即可得所证结论.

4. 作$\triangle AGH$ 的外接圆 O_1，截 AD 于点 Q. 易证 $\triangle BCD\backsim\triangle APE$，故$\dfrac{DC}{PE}=\dfrac{BC}{AP}=\dfrac{BD}{AE}$，即 $DC=\dfrac{PE}{AP}\cdot BC=\dfrac{AK}{AP}\cdot BC,\ BD=\dfrac{AE}{AP}\cdot BC$. 对四边形 $ABDC$ 应用 Ptolemy 定理，可得 $AD\cdot BC=BD\cdot AC+DC\cdot AB=\dfrac{AE}{AP}\cdot BC\cdot AC+\dfrac{AK}{AP}\cdot BC\cdot AB$，故 $AP\cdot AD=AE\cdot AC+AK\cdot AB\cdots$①. 同理应用 Ptolemy 定理，可得 $AP\cdot AQ=AE\cdot AH+AK\cdot AG$. 于是 $AP^2+PG\cdot PH=AP^2+AP\cdot PQ=AE\cdot AH+AK\cdot AG$，从而 $AP^2=AE\cdot AH+AK\cdot AG-PG\cdot PH\cdots$②. ①－② 可得 $AP(AD-AP)=AE(AC-AH)+AK(AB-AG)+PG\cdot PH$，即 $PA\cdot PD=PK\cdot PI+PE\cdot PF+PG\cdot PH$. 又 $PK\cdot PI\leqslant\left(\dfrac{PK+PI}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}KI^2,\ PE\cdot PF\leqslant\dfrac{1}{4}EF^2,\ PG\cdot PH\leqslant\dfrac{1}{4}GH^2$，故 $EF^2+KI^2+GH^2\geqslant 4PA\cdot PD$，等号成立当且仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的重心.

5. 对四边形 ACA_1B 应用 Ptolemy 定理，可得 $AA_1 \cdot BC = AB \cdot A_1C + AC \cdot A_1B$. 令 $A_1B = A_1C = x$，注意到 $2x = A_1B + A_1C > BC$，有 $2AA_1 = 2\frac{ABx + ACx}{BC} = (AB + AC) \cdot \frac{2x}{BC} > AB + AC$，即 $AA_1 > \frac{1}{2}(AB + AC)$. 同理可得 $BB_1 > \frac{1}{2}(BA + BC)$，$CC_1 > \frac{1}{2}(CA + CB)$，三式相加即得所证结果.

习 题 3

1. 利用余弦定理，知 $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB\cos A = CD^2 + BC^2 - 2CD \cdot BC\cos C$. 由条件知 $60° \leqslant A \leqslant 120°$，$60° \leqslant C \leqslant 120°$，故 $-\frac{1}{2} \leqslant \cos A \leqslant \frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2} \leqslant \cos C \leqslant \frac{1}{2}$，于是 $3BD^2 - (AB^2 + AD^2 + AB \cdot AD) = 2(AD^2 + AB^2) - AD \cdot AB(1 + 6\cos A) \geqslant 2(AD^2 + AB^2) - 4AD \cdot AB = 2(AB - AD)^2 \geqslant 0$，即 $\frac{1}{3}(AB^2 + AD^2 + AB \cdot AD) \leqslant BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2CD \cdot BC\cos C \leqslant CD^2 + BC^2 + CD \cdot BC$. 再由 $ABCD$ 为圆外切四边形可知 $AD + BC = AB + CD$，所以 $|AB - AD| = |CD - BC|$. 结合上式就有 $\frac{1}{3}|AB^3 - AD^3| \leqslant |BC^3 - CD^3|$，等号成立的条件为 $\cos A = \frac{1}{2}$，$AB = AD$，$\cos C = -\frac{1}{2}$ 或者 $|AB - AD| = |CD - BC| = 0$，所以等号成立的条件是 $AB = AD$ 或者 $CD = BC$. 同理可证另一个不等式成立.

