2.2 Tuyến tính hóa tại điểm làm việc

- Tại sao cần tuyến tính hóa?
  - Tất cả quá trình thực tế đều là phi tuyến (ít hay nhiều)
  - Các mô hình tuyến tính dễ sử dụng (thỏa mãn nguyên lý xếp chồng)
  - Phần lớn lý thuyết điều khiển tự động sử dụng mô hình tuyến tính (ví dụ hàm truyền đạt)
- Tại sao tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc?
  - Quá trình thường được vận hành trong một phạm vi xung quanh điểm làm việc (bài toán điều chỉnh!)
  - Tuyến tính hóa trong một phạm vi nhỏ giúp giảm sai lệch mô hình
  - Cho phép sử dụng **biến chênh lệch**, đảm bảo điều kiện áp dụng phép biến đổi Laplace (sơ kiện bằng 0).

Hai phương pháp tiếp cận

- Tuyến tính hóa trực tiếp trên phương trinh vi phân dựa theo các giả thiết về điểm làm việc:

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{\rho A}(w_1 + w_2 - w) \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\rho A h}(w_1 x_1 + w_2 x_2) - \dfrac{1}{\rho A h}(w_1 + w_2)x \end{cases}$$

Giả thiết cố định

- Sử dụng biến chênh lệch và phép khai triển chuỗi Taylor: Đa năng, thông dụng

Phép khai triển Taylor

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \qquad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p, \mathbf{g}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$$

Giả sử có điểm cân bằng $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})$ hay $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$

Đặt:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u}$$

Ta có:

$$\dot{\mathbf{x}} = \Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x},\bar{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u}) \approx \underbrace{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})}_{0} + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} \Delta x + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} \Delta\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \Delta\mathbf{y} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x},\bar{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u}) \approx \underbrace{\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})}_{\bar{\mathbf{y}}} + \left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} \Delta\mathbf{u}$$

Đặt các ma trận Jacobi

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

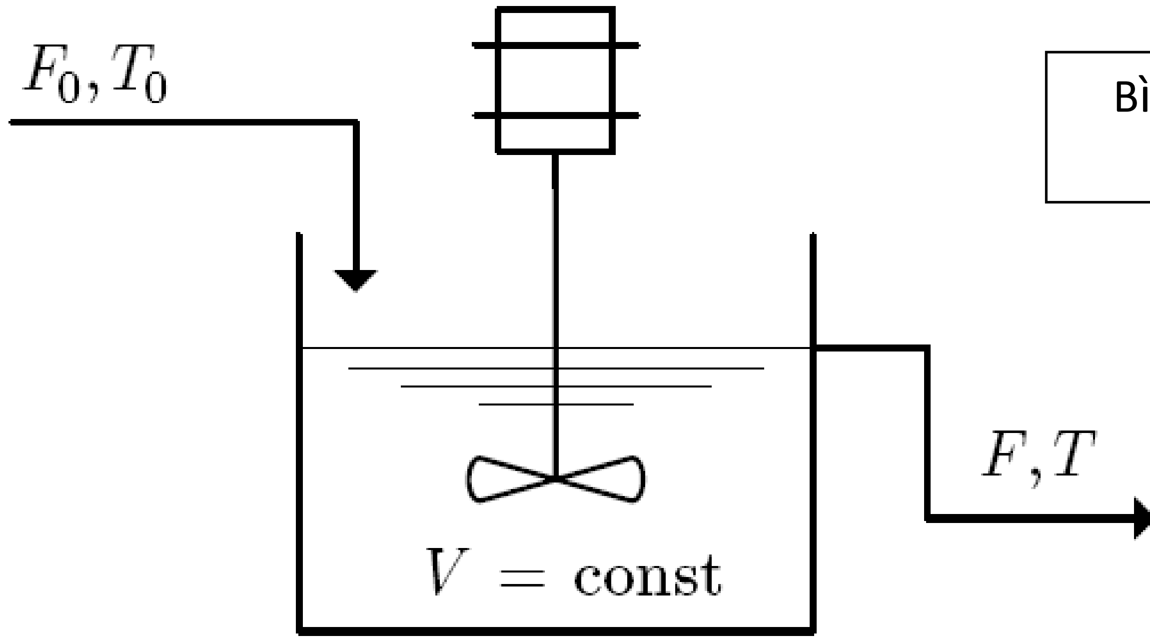
$$\mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

