INFO0501

ALGORITHMIQUE AVANCÉE

COURS 7

GRAPHES
FLOT MAXIMUM

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Pierre Delisle
Département de Mathématiques, Mécanique et Informatique
Novembre 2018

Plan de la séance

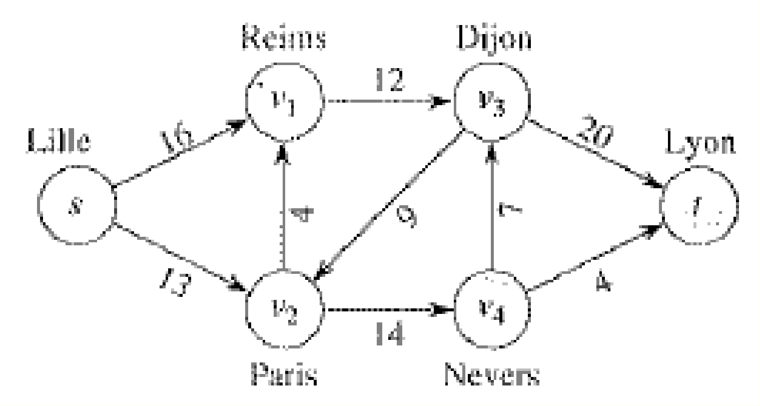
- Le problème du flot maximum
- Réseau de flot
- Algorithme de Ford-Fulkerson

- Bibliographie
  - T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, "Algorithmique", 3e édition, Dunod, 2010

PROBLÈME DU FLOT MAXIMUM

Problème du flot maximum

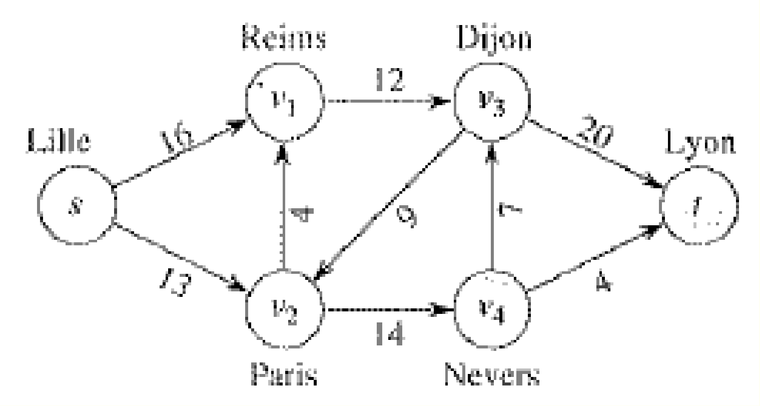
- Graphe orienté
  - Permet de représenter un réseau de flot (ou réseau de transport)
- Un produit s'écoule à travers un système…
  - … depuis une source, où il est produit …
  - … vers un puits, où il est consommé
- Débit constant
  - De génération du produit par la source
  - De consommation du produit par le puits
- Flot de produit à un endroit quelconque du système
  - Vitesse à laquelle le produit se déplace



- Exemples d'application
  - Circulation de liquides à travers des tuyaux
  - Circulation de pièces détachées dans des chaînes de montage
  - Courant à travers des réseaux électriques
  - Données à travers des réseaux de communication

Problème du flot maximum

- Arc du réseau
  - Conduit emprunté par le produit
  - Capacité fixe → débit maximal que peut atteindre le produit à travers le conduit

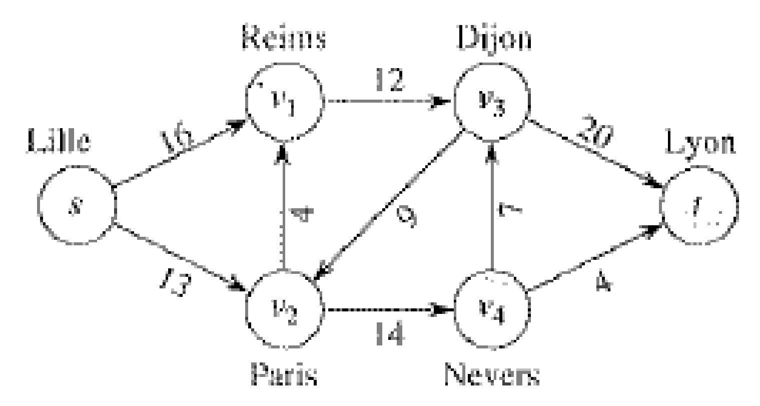


- Sommet du réseau
  - Jonctions des conduits
  - Le produit s'écoule d'un sommet à l'autre sans gain ni perte
    - Débit à l'entrée = débit en sortie
  - (sauf pour la source et le puits)

- Définition du problème
  - On veut connaître la plus grande vitesse à laquelle le produit peut voyager entre la source et le puits …
  - … sans violer aucune contrainte de capacité