2. 设这个凸四边形为 $ABCD$，其外接圆圆心为 O，半径为 R，E 为 AC、BD 的交点，M、N、P、Q 分别是 E 到边 AB、BC、CD、DA 的投影，作 $EF \perp MN$，F 为垂足. 由于 B、M、E、N 四点共圆，且在以 BE 为直径的圆上，所以 $MN = BE \cdot \sin B = \frac{BE \cdot AC}{2R}$，而 $EF = EM \cdot \sin\angle EMN = \frac{AE \cdot BE \cdot \sin\angle AEB}{AB} \cdot \sin\angle CBE$，结合 $BE \cdot \sin\angle EBC = CE \cdot \sin\angle BCE = \frac{CE \cdot AB}{2R}$，又由于 $AE \cdot EC = R^2 - OE^2$. 于是 $EF = \frac{R^2 - OE^2}{2R} \cdot \sin\angle AEB$，所以 $S_{\triangle MEN} = \frac{1}{2}MN \cdot EF = \frac{(R^2 - OE^2) \cdot AC \cdot BE \cdot \sin\angle AEB}{8R^2}$. 类似地计算 $S_{\triangle MEP}$、$S_{\triangle PEQ}$、$S_{\triangle QEM}$，求和可得 $S_{MNPQ} = \frac{(R^2 - OE^2) \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle AEB}{4R^2} = \frac{(R^2 - OE^2) \cdot S}{2R^2} \leqslant \frac{S}{2}$.

3. 在边长给定的四边形中，以内接于圆时其面积为最大. 因此，只需证两个凸四边形为圆内接四边形的情况. 这时 $S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$，$S'$ 与之类似，其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)=(a+c)=(b+d)$，$s'=\frac{1}{2}(a'+b'+c'+d')=(a'+c')=(b'+d')$. 利用算术几何平均值不等式有 $aa'+bb'+cc'+dd'=(s-a)(s'-a')+(s-b)(s'-b')+(s-c)(s'-c')+(s-d)(s'-d')\geqslant 4[(s-a)(s'-a')(s-b)(s'-b')(s-c)(s'-c')(s-d)(s'-d')]^{\frac{1}{4}}=4\sqrt{SS'}$.

4. 略.

5. 设 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$. 易得 $a=\rho_a\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)$，即 $\frac{a}{\rho_a}\geqslant 2\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}$. 同理 $\frac{b}{\rho_b}\geqslant 2\sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$，$\frac{c}{\rho_c}\geqslant 2\sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{D}{2}}$，$\frac{d}{\rho_d}\geqslant 2\sqrt{\tan\frac{D}{2}\tan\frac{A}{2}}$. 因为 $A+C=B+D=\pi$，所以 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{D}{2}=1$，因此 $\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_c}\geqslant\frac{2}{a}\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}+\frac{2}{c}\sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{D}{2}}\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{ac}\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{D}{2}}}=\frac{4}{\sqrt{ac}}$，同理 $\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_d}\geqslant\frac{4}{\sqrt{bd}}$，所以 $\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}+\frac{1}{\rho_d}\geqslant\frac{4}{\sqrt{ac}}+\frac{4}{\sqrt{bd}}\geqslant\frac{8}{\sqrt[4]{abcd}}$. 等号成立当且仅当 $A=B=C=D$ 并且 $a=b=c=d$.

习 题 4

1. 不妨设 $\angle C>90^\circ$，于是 $\min\{\angle A,\angle B\}<45^\circ$. 不妨设 $\angle A<45^\circ$. 以 AB 为直径，在顶点 C 的同侧作半圆 O，则 C 位于半圆 O 内. 作射线 AT 使得 $\angle BAT=45^\circ$. 再作射线 OE 使得 $\angle BOE=45^\circ$，且与半圆相交于点 E. 过点 E 作半圆的切线，分别交 AB 的延长线和 AT 于点 D 和 F，则等腰直角三角形 ADF 覆盖 $\triangle ABC$，并且 $AD=AO+OD=\frac{1}{2}AB+\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\cdot AB<\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})2R=1+\sqrt{2}$.

2. 提示：仿例 4(2)的做法.

3. 略.

4. 提示:只需证明边长大于$\frac{\sqrt{2}}{3}$的正三角形放入边长为 1 的正方形后,一定包含该正方形的中心.

