



# Apuntes de la asignatura de Técnicas experimentales del grado de Física

Pablo Domínguez, Julio Fernández, Manuel Yuste, Ignacio Zúñiga.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA.



# Índice general

<b>I</b>	<b>Teoría</b>	<b>9</b>
<b>1.</b>	<b>Apuntes sobre tratamiento de errores</b>	<b>11</b>
1.	Objetivos . . . . .	11
2.	Introducción. . . . .	11
2.1.	Concepto de Error. . . . .	12
2.2.	Representación numérica de los resultados experimentales. . . . .	13
2.3.	Unidades y análisis dimensional . . . . .	14
3.	Medidas directas. . . . .	16
3.1.	Definición. . . . .	16
3.2.	Valor esperado y error absoluto. . . . .	17
3.3.	Número de Medidas. . . . .	21
4.	Medidas indirectas. . . . .	22
4.1.	Definición. . . . .	22
4.2.	Valor esperado y error absoluto. . . . .	22
4.3.	Casos Particulares. . . . .	23
5.	Gráficas. . . . .	24
5.1.	Tipos de Representaciones gráficas. . . . .	24
5.2.	Ajuste por mínimos cuadrados. . . . .	25
6.	Ejemplos. . . . .	32
6.1.	Cálculo de la aceleración de la gravedad. . . . .	32
6.2.	Distancia focal de una lente convergente. . . . .	38
7.	Instrucciones para el laboratorio y elaboración de guiones . . . . .	41
7.1.	Material de laboratorio . . . . .	41
7.2.	Memoria a realizar por el alumno . . . . .	45
8.	Autoevaluación . . . . .	47
9.	Resumen . . . . .	48
10.	Bibliografía . . . . .	48

<b>II</b>	<b>Guiones de Prácticas</b>	<b>49</b>
<b>2.</b>	<b>Péndulo simple</b>	<b>51</b>
1.	Propósito . . . . .	51
2.	Fundamento Teórico . . . . .	51
3.	Material . . . . .	52
4.	Procedimiento . . . . .	53
5.	Cuestiones . . . . .	54
6.	Anexos . . . . .	54
6.1.	Péndulo simple y movimiento armónico . . . . .	54
7.	Montaje alternativo . . . . .	58
7.1.	Materiales . . . . .	58
7.2.	Procedimiento . . . . .	58
<b>3.</b>	<b>Oscilador masa-muelle</b>	<b>61</b>
1.	Propósito de la práctica . . . . .	61
2.	Introducción . . . . .	61
3.	Fundamento teórico . . . . .	62
4.	Experimento . . . . .	63
4.1.	Materiales . . . . .	64
4.2.	Procedimiento . . . . .	64
4.3.	Análisis . . . . .	65
4.4.	Cuestiones . . . . .	66
5.	Anexos . . . . .	66
5.1.	Más sobre la ley de Hooke . . . . .	66
6.	Práctica extra: Movimiento armónico simple . . . . .	67
6.1.	Procedimiento . . . . .	68
7.	Práctica alternativa: muelles en serie y en paralelo. . . . .	69
7.1.	Procedimiento . . . . .	71

<b>4. Conservación de la energía mecánica</b>	<b>73</b>
1. Propósito . . . . .	73
2. Fundamento teórico. . . . .	73
3. Dispositivo Experimental . . . . .	75
4. Procedimiento. . . . .	75
5. Análisis de los datos. . . . .	76
5.1. Momento de Inercia. . . . .	76
6. Cuestiones . . . . .	78
<b>5. Resistencia eléctrica</b>	<b>79</b>
1. Propósito de la práctica . . . . .	79
2. Fundamento teórico . . . . .	79
3. Dispositivo experimental . . . . .	80
3.1. Material necesario . . . . .	80
4. Procedimiento . . . . .	80
5. Análisis . . . . .	81
6. Cuestiones . . . . .	83
<b>6. Medida del campo magnético terrestre</b>	<b>85</b>
1. Propósito de la práctica . . . . .	85
2. Fundamento teórico . . . . .	85
3. Dispositivo experimental . . . . .	86
3.1. Material necesario . . . . .	87
4. Procedimiento . . . . .	87
5. Análisis . . . . .	89
<b>7. Polímetro y osciloscopio</b>	<b>91</b>
1. Propósito de la práctica . . . . .	91
1.1. Polímetro: Introducción . . . . .	91
1.2. Osciloscopio . . . . .	92
2. Dispositivo experimental . . . . .	96
2.1. Material necesario . . . . .	96
3. Procedimiento . . . . .	97
3.1. MEDIDAS CON EL POLÍMETRO . . . . .	97
3.2. Medida de corrientes en c.c. . . . .	98
3.3. MEDIDAS CON EL OSCILOSCOPIO . . . . .	99

<b>8. Análisis de Instrumentos (I): Resistencia interna.</b>	<b>109</b>
1. Objetivos . . . . .	109
2. Introducción . . . . .	109
2.1. Galvanómetro de d'Arsonval . . . . .	109
2.2. Fuente de corriente continua (c.c) . . . . .	112
2.3. Voltímetro . . . . .	113
3. Experimento . . . . .	114
3.1. Materiales . . . . .	114
3.2. Metodología . . . . .	114
3.3. Cuestiones . . . . .	115
<b>9. Análisis de Instrumentos (II): Construcción de un amperímetro, un voltímetro y un óhmetro</b>	<b>117</b>
1. Objetivos . . . . .	117
2. Introducción . . . . .	117
2.1. Construcción y calibración de un amperímetro. . . . .	117
2.2. Construcción y calibración de un voltímetro. . . . .	119
2.3. Construcción y calibración de un óhmetro. . . . .	120
3. Experimento . . . . .	122
3.1. Materiales . . . . .	122
3.2. Metodología . . . . .	122
3.3. Cuestiones . . . . .	124
<b>10. Ecuación de los gases perfectos</b>	<b>125</b>
1. Propósito. . . . .	125
2. Fundamento teórico. . . . .	125
3. Dispositivo Experimental. . . . .	126
4. Procedimiento. . . . .	127
5. Análisis de los datos . . . . .	128
6. Cuestiones . . . . .	128

<b>11.Densidad de sólidos y líquidos</b>	<b>129</b>
1. Propósito de la práctica . . . . .	129
2. Fundamento teórico . . . . .	129
3. Dispositivo experimental . . . . .	131
3.1. Material necesario . . . . .	131
4. Procedimiento . . . . .	131
4.1. Primera parte . . . . .	131
4.2. Segunda parte . . . . .	132
5. Análisis . . . . .	132
6. Cuestiones . . . . .	133
<b>12. Viscosidad</b>	<b>135</b>
1. Propósito de la práctica . . . . .	135
2. Fundamento teórico . . . . .	135
3. Dispositivo experimental . . . . .	136
4. Procedimiento . . . . .	137
4.1. Primer experimento: Determinación del radio de la gota de agua	137
4.2. Segundo experimento: Determinación de la densidad del aceite .	139
4.3. Tercer experimento: Determinación de la velocidad de caída de la gota de agua . . . . .	140
4.4. Cálculo de la viscosidad del aceite . . . . .	143
5. Análisis y conclusiones . . . . .	143
6. Cuestiones y ejercicios en torno a la práctica . . . . .	143
7. Propuesta de experimento sugerido por esta práctica . . . . .	144
8. Apéndice . . . . .	145
<b>13. Reflexión y refracción de la luz</b>	<b>147</b>
1. Propósito de la práctica . . . . .	147
2. Fundamento teórico . . . . .	147
3. Dispositivo experimental . . . . .	149
4. Procedimiento . . . . .	149
5. Tercer experimento: ángulo límite . . . . .	154
6. Análisis y conclusiones . . . . .	154





# Parte I

## Teoría



# Apuntes sobre tratamiento de errores

## 1. Objetivos

Antes de realizar las prácticas de laboratorio, el alumno debe conocer una serie de técnicas previas que son imprescindibles a la hora de realizar cualquier tipo de experimento en Física. Dentro de estas técnicas se encuentran:

- Concepto de medida y de error.
- Manejo correcto de las unidades.
- Representación numérica de los resultados experimentales.
- Presentación adecuada de los resultados obtenidos en el laboratorio.
- Realización de gráficas.
- Análisis de errores.
- Exposición adecuada de los resultados obtenidos y conclusiones.

En esta guía se pretende dotar al alumno de una serie de conocimientos mínimos acerca de los puntos anteriores, esenciales para la experimentación en Física.

## 2. Introducción.

En las ciencias experimentales y cuantitativas se determinan las magnitudes a estudiar mediante un número y una unidad. Desgraciadamente, estas mediciones nunca son perfectas y siempre llevan asociado un determinado error, una incertidumbre. Incluso el más perfecto de los aparatos experimentales obtendrá una medición que llevará siempre asociada una determinada imprecisión. Los motivos para estas incertidumbres son variados, empezando por las imperfecciones de nuestros sentidos y de los aparatos que empleamos y acabando por las simples equivocaciones, también denominadas como

“errores sistemáticos”.

Por tanto, es imprescindible que en cualquier medida que realicemos se indique la imprecisión cometida, o más bien una estimación (a ser posible una cota superior) de la misma. No tiene sentido proporcionar un resultado de una medición sin un error asociado (que nos habla de la precisión de la medida) y una unidad en el valor obtenido. La estimación de los errores en las medidas tiene un cierto carácter subjetivo. Por ejemplo, si tenemos una regla y queremos obtener el error asociado a una medida con ella, normalmente diremos que es la mitad de la mínima unidad que la regla mide. Es decir, si la regla mide en milímetros, el error asociado a la medida será  $\pm 0,5$  mm. Sin embargo, esto es una estimación, que debe tener carácter de cota máxima. Si, pongamos el caso, medimos en una posición extraña que nos impida ver correctamente las divisiones de la regla, deberíamos aumentar el error asociado a la medida. Es decir, en toda medida existe una limitación debida al método, a los instrumentos o a otras circunstancias que el experimentador admite (y debe admitir) y sobre la cual su experiencia y la capacidad de evaluar el sistema experimental empleado, le permite establecer un margen de error.

Pero, por otro lado, tenemos otro tipo de error, el aleatorio, fruto del azar, que puede ser consecuencia de muchas incertidumbres o incluso puede ser debido a variaciones intrínsecas del sistema físico a nivel microscópico. Estos errores pueden analizarse mediante la estadística y pueden ser analizados mediante el análisis de errores. Sin embargo, en la teoría de errores también es necesario aplicar el sentido común o algún criterio en principio subjetivo. Por ejemplo, para mejorar una determinada medida y reducir el error aleatorio, suele ser recomendable medir muchas veces y hacer una media. Pero si nuestros aparatos de medición no son suficientemente precisos, nunca podremos obtener una medida mucho mejor que la precisión de estos. No podemos obtener con una resolución de micras la medición de una longitud si empleamos una regla con división de milímetros, por muchas veces que midamos y por muchas medias que hagamos. A diferencia de otras materias que estudiará el alumno en un grado de Física, en la experimentación y en el análisis de errores el sentido común tiene un cierto papel, por ejemplo, a la hora de saber cuando dejar de medir porque los resultados no pueden mejorar más. Los métodos estadísticos y el análisis de errores proporcionan una guía en este sentido, pero será el propio alumno el que deberá aprender a evaluar los resultados experimentales a través de la guía de personas más expertas, del estudio, de la reflexión sobre los datos obtenidos y, sobre todo, mediante la experiencia y la práctica.

### 2.1. Concepto de Error.

Error es la desviación existente entre el resultado de la medición de una magnitud física y el valor verdadero de ésta. El error es algo implícito al proceso de medida y se puede clasificar, según su origen, como sigue:

- Error de tipo sistemático: Es aquel debido a defectos en el método o en el instrumento de medición, reflejándose en una desviación, siempre en el mismo sentido, de los resultados de las medidas. Ejemplo: el error sistemático que se produce al utilizar una balanza mal calibrada.
- Error de tipo accidental: Es aquel debido a causas imposibles de controlar, alterándose los resultados de la medida de forma aleatoria. Ejemplo: el error cometido por la no coincidencia entre el inicio del experimento y la puesta en marcha de un cronómetro manual al empezar este.

