1	2	3	$\sum$

Freie Universität Berlin

Wolfgang Mulzer, Katharina Klost

Algorithmen, Datenstrukturen und Datenabstraktion, Semester

TutorIn: Tobias Gleißner, Tutorium 02

Übung 01

Nicolas Benjamin, Michael Wernitz

25. Oktober 2017

---

1 Rekursionsgleichung

Lösen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen. Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit Ihrer Lösung (z.B.: durch vollständige Induktion)

(a)

$$T(1) = 0; \quad T(n) = T\left(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor\right) + T\left(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil\right) + n, \text{ für n} > 1$$

- Ergebnisse durch Einsetzen von Zweierpotenzen von n

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 2$$
$$T(4) = T(2) + T(2) + 4 = 8$$
$$T(8) = T(4) + T(4) + 8 = 24$$
$$T(16) = T(8) + T(8) + 16 = 64$$

Daraus erkennt man die geschlossene Formel: $a(n) = n * log_2 n$

Beweis. Es folgt der dazugehörige Beweis durch vollständige Induktion

Dazu betrachten wir n als $n = 2^k$
Es wird daher über k induziert

- Induktionsanfang mit $k = 1$, also 2^1

$$\begin{aligned} T(2) &= T(1) + T(1) + 2 \\ T(2) &= 2 \\ a(2) &= 2 * log(2) \\ a(2) &= 2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$=> T(2) = a(2)$$

- Induktionsvorraussetzung: $T(n) = a_n$
  wobei $T(2^k) = \mathrm{T}\left(\lfloor \frac{2^{k-1}}{2} \rfloor\right) + \mathrm{T}\left(\lceil \frac{2^{k-1}}{2} \rceil\right) + 2^k$

  und $a_{2^k} = 2^k * log_2(2^k)$

- Induktionsbehauptung: $a_2^{k+1} = T(2^{k+1})$ wir gehen dabei davon aus, dass $T(2^{k+1})$ bereits bewiesen wurde, da $T(2^k)$ bzw. $T(n)$ in der Aufgabenstellung gegeben ist.
- Induktionsschritt $k \mapsto k+1$

$$\begin{aligned}
T(2^{k+1}) &= 2 * T(2^k) + 2^{k+1} \\
&\overset{IV}{=} 2 * 2^k * log_2(2^k) + 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1} * log_2(2^k) + 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1} * (log_2(2^k) + 1) \\
&= 2^{k+1} * (log_2(2^k) + log_2 2) \\
&= 2^{k+1} * (log_2(2^k * 2^1) \\
&= 2^{k+1} * log_2(2^{k+1}) \Leftrightarrow a_{k+1}
\end{aligned}$$

$\square$

(b)

$$S(1) = 1; \quad S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i * S(i), \text{ für n} > 1$$

$$\begin{aligned}
&S(1) = 1 = 1 \\
&S(2) = 1 * S(1) = 1 \\
&S(3) = S(1) + 2 * S(2) = 3 \\
&S(4) = S(1) + 2 * S(2) + 3 * S(3) = 12 \\
&S(5) = S(1) + 2 * S(2) + 3 * S(3) + 4 * S(4)
\end{aligned}$$

Daraus ist zu erkennen:

$$\begin{aligned}
&S(1) = 1 \\
&S(2) = 1 \\
&S(3) = 6 = 3 * 2 \\
&S(4) = 24 = 4 * 3 * 2 \\
&S(5) = 120 = 5 * 4 * 3 * 2
\end{aligned}$$

folglich kann allgemein gesagt werden:

$$a(n) = \begin{cases} 1 & 0 < n \leq 2 \\ \frac{n!}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S(1) = 1, S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i * S(i) \quad \text{für n>1}$$

$$a(n) = \begin{cases} 1 & 0 < n \leq 2 \\ \frac{n!}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Induktionsanfang: $n = 1$
$a(1) = S(1)$

$n = 2$
$a(2) = S(2)$

gewähltes n $>$ 2, also sei n=3
$S(3) = 3 = a(n)$

Induktionvorraussetzung: $S(n) = a(n)$

Induktionsbehauptung:
$S(n+1) = a(n+1)$, wobei vorausgesetzt ist, dass S(n)bereits per Induktion bewiesen wurde

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$
\begin{aligned}
S(n+1) &= \sum_{i=1}^{n} i * S(i) \\
&= n * S(n) + \sum_{i=1}^{n-1} i * S(i) \\
&= n * S(n) + S(n) \\
&= S(n) * (n+1) \\
&\overset{IV}{=} \frac{n!}{2} * (n+1) \\
&= \frac{(n+1)!}{2} = a(n+1)
\end{aligned}
$$

$\square$

2 Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$P(n) : x_1 x_2 \ldots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^n ,$$

indem Sie folgende Teilschritte bearbeiten:

*Beweis*1. $P(2)$ ist eine wahre Aussage.

Hinweis: $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

2. Wenn $P(n)$ gilt, dann gilt auch $P(n-1)$.

   Hinweis: Wie muss man x_n wählen, damit sich der Wert der rechten Klammer nicht ändert, wenn $x_1, \ldots, x_{n-1}$ schon feststehen?

