1	2	3	$\sum$

Freie Universität Berlin

Wolfgang Mulzer, Katharina Klost

Algorithmen, Datenstrukturen und Datenabstraktion, Semester

TutorIn: Tobias Gleißner, Tutorium 02

Übung 02

Nicolas Höcker, Michael Wernitz

2. November 2017

---

1 Dünnbesetzte Polynome

Die neu erstellte Abspeicherung von sogenannten dünn besetzten Polynomen erfolgt durch Tupelbildung mit folgendem Schema.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

wird abgespeichert als eine nach Grad des Polynoms absteigend geordnete Liste aus Tupeln mit folgender Bedingung:

$$p(x) = [(a_n, n), \ldots, (a_l, l)] \text{ ,wobei } a_i \neq 0,\ 0 \leq i, l \leq n$$
$$\text{und für k (Anzahl der Nullpolynome) gilt: } k = 0$$

- **Addition**
  Für die Addition zweier $p(x), q(x)$ Polynome gilt:

  $$\forall (a_i, i) \in p(x), \forall (b_l, l) \in q(x) : (a_i, i) + (b_l, l) = (a_i + b_l, i \vee l) \Leftrightarrow i = l$$

  Beispiel:

- **Multiplikation**
  Für die Multiplikation von zwei Polynomen $p(x), q(x)$ gilt:

  $$\forall (a_i, i) \in p(x), \forall (b_l, l) \in q(x) : (a_i, i) + (b_l, l) = (a_i * b_l, i * l) \quad 0 \leq i, l \leq deg(p(x), deg(q(x)))$$

  $$\forall (a_i, i) \in p(x), \forall (b_l, l) \in q(x) : (a_i, i) + (b_l, l) = (a_i * b_l, i * l + 1) \Leftrightarrow i = 1 \vee l = 1$$

  $$\forall (a_i, i) \in p(x), \forall (b_l, l) \in q(x) : (a_i, i) + (b_l, l) = (a_i * b_l, i) \Leftrightarrow l = 0 \quad 0 \leq i \leq deg(p(x)$$

  $$\forall (a_i, i) \in p(x), \forall (b_l, l) \in q(x) : (a_i, i) + (b_l, l) = (a_i * b_l, l) \Leftrightarrow i = 0 \quad 0 \leq l \leq deg(q(x)))$$

- Polynomauflösung $p(x)$ an Stelle x_0

  $$\forall (a_i, i) \in p(x) : \sum_{0 \leq i \leq n} (a_i * x_0^i)$$

  wobei zur Potenzierung der im Tutorium besprochene Algorithmus mit $O(n * log_2(n))$ angewendet wird

- **Effizienz der Algorithmen**

  1. Addition Mit dem Algorithmus zur Addition sind wir im Vergleich zu der in der Vorlesung vorgestelltem Darstellung mit k-0-Koeffizienten effizienter, da wir auf die Abspeicherung dieser verzichten, wodurch wir nur noch $(n-k)$ (n - Grad des Polynoms), anstatt n Additionen (wie in der Darstellung aus der Vorlesung) durchführen müssen. Damit unterlassen wir unnötige Additionsoperationen von k-0-Koeffizienten.

  2. Multiplikation Unsere Darstellung bewährt sich auch bei der Multiplikation von zwei Polynomen $p(x), q(x)$, da hier keine $(k * k^{'})$-0-Produkte vorkommen (wobei k bzw. $k^{'}$ - Anzahl der 0-Koeffizienten in $p(x)$ bzw. $q(x)$), da nur mit Koeffizienten $a_i \neq 0$ mit $0 \leq i \leq n$ gerechnet wird.
     Somit ist auch hier unser Algorithmus zur gewählten Darstellung effizienter als der in der Vorlesung vorgestellte.

  3. Auswertung an x_0 Die Auswertung eines Polynoms $p(x)$ an einer Stelle x_0 ist ebenso effizienter als der in der Vorlesung vorgestellte Algorithmus. Dabei können k-0-Produkte die durch Multiplikation eines 0-Koeffizienten und der i-ten Potenz von x_0 entstehen würden, sowie die k-Additionen (Anzahl der 0-Koeffizienten) weggelassen werden, was unseren Algorithmus effizienter gestaltet.