5. 设平面内任意五点为 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5,其中任意 3 点不共线. (1)若5 点的凸包不是凸五边形,那么其中必有一点落在某个三角形内,这时易证 $\mu_5 \geqslant 3$. (2)5 点的凸包为凸五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$. 作$MN // A_3A_4$ 分别交 A_1A_3、A_1A_4 于M和N,且使得$\frac{A_1M}{MA_3}=\frac{A_1N}{NA_4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. (i)$A_2$、$A_5$ 中有一点,比如A_2 与A_3、A_4 在直线MN 的同侧时有$\mu_5 \geqslant \frac{S_{\triangle A_1A_3A_4}}{S_{\triangle A_2A_3A_4}} \geqslant \frac{A_1A_3}{MA_3}=1+\frac{A_1M}{MA_3}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. (ii)$A_2$、$A_5$ 与 A_1 均在直线MN 的同侧时,设 A_2A_5 交 A_1A_3 于 O,则 $A_1O \leqslant A_1M$, 于是 $\mu_5 \geqslant \frac{S_{\triangle A_2A_3A_5}}{S_{\triangle A_1A_2A_5}}=\frac{OA_3}{OA_1} \geqslant \frac{MA_3}{MA_1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 注意到 $3>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,所以总有 $\mu_5 \geqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 当 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 为边长为 a 的正五边形的 5 个顶点时, 有 $\mu_5=\frac{S_{\triangle A_1A_3A_4}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=\frac{\frac{1}{2}A_1A_3 \cdot A_1A_4 \sin 36^\circ}{\frac{1}{2}A_1A_2 \cdot A_1A_3 \sin 36^\circ}=\frac{A_1A_4}{A_1A_2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 综上可得 μ_5 的最小值为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

习 题 5

1. 提示:问题转化为证明$AA_1+BB_1+CC_1 \geqslant \frac{4}{3}(m_a+m_b+m_c)$,其中 m_a 为边 a 上的中线, 等等. 设 $AA_1=M_a$, 等等. 由相交弦定理可得 $m_a \cdot (M_a-m_a)=\left(\frac{a}{2}\right)^2$, 将其与等式 $4m_a^2=8k^2-3a^2$ 联立消去 a 可得 $M_a=\frac{2k}{3}\left(\frac{k}{m_a}+\frac{m_a}{k}\right) \geqslant \frac{4}{3}k$,等等,其中 $k^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)(k>0)$.

2. 提示:设凸四边形$ABCD$ 内的 4 个标定点为 M、N、P、Q,只需考虑 $MNPQ$ 为凸四边形的情形. 对 $ABCD$ 周界上任意一点 E,令 $f(E)=EA+EB+EC+ED$, $g(E)=EM+EN+EP+EQ$,于是只要证明周界上存在一点 E 使 $f(E)>g(E)$. 作直线 MP,交四边形 $ABCD$ 的周界于 F、G,于是有 $f(F)+f(G)>g(F)+g(G)$. 这表明 $f(F)>g(F)$ 和 $f(G)>g(G)$ 中至少有一个成立.

3. 略.

4. 不妨设 $AE \leqslant AC \leqslant CE$,**则由** Ptolemy **定理有** $AD \cdot CE \leqslant AC \cdot DE + AE \cdot CD \leqslant a(AC + AE) \leqslant 2a \cdot CE$,**由此** $AD \leqslant 2a$.

5. 提示:需要用到如下三角形不等式 $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{16}$. $\cos(\beta+\gamma)\cos\alpha + \cos(\gamma+\alpha)\cos\beta + \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{8}$, $\tan\alpha \cdot \tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha \leqslant 3(7-4\sqrt{3})$,**其中** $A = 4\alpha$, $B = 4\beta$, $C = 4\gamma$.

习　题　6

1. 提示:构造复数恒等式或用 Ptolemy **定理.**

2. 不失一般性,可设 $A=(0, h)$, $B=(p, 0)$, $C=(q, 0)$ $(h>0, p<q)$,**则** $E=(-h, h-p)$, $G=(h, h+q)$,**直线** EG **的方程为** $y=h+\frac{q-p}{2}+\frac{p+q}{2h}x$. **令** $x=p$ **和** $x=q$ **可得** $BP=h+\frac{q-p}{2}+\frac{p+q}{2h}p$, $CQ=h+\frac{q-p}{2}+\frac{p+q}{2h}q$,**因此** $BP+CQ=q-p+\frac{4h^2+(p+q)^2}{2h}=BC+\frac{EG^2}{2h}\geqslant BC+EG$,**上面用到了** $EG^2=4h^2+(p+q)^2\geqslant 4h^2$,**即** $EG\geqslant 2h$.