Los errores sistemáticos pueden ser prácticamente eliminados al ser posible detectarlos y corregirlos. Sin embargo, los errores accidentales nunca pueden ser eliminados, aunque admiten un tratamiento estadístico que es el que expondremos más adelante.

## 2.2. Representación numérica de los resultados experimentales.

Al realizarse la medición de una magnitud física (que puede haberse hecho a través de un gran número de medidas individuales), nuestro objetivo es presentar el resultado final de la forma

$$\text{magnitud} = X^* \pm \epsilon$$

donde  $X^*$  es el valor aceptado de la magnitud resultado de la medición (al cual llamaremos también valor esperado) y  $\epsilon$  es una estimación del error absoluto cometido (al que también llamaremos incertidumbre). De esta manera, se está suponiendo implícitamente que el valor verdadero  $X_V$  de la magnitud verifica

$$X_V \in (X^* - \epsilon, X^* + \epsilon) \quad (1.1)$$

A la hora de escribir estos resultados, **siempre** se seguirán las siguientes reglas:

- La última cifra significativa<sup>1</sup> del valor esperado y la última cifra significativa del error han de ser del mismo orden decimal.

---

<sup>1</sup>Dado un número escrito en forma decimal, cifras significativas son todas aquellas distintas de cero. Un cero es una cifra significativa si

- Está situado entre dígitos no nulos.
- Está situado detrás de dígitos no nulos y a la derecha de la coma decimal.
- En el caso de números enteros, si está situado detrás de dígitos no nulos **y se ha escrito la coma decimal explícitamente**.

Por ejemplo, en la siguiente lista de números, se resaltan en negrita aquellas cifras que son significativas:

0,0**100205** (6 cifras sig.)    **10,230** (5 cifras sig.)    **1200**, (4 cifras sig.)    **1200** (2 cifras sig.)

- El error ha de tener una única cifra significativa. Se acepta que si la primera cifra significativa del error es un 1, se incluya una segunda.
- Se procurará expresar los resultados en notación científica, para así evitar la posible ambigüedad que surgiría en el caso que la última cifra significativa fuese un cero.
- El resultado ha de estar acompañado por las unidades correspondientes a la magnitud física que se ha medido.

Así, tras la realización de una medida (valor esperado y error absoluto), se redondeará el error absoluto para que así quede expresado con una única cifra significativa (o dos si la primera es un 1). Hecho esto, queda determinado el orden de la última cifra significativa del valor esperado, redondeándose éste en consecuencia. Algunos ejemplos (en la medida de distintas masas) son:

$$\begin{aligned}
 1,23782 \pm 0,074 \text{ kg} &\rightarrow 1,24 \pm 0,07 \text{ kg} \\
 0,087214 \pm 0,0001256 \text{ kg} &\rightarrow 0,08721 \pm 0,00013 \text{ kg} = (87,21 \pm 0,13) \times 10^{-3} \text{ kg} \\
 1276,23 \pm 31,456 \text{ kg} &\rightarrow 1280 \pm 30 \text{ kg} \rightarrow (1,28 \pm 0,03) \times 10^3 \text{ kg} \\
 1280,23 \pm 3,1456 \text{ kg} &\rightarrow 1280 \pm 3 \text{ kg} \rightarrow (1,280 \pm 0,003) \times 10^3 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Además del error absoluto o incertidumbre, suele incluirse en el resultado el error relativo, definido como

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{X^*} \quad (1.2)$$

siendo evidente que el error relativo es adimensional. Es usual expresar éste en términos de porcentajes, para lo cual basta multiplicar por 100 el resultado de la anterior ecuación.

El resultado de una medida es exacto si el valor verdadero de la magnitud se encuentra dentro del intervalo determinado por el valor esperado y el error absoluto asociado. El resultado de una medida es más preciso cuanto menor sea el error relativo del mismo. Puede así ocurrir que tengamos una medida muy precisa pero inexacta (por ejemplo, debida a un error sistemático no detectado) y, que por el contrario, una medida sea exacta pero imprecisa.

### 2.3. Unidades y análisis dimensional

Como se ha comentado anteriormente, cada medición o valor que escribamos tiene que tener una incertidumbre asociada y una unidad. Sin ambas cosas, el valor numérico no tiene sentido, porque no sabríamos cual es la fiabilidad del valor ni a qué se refiere. Es decir, para medir una magnitud hay que comparar siempre con un patrón de medida como puede ser el metro para comparar longitudes. Sin embargo, las unidades no son

Tabla 1.1: Unidades y símbolos del S.I.

Sistema Internacional (S.I.)			
Magnitud	Símbolo	Unidad SI	Símbolo SI
Longitud	L	metro	m
Masa	M	kilogramo	kg
Tiempo	T	segundo	s
Intensidad de corriente	I	amperio	A
Temperatura	$\theta$	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	N	mol	mol
Intensidad luminosa	J	candela	cd

absolutas ya que son un patrón de comparación y bien podríamos medir longitudes en pies. Por tanto, decir que algo mide  $l = 1,0 \pm 0,5$  a secas, no tiene ningún sentido porque es necesario indicar el patrón con el que se compara esa medida.

El número de patrones que se puede utilizar es enorme, pero dado que muchas magnitudes físicas están relacionadas al final puede reducirse en número de unidades patrón a un mínimo. Por ejemplo, la velocidad es la distancia dividida entre el tiempo, luego el patrón de velocidad estará referido al de la distancia y al del tiempo. El sistema de unidades más empleado por la comunidad científica es el Sistema Internacional (S.I.), que se adoptó en 1917 y que consiste en 7 unidades fundamentales que se resumen en la Tabla 1.1.

Cuando hablamos de “símbolo” en estas unidades patrón, nos referimos a una forma de llamar a las unidades sin necesidad de dar un número y una unidad. Manejar estos símbolos es muy útil para conocer las unidades derivadas de las fundamentales, que son las que se resumen en la Tabla 1.1. Por ejemplo, sabemos que la fuerza es la masa por la aceleración:  $F = ma$  y donde  $a = d^2x/dt^2 = (d/dt)(dx/dt)$ . De Física básica sabemos que la fuerza se expresa en Newtons (N) en el SI, pero ¿cuáles son las dimensiones de N? Es posible que lo sepamos de memoria, pero lo podemos calcular usando las expresiones anteriores. Esto es, la unidad de la aceleración es  $L/T^2$  y por tanto la unidad de la fuerza será  $M \cdot L/T^2$  que es igual a 1 N. Habitualmente, cuando hablamos de las unidades de una magnitud, se escribe la misma entre corchetes  $[ ]$ . Así, la unidad de la fuerza sería  $[F] = M \cdot L/T^2$ , la unidad de velocidad será  $[v] = L \cdot T^{-1}$ , etc.

El cálculo anterior es el ejemplo más simple de lo que se conoce como “análisis dimensional”, que se ocupa de los conceptos de magnitud, dimensión y homogeneidad de las ecuaciones físicas. No entraremos más en detalle en este campo por el momento. Cuentas como las mostradas en el apartado anterior son muy útiles, especialmente cuando nos encontramos en un ámbito experimental en donde no estamos seguros de las relaciones entre magnitudes físicas implicadas. Además, nos permiten detectar errores en

los cálculos que hayamos realizado. Siempre es recomendable, cuando calculamos una determinada magnitud a partir de otras, comprobar que las unidades encajan. Si no es así, es que hay necesariamente un error en alguna parte. La mayor parte de los errores que comenten los alumnos de laboratorio en un guión de prácticas tienen que ver con una equivocación a la hora de emplear las fórmulas.

Veamos algún ejemplo más. Supongamos que recordamos el valor  $(6,67 \times 10^{-11})$ , pero no las unidades de la constante de gravitación universal,  $G$ . Deducirla es directo si recordamos que:

$$F = G \frac{M m}{r^2}$$

Entonces  $[G] = [F][r]/[M][m] = (\text{M.L}/\text{T}^2) \cdot (\text{L}^2 / \text{M}^2) = \text{L}^3 / (\text{M} \cdot \text{T}^2)$ . De donde deducimos que  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2 = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ .

De hecho, a través de las dimensiones podemos ver que los argumentos de las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc, deben ser adimensionales. Esto es, sea dos magnitudes  $A$  y  $B$  tal que  $A = \ln B$ , entonces tenemos que  $dA = dB/B$ . Si ahora miramos las dimensiones de estas magnitudes obtenemos que  $[A] = [B]/[B] = 1$ . Como  $B = e^A$ , si  $[A] = 1$ , entonces  $[B] = 1$ .

Igualmente podemos relacionar  $A$  y  $B$  a través de  $A = \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$ . Dado que las dimensiones de  $\cos^2 B$  tiene que ser las mismas que las de la unidad, tenemos que  $[\cos^2 B] = [1] = 1$ . Y por tanto  $[B] = 1$ .

### 3. Medidas directas.

#### 3.1. Definición.

Como su nombre indica, una medida directa de una magnitud es aquella que se obtiene por lectura directa en un cierto aparato (p.ej. la masa en una balanza) sin necesidad de hacer cálculo alguno.

Llamamos precisión del aparato de medida a la mínima desviación medible en la escala graduada del instrumento (p. ej. en una báscula en la que la distancia entre dos marcas de la escala sea de 1 gramo, la precisión de la misma es 1 gramo; en un aparato digital, su precisión es el orden de la última cifra que aparece en la pantalla del mismo).

Al efectuar una medida directa individual, el orden de la última cifra significativa del resultado de la medida es una elección hasta cierto punto subjetiva, que depende de la elección del experimentador, siempre considerando que no puede ser mucho menor que



la precisión del aparato. Por ejemplo, supongamos que tenemos un regla con división en milímetros y medimos que un lápiz se encuentra más o menos en torno a los 36 mm de longitud. Sería razonable considerar el rango más probable del valor real de la medición se encuentre entre los 35,5 y los 36,5 mm. Es decir diríamos que  $l = 36,0 \pm 0,5$  mm. A menudo se emplea esta convención: el error asociado a una medida directa individual es la mitad de la precisión del aparato.

Sin embargo, puede haber aparatos en donde la diferencia entre dos marcas de escala sea muy grande y claramente se observe que la medida queda mucho más cerca de una valor que de otro, pudiéndose realizar una estimación del valor, interpolando los dos valores del aparato entre los que se encuentra la medida. O todo lo contrario, que consideremos que por las circunstancias del experimento, debemos tomar un error mayor que la precisión del aparato. Como se ha comentado en la introducción, el sentido común juega aquí cierto papel y el alumno debe razonar y expresar adecuadamente qué criterio ha empleado a la hora de obtener los errores asociados a las medidas directas, siempre tomando en cuenta que es más adecuado tener una visión pesimista de la estimación de error, es decir, utilizar cotas máximas razonables en la estimación de la incertidumbre.