- **Implementierung der oben vorgestellten Darstellung von Polynomen**

  1. Addition

```
2  def polynom_add(p1,p2):
3    ergebnis_polynom = []
4    p_zwischen = []
5
6    if len(p1) == len(p2) and access_tupel(p1,0,1)>access_tupel(p2,0,1):
7      p_zwischen= p2
8      p2 = p1
9      p1 = p_zwischen
10
11   while len(p1)>0 or len(p2)>0:
12       if len(p2) == 0 or access_tupel(p1,0,1)>access_tupel(p2,0,1):     # Fall p2
       abgearbeitet oder p1 größerer Grad
13           ergebnis_polynom.append(p1[0])
14           p1.pop(0)
15       elif len(p1) == 0 or access_tupel(p1,0,1)<access_tupel(p2,0,1):   # Fall p1
       abgearbeitet oder p2 größerer Grad
16           ergebnis_polynom.append(p2[0])
17           p2.pop(0)
18       else:                                                              # Fall p1
       und p2 haben denselben Grad inne
19           ergebnis_polynom.append((access_tupel(p1,0,0)+ access_tupel(p2,0,0), (
     access_tupel(p1,0,1))))
20           p1.pop(0)
21           p2.pop(0)
22   return ergebnis_polynom


25 def access_tupel(polynom, stelle_von_tupel, position_in_tupel):    #
       Hilfsfunktion für den Zugriff auf die Tupelstruktur
26     zwischenspeicher = polynom[stelle_von_tupel]
27     zwischenspeicher2 = zwischenspeicher[position_in_tupel]
28     return zwischenspeicher2
```

2. Multiplikation

```
40 def polynom_mult(p1,p2):
41     ergebnis_polynom = []               # Initialisiere Ergebnispolynom
42     iterationen = len(p1)+len(p2)    # Verwende Multiplikationsformel aus der
       Vorlesung
43     for i in range(0, iterationen+1):
44         ergebnis = berechne_koeffizienten(p1,p2,i)
45         if ergebnis[0]>0:
46             ergebnis_polynom.insert(0,ergebnis)
47     return ergebnis_polynom


50 def berechne_koeffizienten(p1,p2,i_index):         # Liefert Koeffizienten im
       Tupelformat bereits mit Grad zurück
51     ergebnistupel = 0
52     for j in range(0,i_index+1):                    # Analog zum Index 0 bis i
       bei der Summenformel für c_i
53         zwischenspeicher_tupel1 =0                  # Initialisiere bzw. setze
       zurück auf 1
54         zwischenspeicher_tupel2 =0
55         for tupel in p1:                            # Finde das richtige Tupel
       mit dem Grad i in p1, falls vorhanden
56                 if tupel[1]==j:
57                     zwischenspeicher_tupel1 = tupel[0]  # Speichere Koeffizienten
       , falls vorhanden
58         for tupel in p2:                            # Finde das richtige Tupel
       mit dem Grad i in p2, falls vorhanden
59                 if tupel[1]==(i_index-j):
60                     zwischenspeicher_tupel2 = tupel[0]   # speichere den
       Koeffizienten, falls vorhanden

62         ergebnistupel = ergebnistupel + (zwischenspeicher_tupel1 *
       zwischenspeicher_tupel2) # Füge neu berechneten Koeffizienten zu Endergebnis
       hinzu

64     return(ergebnistupel,i_index)
```

3. Auswertung an x_0

```
79 def polynom_auswertung(x,polynom):
80     ergebnis = 0

82     for i in range(0,len(polynom)):
83         ergebnis= ergebnis + (access_tupel(polynom,i,0)*(x**access_tupel(polynom,
       i,1)))

85     return ergebnis
```

2 Experimentelles Sortieren

1. Bubblesort - worst-case Laufzeit: $O(n^2)$

```
1  public class BubbleSort extends Sorting_Algorithms{

3   private boolean swaped;
4   private int arraySize;
5   private double runtime;


8   public BubbleSort(){
9    this(new int[100]);
10   super.fillArrayRandom();
11  }

13  public BubbleSort(int [] list){
14   super(list);
15  }

17  public void bubblesort (){
18   setSwaped(true);    // safe status if swaped or not
19   int n = super.getSize();
20   while(isSwaped() == true){
21    setSwaped(false);
22    for(int i=0; i < n-1; i++){  // check every element
23     if(super.data[i] > super.data[i+1]){ // swap element if true
24      int temp = super.data[i];
25      super.data[i] = super.data[i+1];  // swaping
26      super.data[i+1] = temp;
27      setSwaped(true);  // set swaped true
28     }
29    }
30    n = n-1;  // increase n for while loop
31   }
32  }
```