3. 略.

4. 令 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$,**则** $x, y, z>0$. **设** $\triangle ABC$ **的面积为** S,**则** $2S=ah_a=2(p-b)r_b$,**由此知** $\frac{h_a}{r_b}=\frac{2(p-b)}{a}=\frac{2y}{y+z}$,**故** $\sum\left(\frac{h_a}{r_b}\right)^2=4\sum\frac{y^2}{(y+z)^2}$. **而** $\sum\sin^2\frac{A}{2}=\sum\frac{(p-b)(p-c)}{bc}=\sum\frac{yz}{(x+y)(z+x)}$, **因此, 原不等式等价于** $\sum\frac{y^2}{(y+z)^2}\geqslant\sum\frac{yz}{(x+y)(z+x)}\Leftrightarrow\sum y^2(x+y)^2(z+x)^2\geqslant\sum yz(x+y)(z+x)(y+z)^2\Leftrightarrow\sum y^2(yz+x\sum x)^2\geqslant\sum yz(yz+x\sum x)(y+z)^2\Leftrightarrow\sum y^2x^2(\sum x)^2+\sum y^4z^2+2xyz\sum x\sum y^2\geqslant\sum y^2z^2(y+z)^2+xyz\sum(y+z)^2\sum x\Leftrightarrow\sum y^2z^2(x^2+2xy+2xz)+\sum y^4z^2\geqslant 2xyz\sum x\cdot\sum xy=6x^2y^2z^2+2xyz(\sum x^2(y+z))\Leftrightarrow 3x^2y^2z^2+2xyz\sum x^2(y+z)\leqslant$

$2xyz\sum yz(y+z)+\sum y^4z^2 \Leftrightarrow 3x^2y^2z^2 \leqslant \sum y^4z^2$，由平均值不等式，最后一式成立，故原不等式成立.

5. (1)提示：用解析法证明Γ是一个椭圆及内部. (2)新建一个直角坐标系. 设Γ的方程为$\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a, b>0)$，则$\triangle ABC$是$\Gamma$的外切三角形，$\triangle DEF$是$\Gamma$的内接三角形. 作变换$x=ax'$，$y=by'$，则它将$xOy$平面上的任意凸区域$D$变成$x'O'y'$平面上的凸区域$D'$，将$\Gamma$变为单位圆$\odot O'$，且它们的面积有关系$|D|=ab\cdot|D'|$. 设此变换把$\triangle ABC$、$\triangle DEF$依次变为$\triangle A'B'C'$、$\triangle D'E'F'$，则$\triangle A'B'C'$、$\triangle D'E'F'$分别是$\odot O'$的外切三角形、内接三角形，且$S_\Gamma=ab\cdot S_{\odot O'}$，$S_{\triangle ABC}=ab\cdot S_{\triangle A'B'C'}$，$S_{\triangle DEF}=ab\cdot S_{\triangle D'E'F'}$，因此$\frac{S_\Gamma}{S_{\triangle DEF}}=\frac{S_{\odot O'}}{S_{\triangle D'E'F'}}\geqslant\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$，$\frac{S_\Gamma}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\odot O'}}{S_{\triangle A'B'C'}}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$，由此即得所证不等式.

习 题 7

1. (1)顶点A在以BC为弦的圆弧上，圆弧上线段BC的对角为α. 如果点A离开直线BC最远，即如果点A在线段BC的垂直平分线上，则$\triangle ABC$面积最大. (2)在固定BC和α的情况下，$\triangle ABC$外接圆半径R是定值. 显然，$AB+AC=2R(\sin\gamma+\sin\beta)=4R\cdot\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}$，当$\cos\frac{\gamma-\beta}{2}=1$，即$\gamma=\beta$时，$AB+AC$最大.

2. 设等边$\triangle ABC$的两边AB、AC与等边$\triangle PQR$的边PQ交于D、E，由旋转对称性可得$K=S_{\triangle ABC}-3S_{\triangle ADE}=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2-3S_{\triangle ADE}$，注意到$\triangle ADE$有固定的周长$\sqrt{3}r$，利用等周定理知$\triangle ADE$为正三角形(即其边长等于$\triangle ABC$边长的$\frac{1}{3}$)时面积最大. 由此得$K\geqslant\frac{\sqrt{3}r^2}{2}$.

