

1	2	3	Σ

Wolfgang Mulzer, Katharina Klost

Algorithmen, Datenstrukturen und Datenabstraktion, Semester

TutorIn: Tobias Gleißner, Tutorium 02

Übung 01

Nicolas Benjamin, Michael Wernitz

23. Oktober 2017

1 Rekursionsgleichung

Lösen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen. Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit Ihrer Lösung (z.B.: durch vollständige Induktion)

(a)

$$T(1) = 0; T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n, \text{ für } n > 1$$

- Ergebnisse durch Einsetzen von Zweierpotenzen von n

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 2$$

$$T(4) = T(2) + T(2) + 4 = 8$$

$$T(8) = T(4) + T(4) + 8 = 24$$

$$T(16) = T(8) + T(8) + 16 = 64$$

Daraus erkennt man die geschlossene Formel: $a_n = n * \log_2 n$

Beweis. Es folgt der dazugehörige Beweis durch vollständige Induktion

Dazu betrachten wir n als $n = 2^k$

Es wird daher über k induziert

- Induktionsanfang mit $k = 1$, also 2^1 $T(2) = T(1) + T(1) + 2$

$$T(2) = 2$$

$$a_2 = 2 * \log(2)$$

$$a_2 = 2$$

$$\Rightarrow T(2) = a_2$$

- Induktionsvoraussetzung: $T(n) = a_n$
wobei $T(2^k) = T(\lfloor \frac{2^{k-1}}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{2^{k-1}}{2} \rceil) + 2^k$

$$\text{und } a_{2^k} = 2^k * \log_2(2^k)$$

- Induktionsbehauptung: $a_2^{k+1} = T(2^{k+1})$ wir gehen dabei davon aus, dass $T(2^{k+1})$ bereits bewiesen wurde, da $T(2^k)$ bzw. $T(n)$ in der Aufgabenstellung gegeben ist.

- Induktionsschritt $k \mapsto k + 1$

$$\begin{aligned}
T(2^{k+1}) &= 2 * T(2^k) + 2^{k+1} \\
&\stackrel{IV}{=} 2 * 2^k * \log_2(2^k) + 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1} * \log_2(2^k) + 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1} * (\log_2(2^k) + 1) \\
&= 2^{k+1} * (\log_2(2^k) + \log_2 2) \\
&= 2^{k+1} * (\log_2(2^k * 2^1)) \\
&= 2^{k+1} * \log_2(2^{k+1}) \Leftrightarrow a_{k+1}
\end{aligned}$$

□

(b)

$$S(1) = 1; S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i * S(i), \text{ für } n > 1$$

2 Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$P(n) : x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^n,$$

indem Sie folgende Teilschritte bearbeiten:

1. $P(2)$ ist eine wahre Aussage.

Hinweis: $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

2. Wenn $P(n)$ gilt, dann gilt auch $P(n-1)$.

Hinweis: Wie muss man x_n wählen, damit sich der Wert der rechten Klammer nicht ändert, wenn x_1, \dots, x_{n-1} schon feststehen?

3. Aus $P(2)$ und $P(n)$ folgt $P(2n)$.
4. Folgern Sie nun die Ungleichung.

3 Manipulation elementarer Funktionen

Finden Sie Paare von äquivalenten Termen und formen Sie diese schrittweise ineinander um. Geben Sie die verwendeten Regeln an.

$$\log_a \left(n^{\log_b a} \right), \sqrt[b]{\frac{a^n}{a^m}}, b^{n \log a}, \log_b n, a^{\frac{n-m}{b}}, n(\log a + \log b), \log(a^n b^n), a^{(\log b^n)}.$$

Lösungen

- $a \Leftrightarrow d$

$$\log_a(n^{\log_b a}) \Leftrightarrow \log_b a * \log_a n \Leftrightarrow \frac{\log_a a}{\log_a b} * \log_a n \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} * \log_a n \Leftrightarrow \frac{\log_a n}{\log_a b} \Leftrightarrow \log_b n$$

- $b \Leftrightarrow e$

$$\sqrt[b]{\frac{a^n}{a^m}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[b]{a^n}}{\sqrt[b]{a^m}} \Leftrightarrow \frac{a^{\frac{n}{b}}}{a^{\frac{m}{b}}} \Leftrightarrow a^{\frac{n-m}{b}}$$

- $c \Leftrightarrow h$

$$b^{n * \log_2 a} \Leftrightarrow (b^{\log_2 a})^n \Leftrightarrow (2^{\log_2 b * \log_2 a})^n \Leftrightarrow ((2^{\log_2 a})^{\log_2 b})^n \Leftrightarrow (a^{\log_2 b})^n \Leftrightarrow a^{n * \log_2 b}$$

- $f \Leftrightarrow g$

$$n * (\log(a) + \log(b)) \Leftrightarrow n * \log(a) + n * \log(b) \Leftrightarrow \log(a^n) + \log(b^n) \Leftrightarrow \log(a^n * b^n)$$