2. QuickSort - worst-case Laufzeit: $O(n^2)$

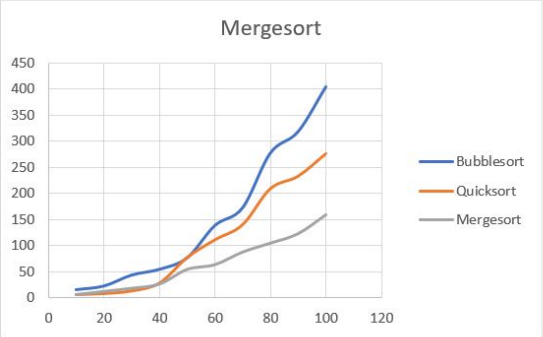
```
1  public QuickSort(){
2   this(new int[100]);
3   super.fillArrayRandom();
4  }

6  public QuickSort(int [] array){
7   super(array);
8   right = super.data.length -1;
9  }

11 public void quickSort(){
12  helper(left, right);
13 }

15 private void helper(int l, int r) {
16  if(l < r){
17   setDivider(divide(l,r)); // sorts the left and right side of the pivot
      element
18   helper(l,getDivider()-1); // recursive call right list
19   helper(getDivider()+1,r); // recursive call left list
20  }
21 }

23 private int divide(int l, int r) {
24   int i = l;   // index left side
25   int j = r;  // index right side
26   int pivot = super.data[r];

28   while(i<j){
29    // searches in left part of list for equal/bigger elements than pivot ->
       stop -> index with bigger element
30    while(super.data[i] < pivot & i < r){
31     i = i+1;
32    }
33    // searches in rigth part of list for lower elements than pivot -> index
       with lower element
34    while(super.data[j] > pivot & j > l){
35     j=j-1;
36    }
37    // change of elements in left/right lists
38    if(i<j){
39     int temp = super.data[i]; // tempory safe of element for change
40     super.data[i] = super.data[j];
41     super.data[j] = temp;
42    }
43   }
44   // i is border of both parts of the list, left lower, rigth bigger than
      pivot
45   // setting new pivot element
46   if(super.data[i] > pivot){
47    int help = super.data[i];
48    super.data[i] = pivot;
49    pivot = help;
50   }
51   // return index of pivot element
52  return i;
53 }
```

3. MergeSort - worst-case Laufzeit: $O(n * log(n))$

```
1  private int[] helper(int [] data) {
2   if(data.length <= 1){
3    return data;
4   }else{
5    int middle = (int) (data.length / 2);
7    createLeft(data,0,middle);    // splits the lists into half everytime its
       called -> end: list with one element
8    createRight(data,middle,data.length);
10   // calls the function to build the result list
11   // with recursive call of the splitted lists, so that at first the lists
      are splitted into list with one element and the merge function
12   // combines every single list into the big result list
13   return merge(helper(createLeft(data,0,middle)), helper(createRight(data,
      middle,data.length)));
14  }
16 }
17 private static int[] merge(int[] left, int[] right) {
18  int [] accuList = new int[left.length+right.length];  // creates the
      result list
19  int indexleft = 0;  // saving the current indexes for navigating in the
      lists
20  int indexright =0;
21  int indexaccu = 0;
23  // case that two not empty lists have to be combined
24  while(indexleft < left.length && indexright < right.length){
25   if(left[indexleft] <= right[indexright]){  // comparing first elements of
       the two lists
26    accuList[indexaccu] = left[indexleft];  // saving into result list
27    indexleft = indexleft +1;     // decrease index for comparing next left
      element with first right
28   }else{
29    accuList[indexaccu] = right[indexright];
30    indexright = indexright +1;     // decrease index for comparing next
      right with first left
31   }
32   indexaccu = indexaccu +1;      // go to next index in resultlist and
      compare again or leave loop
33  }
35  // cases that one list is empty
36  while( indexleft < left.length){
37   accuList[indexaccu] = left[indexleft];
38   indexleft = indexleft + 1;
39   indexaccu = indexaccu +1;
40  }
41  while(indexright < right.length){
42   accuList[indexaccu] = right[indexright];
43   indexright = indexright +1;
44   indexaccu = indexaccu + 1;
45  }
47  return accuList;
48 }
```

- Grafische Darstellung

Feldgröße n	Zeit in Millisekunden		
	Bubblesort	**Quicksort**	**Mergesort**
10	**16**	**6**	**7**
20	**23**	**8**	**13**
30	**44**	**13**	**19**
40	**55**	**28**	**27**
50	**77**	**77**	**55**
60	**139**	**111**	**64**
70	**173**	**140**	**88**
80	**278**	**209**	**105**
90	**319**	**233**	**123**
100	**405**	**276**	**159**