3. 设四边形的三边$AB=BC=CD=1$，显然具有最大面积的四边形为凸四边形. 由对称性，可只考虑$\angle A$或$\angle B$等于$30°$的情形. (1)若$\angle B=30°$，则易知这时四边形$ABCD$的最大值$S_1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}{4}$. (2)若$\angle A=30°$，作$B$、$C$关于直线$AD$的对称点$B'$、$C'$. 连接$AB'$、$B'C'$、$C'D$、$BB'$，则$\triangle ABB'$是边长为1的正三角形，五边形$BCDC'B'$是边长均为1的五边形，当且仅当它是正五边形时面积取得最大值$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$. 故四边形$ABCD$的最大值$S_2=$

$\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\right]=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{8}$. 易知 $S_2>S_1$，故所求最大值 $S=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{8}$，且具有最大面积 S' 的四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=30°$，$\angle B=168°$，$\angle C=108°$，$\angle D=54°$，$AB=BC=CD=1$.

4. 设 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积为 S，由面积关系有 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_id_i=2S$，于是由 Cauchy 不等式和等周不等式有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_id_i}\geqslant\frac{(\sum a_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_id_i}=\frac{(\sum a_i)^2}{2S}\geqslant\frac{1}{2S}\cdot 4n\cdot S\cdot\tan\frac{\pi}{n}=2n\tan\frac{\pi}{n}$.

5. 提示：用类似于例 3 的方法可得证.

习　题　8

1. 提示：把 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 等代入嵌入不等式，再作代数恒等变形即得.

2. 注意到公式 $\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta}$ 等等，原不等式等价于 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{4\Delta\cos A'}{\sin A}+\frac{4\Delta\cos B'}{\sin B}+\frac{4\Delta\cos C'}{\sin C}$，再由面积公式，上式等价于 $a^2+b^2+c^2\geqslant 2ab\cos C'+2ac\cos B'+2bc\cos A'$. 这正是嵌入不等式的一个特例.

3. 提示：在嵌入不等式中令 $x=\tan\frac{A}{2}$，$y=\tan\frac{B}{2}$，$z=\tan\frac{C}{2}$，再通过一系列三角恒等变形即得.

4. 记 $u=x\sin\alpha+y\sin\beta$，$v=z\sin\gamma+w\sin\theta$，则 $u^2=(x\sin\alpha+y\sin\beta)^2\leqslant(x\sin\alpha+y\sin\beta)^2+(x\cos\alpha-y\cos\beta)^2=x^2+y^2-2xy\cos(\alpha+\beta)$. 同理可得 $v^2\leqslant z^2+w^2-2zw\cos(\theta+\gamma)$. 注意到已知条件 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，有 $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\gamma+\theta)=0$，因此 $\frac{x^2+y^2-u^2}{2xy}+\frac{z^2+w^2-v^2}{2zw}\geqslant 0$，即 $\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}\leqslant\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{z^2+w^2}{zw}=\frac{(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}$. 另外，应用 Cauchy 不等式有 $|u+v|\leqslant\sqrt{\left(\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}\right)(xy+zw)}\leqslant\sqrt{\frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}}$，得证.

5. 在惯性矩不等式中，令 $x=a_2^2+a_3^2-a_1^2$，等等，可得左边 $\geqslant\sum(a_3^2+a_1^2-a_2^2)(a_1^2+a_2^2-a_3^2)\cdot\dfrac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$…①，又注意到 $a_1^2+a_2^2+a_3^2\leqslant 9R^2$，$R=\dfrac{a_1a_2a_3}{4\Delta}$，结合可得 $\dfrac{a_1^2a_2^2a_3^3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\geqslant\dfrac{16}{9}\Delta^2$…②，再注意到 Heron 公式 $16\Delta^2=2(a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+a_3^2a_1^2)-(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$…③，因此由①、②、③可知 $\sum(a_3^2+a_1^2-a_2^2)(a_1^2+a_2^2-a_3^2)\dfrac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\geqslant-16\Delta^2+\dfrac{12a_1^2a_2^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\geqslant-16\Delta^2+12\cdot\dfrac{16}{9}\Delta^2=\dfrac{16}{3}\Delta^2$.

习　题　9

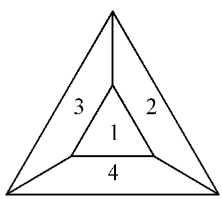
1. 利用 Gergonne 公式可求得 P 的轨迹是以 O 为圆心，半径为 $\sqrt{2}R$ 的圆及其内部.

2. 提示：用 $a'=PA\sin A$ 等代入易证.

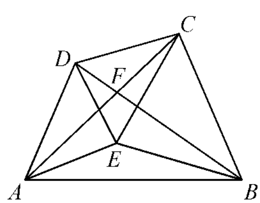
3. 略.

习　题　10

1. 如图，标号为 1、2、3、4 的 4 个凸多边形中每两个有一条公共边但没有公共的内部，故所求 n 的最大值不小于 4. 另一方面，设在平面内存在 5 个凸多边形满足条件，取定其中一个记为 M_0，其他 4 个按它们的公共点在 M_0 上的位置顺序记为 M_1、M_2、M_3、M_4. 按已知条件，M_1 与 M_3 有一条公共边，因此 M_0、M_1、M_3 这 3 个凸多边形或将 M_2 包围在中间而 M_4 在外，或将 M_4 包围在中间而 M_2 在外，无论哪种情形 M_2 与 M_4 不可能有公共边，矛盾，故 $n\leqslant 4$. 综上可知，所求 n 的最大值为 4.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 结论是肯定的，下用反证法证之. 显然无三点共线的情况. 若凸包为三角形时，内部有两点，此时这五点距离的最大值与最小值的比 $\lambda\geqslant 2>2\sin 70^\circ$，矛盾. 若凸包为四边形 $ABCD$，E 在其内部，不妨设 AC 和 BD 交于

F，且 E 在 $\triangle AFB$ 内，如图所示，假设 $\lambda < 2\sin 70^\circ$. 先考虑两条引理：引理 1 对任意 $\triangle ABC$，$\dfrac{BC}{\min(BA, CA)} \geqslant 2\sin\dfrac{A}{2}$. 引理 2　设 D 为 $\triangle ABC$ 内一点，则 $\dfrac{BC}{\min(AD, BD, CD)} \geqslant \begin{cases} 2\sin A, & \angle A \leqslant 90^\circ, \\ 2, & \angle A > 90^\circ. \end{cases}$（以上两条引理证略.）由引理 1 及假设，必有 $\angle AEC < 140^\circ$，$\angle AEB < 140^\circ$，于是 $\angle BEC > 80^\circ$，同理 $\angle AED > 80^\circ \cdots$①. 又由引理 2 及假设，有 $\angle ABC < 70^\circ$，$\angle BAD < 70^\circ$，于是 $\max(\angle ADC, \angle BCD) > 110^\circ$. 不妨设 $\angle BCD > 110^\circ$，由 ① 有 $BC \geqslant \dfrac{BC}{\min(CE, BE)} \geqslant 2\sin\dfrac{\angle CEB}{2} \geqslant 2\sin 40^\circ$，于是有 $\lambda \geqslant BD > \sqrt{DC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC \cdot \cos 110^\circ} = \sqrt{DC^2 + BC^2 + 2BC \cdot DC\cos 70^\circ} \geqslant \sqrt{1 + 4\sin^2 40^\circ + 4\sin 40^\circ \cos 70^\circ} = 2\sin 70^\circ$，矛盾！因此，五点构成一个凸五边形.

3. 略.

习　题　11

1. 提示：设 $\angle PAQ$ 所在平面与正四面体各面的交线为 AE、AF、EF. 只要证明 $\angle EAF \leqslant 60^\circ$ 便可，这可通过证明在 $\triangle AEF$ 中 EF 是最小边来实现.

2. 略.

3. 提示：先考虑平面上的类似问题，探究解题方法. 只要过球心 O 作垂直于 $\angle AOB$ 的平分线 OC 的平面 π，再利用点的对称性设法证明 $\overset{\frown}{AB}$ 上不可能有平面 π 上的点，即不穿过 π 便可.

