①

INFO 0603 Exercice 19:   p. 58

CM2

1- 11 symboles ⟹ 4 bits

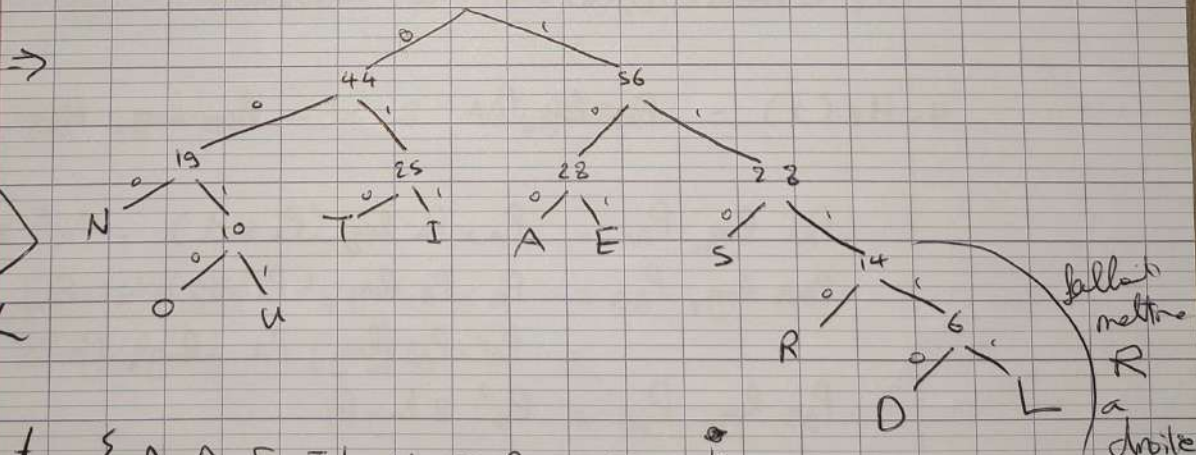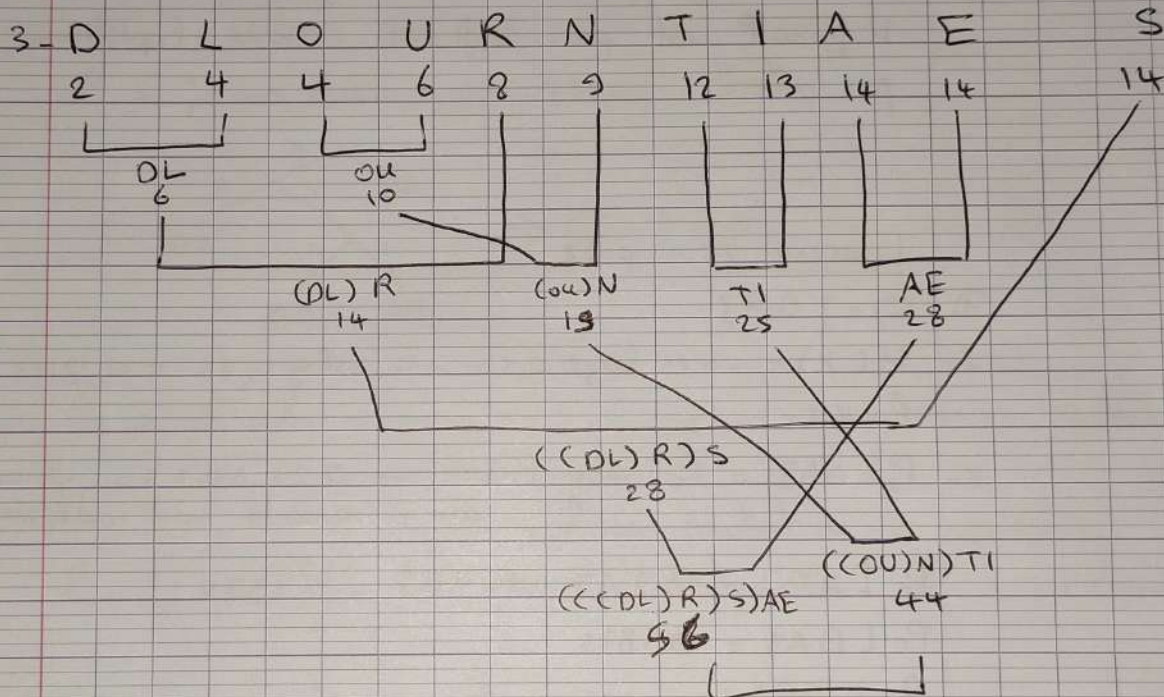$2^3 < 11 < 2^4$ ou $\lceil \log_2 11 \rceil = \lceil 3,... \rceil = 4$

