අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය
General Certificate of Education (Adv.Level) Examination

සංයුක්ත ගණිතය I
Combined Mathematics I

KESS Inspire - 2025

10	
S	II

පැය තුනයි

පංතිය ____ විභාග අංකය ____

උපදෙස් :

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B** කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10)
- **A කොටස**
  සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- **B කොටස**
  ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A** කොටස, **B** කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B** කොටස **පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලැබූ ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ : 1	
2	
අධීක්ෂණය	

A කොටස

(1) $4^n + 15n - 1$ ප්‍රකාශනය සියලු $n \in Z^+$ සඳහා 9 න් බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

(2) එකම රූප සටහනක $y = |x| + 3$ හා $y = ||2x - 1| - 6|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
එනයින්, $|x| + 3| \geq |2x - 1| - 6|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලුම තාත්ත්වික අගයයන් සොයන්න.

(3) එකම ආගන්ඩ් සටහනක

(i) $|Z+1-2i|\leq 2$ සහ (ii) $\frac{\pi}{3}\leq \arg(Z-2i)\leq \pi$

යන අවශ්‍යතා තෘප්ත කරන Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරෙන පෙදෙස අඳුරු කර දක්වන්න. දෙවන වෘත්ත පාදය තුළ වූ පථ දෙකේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට අදාළ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, $r[\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)]$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. (මෙහි $r>0$ සහ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ලෙස වූ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ)

(4) $(1+ax)^n = 1+8x+24x^2+.....$ ලෙස සළකමු. $(a,n\in Z^+)$ නම් n සහ a හි අගයන් නිර්ණය කරන්න.

(5) $\lim_{x \longrightarrow 0} \left[\dfrac{x(\sqrt[3]{1+6x} - (4x-1)^4}{(1-\cos 2\pi x}\right] = \dfrac{9}{\pi^2}$ බව පෙන්වන්න.

(6) $\int_0^5 \left|x^2 - 1\right| dx$ අගයන්න.

(7) $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$ සහ $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයකදී අඳිනු ලබන අභිලම්භයට මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඇති ලම්භක දුර නියතයක් බව පෙන්වන්න. (θ යනු පරාමිතියකි)

(8) මූල ලක්ෂ්‍යයත්, $2x + 3y - k = 0$ හා $x - y + 1 = 0$ සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයත් හරහා යන සරල රේඛාව l ලෙස ගනිමු. (මෙහි $k \neq 0$ වන නියතයකි). l හි සමීකරණය k ඇසුරින් සොයන්න. $(1,1)$ හා $(3,4)$ ලක්ෂ්‍යය දෙක l හි එකම පැත්තේ පිහිටන පරිදි වේ නම් $k < 18$ බව ද පෙන්වන්න.

(9) $A \equiv (-8,-8)$ හා $B \equiv (12,2)$ වේ. AB විශ්කම්භය වන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. එම වෘත්තය සමග (4,8) ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම සොයන්න.

(10) $\dfrac{\text{Sin}^4\theta}{x} + \dfrac{\cos^4\theta}{y} = \dfrac{1}{x+y}$ වන්නේ නම් $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ බව පෙන්වන්න.

B කොටස

(11) (a) $2x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ විවේචකය a හා b ඇසුරෙන් සොයා මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.
$x^2 - 2x - 7$ හි මූල α, β විට $(\alpha^n + \beta^n) - 2(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - 7(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) = 0$ බව පෙන්වන්න.
එනයින් $\alpha^3 + \beta^3$ හි අගය සොයන්න.

(b) ශේෂ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.
f(x) වර්ගජ ශ්‍රිතය (x-2), (x-1), (2x+1) බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂයන් පිළිවෙලින් -5, -6, 0 වේ. f(x) සොයන්න.
$g(x) = f(x).H(x) + 5x + 2$ නම් $5x + 2 - A(x-3) + B$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. A හා B නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. ඒනයින් g(x), (x-3) න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය සොයන්න.
තවද $f(x) > 0$ වන x හි අගය පරාසය සොයන්න.