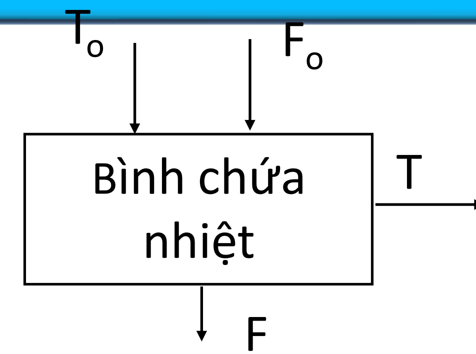
Thay lại ký hiệu $\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{x},\ \Delta\mathbf{u} \to \mathbf{u},\ \Delta\mathbf{y} \to \mathbf{y}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Ví dụ bình chứa nhiệt





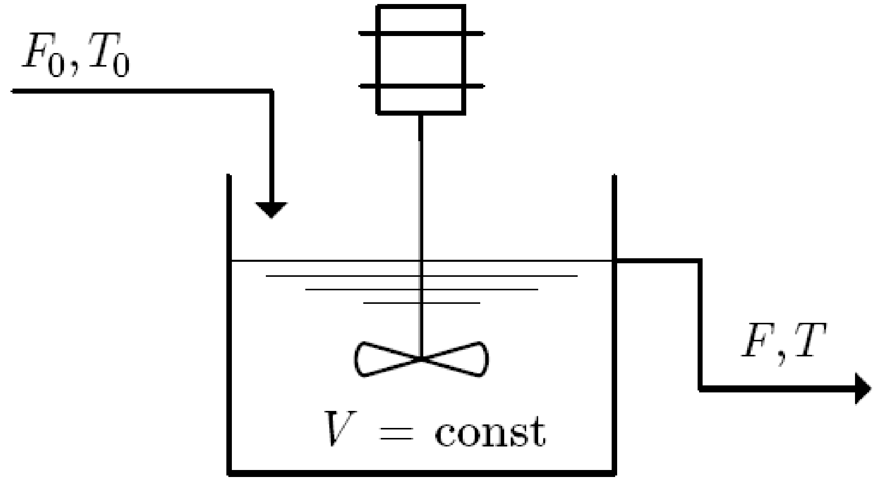
Phương trình cân bằng nhiệt

$$\frac{d(\rho V \widehat{H})}{dt} = F_0 \ \ \rho \widehat{H}_0 \text{ - } F\rho \widehat{H}$$

$$V = \text{const và } F_0 = F \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = \frac{F}{V}(T_0 - T)$$

Ví dụ bình chứa nhiệt

$$\frac{dT}{dt} = f(F,T,T_0) = \frac{F}{V}(T_0 - T)$$



Tại điểm làm việc:

$$0 = f(\bar{F},\bar{T},\bar{T}_0) = \frac{\bar{F}}{V}(\bar{T}_0 - \bar{T})$$

$$\frac{dT}{dt} = f(F,T,T_0) \approx \underbrace{f(\bar{F},\bar{T},\bar{T}_0)}_{0} + \left(\frac{\partial f}{\partial F}\Delta F + \frac{\partial f}{\partial T}\Delta T + \frac{\partial f}{\partial T_0}\Delta T_0 \right)_{\bar{F},\bar{T},\bar{T}_0}$$

$$= \frac{\bar{T}_0 - \bar{T}}{V}\Delta F - \frac{\bar{F}}{V}\Delta T + \frac{\bar{F}}{V}\Delta T_0$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\Delta T}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Delta T}{dt} + \frac{\bar{F}}{V}\Delta T = \frac{\bar{T}_0 - \bar{T}}{V}\Delta F + \frac{\bar{F}}{V}\Delta T_0$$

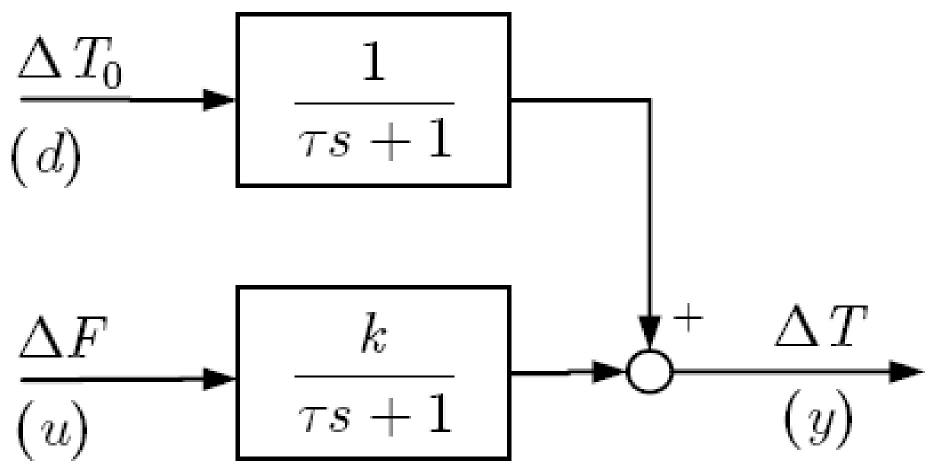
Sử dụng các ký hiệu: $y = \Delta T,\ u = \Delta F,\ d = \Delta T_0$

$$\frac{V}{\bar{F}}\frac{dy}{dt} + y = \frac{\bar{T}_0 - \bar{T}}{\bar{F}} u + d$$

Biến đổi Laplace cho cả hai vế:

$$s\frac{V}{\bar{F}} y(s) + y(s) = \frac{\bar{T}_0 - \bar{T}}{\bar{F}} u(s) + d(s)$$

$$y(s) = \underbrace{\frac{k}{\tau s + 1}}_{G_p(s)} u(s) + \underbrace{\frac{1}{\tau s + 1}}_{G_d(s)} d(s)$$



$$\tau = \frac{V}{\bar{F}},\ k = \frac{\bar{T}_0 - \bar{T}}{\bar{F}}$$

Ví dụ thiết bị khuấy trộn

$$\begin{cases} \dot{h} = f_1 = \dfrac{1}{\rho A}(w_1 + w_2 - w) \\ \dot{x} = f_2 = \dfrac{1}{\rho A h}(w_1 x_1 + w_2 x_2 - (w_1 + w_2)x) \end{cases}$$

$$0 = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w}$$

$$0 = \bar{w}_1 \bar{x}_1 + \bar{w}_2 \bar{x}_2 - (\bar{w}_1 + \bar{w}_2)\bar{x}$$

Phương trình thứ nhất đã tuyến tính, chỉ cần viết lại với biến chênh lệch:

$$\Delta \dot{h} = \frac{1}{\rho A}(\Delta w_1 + \Delta w_2 - \Delta w)$$

Biến đổi Laplace cho cả hai vế:

$$s\Delta H(s) = \frac{1}{\rho A}(\Delta W_1(s) + \Delta W_2(s) - \Delta W(s))$$

Đặt $k_{wh} = \dfrac{1}{\rho A}$

$$\boxed{\Delta H(s) = \frac{k_{wh}}{s}\left(-\Delta W(s) + \Delta W_1(s) + \Delta W_2(s)\right)}$$

Khai triển chuỗi Taylor cho phương trình thứ hai:

$$\Delta \dot{x} = (\dot{x} - \dot{\bar{x}}) = \dot{x}$$

$$\approx \left(\frac{\partial f_2}{\partial h}\Delta h + \frac{\partial f_2}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_2}{\partial w_1}\Delta w_1 + \frac{\partial f_2}{\partial w_1}\Delta w_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Delta x_2 \right)_{\bar{*}}$$

$$= -\frac{1}{\rho A \bar{h}^2} \underbrace{(\bar{w}_1\bar{x}_1 + \bar{w}_2\bar{x}_2 - (\bar{w}_1 + \bar{w}_2)\bar{x})}_{0}\Delta h - \frac{1}{\rho A \bar{h}} \underbrace{(\bar{w}_1 + \bar{w}_2)}_{\bar{w}}\Delta x$$

$$+ \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}}{\rho A \bar{h}}\Delta w_1 + \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}}{\rho A \bar{h}}\Delta w_2 + \frac{\bar{w}_1}{\rho A \bar{h}}\Delta x_1 + \frac{\bar{w}_2}{\rho A \bar{h}}\Delta x_2$$

$$= \frac{1}{\rho A \bar{h}}\left(-\bar{w}\Delta x + (\bar{x}_1 - \bar{x})\Delta w_1 + (\bar{x}_2 - \bar{x})\Delta w_2 + \bar{w}_1\Delta x_1 + \bar{w}_2\Delta x_2\right)$$

Biến đổi Laplace cho cả hai vế:

$$\rho A \bar{h} s \Delta X(s) =$$

$$-\bar{w}\Delta X(s) + (\bar{x}_1 - \bar{x})\Delta W_1(s) + (\bar{x}_2 - \bar{x})\Delta W_2(s) + \bar{w}_1\Delta X_1(s) + \bar{w}_2\Delta X_2(s)$$

Chia cả hai vế cho $\overline{w}$ và chuyển vế

$$\left(\frac{\rho A\overline{h}}{\overline{w}}s+1\right)\Delta X(s)=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}}{\overline{w}}\Delta W_1(s)+\frac{\overline{x}_2-\overline{x}}{\overline{w}}\Delta W_2(s)+\frac{\overline{w}_1}{\overline{w}}\Delta X_1(s)+\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}}\Delta X_2(s)$$