arrondie vers le haut

2- $H(x) = -\sum_i p_i \log_2 p_i$

$= -0,14 \log_2 0,14 - 0,02 \log_2 0,02 - .... = 0,06 \log_2 0,06$

$= 3,27$ bits

3-
D	L	O	U	R	N	T	I	A	E	S
2	4	4	6	8	9	12	13	14	14	14

DL
6

OU
10

(DL) R
14

(ou) N
19

TI
25

AE
28

((DL) R) S
28

((OU)N) TI
44

(((DL) R) S) AE
56

Faux

$t = \{ A, D, E, I, L, N, O, R, S, T, U \}$

fallait mettre R à droite

A = 100	L = 11111	S = 110
D = 11110	N = 000	T = 010
E = 101	O = 0010	U = 0011
I = 011	R = 1110	

4 $\bar{l} = \sum p_i l_i = 0,14 \times 3 + 0,02 \times 5 + 0,014 \times 3 + 0,13 \times 3$
$+ 0,04 \times 5 \ldots$
$= 3,3$ bits

Rappel entropie $= 3,27 \Rightarrow$ possible de faire mieux

5- 100. 110. 010. 101. 1110. 0010. 011. 11110. 101
longueur $= 32$ bits

6- CTF longueur $= 9 \times 4 = 36$ bits
Huffman est plus efficace mais l'optimum n'est
pas atteint

Exercice 20: p.62

1) $C = \{0,1\}$

2- $H(X) = -0,25 \log_2 0,25 - 0,75 \log 0,75 = 0,8113$ bits
$\bar{l} = 1$

3- $P_r[AA] = P_r[A] \times P_r[A] = 0,25 \times 0,25 = 0,0625$
↑ car évènements sont indépendants

$P_r[AB] = P_r[A] \times P_r[B] = 0,1875$
$P_r[BA] = 0,1875$
$P_r[BB] = 0,5625$

4- $H_2(X) = -P_{AA} \log_2 P_{AA} \ldots - P_{BB} \log_2 P_{BB}$

$P_{AA} \log_2 P_{AA} = P_A \times P_A \log_2 (P_A \times P_A) = P_A^2 \; 2 \log P_A$

$P_{AB} \log_2 P_{AB} = P_A \times P_B \log_2 (P_A \times P_B) = P_{BA} \log_2 P_{BA}$
$= P_A \times P_B (\log_2 P_A + \log_2 P_B)$
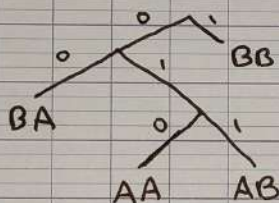
$P_{BB} \log_2 P_{BB} = P_B^2 \; 2 \log P_B$

$$-H_2(X) = P_A P_A \times 2 \log_2 P_A + 2 P_A P_B (\log_2 P_A + \log_2 P_B)$$
$$+ P_B P_B \times 2 \log_2 P_B$$
$$= [2 P_A \log_2 P_A] (P_A + P_B) + [2 P_B \log_2 P_B] (P_A + P_B)$$
$$* \quad P_A + P_B = 1$$
$$= 2 (P_A \log_2 P_A + P_B \log_2 P_B)$$

$$H_2(X) = 2 H(x)$$
$$H_2(X) = 2 \times 0,8113 = 1,6226 \text{ bits}$$

5- $\mathcal{A} = \{ AA, AB, BA, BB \}$

$\mathcal{F} = \{ 0,0625, 0,1875, 0,1875, 0,5625 \}$

$\Rightarrow \mathcal{C} = \{ 010, 011, 00, 1 \}$

6- $\bar{l}_2 = \sum_i p_i l_i = 0,0625 \times 3 + 0,1875 \times 3 + 0,1875 \times 2 + 0,5625 \times 1$
$$= 1,6875 \text{ bits}$$