- Auswertung Es ist deutlich zu erkennen, dass Bubblesort mit steigenden Eingabegrößen eine deutlich längere Ausführungszeit besitzt als Quicksort. Gleiches ist beim Vergleich von Quicksort und Mergesort festzustellen. Dieses Ergebnis spiegelt die den Sortieralgorithmen entsprechenden Komplexitätsklassen von Quick-/Bubblesort mit $O(n^2)$ und $O(n * log(n))$ von Mergesort.
- Vorteile der Algorithmen
  1. Bubblesort Bubblesort ist ein stabiler in-place Algorithmus der einfach zu implementieren und verstehen ist. Daher wird er meist für lehrreiche Zwecke verwendet, um z.B.: Komplexitäts- oder Korrektheitsbeweise durchzuführen.
  2. Quicksort Quicksort hat eine sehr hohe Ausführungsgeschwindigkeit, die durch eine kurze innere Schleife erreicht wird. Es ist ein in-place Verfahren, welches mit Ausnahme des benötigten Speicherplatzes für die Rekursionsaufrufe auf dem Aufruf-Stack keinen externen Speicherplatz benötigt.
  3. Mergesort Mergesort ist ein sehr guter rekursiver Algorithmus, an dem das Divide and Conquer Prinzip sehr deutlich wird. Dieser Algorithmus hat eine Laufzeit von $O(n * log(n))$ sowohl im best-/average case als auch im worst case. Es ist zudem ein stabiles Verfahren.
- Nachteile der Sortieralgorithmen
  1. Bubblesort Bubblesort besitzen bei sehr großen n eine sehr schlechte Laufzeit, da er mehrmals durch die volle Liste iteriert und Element darin vergleicht.
  2. Quicksort Quicksort ist kein stabiles Verfahren, wodurch manche Datensätze falsch sortiert werden und es zu mehr oder weniger großen Komplikationen kommen kann.
  3. Mergesort Mergesort benötigt zur Ausführung externen Speicher, da es kein in-place Algorithmus ist.
- Verwendung der Algorithmen Wenn nur mit sehr kleinen Eingaben gearbeitet wird und die Laufzeit nicht ins Gewicht fällt, ist Bubblesort eine einfache, schnell zu erstellende und stabile Lösung. Benötigt man eine hohe Ausführungsgeschwindigkeit und die Eingaben sind teils sortierte Listen ist Quicksort zu empfehlen. Dabei muss beachtet werden, dass Quicksort nicht satbil ist und die Eingabelisten nicht zu groß sein dürfen, da die Laufzeit gegen $O(n^2)$ geht. Mergesort ist unter den drei gewählten Verfahren das mit der besten Laufzeit in allen drei Fällen. Es ist aber nicht in-place, d.h. es wird zusätzlicher Speicher gebraucht, um Mergesort anzuwenden. Bei sehr großen Eingaben ist Mergesort unter den dreien sehr zu empfehlen, da es auch dort am schnellsten ist.

- Aussagen der O-Notation Schaut man sich die Laufzeitfunktion zu den gemessenen Eingaben an erkennt man, dass diese bei Bubblesort und Quicksort den Grad 2 besitzen, sie also quadratisch und damit in der Komplexitätsklasse von $O(n^2)$ liegen, also die Funktion $f(n) = n^2$ die obere Grenze ist. Bei Mergesort lässt sich ähnliches erkennen. Dort stellt die Funktion $f(n) = n * log(n)$ die obere Grenze des Graphen der gemessenen Werte dar.

3 Türme von Hollywood

a)Sei n die Anzahl der Scheiben und die drei vertikalen Stangen als A,B,C bezeichnet, wobei A die erste und C die letzte Stange ist. Um alle Scheiben 1 bis n von A nach C zu bewegen, müssen zuerst die größte Scheibe, also die Scheibe n, nach C bewegt werden.
Um dieses Problem zu lösen, müssen wir aber erst n-1 Scheiben nach B bewegt werden, um die Ordnungseigenschaft einzuhalten. Anschließend müssen die n-1 Scheiben nach C verschoben werden.
Dafür müssen wir aber, um n-1 Scheiben nach B zu bewegen, n-2 Scheiben nach C bewegen. Danach können wir die n-1-te Scheibe nach B bewegen, um anschließend die n-2 Scheiben von C nach b zu bewegen.
Wir zerlegen analog rekursiv weiter bis wir beim Problem angelangt sind, wohin wir Scheibe 1 bewegen.

- – Sei also n die eindeutige Scheibennummer für die Funktion $bewegeScheibe(n)$, so lautet die Anzahl von Verschiebungen:

$$bewegeScheibe(n) = bewegeScheibe(n-1) + 1 + bewegeScheibe(n-1)$$
$$bewegeScheibe(1) = 1$$

  – wir können also vereinfachen zu:

$$bewegeScheibe(n) = 1 + 2 * bewegeScheibe(n-1)$$

  – Um pragmatisch die Anzahl der Scheiben für n=100 ermitteln zu können, müssen wir allerdings die geschlossene Formel für diese rekursive Funktion finden.