### 3.2. Valor esperado y error absoluto.

Supongamos que hemos realizado  $N$  medidas directas individuales de una magnitud que denotamos como  $X$ , siendo  $x_j$   $\{j = 1, 2, \dots, N\}$  cada uno de los resultados individuales. El valor esperado de la magnitud, denotado por  $X^*$ , se identifica con la media aritmética de las cantidades  $x_j$ , que denotamos ahora por simplicidad mediante  $x$  (a menudo se escribe  $\bar{x}$  o  $\langle x \rangle$ ).

$$X^* = x = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \quad (1.3)$$

Una medida adecuada de la dispersión de los datos viene dada por la varianza del conjunto de datos o desviación cuadrática media:

$$s^2(X) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - x)^2$$

#### Desviaciones típicas

La raíz de  $s^2$  es la desviación típica o desviación estándar:

$$s(X) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - x)^2} \quad (1.4)$$

Conviene señalar que cuando el número  $N$  es pequeño, suele definirse la desviación típica en la forma siguiente:

$$s(X) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_j - x)^2} \quad (1.5)$$

en donde se ha sustituido el  $N$  del denominador por  $N - 1$ . Un argumento cualitativo para justificar la utilización de esta fórmula para la desviación típica es que, dado un conjunto de  $N$  datos  $x_j$ , el valor de  $x$  elimina un grado de libertad, ya que la media se obtiene mediante una ecuación de ligadura entre los  $N$  números  $x_j$ . Es decir,  $N - 1$  indica el número de grados de libertad y es igual al número de variables  $x_j$  menos 1, que corresponde al cálculo de la media. Otro argumento cualitativo es que, con la nueva definición, si solo se tiene un dato ( $N = 1$ ), tendríamos que  $s = 0/0$  o una dispersión “indeterminada”. Sin embargo, con la definición anterior, obtendríamos  $s = 0$ , una dispersión nula. Puede argumentarse que es más adecuado, cuando solo se tiene un dato y no se sabe nada de la dispersión, que el resultado de la desviación típica sea “indeterminado” a que sea nulo.

Una vez conocidas las desviaciones típicas, nos interesa saber cómo son las propagaciones de las mismas, para saber cuál es la desviación típica de la media. Es posible demostrar que, dada una función  $Q(X, Y)$  en donde las desviaciones  $x_j - x$  y  $y_j - y$  son pequeñas, se obtiene:

$$q = q(x, y)$$

donde  $q$  es la media de  $Q$  y  $x$  e  $y$  son las medias de  $X$  e  $Y$ . Puede obtenerse entonces que la varianza de  $Q$  es igual a:

$$s^2(Q) = \left( \frac{\partial Q}{\partial X} \right)^2 s^2(X) + \left( \frac{\partial Q}{\partial Y} \right)^2 s^2(Y)$$

Y de esta ecuación se deducen las fórmulas de propagación de varianzas y desviaciones típicas. Por ejemplo, si tenemos que  $Z = X \pm Y$ , tendríamos que la varianza resultante es:

$$s(Z) = \sqrt{s^2(X) + s^2(Y)}$$

De esta forma, podemos obtener la desviación típica de la media, ya que si:

$$x = \frac{1}{N} \sum x_j$$

Entonces:

$$s^2(x) = \sum \frac{1}{N^2} s^2(X) = \frac{s^2(X)}{N}$$

dado que hay  $N$  sumandos iguales. La **desviación típica de la media** es:

$$s(x) = \frac{s(X)}{\sqrt{N}} \quad (1.6)$$

De forma más explícita:

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N (x_j - x)^2} \quad (1.7)$$

Este es el error, la desviación típica de la media, que deberá asignarse a la media de los datos experimentales. Es de especial interés el factor  $1/\sqrt{N}$  que tenemos en esta cantidad<sup>2</sup>. La desviación típica  $s(X)$  representa la incertidumbre promediada de las medidas individuales. Por tanto, si hacemos más medidas, empleando la misma técnica, esta cantidad no variará apreciablemente. Sin embargo, la desviación típica de la media decrecerá a medida que aumentemos el número de medidas  $N$ , precisamente debido al factor  $1/\sqrt{N}$ . Esto es lo que uno esperaría, si se hacen más medidas, el resultado será mejor.

Pero hay que tener en cuenta aquí la raíz del factor, cuya forma es tal que se incrementa muy poco para valores grandes de  $N$ . Es decir, si queremos aumentar la precisión en un factor 10, tendremos que incrementar  $N$  un factor 100, algo que no parece ni por asomo razonable. Es más, los errores sistemáticos que podamos estar cometiendo no se reducen aumentando el número de mediciones. Por tanto, si en la práctica se quiere aumentar considerablemente la precisión de la medida, lo más razonable tal vez sea mejorar la forma de medir, más que medir indefinidamente de la misma forma.

## Medias ponderadas

Supongamos que hemos medido una determinada magnitud a través de experimentos distintos y obtenemos una serie de resultados, cada uno con una determinada desviación típica:  $x_1 \pm s_1$ ,  $x_2 \pm s_2$ , etc. Una forma de obtener un valor medio de todos estos resultados es obtener una media ponderada con respecto a la desviación. Es decir, contará o tendrá más peso para la media aquellos valores de la magnitud que tengan una incertidumbre asociada menor. La fórmula que podemos emplear es la siguiente:

$$x = \frac{\sum_i x_i / s_i^2}{\sum_i 1 / s_i^2} \quad (1.8)$$

---

<sup>2</sup>Es posible encontrar demostraciones más elaboradas para esta cantidad, pero se necesita de conocimientos en distribuciones de probabilidad. El lector interesado puede consultar cualquier texto de Estadística.

donde la desviación típica de la media será:

$$s(x) = \frac{1}{\sqrt{\sum_i 1/s_i^2}} \quad (1.9)$$

Véase que los pesos son proporcionales a las inversas de los cuadrados de las desviaciones típicas, con lo que los  $x_i$  con menor  $s_i$  serán los que tengan mayor peso. Por ejemplo, supongamos que tenemos a tres autores que dan los siguientes resultados de la medida de una misma magnitud:  $2,31 \pm 0,01$ ,  $2,32 \pm 0,02$  y  $2,29 \pm 0,04$ . Si aplicamos las fórmulas anteriores obtendremos que  $x = 2,311 \pm 0,009$ . Si ignoramos el último de los valores, que es el que tiene una desviación más alta, obtendremos  $x = 2,312 \pm 0,009$ , que es casi el mismo resultado. De hecho, vemos que prácticamente el único valor que cuenta es el primero.

### Estimación del error absoluto

La estimación que se haga del error absoluto dependerá del número  $N$  de medidas realizadas. Definamos previamente las siguientes cantidades:

- Error asociado a la precisión del aparato:  $e_p$  (que puede ser igual a la propia precisión del aparato, su mitad o la cantidad que el experimentador considere dentro de unos límites razonables).
- Dispersión de los datos:

$$D_m = \frac{x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}}{2}$$

donde  $x_{\text{máx}}$  es el dato de valor más alto y  $x_{\text{mín}}$  el de valor más bajo.

Entonces, una estimación del error es

- Si se ha efectuado una sola medida ( $N = 1$ ) :

$$\epsilon = e_p \quad (1.10)$$

- Si se tienen, como máximo, diez medidas ( $1 < N \leq 10$ ) :

$$\epsilon = \text{máx}(e_p, D_m) \quad (1.11)$$

- Si se tienen más de diez medidas ( $N > 10$ ) :

$$\epsilon = \text{máx}(e_p, s) \quad (1.12)$$

Como ejemplo, veamos una tabla de resultados asociada a  $N = 12$  mediciones del tiempo de caída libre de una masa desde una altura de 2 m con un sistema de medición de tiempos cuya precisión es de una centésima de segundo ( $p = 0,01$ ) s

Tiempo de caída del movil												
Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$(t \pm 0,01)$ s	0,62	0,52	0,62	0,63	0,62	0,62	0,61	0,58	0,66	0,65	0,67	0,65

Calculamos la media de los tiempos:

$$t = \frac{\sum_{j=1}^{12} t_j}{12} = 0,633... \text{ s}$$

Y ahora calculamos la desviación típica de la media:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{12} (t_j - t)^2}{12 \times 11}} = 0,0097... \text{ s}$$

Sin embargo, como tenemos más de diez medidas y  $s \simeq p$ , finalmente debemos expresar:

$$t = 0,63 \pm 0,01 \text{ s}$$

### 3.3. Número de Medidas.

En muchos casos puede surgir la duda en la determinación directa de una magnitud física sobre el número de medidas que se han de realizar. Hay que tener en cuenta que estos criterios son relativos y dependen de las particularidades del sistema experimental.

El siguiente criterio que vamos a explicar puede resultar orientativo a este respecto. Primero, definimos una dispersión  $d$  en tanto por ciento tal que:

$$d = \frac{D_m}{x} \times 100$$

donde  $x$  es como siempre la media de los valores medidos de la magnitud  $X$ . Entonces:

- Si se efectúan tres medidas de la magnitud  $X$  y calculamos  $d$ . Entonces
  - Si  $d < 2\%$  estas tres medidas son suficientes.
  - Si  $2\% < d < 8\%$  seis medidas serían suficientes.
  - Si  $8\% < d < 15\%$  quince medidas serían suficientes.

- Si  $d > 15\%$  hay que realizar un gran número de medidas ( $N \simeq 50$ ).
- Para sistemas experimentales más o menos bien controlados, no se suele considerar como aceptable un resultado en el que el error relativo sea mayor que el 10 %. En este caso hay que aumentar el número de medidas hasta conseguir disminuir esta cifra. Si se observase que el alto error se sigue manteniendo, entonces nos encontraríamos con que el procedimiento experimental resulta limitado para los propósitos deseados, debiendo (lógicamente, sólo si resulta posible) cambiar de método. Aunque siempre es posible que no haya una forma mejor de realizar la medida o que no se disponga de mejores materiales o aparatos. Por tanto, la evaluación de la validez o no del valor obtenido y del número de medidas empleadas también depende de la evaluación acerca del tipo de material utilizado y de los medios disponibles.

## 4. Medidas indirectas.

### 4.1. Definición.

Una medida indirecta de una magnitud física es aquella que se obtiene a través de operaciones efectuadas sobre valores de magnitudes medidas directamente. Por ejemplo, la determinación de la aceleración de la gravedad  $g$  en la superficie terrestre indirectamente a través de la medición del tiempo  $t$  que tarda un móvil en recorrer un espacio vertical  $h$  en caída libre usando la expresión

$$g = \frac{2h}{t^2} \quad (1.13)$$

La altura  $h$  y el tiempo  $t$  han sido medidos directamente y el valor que se tiene, en consecuencia, de la constante  $g$  ha sido resultado de una medida indirecta.

### 4.2. Valor esperado y error absoluto.

Consideremos una magnitud  $Z$  que viene dada en función de otras  $A, B, C, \dots$  mediante una expresión del tipo

$$Z = f(A, B, C, \dots) \quad (1.14)$$

siendo los valores esperados de  $A, B, C, \dots$  respectivamente  $A^*, B^*, C^*, \dots$  y los errores absolutos  $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C, \dots$ . Entonces, el valor esperado de  $Z^*$  es el resultado de la evaluación de la función  $Z$  sobre los valores esperados  $A^*, B^*, C^*, \dots$ :

$$Z^* = f(A^*, B^*, C^*, \dots) \quad (1.15)$$

Paralelamente, el error sobre las magnitudes  $A, B, C, \dots$  determina el error de  $Z$  (propagación de errores). Para calcular éste tendremos que hallar en primer lugar las derivadas

parciales de la función  $f$  respecto de cada una de sus variables

$$f_A = \frac{\partial f}{\partial A} \quad ; \quad f_B = \frac{\partial f}{\partial B} \quad ; \quad f_C = \frac{\partial f}{\partial C} \quad ; \quad \dots \quad (1.16)$$

Hecho esto, el error absoluto asociado a  $Z$  viene dado por

$$\epsilon_Z = |f_A(A^*, B^*, C^*, \dots) \cdot \epsilon_A| + |f_B(A^*, B^*, C^*, \dots) \cdot \epsilon_B| + |f_C(A^*, B^*, C^*, \dots) \cdot \epsilon_C| + \dots \quad (1.17)$$

donde por  $|x|$  designamos el valor absoluto de la cantidad  $x$ .

