Points, Vecteurs, Droites, Sphères et Matrices

Céline Loscos

CReSTIC

Université de Reims Champagne-Ardenne

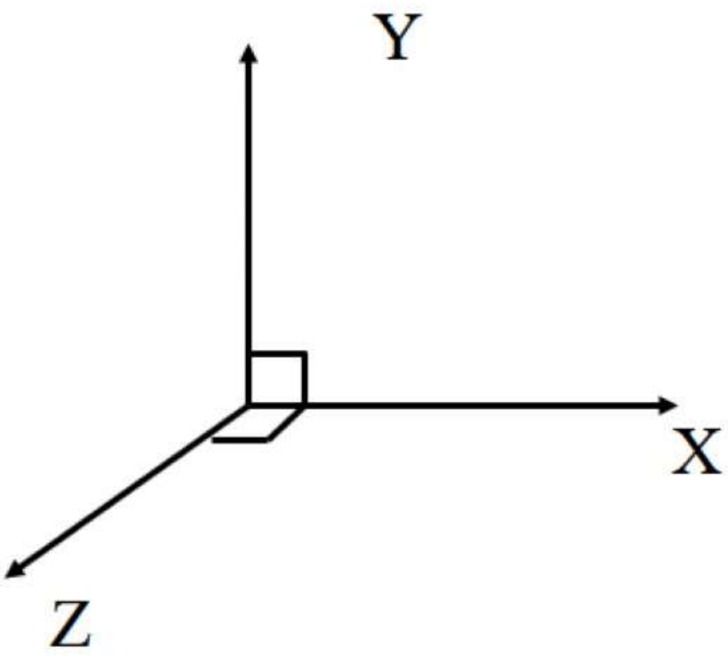
Contenu

- Points
- Vecteurs
- Droites
- Sphères
- Matrices
- Transformations 3D à partir de matrices
- Coordonnées homogènes

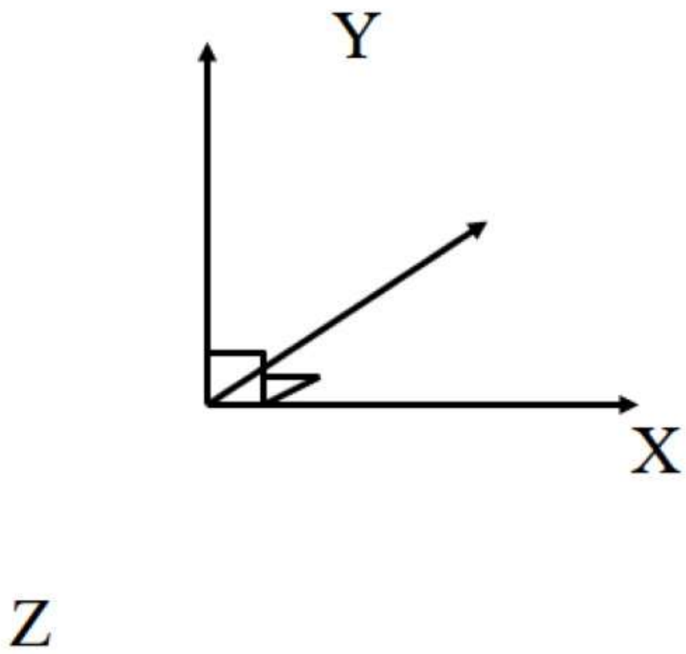
Pourquoi un peu de mathématiques ?

- En infographie, nous avons besoin de mathématiques à la fois pour décrire nos scènes et pour effectuer des opérations telles que la projection et diverses transformations.
- Systèmes de coordonnées (main droite/main gauche)
  - Servant de points de référence
- 3 axes labélisés x, y, z à angles droit.