(12) (a) සර්වසම බෑග් 4 ක් සර්වසම ගණක යන්ත්‍ර 6 ක් හා සර්වසම පොත් 10 ක් සිසුන් දස දෙනෙකු අතරේ බෙදා දිය යුතුව ඇත. සෑම සිසුවෙකුටම කුමන හෝ වෙනස් වර්ග දෙකක අයිතම දෙකක් පමණක් ලැබෙන පරිදි මෙම බෙදා දීම සිදු කළ යුතුයි.
(i) වෙනත් කිසිදු විශේෂත්වයක් නොමැති විට,
(ii) එක්තරා සිසුවෙකු බෑගයක් ඉල්ලා සිටී නම් එවිට,
(iii) එක්තරා සිසුවෙකු බෑගයක් ලබා ගැනීමට ප්‍රතික්ෂේප කරයි නම් එවිට, මෙම බෙදා දීම සිදු කළ හැකි වෙනස් ආකාර ගණන කොපමණද?
(iv) දැන් මෙහි අඩංගු බෑග් 4 පමණක් වෙනස් වර්ණ 4 කින් යුක්ත වෙයි නම්, එවිට මෙම බෙදා දීම සඳහා කොපමණ වෙනස් ආකාර ගණනක් පවතීද?

(b) පළමු පදය 3 සහ පොදු අන්තරය 2 වන සමාන්තර ශ්‍රේණියක n ($n \in Z^+$) වන පදය වන T_n, n ඇසුරින් ලියා දක්වන්න.

$r \in Z^+$ සඳහා ; $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots$ අපරිමිත ශ්‍රේණියේ r වන පදය, U_r ලියන්න.

$r \in Z^+$ සඳහා $f(r) = \frac{Ar + B}{(r+1)^2}$ ලෙස ගනිමින්, $f(r) - f(r-1) = U_r$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගයයන් සොයන්න.

එනයින්, $\sum_{r=1}^{n} U_r = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව සාධනය කර, පද අනන්තයට එහි ඓක්‍යය ලබා ගන්න.

$r \in Z^+$ සඳහා $W_r = U_{2r+1} + U_{2r+2}$ විට, $\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{1}{9}$ බව සාධනය කරන්න.

(13) (a) $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ සහ $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ලෙස දී ඇති න්‍යාස දෙකකි. AB සොයන්න.

$AB + C = I$ වන්නේ නම් C න්‍යාසය සොයන්න.

C^{-1} ලියා දක්වා $D = AC^{-1} + C^{-1}B$ වන පරිදි D න්‍යාසය ලබා ගන්න.

(b) $x, y \in R$ විට $Z = x + iy$ වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන් $|Z|$ හා $\overline{Z}$ අර්ථ දක්වන්න.

$Z\cdot\overline{Z}=|Z|^2$ බව පෙන්වා $\dfrac{Z}{\overline{Z}}$ යන්න $a + i\,b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a සහ b යනු x හා y ඇසුරින් නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. $x = y$ විට, $\arg(Z)-\arg(\overline{Z})=\dfrac{\pi}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$\sqrt{3}+i$ හා $\sqrt{3}-i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $r > 0$ හා $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$n, n\in Z^{+}$ වන විට $\left(\sqrt{3}+i\right)^m\left(\sqrt{3}-i\right)^n=256$ බව දී ඇත. ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් m හා n හි අගයයන් සොයන්න.

(14) (a) $f(x) = x^3 + Ax + B$ වේ. තවද $f(x) = (x-1)^2\, t(x)$ ලෙසද ලිවිය හැක. $3x^2 + A = (x-1)[(x-1)t'(x) + 2\,t(x)]$ බව පෙන්වන්න. එනයින් A හා B නියත නිර්ණය කරන්න.

$g(x)=\dfrac{f(x)}{(x-1)(x+3)}$ වේ. $g'(x)=\dfrac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$ බව පෙන්වන්න. g(x) හි අඩුවන හා වැඩිවන ප්‍රාන්තරද ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරවුම් ලක්ෂ්‍යයද දක්වමින් y=g(x) හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

(b) 3m උස පිංතූරයක් උස සිරස් බිත්තියක එල්ලා ඇත්තේ එහි පහළම දාරය නිරීක්ෂකයකුගේ ඇසට 1m ඉහළින් පවතින සේය. බිත්තියේ සිට කොපමණ තිරස් දුරක් ඈතින් සිට පිංතූරය නිරීක්ෂණය කළහොත්, පිංතූරය මගින් නිරීක්ෂකයාගේ ඇසේ ආපාතනය කරන කෝණය උපරිම වේද?

