1	2	3	$\sum$

Freie Universität Berlin

Wolfgang Mulzer, Katharina Klost

Algorithmen, Datenstrukturen und Datenabstraktion, Semester

TutorIn: Tobias Gleißner, Tutorium 02

Übung 01

Nicolas Benjamin, Michael Wernitz

24. Oktober 2017

---

1 Rekursionsgleichung

Lösen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen. Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit Ihrer Lösung (z.B.: durch vollständige Induktion)

(a)

$$T(1) = 0; T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n, \text{ für n} > 1$$

- Ergebnisse durch Einsetzen von Zweierpotenzen von n
  $T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 2$
  $T(4) = T(2) + T(2) + 4 = 8$
  $T(8) = T(4) + T(4) + 8 = 24$
  $T(16) = T(8) + T(8) + 16 = 64$

Daraus erkennt man die geschlossene Formel: $a_n = n * log_2 n$

Beweis. Es folgt der dazugehörige Beweis durch vollständige Induktion

Dazu betrachten wir n als $n = 2^k$
Es wird daher über k induziert

- Induktionsanfang mit $k = 1$, also 2^1 $T(2) = T(1) + T(1) + 2$
  $T(2) = 2$
  $a_2 = 2 * log(2)$
  $a_2 = 2$
  $=> T(2) = a_2$
- Induktionsvorraussetzung: $T(n) = a_n$
  wobei $T(2^k) = T(\lfloor \frac{2^{k-1}}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{2^{k-1}}{2} \rceil) + 2^k$

  und $a_{2^k} = 2^k * log_2(2^k)$
- Induktionsbehauptung: $a_2^{k+1} = T(2^{k+1})$ wir gehen dabei davon aus, dass $T(2^{k+1})$ bereits bewiesen wurde, da $T(2^k)$ bzw. $T(n)$ in der Aufgabenstellung gegeben ist.

- Induktionsschritt $k \mapsto k+1$

$$\begin{aligned}
T(2^{k+1}) &= 2 * T(2^k) + 2^{k+1} \\
&\overset{IV}{=} 2 * 2^k * log_2(2^k) + 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1} * log_2(2^k) + 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1} * (log_2(2^k) + 1) \\
&= 2^{k+1} * (log_2(2^k) + log_2 2) \\
&= 2^{k+1} * (log_2(2^k * 2^1) \\
&= 2^{k+1} * log_2(2^{k+1}) \Leftrightarrow a_{k+1}
\end{aligned}$$

□

(b)

$$S(1) = 1; S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i * S(i), \text{ für n} > 1$$

2 Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$P(n) : x_1 x_2 \ldots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n,$$

indem Sie folgende Teilschritte bearbeiten:

1. $P(2)$ ist eine wahre Aussage.

   Hinweis: $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

2. Wenn $P(n)$ gilt, dann gilt auch $P(n-1)$.

   Hinweis: Wie muss man x_n wählen, damit sich der Wert der rechten Klammer nicht ändert, wenn $x_1, \ldots, x_{n-1}$ schon feststehen?

3. Aus $P(2)$ und $P(n)$ folgt $P(2n)$.

4. Folgern Sie nun die Ungleichung.

(1.)

- *Beweis.* P(2) ist wahre Aussage

$$x_1 * x_2 \leq (\frac{x_1 + x_2}{2})^2$$

$$x_1 * x_2 \leq \frac{(x_1 + x_2)^2}{4}$$

$$4 * x_1 * x_2 \leq (x_1 + x_2)^2$$

$$4 * x_1 * x_2 \leq {x_1}^2 + 2 * x_1 x_2 + {x_2}^2 | - 4 * x_1 x_2$$

$$0 \leq {x_1}^2 - 2 * x_1 x_2 + {x_2}^2$$

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2$$

  w.A., da $x_1, x_2 \geq 0$

$\square$