Por ejemplo, en la situación mencionada de la obtención de  $g$  a través de la expresión

$$g = g(h, t) = \frac{2h}{t^2} \quad (1.18)$$

la medida de la altura  $h$  ha dado como resultado  $h = 2,00 \pm 0,01$  m , mientras que el tiempo de caída viene expresado por  $t = 0,63 \pm 0,01$  s

$$\begin{aligned} h^* &= 2,00 \text{ m} & \epsilon_h &= 0,01 \text{ m} \\ t^* &= 0,63 \text{ s} & \epsilon_t &= 0,01 \text{ s} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Las dos derivadas parciales son

$$g_h(h, t) = \frac{\partial g}{\partial h} = \frac{2}{t^2} \quad ; \quad f_t(h, t) = \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{4h}{t^3} \quad (1.20)$$

y, en consecuencia

$$g^* = \frac{2h^*}{t^{*2}} = 10,078 \text{ ms}^{-2} \quad (1.21)$$

$$\epsilon_g = \left| \frac{2}{t^{*2}} \epsilon_h \right| + \left| -\frac{4h^*}{t^{*3}} \epsilon_t \right| = 0,37 \text{ ms}^{-2}$$

de manera que redondeando convenientemente los resultados

$$g = 10,1 \pm 0,4 \text{ ms}^{-2}; \quad \epsilon_r \simeq 4 \%$$

### 4.3. Casos Particulares.

Como acabamos de ver, el cálculo asociado a la propagación de errores resulta tedioso debido a la necesidad de obtener y, posteriormente evaluar, un gran número de derivadas parciales. Ahora bien, hay situaciones en las que el resultado final que se sigue del procedimiento expuesto en el subapartado anterior resulta especialmente simple:

- Expresiones lineales

$$Z = \alpha A + \beta B + \dots \quad (1.22)$$

con  $\alpha, \beta, \dots$  constantes racionales y  $A, B, \dots$  magnitudes físicas. En este caso

$$\epsilon_Z = |\alpha| \epsilon_A + |\beta| \epsilon_B + \dots$$

■ Monomios

$$Z = \gamma A^\alpha B^\beta \dots$$

con  $\gamma, \alpha, \beta, \dots$  constantes racionales y  $A, B, \dots$  magnitudes. Entonces

$$\epsilon_Z = |Z^*| \left( \left| \frac{\alpha}{A^*} \right| \epsilon_A + \left| \frac{\beta}{B^*} \right| \epsilon_B + \dots \right)$$

Por último, si en la función apareciese un número irracional ( $\pi$ , por ejemplo), hay que introducir el error del número resultado de tomar para éste finitas cifras decimales ( $\pi = 3,1415 \pm 0,0001$ ). Ha de cumplirse que el error relativo asociado a un número irracional ha de ser menor que el error relativo de cualquier magnitud física medida directamente que aparezca en la expresión, para lo cual basta tomar el número irracional con el suficiente número de cifras decimales.

## 5. Gráficas.

En muchos casos, el objetivo de las medidas es descubrir o comprobar una posible relación entre dos magnitudes físicas  $X$  e  $Y$ . En esta situación es conveniente emplear una gráfica en la que se representen las parejas de valores  $(x_j, y_j)$  cuyo análisis facilitaría el estudio de la mencionada relación.

### 5.1. Tipos de Representaciones gráficas.

- Lineal: En una gráfica lineal, distancias iguales tomadas sobre ambos ejes representan intervalos iguales, siendo éste el tipo de representación gráfica usada habitualmente.
- Logarítmica: En este caso, aas escalas horizontales y verticales no son lineales, sino logarítmicas; así distancias iguales no representan intervalos iguales. Más claramente, sobre la gráfica se representa no el par ordenado  $(x_j, y_j)$  sino  $(\log_{10} x_j, \log_{10} y_j)$ . Si deseásemos hacer una gráfica logarítmica, usaríamos papel adecuado (papel logarítmico), el cual ya está preparado para no tener que efectuar ninguna operación intermedia. Las gráficas logarítmicas son útiles a la hora de representar relaciones del tipo  $Y = \alpha X^q$ , puesto que tomando logaritmos  $\log_{10} Y = \log_{10} \alpha + q \log_{10} X$ , y así la gráfica sería una recta de pendiente  $q$ .
- Semilogarítmica: Una de las escalas es lineal y la otra es logarítmica. De esta manera (suponiendo que el eje lineal es el de abscisas) representamos los puntos  $(x_j, \log_{10} y_j)$ . Al igual que existe un papel logarítmico, se tiene papel semilogarítmico preparado a este efecto. Las gráficas semilogarítmicas son útiles a la hora de representar dependencias exponenciales del tipo  $Y = A\beta^X$ , ya que tomando logaritmos  $\log_{10} Y = \log_{10} A + (\log_{10} \beta) X$ , y así la gráfica será una recta de pendiente  $\log_{10} \beta$ .



## 5.2. Ajuste por mínimos cuadrados.

### Relación lineal

Consideremos un conjunto de  $N$  medidas de una pareja de magnitudes físicas  $X$  e  $Y$  de las cuales sospechamos que se encuentran relacionadas mediante una función lineal del tipo

$$Y = mX + b \quad (1.23)$$

siendo nuestro objetivo el encontrar la pareja de valores  $m, b$  que den lugar la recta que mejor ajuste los  $N$  datos experimentales.

Antes de dar más detalles acerca del método de ajuste para estos  $N$  datos experimentales, resulta conveniente recordar cómo es la expresión matemática de una recta cuando se disponen de dos puntos en el espacio. Supongamos que disponemos de los puntos experimentales  $P_0 = (x_0, y_0)$  y  $P_1 = (x_1, y_1)$ , la ecuación de la recta que une ambos puntos será:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Esta expresión, que es muy sencilla de recordar, es de gran utilidad para evaluar la pendiente mientras estamos midiendo para comprobar si nuestros datos tienen sentido o si hay algún error de algún tipo.

Como convenio, consideraremos la mejor recta como aquella para la cual *la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales de los puntos respecto de la recta sea mínima*. A este método se le denomina de los mínimos cuadrados. En forma matemática lo anterior se expresa de la forma siguiente: se han de tomar  $m, b$  de tal forma que la cantidad siguiente

$$C(m, b) = \sum_{j=1}^N (y_j - mx_j - b)^2 \quad (1.24)$$

sea mínima. Puede probarse que solucionar este problema es equivalente a resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas  $m, b$

$$\frac{\partial C}{\partial m} = \sum_{j=1}^N -2x_j (y_j - mx_j - b) = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial b} = \sum_{j=1}^N -2(y_j - mx_j - b) = 0$$

cuya solución es

$$m = \frac{\sum_{j=1}^N x_j y_j - N X_C Y_C}{\sum_{j=1}^N x_j^2 - N X_C^2} \quad (1.25)$$

$$b = \frac{Y_C \sum_{j=1}^N x_j^2 - X_C \sum_{j=1}^N x_j y_j}{\sum_{j=1}^N x_j^2 - N X_C^2}$$

siendo  $(X_C, Y_C)$  las coordenadas del “centro de gravedad” de los datos experimentales dadas por

$$X_C = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \quad ; \quad Y_C = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \quad (1.26)$$

(nótese que ni  $X_C$  ni  $Y_C$  representan un valor esperado, puesto que cada pareja de datos  $(x_j, y_j)$  está asociada a un estado distinto del sistema que estamos midiendo).

Evidentemente,  $m$  y  $b$  tendrán sus errores asociados, ya que estos no se han obtenido a partir de infinitas medidas. Un punto importante que hemos de mencionar aquí es que en las expresiones anteriores se presupone varias cosas acerca de los valores “experimentales”  $x_i$  e  $y_i$  empleados y de sus los errores asociados. Primero, se presupone que los errores de los valores de la variable independiente  $x_i$  son despreciables, es decir que son exactos. Además, se presupone que los valores de  $y_i$  son fluctuantes ya que su medida viene acompañada de errores aleatorios. Es decir, estamos suponiendo que estos provienen de una población normal con la misma desviación típica. Esta no es, desde luego, la situación más real o general posible, ya que cuando medimos realmente en el laboratorio, muchas veces la variable independiente tiene un error determinado y la desviación de la variable  $Y$  no tiene porque ser la misma en todas las medidas, siendo por tanto la situación del análisis de datos bastante más enrevesada. Dejamos el caso de calcular la regresión con los errores variables en cada par de datos para un curso más avanzado y ahora nos centraremos en obtener los errores de las cantidades  $m$  y  $b$  bajo los supuestos anteriores.

Dada una relación lineal tipo  $Y = mX + b$  vamos a asumir que las desviaciones típicas  $\epsilon_m$  y  $\epsilon_b$  no dependen de donde se encuentre el origen de  $X$ , de forma que:

$$X_C = \frac{1}{N} \sum x_i = 0$$

Así, las ecuaciones (1.25) quedan reducidas a:

$$m \sum x_i^2 = \sum x_i y_i, \quad bN = \sum y_i$$

de donde obtenemos:

$$m = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \quad b = \frac{1}{N} \sum y_i = y$$

Si conociésemos la desviación típica poblacional<sup>3</sup> de  $Y$ , que llamaremos ahora  $\sigma(Y)$ , dada la fórmula de la desviación típica de la media, tendríamos que las desviaciones de  $m$  y  $b$  serían (recordemos que  $y$  es la media de los  $y_i$ ):

$$\begin{aligned} \epsilon_m^2 &= \frac{\sigma^2(Y)}{\sum x_i^2} \\ \epsilon_b^2 &= \sigma^2(y) = \frac{\sigma^2(Y)}{N} \end{aligned} \quad (1.27)$$

---

<sup>3</sup>De nuevo, remitimos al lector interesado a cualquier texto de Estadística. Explicaciones más detalladas excenden los contenidos de este curso.

Para obtener la desviación típica del conjunto de datos  $X, Y$  primero podríamos pensar en la varianza muestral:

$$s^2(y) = \frac{1}{N} \sum (y_i - mx_i - b)^2$$

y así sería si los parámetros  $m$  y  $b$  fuesen exactos. Pero al no serlos, y dado que estos se calculan a través de los  $N$  valores de  $Y$ , el mejor estimador es:

$$s^2(y) = \frac{1}{N-2} \sum (y_i - mx_i - b)^2$$

donde se ha reducido el número de grados de libertad de  $N$  a  $N-2$ . Esos dos valores que reducen  $N$  en el denominador de la expresión anterior son precisamente debidos a los coeficientes  $m$  y  $b$ .

Por tanto, tenemos que finalmente:

$$\begin{aligned} \epsilon_m &= \sqrt{\frac{\sum (y_j - mx_j - b)^2}{(N-2) \sum (x_j - X_C)^2}} \\ \epsilon_b &= \sqrt{\frac{\sum (y_i - mx_i - b)^2}{N(N-2)}} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Véase que hemos escrito de nuevo el valor de  $X$  de forma que esté situado en el origen adecuado,  $X_C$ , ya que el hecho de hacer  $X_C = 0$  fue un truco que empleamos para simplificar los cálculos. Sin embargo, si reiciésemos el cálculo sin suponer que  $X_C$  es nulo, habría que añadir un término multiplicativo a  $\epsilon_b$  de forma que este quedaría como:

$$\epsilon_b'^2 = \epsilon_b^2 \frac{\sum x_i^2}{\sum (x_i - X_C)^2} \quad (1.29)$$

De donde se obtiene que si  $X_C = 0$ ,  $\epsilon_b' = \epsilon_b$ . Si se emplea  $\epsilon_b'$  en lugar de  $\epsilon_b$  el resultado será un error asociado mayor para  $b$ .

Las expresiones anteriores pueden utilizarse para realizar las cuentas a mano y a través de ellas obtener los valores de los parámetros del ajuste y sus errores. Es más que recomendable que el alumno aprenda a utilizar la función de regresiones lineales en su calculadora o empleando programas informáticos pertinentes de representación gráfica y análisis de datos, que suelen realizar este cálculo de forma automática una vez que se ha dibujado la gráfica sin más que pulsar en la opción correspondiente. Ya hemos visto al principio que se ha realizado algunas aproximaciones y es posible que dependiendo del método teórico de regresión que se emplee, existan pequeñas variaciones en los resultados. Esto no debe ser un problema si nos estamos refiriendo a las incertidumbres, siempre y cuando los resultados obtenidos sean razonables. Por poner un ejemplo, podría darse la situación de que fuese recomendable realizar una interpolación de los datos experimentales. Si se hiciese una regresión con los datos interpolados, los coeficientes de la regresión variarían ligeramente respecto a los datos originales, pero

lo que sí puede modificarse sustancialmente será el error asociado a los mismos que será mucho menor (hay más datos). Aunque en semejante caso podría ponerse en duda que el resultado obtenido sea el “experimental”, pueden darse situaciones en la que este tipo de técnicas sean necesarias, en cuyo caso deben justificarse adecuadamente.