Systèmes de coordonnées



Right-Handed System
(Z comes out of the screen)



Left-Handed System
(Z goes in to the screen)

Points, P (x, y, z)

- Un point nous donne une position par rapport à l'origine de notre système de coordonnées

Vecteurs, V (x, y, z)

- Representent une *direction* (et une taille) dans l'espace 3D

- Points != Vecteurs

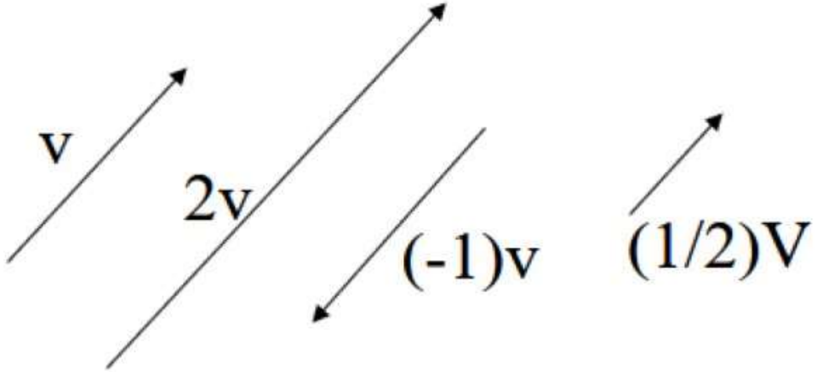
Vecteur + Vecteur = Vecteur

Point – Point = Vecteur

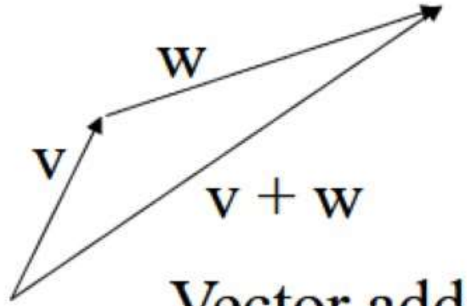
Point + Vecteur = Point

Point + Point = ?

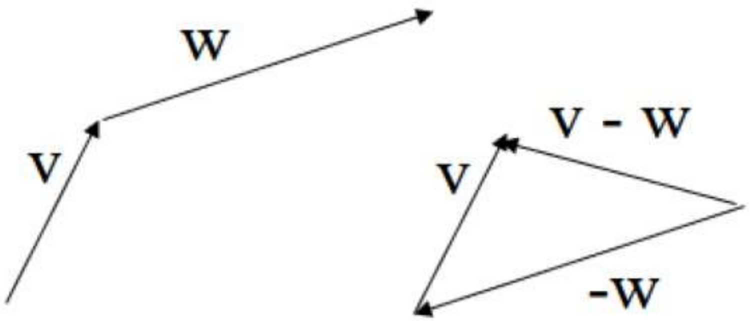
Vecteurs, V (x, y, z)



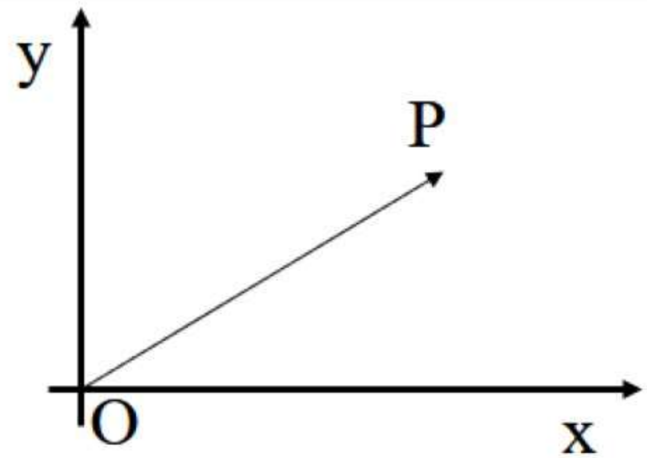
Scalar multiplication of vectors (they remain parallel)



Vector addition sum v + w



Vector difference v - w = v + (-w)



Vector $\overrightarrow{OP}$

Vecteurs V

- Longueur (norme) du vecteur $\vec{V}$ (x, y, z)
  $| \vec{V} | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- Un vecteur unitaire: un vecteur peut être normalisé de telle sorte qu'il conserve sa direction, mais qu'il soit mis à l'échelle pour avoir une longueur d'unité

$$\overrightarrow{V_u} = \frac{Vecteur\ \vec{V}}{Norme\ de\ \vec{V}} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

CReSTIC

Université de Reims Champagne-Ardenne

Produit scalaire

$$u \cdot v = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$$

$$u \cdot v = |u|\ |v| \cos\theta$$

$$\cos\theta = u \cdot v / |u|\ |v|$$

- Ceci est purement un nombre scalaire et non un vecteur.
- Que se passe-t-il quand les vecteurs sont unitaires ?
- Qu'est-ce que cela signifie si le produit scalaire == 0 ou == 1?