3. Aus $P(2)$ und $P(n)$ folgt $P(2n)$.

4. Folgern Sie nun die Ungleichung.

Lösungen:

- 2a)
  $P(2)$ ist wahre Aussage

  Beweis.

$$\begin{aligned}
x_1 * x_2 &\leq (\frac{x_1 + x_2}{2})^2 \\
x_1 * x_2 &\leq \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \\
4 * x_1 * x_2 &\leq (x_1 + x_2)^2 \\
4 * x_1 * x_2 &\leq {x_1}^2 + 2 * x_1 * x_2 + {x_2}^2 \\
0 &\leq {x_1}^2 - 2 * x_1 * x_2 + {x_2}^2 \\
0 &\leq (x_1 - x_2)^2
\end{aligned}$$

□

- 2b
  $P(n) \leftrightarrow P(n-1)$

  Beweis. Es gilt:

$$x_1 * x_2 * x_3 \ldots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1 * x_2 * x_3 \ldots x_n} \quad \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)$$

Sei $x_n = \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}}$
Nach Einsetzen gilt:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_{n-1} * \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}}} &\stackrel{?}{=} \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}} \\
\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_{n-1}} * \sqrt[n]{\sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}}} &\Leftrightarrow (x_1x_2\dots x_{n-1})^{\frac{1}{n}} * \left(\sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\Leftrightarrow (x_1x_2\dots x_{n-1})^{\frac{1}{n}} * \left((x_1x_2\dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\Leftrightarrow (x_1x_2\dots x_{n-1})^{\frac{1}{n}} * (x_1x_2\dots x_{n-1})^{\frac{1}{n^2-n}} \\
&\Leftrightarrow (x_1x_2\dots x_{n-1})^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2-n}} \\
&\Leftrightarrow (x_1x_2\dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \\
&\Leftrightarrow \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}} = x_{n-1}
\end{aligned}$$

Damit gilt: $\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_{n-1} * \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}}} = \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}}$
x$_n einsetzeninUngleichung$

$$\begin{aligned}
\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+\sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}}}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_{n-1} * \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}}} \quad |erstzendurchTerm(s.o.) \\
\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+\sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}}}{n} &\geq \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}} \\
\Leftrightarrow x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+\sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}} &\geq n * \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}} \\
\Leftrightarrow x_1+x_2+\dots+x_{n-1} &\geq n * \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}} - \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}} \\
\Leftrightarrow x_1+x_2+\dots+x_{n-1} &\geq (n-1) * \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}} \\
\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1} &\geq \sqrt[n-1]{x_1x_2\dots x_{n-1}} \Leftrightarrow P(n-1)
\end{aligned}$$

$\square$

- $P(2) \wedge P(n) \rightarrow P(2n)$

$$\begin{aligned}
P(n): \quad \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n} &\leq \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \\
\text{zu zeigen}: P(2) \wedge P(n) \rightarrow \sqrt[2n]{x_1x_2\dots x_{2n}} &\leq \frac{x_1+x_2+\dots x < -2n}{2n} \\
\text{es gilt: } \frac{x_1+x_2+\dots x_{2n}}{2n} &= \frac{\frac{x_1+x_2\dots x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{n+2}\dots x_{2n}}{n}}{2}
\end{aligned}$$

Sei $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$ Term t_1
und $\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\dots+x_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$ Term t_2

angenommen: P(2) $\wedge$ P(n) $\Rightarrow$ P(2n)
Dann setze $t_1 \wedge t_2$ in P(2) ein

$$\textbf{zu zeigen:} \quad \left(\frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2}\right)^2 \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} * \sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{2n}}$$

$$\left(\frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2}\right) \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} * \sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{2n}}}$$

$$\left(\frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2}\right) \geq \sqrt[2n]{x_1x_2\ldots x_{2n}} \quad \text{,da:} a^{\frac{1}{n}} * b^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow (a*b)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1x_2\ldots x_{2n}}$$

$$\Rightarrow P(2n)$$

Somit ist gezeigt, dass auf Grund der Gültigkeit von P(2) die Formel P(n) für zwei Terme und des Beweises, dass P(n) für beliebige n wahr ist, dass P(2n) für beliebige n wahr ist.

3 Manipulation elementarer Funktionen

Finden Sie Paare von äquivalenten Termen und formen Sie diese schrittweise ineinander um. Geben Sie die verwendeten Regeln an.

$$\log_a\left(n^{\log_b a}\right), \sqrt[b]{\frac{a^n}{a^m}}, b^{n\log a}, \log_b n, a^{\frac{n-m}{b}}, n(\log a + \log b), \log(a^n b^n), a^{(\log b^n)}.$$

Lösungen

- $a \Leftrightarrow d$

$$log_a(n^{log_b a}) \Leftrightarrow log_b a * log_a n \Leftrightarrow \frac{log_a a}{log_a b} * log_a n \Leftrightarrow \frac{1}{log_a b} * log_a n \Leftrightarrow \frac{log_a n}{log_a b} \Leftrightarrow log_b n$$

- $b \Leftrightarrow e$

$$\sqrt[b]{\frac{a^n}{a^m}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[b]{a^n}}{\sqrt[b]{a^m}} \Leftrightarrow \frac{a^{\frac{n}{b}}}{a^{\frac{m}{b}}} \Leftrightarrow a^{\frac{n-m}{b}}$$

- $c \Leftrightarrow h$

$$b^{n*log_2 a} \Leftrightarrow (b^{log_2 a})^n \Leftrightarrow (2^{log_2 b*log_2 a})^n \Leftrightarrow ((2^{log_2 a})^{log_2 b})^n \Leftrightarrow (a^{log_2 b})^n \Leftrightarrow a^{n*log_2 b}$$

- $f \Leftrightarrow g$

$$n*(log(a)+log(b)) \Leftrightarrow n*log(a)+n*log(b) \Leftrightarrow log(a^n)+log(b^n) \Leftrightarrow log(a^n * b^n)$$