El método de ajuste lineal no está limitado a relaciones del tipo  $Y = mX + b$ . Ya hemos visto que otro tipo de funciones como  $Y = aX^m$  o  $Y = Ab^x$ , tras la toma de logaritmos dan lugar a relaciones lineales. En este caso el ajuste que acabamos de ver sigue siendo válido. Análogamente, en una relación del tipo  $Y = \sqrt{A + BX^4}$ , la toma de logaritmos no simplificaría la relación, sin embargo, representando  $Y^2$  frente a  $X^4$  el resultado es de nuevo una recta, siendo ajustable ésta.

### Correlación

A menudo no existe una dependencia funcional clara entre dos variables  $X$  e  $Y$  y, sin embargo, ambas variables no son independientes. Por ejemplo, podemos observar en una gráfica una nube de puntos que claramente es creciente o decreciente. De esta forma, podemos realizar un ajuste lineal mediante el método de los mínimos cuadrados. A esta recta así obtenida se la denomina curva de regresión (que puede ser de cualquier tipo, no solo lineal).

A la hora de analizar la relación estadística entre  $X$  e  $Y$  en este ajuste resulta muy útil calcular una cantidad denominada coeficiente de correlación,  $r$ , que se define de la siguiente forma:

$$r = \frac{s(X, Y)}{s(X) s(Y)} \quad (1.30)$$

donde  $s(X)$  y  $s(Y)$  son las desviaciones típicas y  $s(X, Y)$  es la covarianza. Esta última cantidad se define de la siguiente manera:

$$s(X, Y) = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (1.31)$$

La covarianza es un número que puede ser positivo, nulo o negativo. Si las variables  $X$  e  $Y$  son independientes, la covarianza tiende a cero cuando  $N$  es muy grande, ya que los sumandos tienden a restarse unos a otros.

Así, el coeficiente de correlación es un valor que puede oscilar entre -1 y 1. Esto es porque la covarianza puede ser positiva o negativa y porque se cumple la siguiente relación entre esta cantidad y las desviaciones típicas:

$$|s(X, Y)| \leq s(X) s(Y)$$

Para ver cuál es el significado del coeficiente de correlación  $r$  vamos a realizar unos pequeños cálculos. Supongamos que tenemos una recta de regresión  $Y = aX + b$  y que

nos situamos en el centro de gravedad de la nube de datos (origen en  $X_C = x$  e  $Y_C = y$ ) de manera que  $\sum x_i = 0$  y  $\sum y_i = 0$ . En ese caso, se obtendría que el coeficiente  $b = 0$  y que  $a = (\sum x_i y_i) / \sum x_i^2$ . En tal caso:

$$Y = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} X$$

Ahora prescindamos de la suposición de encontrarnos en el centro de gravedad, de manera que podemos escribir que:

$$Y - y = \frac{\sum (x_i - x)(y_i - y)}{\sum (x_i - x)^2} (X - x)$$

Recordando las definiciones de desviaciones típicas y covarianza tendríamos que:

$$Y - y = \frac{s(X, Y)}{s^2(X)} (X - x)$$

Es decir  $a = s(X, Y) / s^2(X)$ . A continuación obtenemos el índice que mide la bondad del ajuste y desarrollamos:

$$\frac{1}{N} \sum (y_i - ax_i)^2 = s^2(Y) + a^2 s^2(X) - 2as(X, Y) = s^2(Y) - \frac{s^2(X, Y)^2}{s^2(X)} = s^2(Y)(1 - r^2)$$

Por tanto, de la expresión anterior podemos concluir lo siguiente:

- Si  $r = \pm 1$  la correlación es máxima y el ajuste perfecto.
- Si  $r > 0$ , entonces  $Y$  crece con  $X$  y la correlación se denomina positiva.
- Si  $r < 0$ , entonces  $Y$  decrece con  $X$  y la correlación se denomina negativa.
- Si  $r = 0$ , no hay correlación y  $X$  e  $Y$  son independientes.

Una expresión más útil para calcular el coeficiente de correlación es la siguiente:

$$r = \frac{N \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{([N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] [N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2])^{1/2}} \quad (1.32)$$

que puede obtenerse a partir de (1.30) sabiendo que:

$$s^2(X) = \frac{1}{N} (\sum x_i^2) - x^2; \quad s(X, Y) = \frac{1}{N} \sum x_i y_i - \frac{1}{N^2} (\sum x_i)(\sum y_i)$$

Por poner un ejemplo, si obtenemos un  $r = 0,96$  podemos concluir que la correlación es grande, aunque no perfecta, ya que existe (como es de esperar) un carácter aleatorio en los datos experimentales. Sin embargo, si obtuviésemos un coeficiente tal como  $r = 0,7$ , podemos concluir que hay una dependencia estadística pero no que las variables  $X$  e  $Y$  dependan funcionalmente de forma lineal.

### Función cuadrática

En las situaciones extremas en las que resulta imposible el ajuste mediante una recta se sigue el mismo principio que el empleado en el ajuste lineal por mínimos cuadrados: los valores de los parámetros han de ser tales que la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales respecto de la gráfica sea mínima. El problema se reduciría entonces a la resolución de un sistema de  $M$  ecuaciones lineales con  $M$  incógnitas (los parámetros).

Así, es posible aplicar el método de mínimos cuadrados a cualquier relación del tipo  $Y = f(X)$ . Como ejemplo, vamos a considerar la relación cuadrática:

$$Y = aX^2 + bX + c$$

y vamos a obtener las expresiones de los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  por mínimos cuadrados. Nótese aquí que, de nuevo, presuponemos que la dispersión para los valores de  $y_i$  es la misma para todos ellos y que los valores  $x_i$  son exactos. El objetivo ahora será minimizar la cantidad

$$C(a, b, c) = \sum_{j=1}^N (y_j - ax_j^2 - bx_j + c)^2 \quad (1.33)$$

Las condiciones del mínimo serán:

$$\frac{\partial C}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial c} = 0$$

Que proporcionan el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$a \sum X^4 + b \sum X^3 + c \sum X^2 = \sum X^2 Y$$

$$a \sum X^3 + b \sum X^2 + c \sum X = \sum XY$$

$$a \sum X^2 + b \sum X + Nc = \sum Y$$

En estas últimas expresiones hemos omitido los índices de los sumatorios ( $i$  desde 1 hasta  $N$ ) y las variables ( $x_i$ ,  $y_i$ ) por sencillez.

Si ahora despejamos los parámetros obtenemos las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} a &= \frac{S(X^2 Y)S(X X) - S(X Y)S(X X^2)}{S(X X)S(X^2 X^2) - [S(X X^2)]^2} \\ b &= \frac{S(X Y)S(X^2 X^2) - S(X^2 Y)S(X X^2)}{S(X X)S(X^2 X^2) - [S(X X^2)]^2} \\ c &= \frac{\sum Y}{N} - b \frac{\sum X}{N} - a \frac{\sum X^2}{N} \end{aligned} \quad (1.34)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 S(XX) &= \sum X^2 - [\sum X]^2/N \\
 S(XY) &= \sum XY - \sum X \sum Y/N \\
 S(XX^2) &= \sum X^3 - \sum X \sum X^2/N \\
 S(X^2Y) &= \sum X^2Y - \sum X^2 \sum Y/N \\
 S(X^2X^2) &= \sum X^4 - [\sum X^2]^2/N
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Como puede apreciarse las expresiones obtenidas son mucho más complejas, con lo que resulta recomendable programarlas en una calculadora o en un ordenador.

A la hora de calcular las desviaciones de los tres parámetros, el método a seguir es el mismo que en el caso del ajuste lineal. Lo único que tenemos que hacerse es emplear el siguiente estimador:

$$s^2(y) = \frac{1}{N-3} \sum (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

Así, el cálculo de  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_b$  y  $\epsilon_c$  se realiza aplicando la regla de propagación de las desviaciones típicas (utilizando de nuevo el truco de  $X_C = 0$ , para luego centrar  $X$  una vez hechos los cálculos).

## 6. Ejemplos.

Para clarificar en lo posible estos últimos conceptos, vamos a realizar un par de ejemplos prácticos como los que se pueden encontrar en el laboratorio.

### 6.1. Cálculo de la aceleración de la gravedad.

Consideremos como ejemplo una siguiente experiencia ficticia acerca del cálculo de la aceleración de la gravedad. El objetivo es calcular la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre mediante el estudio del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de un cuerpo en caída libre. Para ello realizaremos el siguiente procedimiento:

- En primer lugar se medirá el tiempo  $t$  que emplea el móvil en recorrer una distancia  $h$  por efecto de la aceleración de la gravedad partiendo con velocidad nula (caída libre). Para ello se suelta el cuerpo desde distintas alturas y se mide el tiempo que tarda en impactar contra el suelo. Para cada altura se realizan distintas mediciones, calculándose los errores y representando los resultados finales en una tabla adecuada.
- Se realizan las gráficas  $t$  en función de  $h$  y  $t^2$  en función de  $h$ , indicando el error experimental en mediante una o dos (abscisas y ordenadas) barras de error. A continuación, se ajustan los datos por mínimos cuadrados esta última mediante una recta. Relacionando el valor de la pendiente de dicha recta con la aceleración de la gravedad, se obtiene el valor de esta última magnitud, con su error asociado.
- Representar  $t$  en función de  $h$  en escala logarítmica, comprobando que el resultado es una recta.
- Representar  $\log t$  en función de  $\log h$ . Ajustando la recta correspondiente por mínimos cuadrados obtendremos, de nuevo, el valor de  $g$ . Comentar las diferencias existentes entre este método y el expuesto en la segunda parte del procedimiento.

En los apartados 2 y 3, como ilustración del cálculo de errores, hemos visto un cálculo de  $g$  midiendo el tiempo que tardaba el móvil en caer desde una altura determinada. Aquí vamos a seguir la misma idea, pero midiendo los tiempos que emplea en recorrer distintas alturas, extrayendo el valor de  $g$  a partir de la gráfica adecuada que relacione tiempos con alturas.

Vamos a suponer que las alturas se han dispuesto a intervalos de 20 cm desde 0,2 m hasta 2 m, habiendo sido medidas éstas con una cintra métrica graduada en centímetros ( $p_h = 0,01\text{ m}$ ). Para cada altura se efectuaron quince medidas del tiempo de caída con un cronómetro cuya precisión es de una centésima de segundo ( $p_t = 0,01\text{ s}$ ). En total tenemos 150 datos experimentales agrupados en diez grupos, por lo que en primer lugar



Tabla 1.2: Medidas experimentales

$h(\text{m})$	$t_1(\text{s})$	$t_2(\text{s})$	$t_3(\text{s})$	$t_4(\text{s})$	$t_5(\text{s})$	$t_6(\text{s})$	$t_7(\text{s})$	$t_8(\text{s})$	$t_9(\text{s})$
0,20	0,18	0,19	0,17	0,22	0,21	0,20	0,22	0,18	0,19
0,40	0,28	0,29	0,27	0,30	0,28	0,28	0,30	0,29	0,27
0,60	0,33	0,35	0,34	0,37	0,35	0,36	0,36	0,35	0,38
0,80	0,42	0,40	0,40	0,39	0,41	0,37	0,41	0,40	0,42
1,00	0,44	0,45	0,45	0,46	0,44	0,45	0,45	0,46	0,45
1,20	0,50	0,49	0,50	0,51	0,49	0,50	0,50	0,49	0,50
1,40	0,54	0,53	0,53	0,54	0,55	0,53	0,53	0,54	0,54
1,60	0,57	0,57	0,58	0,56	0,56	0,57	0,57	0,56	0,57
1,80	0,60	0,60	0,62	0,61	0,62	0,61	0,61	0,69	0,62
2,00	0,62	0,61	0,63	0,63	0,64	0,64	0,64	0,64	0,63

Tabla 1.3: Continuación de los datos de la Tabla 1.2. Las dos últimas columnas son la media de los valores de  $t$  y  $s$ , que representa la desviación típica de la media.