Produit vectoriel

- Le résultat du produit vectoriel entre deux vecteurs n'est pas un scalaire mais un vecteur perpandiculaire au plan formé par les deux vecteurs 2
- Peut être calculé avec le déterminant :

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_v & y_v & z_v \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_v & y_v & z_v \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_v & y_v & z_v \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_v & y_v & z_v \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix}$$

u x v = $\mathbf{i}(y_v z_u - z_v y_u)$, $-\mathbf{j}(x_v z_u - z_v x_u)$, $\mathbf{k}(x_v y_u - y_v x_u)$

- Norme $|u \times v| = |u||v|\sin\theta$
- Le produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même est nul

Equation parametrique d'une droite (un rayon)

Etant donnés deux points $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, la droite passant par ces deux points peut s'exprimer par :

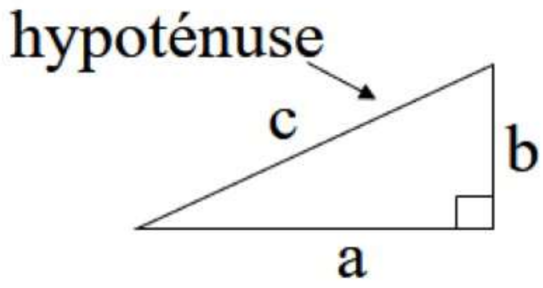
$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = \begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

avec $-\infty < t < \infty$

Equation d'une sphère

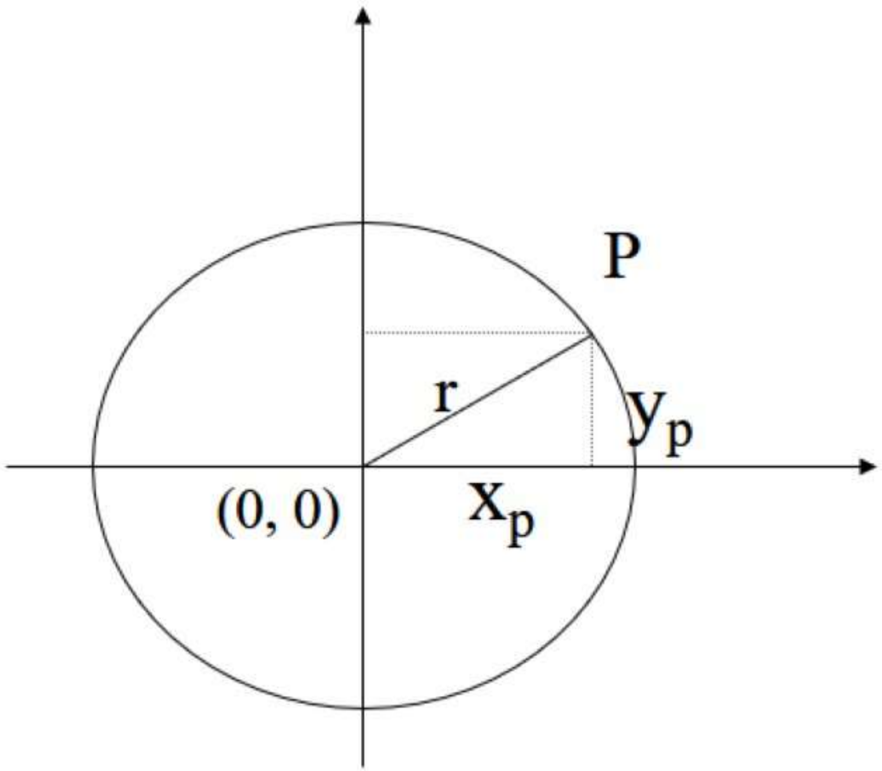
- Théorème de Pythagore

$$a^2 + b^2 = c^2$$



- Pour un cercle centré à l'origine et dont le rayon est r, pour chaque point sur le cercle, on a :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