↑ pour un packet de 2 symboles

$\bar{l}_1 = \dfrac{\bar{l}_2}{2} = \dfrac{1,6875}{2} = 0,8438 \text{ bits/symbole} \quad < 1 \text{ bit/symbole}$

Rappel : l'entropie est a 0,8113 bits

par packet de 3 : 0,8229

Exercice 21 : p.67

$S = \{ A, B \} \quad J = \{ 0, 1 \}$

1)

Lecture	A	F	C	sortie
$\underline{\Delta}$AAA BABB	{ ⇑ }	{0}	(schéma)	0.0
A	{A,⇑}	{1,0}		1
		{2,0}		
A	{A,⇑}	{3,0}		1
A		{4,0}		1
B	{A,B,⇑}	{9,1,0}		0.1
A		{5,1,0}		1
B		{5,2,0}		0 1
B		{5,3,0}		0 1

2-

Lecture		F	C	sortie
00110101101010111	{A}	{0}		
00	{A,⇑}	{4,0}	(schéma)	A
1		{2,0}		A
1		{3,0}		A
01	{A,B,⇑}	{3,1,0}		B
01		{3,2,0}		B
1		{4,2,0}		A
01		{4,3,0}		B
01	{B,A,⇑}	{4,4,0}		B
111	{B,A,⇑}	{3,4,0}		BBB

Exercice 22 : p.69

1- Partie statiq sur $\lceil \log_2 8 \rceil = 3$

m	q=m/8	Fm%8	codé
5	0	5	0.101
8	1	0	10.000
16	2	0	110.000
23	2	7	110.111

variable statique

INFO0603

CM2 2-

	a	r	$m = 3 \times q + r$
110.10	2	2	8
0.10	0	2	2
10.10	1	2	5

3- Non, ex:

a- 110111 : pas valide pr un codage de Golomb d'ordre 3

b- 1111111... : si ∅ o on sait pas s'arrêter

Exercice 23 : 73

$S = \{A, B\}$ $\mathcal{F} = \{0,8 ; 0,2\}$

$\rightarrow$ A $\rightarrow$ [0; 0,8) $= F_A$ | Rq $|F_A| = 0,8 = P_r[A]$

B $\rightarrow$ [0,8 ; 1) $= F_B$ | $|F_B| = 0,2 = P_r[B]$

1a

symbole	E_{n-1}	$E_n = E_{n-1}^{min} + |E_{n-1}| \times F_s$
A	[0, 1)	$E_1 = 0 + 1 \times [0; 0,8) = [0; 0,8)$
A	[0,0,8)	$E_2 = 0 + 0,8 \times [0; 0,8) = [0; 0,64)$
A	[0; 0,64)	$E_3 = 0 + 0,64 \times [0; 0,8) = [0; 0,512)$
B	[0; 0,512)	$E_4 = 0 + 0,512 \times [0,8; 1) = [0,4096; 0,512)$
A	[0; 4096; 0,512)	$E_5 = 0,4096 + 0,3584 \times [0; 0,8) = [0,4096; 0,69157)$

code = milieu intervalle = 0,45056

b- V = 0,7552 ∈ F_A

	PE	décodage	$V = (V - F^{min})/|F|$
0,7552	F_A	A	$V = \dfrac{0,7552}{0,8} = 0,944$
0,944	F_B	AB	$V = \dfrac{0,944 - 0,8}{0,2} = 0,72$
0,72	F_A	ABA	$V = \dfrac{0,72}{0,8} = 0,9$
0,9	F_B	ABAB	$V = \dfrac{0,9 - 0,8}{0,2} = 0,5$