$h(\text{m})$	$t_{10}(\text{s})$	$t_{11}(\text{s})$	$t_{12}(\text{s})$	$t_{13}(\text{s})$	$t_{14}(\text{s})$	$t_{15}(\text{s})$	$\langle t \rangle(\text{s})$	$s(\text{s})$
0,20	0,20	0,21	0,19	0,22	0,21	0,20	<b>0,199</b>	<b>0,004</b>
0,40	0,28	0,29	0,30	0,27	0,28	0,30	<b>0,285</b>	<b>0,003</b>
0,60	0,34	0,33	0,35	0,33	0,36	0,35	<b>0,350</b>	<b>0,004</b>
0,80	0,40	0,41	0,38	0,41	0,40	0,39	<b>0,401</b>	<b>0,003</b>
1,00	0,44	0,45	0,47	0,44	0,45	0,45	<b>0,450</b>	<b>0,002</b>
1,20	0,50	0,49	0,48	0,48	0,51	0,50	<b>0,496</b>	<b>0,002</b>
1,40	0,53	0,53	0,53	0,53	0,54	0,53	<b>0,535</b>	<b>0,002</b>
1,60	0,59	0,57	0,58	0,58	0,57	0,56	<b>0,571</b>	<b>0,002</b>
1,80	0,61	0,61	0,60	0,60	0,62	0,61	<b>0,615</b>	<b>0,005</b>
2,00	0,65	0,64	0,65	0,65	0,64	0,64	<b>0,637</b>	<b>0,003</b>

Tabla 1.4: Altura/Tiempo.

$h(\text{m})$	$\Delta h(\text{m})$	$\langle t \rangle(\text{s})$	$\Delta t(\text{s})$
0,20	0,01	0,20	0,01
0,40	0,01	0,29	0,01
0,60	0,01	0,35	0,01
0,80	0,01	0,40	0,01
1,00	0,01	0,45	0,01
1,20	0,01	0,49	0,01
1,40	0,01	0,54	0,01
1,60	0,01	0,57	0,01
1,80	0,01	0,62	0,01
2,00	0,01	0,64	0,01

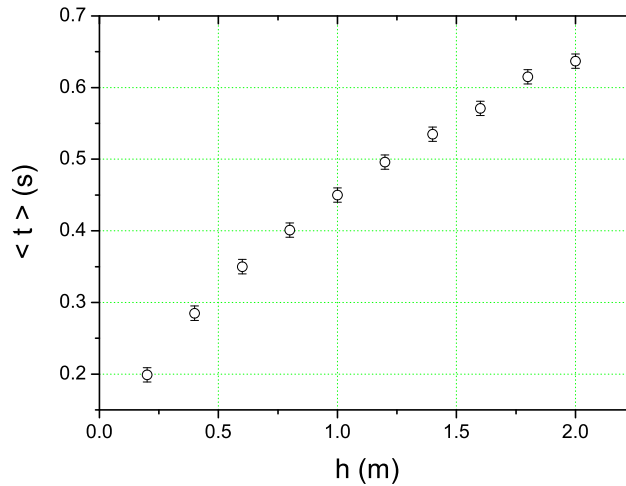


Figura 1.1: Tiempo frente a altura.

presentaremos de forma compacta los datos experimentales (como en la tablas 1.2 y 1.3).

Aprovechamos la propia tabla para indicar los valores medios y desviaciones típicas de la media de los 10 tiempos de caída. Ahora bien, puesto que resulta que, en todos los casos,  $p_t > s$ , el error en cada uno de los diez tiempos resulta ser la precisión del cronómetro. Los datos definitivos se reflejan en la tabla de la figura 1.4.

A continuación, dibujamos la primera gráfica (Fig. 1.1 a partir de la primera tabla de datos). En una segunda figura, representamos los valores de la tabla 1.4, tal y como puede verse en la gráfica 1.2. En esta figura, incluimos la recta obtenida por mínimos cuadrados a partir de los datos. Nótese que, mientras en la primera gráfica todas las barras de error asociadas a los tiempos eran iguales, en la segunda esto no sucede (si usamos propagación de errores  $\epsilon_{t^2} = 2t\epsilon_t$ , algo que ha de tenerse en cuenta).

Esta recta es de la forma

$$t^2 = mh + b$$

siendo  $m$  la pendiente y  $b$  la ordenada en el origen. Por otro lado, el resultado teórico es

$$t^2 = \frac{2}{g}h$$

por lo que

$$m_{\text{teor}} = \frac{2}{g} \quad ; \quad b_{\text{teor}} = 0$$

Realizando un ajuste de una recta por mínimos cuadrados, obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} m &= 0,205... \text{ s}^2\text{m}^{-1} \quad ; \quad \epsilon_m = 0,006... \text{ s}^2\text{m}^{-1} \\ b &= -0,001... \text{ s}^2 \quad ; \quad \epsilon_b = 0,005... \text{ s}^2 \end{aligned}$$

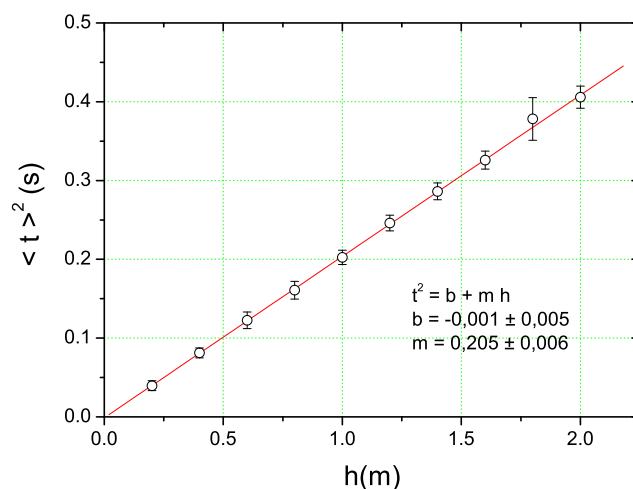


Figura 1.2: Tiempo al cuadrado frente a altura.

por lo que, efectivamente, dentro del margen de error, la ordenada en el origen de la gráfica es nula.

Ahora bien, puesto que:

$$g = \frac{2}{m} = 9,756.. \text{ ms}^{-2}$$

por propagación de errores obtenemos que:

$$\epsilon_g = \left| \frac{2}{m^2} \right| \epsilon_m = 0,2853... \text{ ms}^{-2}$$

y así se llega a que

$$g = 9,8 \pm 0,3 \text{ ms}^{-2}$$

resultado razonable dentro del margen de error.

En el supuesto caso de que quisiésemos emplear papel logarítmico para representar  $t$  en función de  $h$ , no hay que hacer ninguna manipulación, puesto que el propio papel ya se encuentra graduado adecuadamente.

Por último, representamos el logaritmo del tiempo de caída frente al logaritmo de la altura. La gráfica es, salvo los datos numéricos, exactamente la misma que la anterior. Los datos que empleamos a continuación vienen dados por la tabla 1.5. Aquí, los errores asociados a los logaritmos (en base 10) se calculan de la siguiente forma: Si tenemos que  $y = \log x$ , entonces

$$\Delta y = \left| \frac{d \log x}{dx} \right| \Delta x = \left| \frac{1}{x \ln 10} \right| \Delta x$$

Tabla 1.5: Logaritmos de los datos experimentales (con error).

$\log h(\text{m})$	$\Delta \log h(\text{m})$	$\log \langle t \rangle (\text{s})$	$\Delta \log t(\text{s})$
-0,70	0,02	-0,70	0,02
-0,398	0,011	-0,545	0,015
-0,222	0,007	-0,456	0,012
-0,097	0,005	-0,397	0,011
0,000	0,004	-0,35	0,01
0,079	0,004	-0,305	0,009
0,146	0,003	-0,272	0,008
0,204	0,003	-0,244	0,008
0,255	0,002	-0,211	0,007
0,301	0,002	-0,196	0,007

Ya podemos utilizar las expresiones del ajuste de mínimos cuadrados con estos datos y que se representan en la gráfica 1.3.

En este caso, la recta ajustada es de la forma:

$$\log t = m' \log h + b'$$

y como la expresión teórica es:

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} h^{1/2}$$

se debe cumplir que:

$$m'_{\text{teor}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad b'_{\text{teor}} = \frac{1}{2} \log \left( \frac{2}{g} \right) \Rightarrow g = 2 \times 10^{-2b'_{\text{teor}}} \quad (g \text{ en } \text{ms}^{-2})$$

Mediante un ajuste de mínimos cuadrados obtenemos que:

$$m' = 0,506... \quad \epsilon_{m'} = 0,003...$$

$$b' = -0,3455... \quad \epsilon_{b'} = 0,0009...$$

por lo que, de nuevo, dentro del margen de error se comprueba la proporcionalidad entre  $t^2$  y  $h$ . En cuanto a la aceleración de la gravedad obtenemos los siguientes valores:

$$g = 2 \times 10^{-2b'} \quad (g \text{ en } \text{ms}^{-2}) = 9,818... \text{ ms}^{-2}$$

$$\epsilon_g = \left| -4 \times 10^{-2b'} \times \ln 10 \right| \epsilon_{b'} = 2g\epsilon_{b'} \ln 10 = 0,0407... \text{ ms}^{-2}$$

de forma que, redondeando:

$$g = 9,82 \pm 0,04 \text{ ms}^{-2}$$

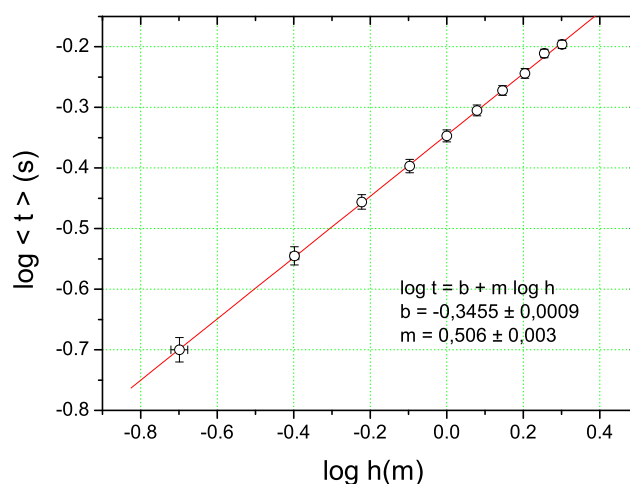


Figura 1.3: Logaritmo del tiempo frente a logaritmo de la altura.

El uso de ambos métodos para obtener el valor de  $g$  presenta algunas diferencias metodológicas, aunque, como hemos visto, el segundo método proporciona un mejor valor. Veamos algunas diferencias.

La primera diferencia entre la gráfica lineal y la logarítmica es el espaciado entre los datos. Mientras que en la Figura 1.1 los datos en abscisas están equiespaciados por intervalos de 0,2 m, en el caso de la figura 1.3 esto no ocurre. Por tanto, se generan espacios entre dato y dato que podrían modificar el resultado obtenido. Es decir, si desde el principio del experimento sabemos que la regresión que vamos a calcular va a ser con datos logarítmicos en las abscisas, es una buena práctica tomar los datos de entrada en el experimento equiespaciados en esta escala.

Una segunda diferencia, más de concepto de las magnitudes involucradas, es que, usando el primer método (el lineal), ya estamos presuponiendo que  $t^2$  y  $h$  son proporcionales, obteniéndose el valor de  $g$  consecuente con el ajuste. En este segundo método, con la gráfica logarítmica, sólo estamos suponiendo la proporcionalidad de  $h$  con una potencia de  $t$ . El ajuste nos indica tanto la potencia como el valor de  $g$ . Por tanto, el segundo método es más general, ya que inmediatamente confirma (o desmiente) si una magnitud es proporcional a una potencia “cualquiera” de otra.

Por último, en la gráfica 1.3 hemos incluido los errores asociados a cada uno de los datos, tanto en abscisas como en ordenadas. Sin embargo, el cálculo de la regresión lineal no incluye los errores de estos datos, debido a las razones expuestas a lo largo del texto. Aún así, estas barras de error son necesarias y deben incluirse en las gráficas que se realicen en las prácticas ya que nos ayudan a evaluar la calidad de los datos experimentales obtenidos y nos dan mucha información, aunque sea de forma cualitativa, de lo que ha sucedido en el proceso de medición o de si tienen sentido o no realizar el

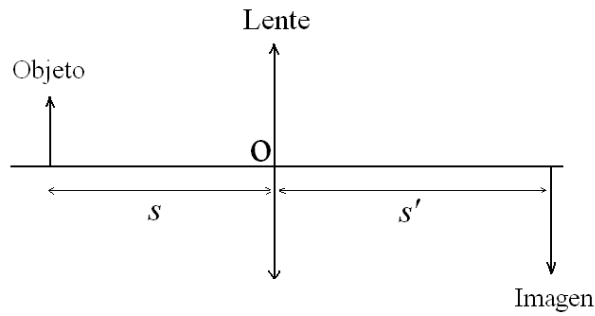


Figura 1.4: Distancias objeto e imagen,  $s$  y  $s'$ , respectivamente.

ajuste por mínimos cuadrados.

## 6.2. Distancia focal de una lente convergente.

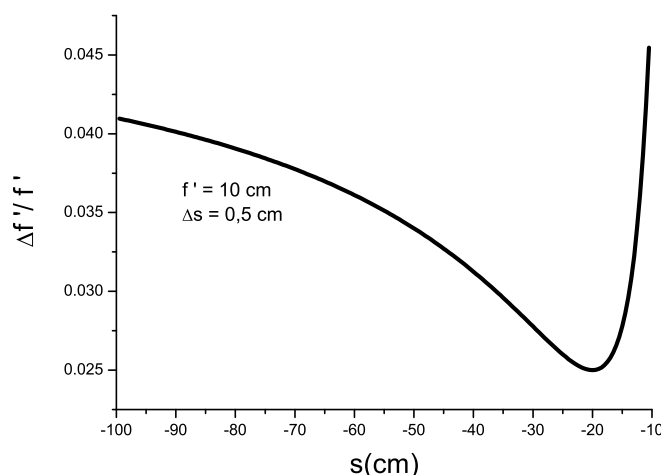
Vamos a suponer un experimento que consiste en hallar la distancia focal  $f'$  de una lente convergente a través de la medida de distancias objeto e imagen. Cuando estemos en el laboratorio dispondremos de una serie de guiones que nos informarán de la teoría básica de los sistemas que vayamos a emplear. En este caso necesitamos saber que  $s$  y  $s'$  son las distancias objeto e imagen, respectivamente, para una lente de focal  $f'$  (véase imagen 1.4). Nuestro objetivo es obtener el valor de  $f'$  midiendo  $s$  y  $s'$ . Es decir, estas dos últimas son las medidas directas, mientras que  $f'$  es la medida indirecta o resultado.

Primero, sabemos que la ley que liga estas dos magnitudes, suponiendo que la lente empleada es delgada, es:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \quad (1.36)$$

Supongamos un montaje experimental típico en un laboratorio de Óptica. Disponemos de una fuente de luz, que ilumina un objeto y tras el cual se encuentra una lente de focal  $f'$  y una pantalla de papel milimetrado donde se observa la imagen resultante. Todo el sistema está montado en un banco óptico de 100 cm de longitud en el que se logra una precisión de 0.01 cm.

Una vez que tenemos este sistema lo que tenemos que ir haciendo es tomar valores para  $s'$  dado un determinado  $s$  para finalmente obtener  $f'$  mediante la expresión 1.36. Pero ¿cómo hacerlo? ¿Intentamos crear un conjunto de todos los posibles pares para  $s$  y  $s'$  y nos pasamos midiendo tres días? ¿Es esta la forma más efectiva de medir? ¿Es la que mejor resultados produce?

Figura 1.5: Error relativo para la focal en función de  $s$ 

Una posible respuesta a esta pregunta consiste en analizar el error relativo de  $f'$  antes de medir. Si a partir de la ecuación 1.36 calculamos el error relativo  $\Delta f'/f$  obtenemos que:

$$\frac{\Delta f'}{f} = \frac{s^2 \Delta s' + s'^2 \Delta s}{s' s (s - s')}$$

Supongamos, para simplificar, algo razonable tal como que  $\Delta s' = \Delta s$ . Entonces nos queda que:

$$\frac{\Delta f'}{f} = \frac{s^2 + s'^2}{s' s (s - s')} \Delta s \quad (1.37)$$

Y lo que queremos es elegir valores tales que la función anterior sea lo más pequeña posible. Si estimamos a partir de nuestro sistema que  $f' \sim 10$  cm y que  $\Delta s \sim 0,5$  cm, podemos dibujar una gráfica tal como la representada en la figura 1.5, donde vemos que existen distancias objetos más apropiadas que otras. En concreto nos interesa medir cerca de ese mínimo en torno a  $s = -20$  cm.

Este tipo de técnica, basada en el diseño a priori de la práctica, es enormemente recomendable y marca la diferencia entre una práctica notable y una práctica excelente. Con este tipo de argumentos podemos controlar los errores relativos antes de medir y podemos saber dónde medir y cuántas medidas tomar a la vez que controlamos la calidad de los datos obtenidos.

El siguiente paso sería medir una serie de distancias imagen  $s'$  para unas distancias objeto fijas  $s$ . El objetivo es garantizar la reproducibilidad de la medida, tomando tantas como sea necesario hasta que, por ejemplo, observemos que la dispersión no siga aumentando. Luego cambiaríamos la distancia objeto y realizaríamos varias medidas para  $s'$ . Un conjunto de datos para este experimento puede ser el que se muestra en la tabla 1.6, donde la primera columna son las distancias objeto fijas. Véase que estas se

Tabla 1.6: Medidas de  $s'$  para tres valores de  $s$ .

$s(\text{cm})$	$s'_1(\text{cm})$	$s'_2$	$s'_3$	$s'_4$	$s'_5$	$s'_6$	$s'_7$	$s'_8$	$s'_9$	$s'_{10}$
20,00	19,3	20,2	19,65	20,25	20,77	19,95	19,05	19,25	20,85	20,69
22,00	17,95	17,95	18,25	15,25	18,7	18,65	18,26	18,17	18,51	18,7
24,00	17,64	16,87	17,84	16,65	17,32	17,47	16,77	17,65	17,23	16,8

han elegido cerca del mínimo del error relativo.

Para este conjunto de datos, calculamos las medias y la desviación típica de la media (no confundir ahora esta cantidad con  $s$ ), de forma que obtendríamos los resultados para cada una de las elecciones de  $s$ :

$$s' = 20,0 \pm 0,2 \text{ cm (para } s = 20,00 \text{ cm)}$$

$$s' = 18,0 \pm 0,3 \text{ cm (para } s = 22,00 \text{ cm)}$$

$$s' = 17,22 \pm 0,14 \text{ cm (para } s = 24,00 \text{ cm)}$$

Véase que la desviación típica de la media es mayor que la precisión del aparato, así que ese es el error que hemos elegido. A continuación podemos calcular los valores correspondientes para la distancia focal para cada uno de los pares de datos.

Paramos en este punto el desarrollo en detalle de este ejemplo y proponemos al estudiante que lo continúe respondiendo la siguiente serie de preguntas:

- ¿Son importantes los errores de cero en este dispositivo experimental? Razone la respuesta.
- Al realizar la práctica el estudiante puede haberse dado cuenta de que no se puede enfocar bien la imagen en un rango de 0.5 cm aproximadamente ¿cómo afectaría esto al análisis de errores?
- Suponga que al elegir estas distancias objeto, no consigue ver bien la imagen en la pantalla ¿qué es lo que haría en ese caso?
- ¿Sería válido eliminar datos medidos de  $s'$  que estén muy alejados del valor medio? ¿Por qué?
- Calcule con su error las distancias focales para cada una de las medidas. Realice una media ponderada en errores de los valores para obtener un resultado final. Compare este resultado con elegir como resultado final aquella distancia focal que tiene un menor error relativo.



## 7. Instrucciones para el laboratorio y elaboración de guiones

En esta sección repasaremos algunos de los instrumentos de medición más habituales en un laboratorio básico de física y realizaremos algunos comentarios e indicaciones acerca de los guiones que el alumno debe seguir a la hora de redactar los informes de cada práctica y del proceso a seguir en el laboratorio.

### 7.1. Material de laboratorio

En cada una de las sesiones de laboratorio se le entregará al alumno un guión de la práctica a realizar con la finalidad de que pueda entender el funcionamiento del dispositivo experimental a utilizar y para tener en cuenta los aspectos teóricos involucrados. El alumno debe leer el guión de la práctica antes del comienzo de la práctica. De esta forma el tutor podrá responder a todas las dudas que surjan al alumno antes de que comience a manejar los aparatos del experimento. Para evitar cualquier tipo de avería o problema, el alumno debe preguntar cualquier duda al tutor antes de empezar a medir.

Tras finalizar la sesión de prácticas el alumno deberá recolocar el material en su posición original, de forma que el siguiente grupo de prácticas pueda utilizarla sin perder el tiempo buscando los elementos y materiales de la práctica. Debe limpiarse, vaciarse, secar, apagar y desconectar de la red eléctrica todo el material que se haya utilizado. En el caso de que sobre tiempo del disponible para la práctica, los alumnos deben empezar a realizar las cuentas y cálculos pertinentes y a redactar los guiones de las prácticas. Igualmente, los guiones de las prácticas tienen una serie de cuestiones que el alumno debe contestar obligatoriamente y que puede empezar a pensar en este tiempo sobrante.

A continuación repasaremos algunos de los aparatos de medición más habituales en un laboratorio. Antes de nada hemos de mencionar que, como sabemos, toda medición supone el uso de un instrumento que dispone de una escala. Estas escalas pueden ser de distintos tipos, pero en general son lineales, como por ejemplo reglas, termómetros, etc. Existen algunos instrumentos que añaden una segunda escala a la primera, permitiendo medir con un poco más de precisión, entre ellos el calibre. Hay otro tipos de escalas: circulares, no lineales, etc.

La **regla de medir** es el instrumento más simple con una escala lineal. A pesar de su sencillez, hemos de tener en cuenta que podemos estar midiendo de forma incorrecta debido al error de paralaje. Es decir, si la línea de visión no es perpendicular a la regla entonces la medición será incorrecta. Además, hay que tener cuidado con el error de cero, que puede aparecer porque el extremo de la regla esté gastado, porque se haya borrado o por cualquier otra causa.



Figura 1.6: Regla de medir.

A la hora de medir la longitud de elementos más pequeños y para los cuales necesitamos una mayor precisión, necesitamos una “regla” más elaborada. En tal caso podemos usar el **calibre** (también llamado Vernier o Pié de Metro), que está compuesto por dos escalas, donde la inferior añade un extra de precisión a la superior. Al final de la escala inferior suele aparecer la precisión con la que se mide, que suele ser habitualmente igual a  $1/20 \text{ mm} = 0,05 \text{ mm}$ .

La forma de medir con el calibre es relativamente sencilla: primero se coloca el objeto en el calibre; a continuación, anotamos los milímetros con la escala superior (pongamos que observamos 11 mm) y para añadir más precisión observamos la escala inferior y buscamos aquella división que coincida en su posición de la forma más precisa posible con las separaciones de la parte superior. Una vez localizada esa división, observamos el número correspondiente en la escala inferior y ese número lo añadimos al que habíamos medido anteriormente en el primer decimal (si es que la precisión así nos lo indica).



