

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; P_A = A(A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

они уже ортонормальны.

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}; R = Q^{-1} A = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = QR;$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; P_B = B(B^T B)^{-1} B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad b_2 \perp b_1 \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

ортонормальны

$$R = Q^{-1} B = Q^T B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$B = QR$$