  –

$$\begin{aligned} b(n) &= 1 + 2 * (b(n-1)) \\ &= 1 + 2 * (1 + 2 * (b(n-2))) \\ &= 1 + 2 * (1 + 2 * (1 + 2 * (b(n-3)))) \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 * b(n-3) \\ &= 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 * b(n-1) \\ &= 1 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} * b(n) \\ &= 1 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} \\ &= \dots \end{aligned}$$

  – Beweis durch Induktion nach n

Beweis. ∗ I.A.: $n = 1$

$$2^1 - 1 = 2 - 1 = 1 = b(1)$$

$$n = 2$$

$$\begin{aligned} b(2) &= b(1) + 1 + b(1) \\ &= 1 + 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$2^2 - 1 = 3 = b(2)$$

∗ I.V.: $b(n) = 2^n - 1$

∗ I.B.: $b(n+1) = 2^{n+1} - 1$

∗ I.S.: $n \Rightarrow (n+1)$

$$\begin{aligned} b(n+1) &= 1 + 2 * b(n) \\ &\overset{IV}{=} 1 + 2(2^n - 1) \\ &= (2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) \\ &= 2^{n+1} - 1 + 1 - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

□

– Also gilt für $n = 100$:

$$\begin{aligned} 2^{100} - 1 &= 1267650600228229401496703205375\text{Tage} \\ &\approx 3.473.015.343.091.039.456.155.351.248\text{Jahre} \\ &\approx 3.473.015\text{Trilliarden Jahre} \end{aligned}$$

- Seien A,B,C Stangen und A Startstange und C Endstange mit n Scheiben.
  So kann das Problem erneut rekursiv gelöst werden. Wir ermitteln die Formel durch Beobachtung.
  Zu Beginn wollen wir Scheibe n von A nach C bringen. Dafür können wir die anderen Scheiben weitestgehend so verschieben, dass sie von A nach B verlegt werden.
  z.B.: bei n=6, S = Scheibe, Ziel: Scheibe n nach C verschieben

$$\begin{aligned} S1: &\quad A \to B \\ S2: &\quad A \to C \Rightarrow S1 : B \to C \\ S3: &\quad A \to B \Rightarrow S1 : C \to B, S2 : C \to B \\ S4: &\quad A \to C \Rightarrow S2 : B \to C, S1 : B \to C, S3 : B \to C \\ &\dots \\ S6: &\quad \dots \end{aligned}$$

  Wir können beobachten, $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ Scheiben aufsteigend geordnet sind und die folgenden $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ Elemente absteigend geordnet sind (Betrachtung des Stapels von oben).
  Anschließend kann man das oberste bis vorletzte Element con B nach A schieben, sodass die geforderte Ordnung erhalten bleibt und setzt Scheibe 5 nach C.
  Dies wiederholt man so lange bis C geordnet und vollständig ist.

- Formel: Wir benötigen für den ersten Schritt, um die Scheibe n nach C zu bekommen folgende Anzahl von Schritten.

$$bewege(n) = (n-1) + bewege(n-1)$$
$$bewege(1) = 1 - (n-1)$$

- mit (n-1) bezeichnen wir den Abzug der letzen Verschiebung auf C, da nicht alle Elemente am Ende auf C liegen müssen, sondern nur Scheibe n

- Anschließend müssen wir noch für jede umzuschiebene Scheibe, also (n-1) auf B oder A die Scheiben $1, \ldots, (n-2)$ auf den jeweils anderen Stapel schichten und Scheibe n-1 nach C verschieben. Das wiederholen wir bis C fertig ist.
  Also:

$$bewege_zuletzt(n) = n + bewege_zuletzt(n-1)$$
$$bewege_zuletzt(1) = 1$$

  Fassen wir beide Formeln zusammen, erhalten wir:

$$bewege(n) = (n-1) + bewege(n-1)$$
$$bewege(1) = 1 - (n-1)$$

  Also:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \quad + \quad \sum_{i=1}^{n} i \quad = \quad 2 * \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - n$$

- setzen wir nun n=100 ein erhalten wir:

$$2 * \left(\sum_{i=1}^{100} i \right) - 100 = 2 * * \frac{100^2 + 100}{2} - 100$$
$$= 10000$$

- folglich bräuchte man ca. 10000 Tage zum verschieben, was ca. 27 Jahre währen