(15) (a) $\dfrac{1}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ භින්න භාග ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

එනයින්, $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ සොයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle 3\int_0^{\pi/2}\sin^{3/2}x\,dx=\int_0^{\pi/2}\operatorname{cosec}^{1/2}x\,dx$ බව පෙන්වන්න.

(c) a හා b නියත වන විට, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්

$\displaystyle I=\int_{-1}^{1}\frac{x^{2024}}{e^x+1}dx$ සහ $\displaystyle J=\int_{-1}^{1}\frac{x^{2024}}{e^{-x}+1}dx$ නම් I හා J අතර ඒකජ සම්බන්ධතා දෙකක් ලබාගෙන

$I=J=\dfrac{1}{2025}$ බව පෙන්වන්න.

(16) (a) ABC යනු AB = BC වන පරිදි වූ ත්‍රිකෝණයකි. AC පාදයේ සමීකරණය $2x - y + 1 = 0$ වන අතර $B\hat{A}C = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ වේ. තවද, B ලක්ෂ්‍යයෙහි බණ්ඩාංක (2,1) බව දී ඇත. AB රේඛාව x අක්ෂයේ ධන දිශාව සමඟ සුළු කෝණයක් සාදයි නම්, D ලක්ෂ්‍යයේ බණ්ඩාංකද ලබා ගන්න.

(b) S = 0 වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 4x - 14 = 0$ යැයි ගනිමු. ප්‍රථම මූලධර්ම භාවිතයෙන් S යන්න $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ ආකාරයට සකස් කරන්න. මෙහි a, b හා c යනු නිර්ණය කළ යුතු තාත්වික නියත වේ. එමගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයත්, අරයත් අපෝහනය කරන්න. මෙම වෘත්තයට ඇඳි ඒකක 8 ක දිගින් යුත් ජ්‍යාය A හා B ලක්ෂ්‍යවලදී වෘත්තය හමුවේ. කේන්ද්‍රයේ සිට අදාළ ජ්‍යායට ඇඳි ලම්බයේ දිග සොයන්න.

$l=0$ රේඛාවට $y = 2k - x$ සමීකරණයක් ඇත. මෙම රේඛාව S=0 වෘත්තය ඡේදනය වන ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක x බණ්ඩාංකය $x^2 - 2(k+1)x + 2k^2 - 7 = 0$ තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න. එමගින් $y = 2k - x$ රේඛාව S=0 වෘත්තය,

(i) තාත්වික ලක්ෂ දෙකකදී කපා හැරීමට

(ii) ස්පර්ශ කිරීමට

(iii) වෘත්තය සම්පූර්ණයෙන් බාහිරව පිහිටීමට අවශ්‍යතාවන් සොයන්න.

$l=0$ රේඛාව S=0 වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් නම් k සඳහා පිළිගත හැකි තාත්වික අගයන් සොයන්න.

(17) (a) ABC ත්‍රිකෝණයක

$\mathrm{Sin}\,2A + \mathrm{Sin}\,2B + \mathrm{Sin}\,2C = 4.\mathrm{Sin}A.\mathrm{Sin}B.\mathrm{Sin}C$ බව පෙන්වන්න.

(b) කෝසයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක CN මධ්‍යස්ථය AB පාදයට N හි දී හමු වේ. $A\hat{N}C = \theta$ හා CN= q නම්,

$\frac{1}{q} = \frac{c\mathrm{Sin}\theta}{2k} = \frac{2c\cos\theta}{a^2 - b^2}$ බව සාධනය කරන්න.

k යනු ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය වේ.

(c) $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3 = \frac{\pi}{2}$ නම්, $x \in R$ වන පරිදි x ට පැවතිය හැක්කේ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ පමණක් බව පෙන්වන්න.

Corrections

5) $$\lim_{x \to 0} \left\{ \frac{x\left[\sqrt[3]{1+6x} - (4x-1)^4\right]}{(1-\cos 2\pi x)} \right\} = \frac{9}{\pi^2}$$

11) b) $5x + 2 = A(x-3) + B$