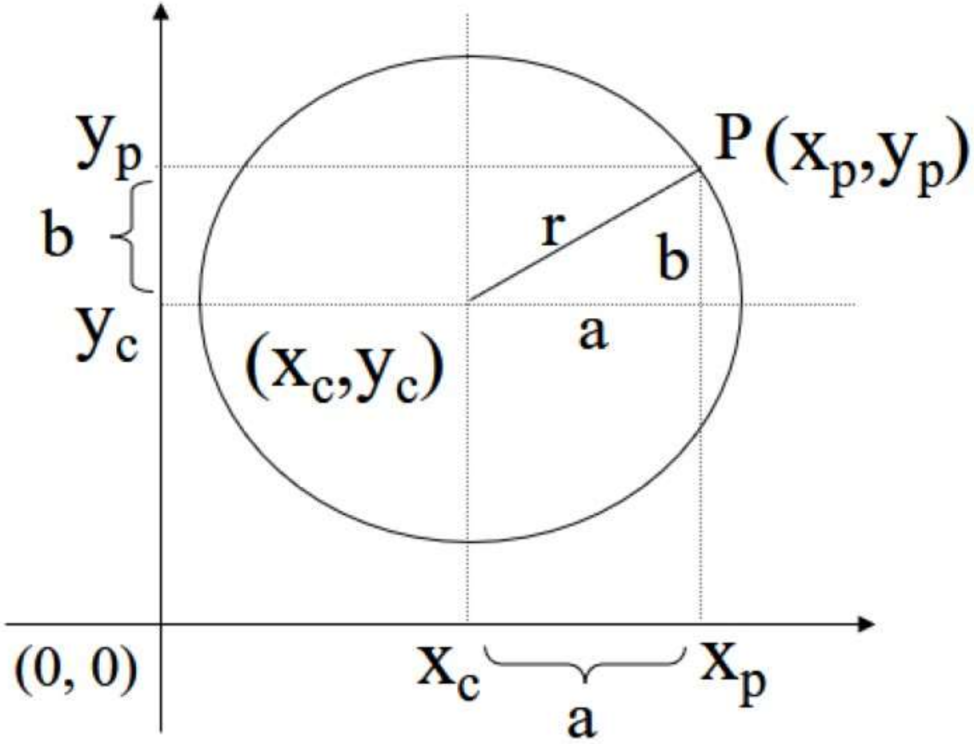


CReSTIC

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Equation d'une sphère

- Si le cercle n'est pas centré à l'origine



On a toujours

$$a^2 + b^2 = r^2$$

Mais

$$a = x_p - x_c$$

$$b = y_p - y_c$$

Soit le cas general : $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

Equation d’une sphère

- Le théorème de Pythagore se généralise en 3D

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

- Ce qui donne l’ équation de la sphère :

$$\boxed{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2}$$

Et à l’origine $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$

Vecteurs and Matrices

- Une matrice est un tableau de nombres avec des dimensions M (lignes) par N (colonnes)
  - Exemple d'une matrice 3 par 6
  - L'élément en 2,3 est (3)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Un vecteur peut être considéré comme une matrice 1 x M

$$v = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

CReSTIC

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Les différents types de matrices

- Matrices identité - I

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Symétrique

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

- Diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- Les matrices diagionales sont symétriques
- Les matrices identité sont diagonales

CReSTIC

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Operation on Matrices

- Addition
  - Réalisée par élément

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

- Transposée
  - "Retournement" (M x N devient N x M)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Operations on Matrices

- Multiplication
  - Possible avec les dimensions
    - m_1 x n_1 et m_2 x n_2 si et seulement si $n_1 = m_2$
  - Le résultat est une matrice m_1 x n_2
- Exemple, multiplication de la matrice A de dimension 2 x 3 et la matrice B de dimension 3 x 4
    - Donne comme résultat une matrice C de dimension 2 x 4
- Attention : Si A x B n'est pas possible, cela ne veut pas dire que B x A n'est pas possible !

Ordre de multiplication des matrices

- A est de m x k , B est de k x n
- C = A x B défini par

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$$

- BxA n'est pas nécessairement égale à AxB

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & & \\ * & & \\ * & & \\ * & & \\ * & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & * & \\ . & * & \\ . & * & \\ . & * & \\ . & * & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & * & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ * & * & * & * & * \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & * & \\ . & * & \\ . & * & \\ . & * & \\ . & * & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & \\ . & * & \\ & & \end{pmatrix}$$

Inverse

- Si $A \times B = I$ et $B \times A = I$ alors

  $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$

Transformations 3D

- Dans l'espace 3D, les vecteurs peuvent transformés par des matrices 3x3

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + yd + zg & xb + ye + zh & xc + yf + zi \end{pmatrix}$$

CReSTIC

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Facteur d'échelle

- Un facteur d'echelle peut être représenté par une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & yb & zc \end{pmatrix}$$

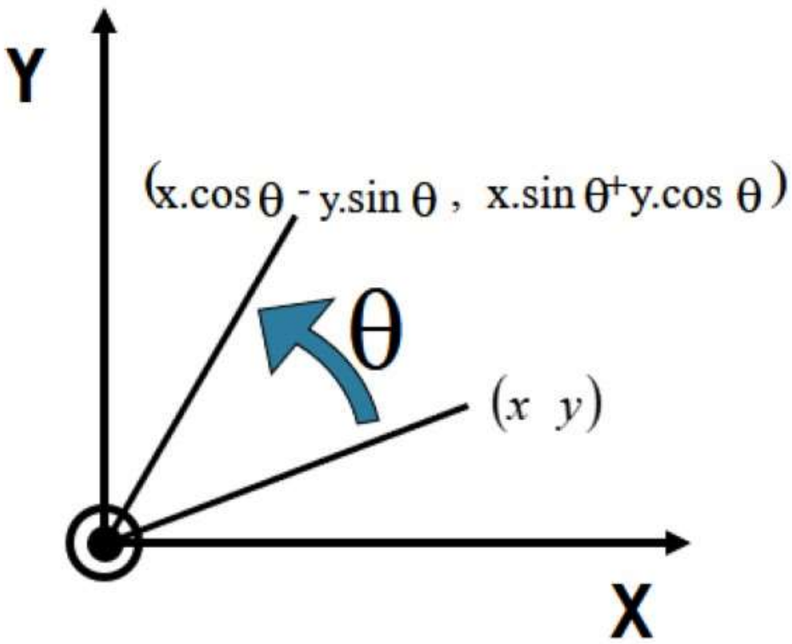
- Exemple, un facteur d'echelle de 2 sur l'axe des x et de -2 sur l'axe des z :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

Rotation

- Rotation autour de l'axe z

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Les **valeurs de z** restent les mêmes alors que les **valeurs de x et y** changent

Rotation X, Y   et échelle

- Autour de X

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Autour de Y Y

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Echelle

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

CReSTIC

Université de Reims Champagne-Ardenne

Points homogènes

- Ajout d'une dimension mais contrainte d'être égale à 1 (x,y,z,1)
- Homogénéité veut dire que tout point de l'espace 3D peut être représenté par une infinite de points homogènes en 4D.
  - (2 3 4 1) = (4 6 8 2) = (3 4.5 6 1.5)
- Pourquoi ?
  - La 4D va permettre de gérer la translation de façon matricielle

Vecteurs homogènes

- Vecteurs != Points
- Les points de peuvent pas s’additionner
- Si A et B sont des points, A-B est un vecteur
- Les vecteurs homogènes sont de la forme (x y z 1)
- Ils peuvent s’ajouter

Translation sous la forme homogène

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & y+b & z+c & 1 \end{pmatrix}$$

- La donnée homogène est préservée lors de la translation est reste égale à 1

Composition des transformations

- R est la matrice de rotation et les facteurs d'échelle
- T est la translation

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & T_1 \\ R_4 & R_5 & R_6 & T_2 \\ R_7 & R_8 & R_9 & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R.T$$

L'ordre des multiplications est important

- Rotation puis translation

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-z\\y\\1\end{pmatrix}\text{ puis }\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\-z\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x+2}\\\boldsymbol{-z+3}\\\boldsymbol{y+4}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$$

- Translation puis rotation

$$\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y+3\\z+4\\1\end{pmatrix}\text{ puis }\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y+3\\z+4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{-z-4}\\\boldsymbol{y+3}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$$

Conclusion

- Opérations sur les vecteurs
- Opérations sur les matrices
- Les matrices servant à calculer les transformations sur les vecteurs
  - Rotation, Scale, Translation
- On peut composer les transformations (attention à l'ordre !)
- Les calculs doivent se faire sur les formes homogènes