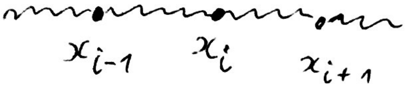
HW5 Task 3.

$x_i(t) = u_i e^{-i\omega t}$



$$m_i \ddot{x}_i = F_i = k(x_{i-1} - x_i) + k(x_{i+1} - x_i) =$$
$$= k(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i)$$

(для нечётных $m_i = m$
чётных $m_i = M$)

$$\ddot{x}_i - \frac{k}{m_i}(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0;$$ в более краткой форме:

$$\ddot{\vec{x}} + A\vec{x} = 0$$

Теперь подставим $x_i(t) = u_i e^{-i\omega t}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -\omega^2 \cdot e^{i\omega t}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + e^{-i\omega t} A\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A\vec{u} = \omega^2 \vec{u},$$

то есть
ω^2 – собств. знач. A
$\vec{u}$ – собственные вектора.

Матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & \dots & 0 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{M} & \frac{2k}{M} & -\frac{k}{m} & \dots & 0 & 0 \\ - & - & - & & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & 0 & 0 & \dots & -\frac{k}{M} & \frac{2k}{M} \end{pmatrix} \underset{\substack{k=1 \\ \frac{M}{m}=2}}{=\!=} \frac{1}{M}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & \dots & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ код