№1. а) $\|x\|_2 \le \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$; $\quad x : m$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i^m |x_i|^2} \le \sqrt{m\cdot(\max_i |x_i|)^2} = \sqrt{m}\,\max_i |x_i| = \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$$

$\|x\|_2 \le \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$, ч.т.д.

Если $\quad x_i^* = \max_j x_j$, то $\|x^*\|_2 = \sqrt{m}\,\|x^*\|_\infty$

Или если $m=1$.

б) $\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$

$A: m\times n$

$x: n$

$Ax: m$

$$\|A\|_2 = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x\ne 0} \frac{\sqrt{\sum_i^m (Ax)_i^2}}{\|x\|_2} =$$

$$= \sup_{x\ne 0} \frac{\sqrt{\sum_i^m \left(\sum_j^n a_{ij}x_j\right)^2}}{\|x\|_2} \ge \sup_{x\ne 0} \frac{\sqrt{\sum_i^m \left(\sum_j^n a_{ij}x_j\right)^2}}{\underset{\text{из а}}{\sqrt{n}\,\|x\|_\infty}} \ge$$

$$\ge \sup_{x\ne 0} \frac{\sqrt{\max_i \left(\sum_j^n a_{ij}x_j\right)^2}}{\sqrt{n}\,\|x\|_\infty} = \sup_{x\ne 0} \frac{\max_i \left|\sum_j^n a_{ij}x_j\right|}{\sqrt{n}\,\|x\|_\infty} = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\sqrt{n}\,\|x\|_\infty} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{n}\,\|A\|_2 \ge \|A\|_\infty$, ч.т.д.