Réseaux de flot

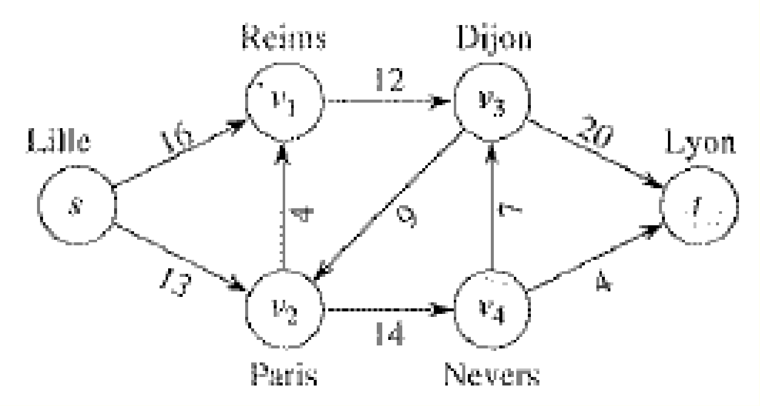
- Réseau de flot $G = (S, A)$
  - Graphe orienté…
    - … dans lequel chaque arc $(u, v) \in A$ …
    - … possède une **capacité** $c(u, v) \geq 0$
- Si A contient un arc (u, v)
  - Il n'y a pas d'arc (v, u) en sens inverse
- Si $(u, v) \notin A$
  - $c(u, v) = 0$
- 2 sommets particuliers
  - Source s
  - Puits t



- Chaque sommet se trouve sur un chemin reliant la source au puits
  - Graphe connexe
  - Chaque sommet sauf s a au moins un arc entrant
    - $|A| \geq |S| - 1$

Réseaux de flot

- Flot de G
  - Ensemble de valeurs réelles attribuées aux arcs …
    (fonction à valeurs réelles $f : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$)
  - … qui satisfait aux propriétés de contrainte de capacité et de conservation du flot



- Contrainte de capacité
  - Pour tout $u, v \in S$
    - $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$
  - (le flux du sommet u au sommet v doit être positif et ne doit pas excéder la capacité de l'arc (u, v)

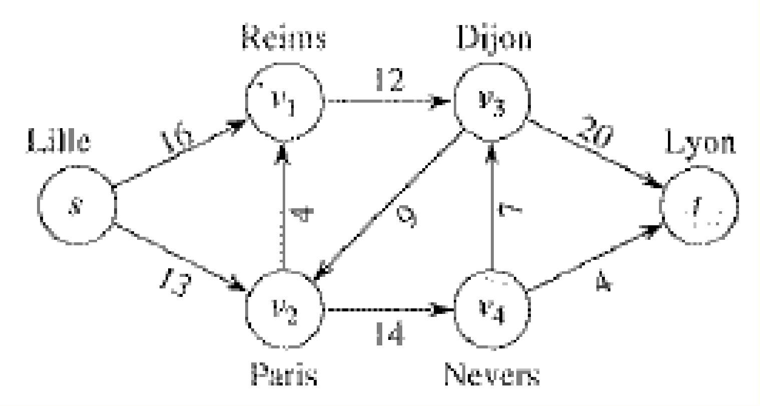
- Conservation du flot
  - Pour tout $u \in S - \{s, t\}$
    - $\sum_{v \in S} f(v, u) = \sum_{v \in S} f(u, v)$

  (le flot total arrivant à un sommet autre que la source et le puits doit être égal au flot total sortant de ce sommet)

- Quand $(u, v) \notin A$
  - Il ne peut y avoir de flot entre u et v
  - $f(u, v) = 0$

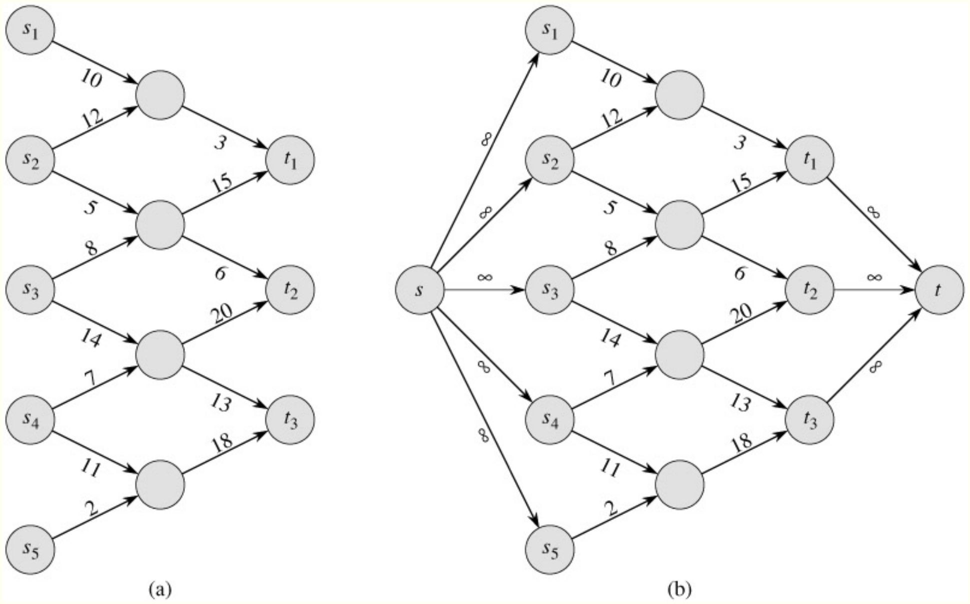
Problème du flot maximum

- À partir d'un réseau de flot G de source s et de puits t, ...
- ... on cherche le flot de valeur maximale
- Dans l'exemple ci-contre
  - Déterminer le plus grand nombre de produits qui peuvent être convoyés par jour ...
  - ... et produire cette quantité



Réseaux à sources et puits multiples

- Lorsqu'un problème de flot comporte plusieurs sources et plusieurs puits
  - Il peut être réduit à un problème de flot maximum ordinaire …
  - … en ajoutant une *supersource* et un *superpuits*



Résolution du problème du flot maximum

- Méthode de Ford-Fulkerson
  - Démarre avec $f(u, v) = 0$ pour tout $u, v \in S$ (flot initial de valeur 0)
  - Augmente itérativement la valeur du flot en trouvant un…
  - … <u>chemin améliorant</u> …
  - … dans un <u>réseau résiduel</u> associé G_f

```
MÉTHODE-FORD-FULKERSON(G, s, t)
    initialiser flot f à 0
    tant que il existe un chemin améliorant p dans le réseau résiduel G_f
        Augmenter le flot f le long de p
    retourner f
```

Réseau résiduel

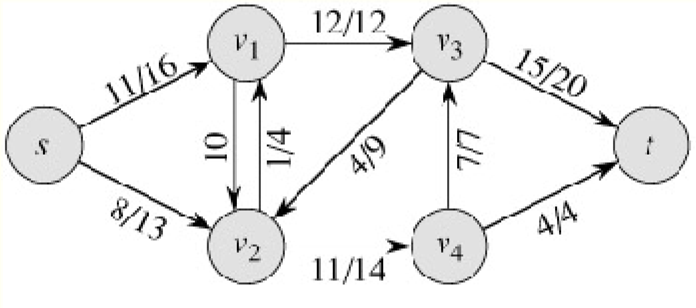
- Étant donnés un réseau de flot G et un flot f ...
- .. se compose d'arcs dont les capacités indiquent comment on peut modifier le flot sur les arcs de G
- Un arc du réseau de flot peut admettre une quantité de flot supplémentaire
  - Égale à la capacité de l'arc moins le flot sur cet arc
  - Si cette valeur est positive, on place cet arc dans G_f
    - Avec une capacité résiduelle $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$
- Les arcs de G qui sont dans G_f
  - sont ceux pouvant admettre plus de flot
- Les arcs (u, v) dont le flot est égal à la capacité
  - Ont $c_f(u, v) = 0$ et ne sont pas dans G_f
- Le réseau résiduel se compose aussi d'arcs n'appartenant pas à G
  - Quand un algorithme manipule le flot dans le but d'augmenter le flot total ...
  - ... il peut avoir à diminuer le flot sur un certain arc
- Pour représenter une possible diminution d'un flot positif $f(u, v)$ sur un arc de G
  - On place un arc (v, u) dans G_f
    - Avec la capacité résiduelle $c_f(v, u) = f(u, v)$

    (pouvant admettre du flot dans le sens inverse à (u, v)

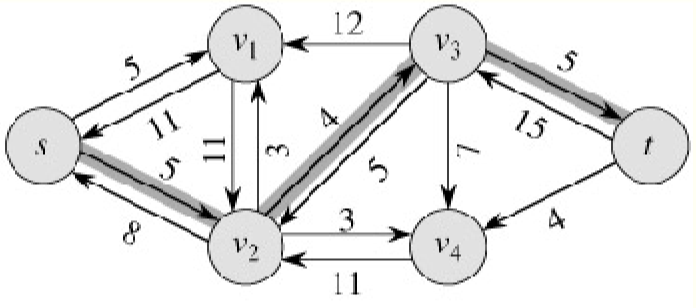
Réseau résiduel

- Capacité résiduelle

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{si } (u, v) \in A \\ f(v, u) & \text{si } (v, u) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Réseau de flot *G* et flot *f*