Ký hiệu các tham số (đặc biệt quan tâm tới thứ nguyên):

$$\tau=\frac{\rho A\overline{h}}{\overline{w}},\ k_{w1x}=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}}{\overline{w}},\ \ k_{w2x}=\frac{\overline{x}_2-\overline{x}}{\overline{w}},\ k_{x1x}=\frac{\overline{w}_1}{\overline{w}},\ k_{x2x}=\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}}$$

Ta đi tới dạng mô hình hàm truyền đạt quen thuộc:

$$\boxed{\Delta X(s)=\frac{k_{w1x}}{\tau s+1}\Delta W_1(s)+\frac{k_{w2x}}{\tau s+1}\Delta W_2(s)+\frac{k_{x1x}}{\tau s+1}\Delta X_1(s)+\frac{k_{x2x}}{\tau s+1}\Delta X_2(s)}$$

Đặt lại ký hiệu (vector):

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\Delta h\\ \Delta x\end{bmatrix},\ \mathbf{u}=\begin{bmatrix}\Delta w\\ \Delta w_1\end{bmatrix},\ \mathbf{d}=\begin{bmatrix}\Delta w_2\\ \Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix},\ \mathbf{y}=\mathbf{x}$$

Mô hình hàm truyền đạt của quá trình được viết gọn lại:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G_p}(s)\mathbf{u}(s) + \mathbf{G_d}(s)\mathbf{d}(s)$$

$$\mathbf{G_p}(s) = \begin{bmatrix} -\frac{k_{wh}}{s} & \frac{k_{wh}}{s} \\ 0 & \frac{k_{w1x}}{\tau s+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G_d}(s) = \begin{bmatrix} \frac{k_{wh}}{s} & 0 & 0 \\ \frac{k_{w2x}}{\tau s+1} & \frac{k_{x1x}}{\tau s+1} & \frac{k_{x2x}}{\tau s+1} \end{bmatrix}$$

Từ hai phương trình vi phân tuyến tính hóa ta cũng có thể đi tới **mô hình trạng thái**:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{d}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

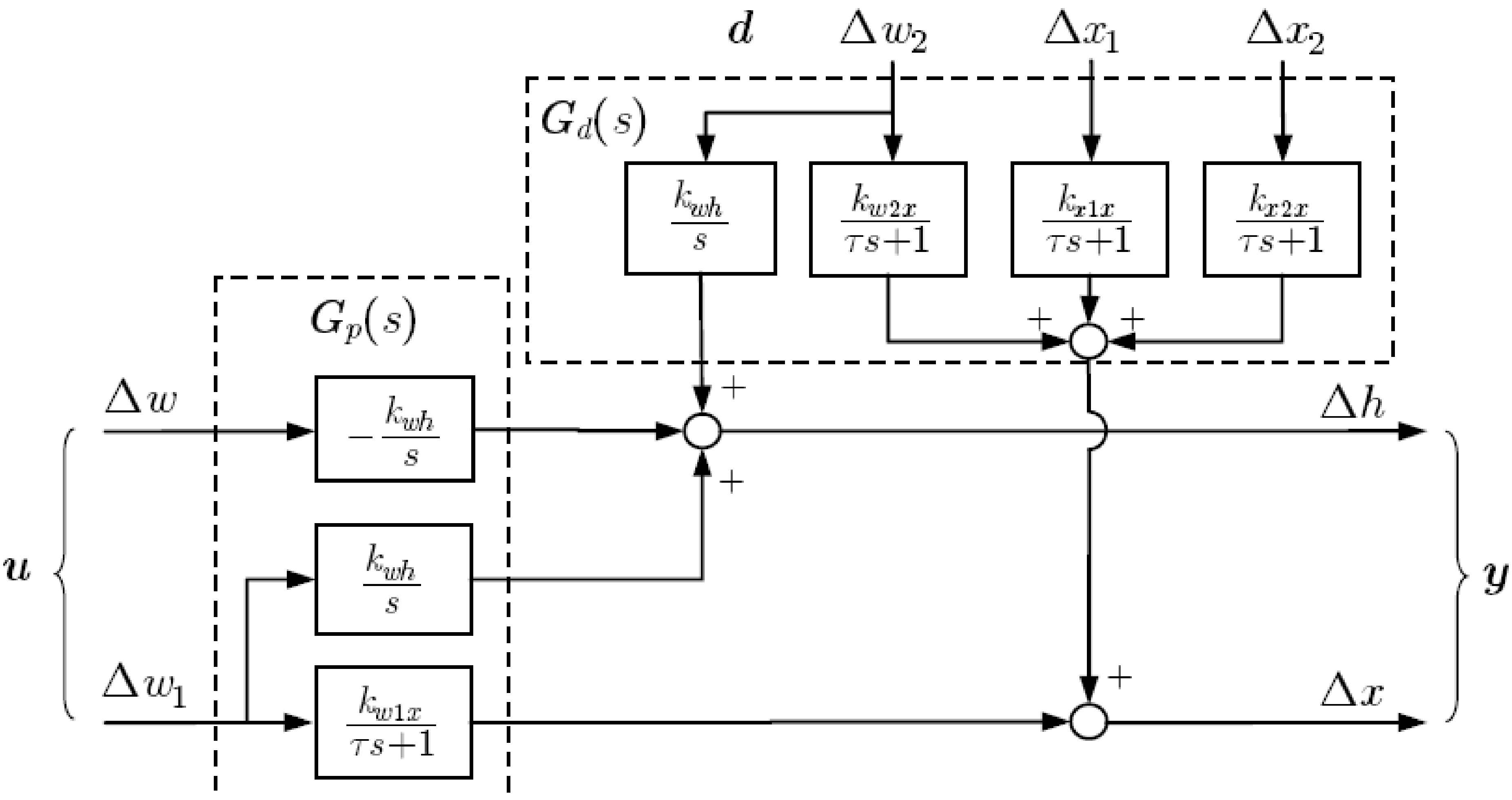
$$\mathbf{A} = \frac{1}{\rho A\bar{h}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\bar{w} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\rho A\bar{h}}\begin{bmatrix} -\bar{h} & \bar{h} \\ 0 & \bar{x}_1 - \bar{x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\rho A\bar{h}}\begin{bmatrix} \bar{h} & 0 & 0 \\ \bar{x}_2 - \bar{x} & \bar{w}_1 & \bar{w}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quan hệ giữa hai mô hình:

$$\mathbf{G_p}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{G_d}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}$$

Sơ đồ khối của mô hình hàm truyền đạt



• Ví dụ tính toán với các thông số cho trước:

$$A = 0.8\,\mathrm{m}^2,\ \rho = 1.25\,\mathrm{kg/lít}$$
$$\bar{w}_2 = 200\,\mathrm{kg/phút}$$
$$\bar{x} = 0.4,\ \bar{x}_1 = 0.8,\ \bar{x}_2 = 0.2$$
$$\bar{h} = 1\,\mathrm{mét}$$

Từ các phương trình mô hình ở trạng thái xác lập:

$$\begin{cases} 0 = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w} \\ 0 = \bar{w}_1\bar{x}_1 + \bar{w}_2\bar{x}_2 - (\bar{w}_1 + \bar{w}_2)\bar{x} \end{cases}$$

Ta xác định được các giá trị còn lại tại điểm làm việc:

$$\bar{w}_1 = 100\ [\mathrm{kg/phút}]$$
$$\bar{w} = 300\ [\mathrm{kg/phút}]$$

Thay vào các ma trận truyền đạt:

$$\mathbf{G_p}(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{0.001}{s} & \dfrac{0.001}{s} \\ 0 & -\dfrac{0.000667}{3.333s+1} \end{bmatrix},\ \mathbf{G_d}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{0.001}{s} & 0 & 0 \\ -\dfrac{0.000667}{3.333s+1} & \dfrac{0.333}{3.333s+1} & \dfrac{0.667}{3.333s+1} \end{bmatrix}$$

Tóm tắt các bước tuyến tính hóa

1. Đơn giản hóa mô hình như có thể, nếu được thì nên tách thành nhiều mô hình con độc lập.
2. Xác định rõ điểm làm việc và giá trị các biến quá trình tại điểm làm việc để có mô hình trạng thái xác lập.
3. Đối với các phương trình tuyến tính, thay thế các biến thực bằng các biến chênh lệch.
4. Tuyến tính hóa từng phương trình phi tuyến của mô hình tại điểm làm việc bằng phép khai triển Taylor, bắt đầu với các phương trình đại số và sau đó là với các phương trình vi phân.
5. Đặt lại ký hiệu cho các biến chênh lệch (sử dụng ký hiệu vector nếu cần) và viết gọn lại các phương trình mô hình.
6. Tính toán lại các tham số của mô hình dựa vào giá trị các biến quá trình tại điểm làm việc.
7. Chuyển mô hình tuyến tính về dạng mong muốn, ví dụ biểu diễn trong không gian trạng thái hoặc bằng hàm truyền đạt.