4. 过 I 作 $IM \perp$ 面 $A_2A_3A_4$ 于 M，作 $IN \perp A_3A_4$ 于 N. 若记 A_i、A_j 的对面的夹角为 θ_{ij}（$1 \leqslant i < j \leqslant 4$），则有 $\angle MNI = \dfrac{\theta_{12}}{2}$. 在直角 $\triangle IMN$ 中有 $IN = \dfrac{r}{\sin\dfrac{\theta_{12}}{2}}$，则 $I_{34} = \dfrac{1}{2} \cdot A_3A_4 \cdot \dfrac{r}{\sin\dfrac{\theta_{12}}{2}} \cdots$①. 根据四面体熟知的体积公式 $V = \dfrac{2}{3}S_1S_2 \cdot \dfrac{\sin\theta_{12}}{A_3A_4} \cdots$②，由 ①、② 消去 A_3A_4 得 $I_{34} \cdot V = \dfrac{2}{3}S_1S_2\cos\dfrac{\theta_{12}}{2} \cdot r$. 注意到 $V = \dfrac{1}{3}\left(\sum\limits_{i=1}^{4} S_i\right)r$，可得 $I_{34} = \dfrac{2S_1S_2}{\sum\limits_{i=1}^{4} S_i}\cos\dfrac{\theta_{12}}{2} \cdots$③. 对 ③ 两边求和，并利用 Cauchy 不等式，得 $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} I_{ij} = \dfrac{2}{\sum\limits_{i=1}^{4} S_i} \cdot \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4}\left(\sqrt{S_iS_j} \cdot \sqrt{S_iS_j} \cdot \cos\dfrac{\theta_{ij}}{2}\right) \leqslant \dfrac{2}{\sum\limits_{i=1}^{4} S_i}\left(\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} S_iS_j\right)^{\frac{1}{2}}$

$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i S_j \cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$…④. 再由四面体的射影公式有 $S_1 = S_2\cos\theta_{12} + S_3\cos\theta_{13} + S_4\cos\theta_{14}$，由此得 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i = S_2\cos^2\frac{\theta_{12}}{2} + S_3\cos^2\frac{\theta_{13}}{2} + S_4\cos^2\frac{\theta_{14}}{2}$…⑤，对⑤两边同乘以 S_1 后，再求和便得 $\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i S_j \cdot \cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}$…⑥，又由对称平均不等式 $\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right) \geqslant \left(\frac{1}{6}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i S_j\right)^{\frac{1}{2}}$…⑦. 现对④应用⑥、⑦即得所证不等式.

5. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，面 $A_2A_3A_4$ 的面积为 F_1，等等，P 是这个四面体中的任意给定内点. 由 Cauchy 不等式有 $\left(\sum F_i\right)\left(\sum F_i \cdot PA_i^2\right) \geqslant \left(\sum F_i \cdot PA_i\right)^2$…①. 现用 $\vec{P}$、$\vec{A}_i$ 和 $\vec{I}$ 分别表示从 O 到点 P、A_i 和 I 的向量，则 $\vec{I} = \frac{\sum F_i \vec{A}_i}{\sum F_i}$，从而可得 $\sum F_i \cdot PA_i^2 = \sum F_i(\vec{P} - \vec{A}_i)^2 = \sum F_i(R^2 + \vec{P}^2 - 2\vec{P}\cdot\vec{A}_i) = F(R^2 + OP^2 - 2\vec{P}\cdot\vec{I})$，这里 $F = \sum F_i$. 因为 $2\vec{P}\cdot\vec{I} = \vec{P}^2 + \vec{I}^2 - (\vec{P} - \vec{I})^2$，所以 $\left(\sum F_i\right)\left(\sum F_i \cdot PA_i^2\right) = F^2(R^2 + PI^2 - OI^2)$，因此由①得 $\sum F_i \cdot PA_i \leqslant F(R^2 + PI^2 - OI^2)^{\frac{1}{2}}$…②. 现设 h_i 和 r_i 分别表示点 A_i 和 P 到面 F_i 的距离，则 $PA_i \geqslant h_i - r_i$，因此 $\sum F_i \cdot PA_i \geqslant \sum F_i(h_i - r_i) = \sum F_i h_i - \sum F_i r_i = 4\times 3V - 3V = 9V$. 结合②和③并利用 $3V = rF$，可得 $R^2 \geqslant 9^2 r^2 + OI^2 - PI^2$. 再选择 $P = I$，立得所证不等式.