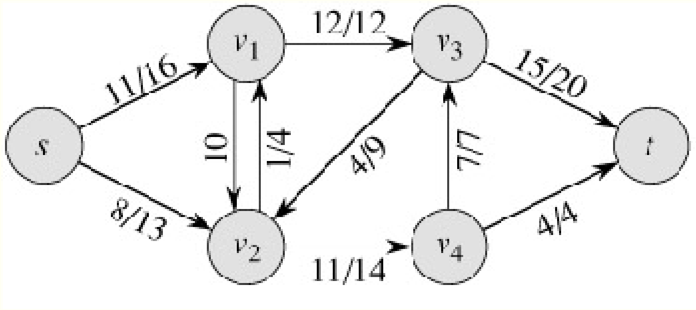


Réseau résiduel (avec chemin améliorant)

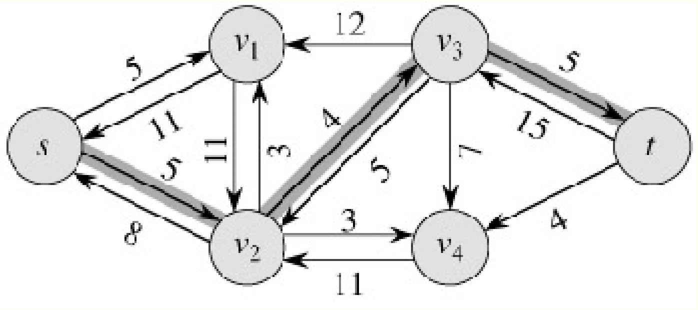
Réseau résiduel

- Un flot dans le réseau résiduel fournit une carte pour l'ajout de flot au réseau de flot original
- Si f est est un flot dans G et f' un flot dans le réseau résiduel correspondant G_f
- Augmentation du flot f de f'

$$f \uparrow f'(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & \text{si } (u,v) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



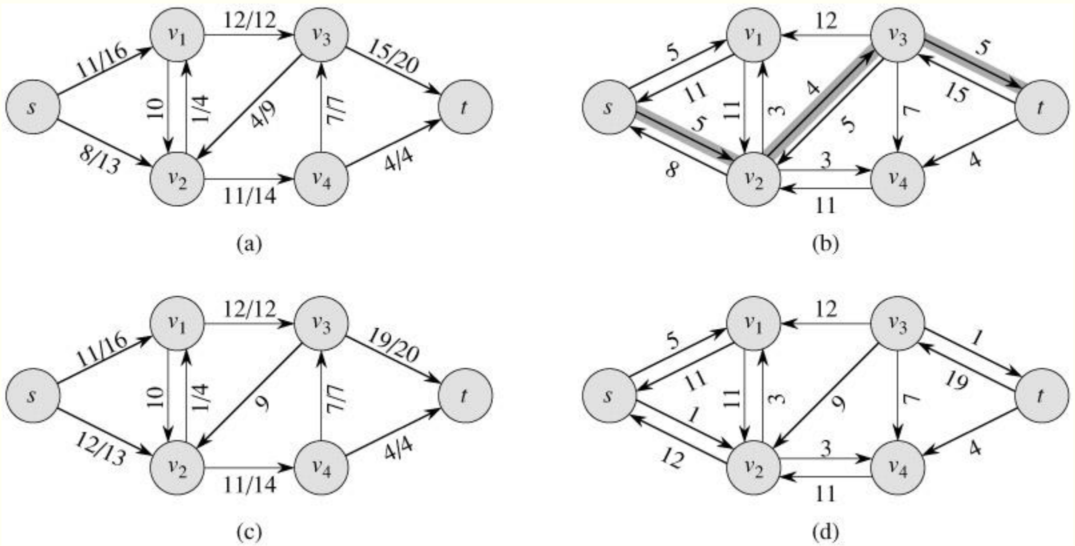
Réseau de flot G et flot f



Réseau résiduel (avec chemin améliorant)

Chemin améliorant

- Étant donnés un réseau de flot G et un flot f …
- … chemin simple de s vers t …
- … dans le réseau résiduel G_f
- Si on augmente le flot sur un arc (u, v) d'un chemin améliorant de la valeur $c_f(u, v)$
  - On n'enfreint pas la contrainte de capacité sur celui des deux arcs (u, v) et (v, u) du réseau original G
- Dans la figure ci-dessous
  - On peut faire passer jusqu'à 4 unités de flot supplémentaire sur chaque arc du chemin améliorant
- Capacité résiduelle du chemin améliorant p
  - $c_f(p) = \min \{c_f(u, v) : (u, v) \text{ est sur } p\}$



Algorithme de Ford-Fulkerson

- Exemple 1
  - Exécution de l'algorithme de Ford-Fulkerson
- Exemple 2
  - Procécure FORD-FULKERSON

PROCHAIN COURS

PAS DE PROCHAIN COURS, C’EST TERMINÉ ☹