2- a- 0,20864

$E = [0,20608 ; 0,2112)$

b- AACBB

Exercice 24: p.77

1- si $x < 0,5$ $\rightarrow$ son 1^a bit est 0

si $x > 0,5$ $\rightarrow$ ——————— 1

2- multiplier par 2 décale tout les bits a gauche

ex : .10101

.001101 $\Big\} -0,5$

.01101 $\Big\} \times 2$

3-

x	$\geq 0,5$	bit b_i
0,2	non	0
0,4	non	0
0,8	oui	1
0,6	oui	1
0,2	non	0

$\Rightarrow 0.00110$

$= 0.1875$ ($\Rightarrow$ pas tt a fait 2)

($= 0,125 + 0,0625$)

4-

x	$\geq 0,5$	bit b_i
0,92	oui	1
0,84	oui	1
0,68	oui	1
0,36	non	0
0,72	oui	1

$\Rightarrow .11101$

$= 0,90625$

($= 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5}$)

Exercice 25 : p.82

$S = \{ A, B, C \}$

$\mathcal{F} = \{ 0,4 ; 0,4 ; 0,2 \}$

$F_A = [0 ; 0,4)$

$F_B = [0,4 ; 0,8)$

$F_C = [0,8 ; 1)$

↳ Codage ABABC

Opérat.	E_k	
	$[0,1)$	$[0;0,5)$
code A	$0 + (1-0) \times [0;0,4) = [0; 0,4)$	
S1	$2 \times [0;0,4) = [0;0,8)$	0
code B	$0 + (0,8-0) \times [0,4 ; 0,8) = [0,32 ; 0,64)$	
code A	$0,32 + (0,64 - 0,32) \times [0;0,4) = [0,32 ; 0,448)$	
S1	$2 \times [0,32 ; 0,448) = [0,64 ; 0,896) \subset [0,5 ; 1)$	0
S2	$2 \times ([0,64 ; 0,896) - 0,5) = [0,28 ; 0,792)$	1
Code B	$0,28 + (0,792 - 0,28) \times [0,4 ; 0,8) =$ $[0,4848 ; 0,6896]$	
Code C	$0,4848 + (0,6889 - 0,4848) \times [0,8 ; 1)$ $= [0,64864 , 0,6896) \subset [0,5 ; 1)$	1
S2	$2 \times ([0,64864 , 0,6896) - 0,5)$ $= [0,29728 ; 0,3792)$ $\subset [0 ; 0,5)$	1
S1	$2 \times [0,29728 ; 0,3792)$ $= [0,59456 , 0,7584)$	0
~~S2~~		1
S2	$2 \times ([0,59456 ; 0,7584) - 0,5)$ $= [0,18912 ; 0,5198)$	1
ajout 1		

le code arithmétique associé a ABABC = .0011101

$= 0,2?5125$

2- la + pett proba est 0,2 $P_{min} = 0,2$

la + ptt q tq $2^{-q} < \dfrac{P_{min}}{2} \Rightarrow q_{min} = 4$

$A \ (r - E^{min})/|E|$

$E^{min}_{inf} + |E_{inf}|$

$= E_K$

Operation	P	q	binaire	r	A $(r-E^{min})/|E|$	E_K	arbre
decode	1	4	.0011	0,1875	(0,1875-0)/(1-0) = 0,1875 ∈ F_A	[0;1) 0+[0;0,4)×(1-0) =[0;0,4) ∈ [0;0,5)	A
S1	2	4				2×[0;0,4)=[0;0,8)	
decode	2	4	.0110	0,375	(0,375-0)/(0,8-0) = 0,46875 ∈ F_B	0+[0,4;0,8)× (0,8-0) =[0,32;0,64)	B
precision		5					
decode	2	5	.01101	0,40625	0,26953 ∈ F_A	[0,32;0,448)	A
S1	3	5				[0,64;0,896)	
S2	4	5				[0,28;0,792)	
decode	4	4	.1011	0,6875	0,79589 ∈ F_B	[0,4848;0,65%	B
prec		5					
decode	4	5	.10110	0,6875	0,98274 ∈ F_C	[0,64864, 0,6896)	C
S2	5					[0,2728; 0,3792]	
S1	6					0,59456; 0,7584	
S2	7	4				0,18912; 0,5168	
arrêt			.1000	0,5			

Fin des S
→ remettre
à min