Figura 1.7: Calibre

Supongamos que la coincidencia de las líneas es de tal forma que en la escala inferior se marca, por ejemplo, un 7. Si la medición anterior era 11 mm, tendríamos que nuestra medición con el calibre será  $11,70 \pm 0,05 \text{ mm}$ . Es muy recomendable que el alumno compruebe este funcionamiento mediante un “calibre virtual” antes de ir al laboratorio, como el que puede encontrarse en esta página web: [http://www.stefanelli.eng.br/webpage/es\\_calibre\\_05.html](http://www.stefanelli.eng.br/webpage/es_calibre_05.html).

Figura  
Cronómetro

1.8:

Otro instrumento imprescindible es el **cronómetro** que, al igual que un reloj, sirve para medir intervalos de tiempo. Sin embargo, este instrumento nos permite iniciar o detener la medición cuando lo consideremos, e incluso podemos automatizarlo para que se pare o se inicie a través de otros mecanismos o aparatos de medición. En los cronómetros manuales hemos de tener cuidado con el error de cero (la manivela que marca el cero puede estar ligeramente ladeada), así como con el tiempo de reacción del alumno a la hora de encenderlo o detenerlo. Así, el error de medición puede aumentar bastante, sien-

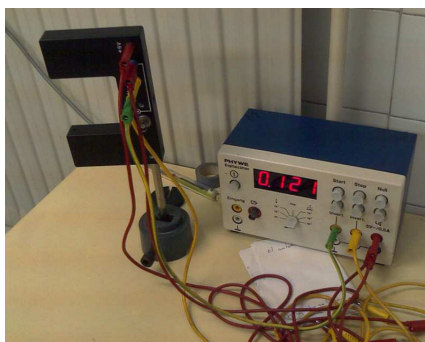


Figura 1.9: Sensor fotoeléctrico (izquierda) conectado a cronómetro digital (derecha).

do de 0,2 a 0,5 segundos, solamente por el tiempo de reacción.

A la hora de medir con mayor precisión el tiempo que tarda un objeto en entrar y salir de una posición (péndulo, ley de Hooke, etc), a veces se emplea un detector conectado a un **cronómetro digital**. El funcionamiento de este montaje se basa en unos sensores fotoeléctricos que detectan el paso del objeto y que ponen en marcha el cronómetro digital. De esta forma, puede contarse el número de pasos del objeto de forma automática y medirse intervalos de tiempo con precisión de centésimas o milésimas de segundo.

El **dinamómetro** suele emplearse habitualmente en los experimentos de Mecánica y sirve para medir la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo. Para medir la fuerza que se ejerce sobre un objeto en el extremo del aparato (donde suele haber un gancho) se sostiene por el otro extremo, de forma que en el interior del aparato hay un resorte que, al alargarse por efecto de la fuerza, mueve una aguja en una escala lineal y nos indica la fuerza correspondiente. A la hora de medir es importante cuidar que el gancho no resbala o está mal colocado. Así mismo, hay que evitar ángulos extraños al medir y procurar que la fuerza ejercida sobre el extremo sea en la dirección del resorte.



Figura 1.10: Dinamómetro

Otro clásico de los laboratorios es la **balanza** que puede ser de muchos tipos distintos y, por supuesto, sirve para medir la masa de los cuerpos. Entre las más antiguas están aquellas en las cuales la medición se hace colocando la masa en un extremo de una balanza y en el otro masas patrón, de manera que una vez que se logra el equilibrio, la aguja oscila en una raya central: sumando las masas patrón tenemos la masa del objeto a medir. Otras balanzas funcionan colocando el peso en una balanza, midiéndose el



Figura 1.11: Izquierda: balanza digital. Derecha: balanza analógica simple.

peso a través de un brazo largo por el que se hace deslizar una pesa, que de acuerdo a su posición, equilibra las masas.

Este tipo de sistemas suelen ser habituales, pero a menudo se emplean balanzas mucho más simples en su funcionamiento, como las que se muestran en la Fig. 1.11, que consisten en poner la masa sobre un soporte y medir directamente. Este tipo de balanzas pueden ser analógicas o digitales. Con las balanzas analógicas hemos de tener el mismo cuidado que con los cronómetros en el sentido del error de cero, ya que a menudo tienden a desajustarse con el uso.



Figura 1.12: Nivel

A la hora de hallar fuentes de error sistemático suele ser muy útil disponer de un **nivel**. Este es un pequeño instrumento muy habitual en carpintería o albañilería que permite tener información acerca de la verticalidad y horizontalidad de una determinada superficie. Su funcionamiento es muy sencillo: el nivel contiene una serie de tubos transparentes que contienen un líquido con una burbuja. La burbuja no tiene un diámetro mayor que dos líneas de referencia que hay dibujadas en el tubo. Así, se considera que la superficie está nivelada si al colocar el nivel sobre la misma, la burbuja aparece equidistante entre las dos líneas. En caso de que no sea así, seguramente se introduzca algún tipo de error en las medidas que estamos realizando.

En aquellas prácticas relacionadas con la Termología y Termodinámica, el laboratorio suele disponer de un **barómetro**, en el cual puede consultarse la presión atmosférica. Normalmente al lado del mismo también hay un **termómetro**, de forma que así podemos saber la presión atmosférica y la temperatura ambiente del lugar donde estamos realizando las mediciones. Una presión atmosférica equivale a la altura de una columna de agua de unos 10 m de altura. Si el barómetro es de mercurio, lo habitual, la altura de la columna de mercurio al nivel del mar es de aproximadamente unos 760 mm, de ahí que digamos que  $1 \text{ atm} = 760 \text{ mm de Hg}$  ( $=101,3 \text{ kPa}$ ).

Por último, queremos mencionar una herramienta que se emplea asiduamente en las prácticas de Termología y Termodinámica, que es el **baño termostático** de circulación. Estos aparatos permiten mantener a una temperatura constante un objeto (no aislado térmicamente) que se coloque en el interior de una cuba llena de agua. El agua se calienta a través de una resistencia y se redistribuye por la cuba mediante una bomba de circulación, asegurando que el objeto y la cuba en su interior se encuentren a una temperatura aproximadamente uniforme. Normalmente hay un control de temperaturas manual, de forma que puede ajustarse la temperatura deseada, con más o menos precisión dependiendo del modelo de baño. Si el modelo es antiguo es posible que el control de temperatura no sea muy preciso o que directamente esté descalibrado; es recomendable por tanto comprobar la temperatura del agua midiéndola con un termómetro, así como la del objeto que se está estudiando.

## 7.2. Memoria a realizar por el alumno

Los guiones deben ser realizados de forma individual. No se aceptarán guiones duplicados o realizados en grupo (un guión firmado por varios alumnos), ni prácticas idénticas impresas por separado y firmadas por diferentes personas. El trabajo puede realizarse en grupos de 2 personas o de un máximo de 3, pero la realización de los guiones es un trabajo individual.

Las memorias deben contener los siguientes apartados o información:

**Portada** que incluya: identificación (nombre, DNI, correo electrónico, teléfono), Centro Asociado, Fecha, Tutor.

**Propósito:** el alumno deberá realizar un breve resumen que justifique la elaboración de la misma. En este debe incluirse las bases teóricas y el propósito de la realización de la misma.

**Fundamento Teórico:** en este apartado el alumno debe presentar de forma coherente el desarrollo de la teoría relacionada con el procedimiento experimental empleado. No debe copiarse la teoría del guión, sino explicarla con las propias palabras. El alumno debe esforzarse en expresarse en términos físicos con corrección. Esta introducción teórica no debe ocupar más de dos páginas.

**Dispositivo Experimental:** En esta sección debe explicarse cómo es el montaje experimental, qué aparatos se han utilizado, cuál es el error o imprecisión asociados a ellos, qué se pretende medir, etc. Es muy recomendable incluir un dibujo o boceto del sistema experimental para mayor claridad en la explicación. Debe indicarse en una subsección una lista del material empleado y una descripción del mismo, analizado el

error cometido en cada medida con cada uno de los aparatos.

**Procedimiento:** Esta es la sección central del informe. El alumno debe mostrar cómo se han tomado los datos y resumirlos en tablas (con sus unidades y errores). Los resultados deben mostrarse también en tablas (con unidades y errores) y en gráficas cuando se considere oportuno. El alumno debe explicar todos los resultados obtenidos, explicar como se calculan los errores, evaluar si los resultados obtenidos coinciden y en qué grado con la teoría conocida.

En general, la presentación de los datos experimentales se realiza a través de tablas. En el caso de una medida directa, señalaremos claramente la magnitud física, las unidades de los datos obtenidos y el error de la medida individual (la precisión del aparato de medida). A continuación, obtendremos el valor esperado y el error absoluto asociado (indicando el procedimiento empleado para calcular éste) y, por último, el resultado final (valor medio e incertidumbre) con el formato numérico correcto.

A la hora de representar una **gráfica**, seguiremos las siguientes normas generales:

- Se usará papel milimetrado o, si se tiene acceso, uno de los múltiples programas de ordenador diseñados a tal efecto.
- Cada gráfica tendrá un título, en el que se indique de forma clara y breve lo que se pretende representar con dicha gráfica. Si los datos numéricos se encuentran en una tabla aparte, conviene hacer referencia a la misma.
- Los ejes de la gráfica deben rotularse claramente con el nombre de la magnitud física y las unidades en las que se expresa. A su vez, deben incluirse divisiones que faciliten la interpretación de los datos.
- Los límites de cada eje, al igual que el origen de coordenadas, deben elegirse cuidadosamente de tal manera que los datos se distribuyan sobre toda la gráfica (impidiendo que aparezcan apelmazados en una parte de la misma). Así, el origen no tiene porque ser, necesariamente, el cero de ambas magnitudes.
- Los puntos correspondientes a una pareja de datos deben marcarse explícitamente, destacándolos con un símbolo (por ejemplo  $\bullet$ ,  $\diamond$ ). Debe indicarse el error experimental en la toma de los datos mediante una o dos barras de error. Así, si el error del valor  $y_j$  resulta ser  $\epsilon_Y$ , se situará un segmento vertical de longitud  $2\epsilon_Y$  (en las unidades determinadas en el eje de ordenadas, naturalmente) centrado en el punto que representa la pareja de datos. Análogamente se procede con el error del valor  $x_j$  usando un segmento horizontal de longitud  $2\epsilon_X$ .
- Por último, si procede, hay que trazar la curva que representaría la relación existente entre  $X$  e  $Y$ . Si queremos dibujarla a mano alzada, uniremos los puntos suavemente con una curva, pero sin forzar a ésta que incluya *todos* los puntos,

aunque procurando que los que no estén incluidos se distribuyan uniformemente a ambos lados de la curva. Sin embargo, en la mayoría de los casos, obtendremos *matemáticamente* la curva que mejor ajusta los datos experimentales; además, al tener una expresión analítica de la misma podremos obtener el valor experimental de alguna cantidad incluida en la relación existente entre las magnitudes  $X$  e  $Y$

Una vez expuestos los datos experimentales obtenidos debe realizarse un análisis de los mismos para obtener las magnitudes pedidas a través de las gráficas y de regresiones lineales o mediante los métodos que el alumno considere oportuno. El alumno debe explicar la metodología empleada y hacer hincapié en cómo de correctos o válidos son los resultados obtenidos. No es tan importante a los efectos de esta asignatura obtener unos resultados experimentales excelentes como el realizar bien la medida experimental, los cálculos adecuadamente y saber analizar los resultados en los términos correctos.

**Cuestiones:** El alumno debe contestar obligatoriamente a las preguntas de los boletines de prácticas.

**Bibliografía:** Deben incluirse referencias a los textos empleados en caso de haberlo hecho. El alumno debe acostumbrarse a investigar por su cuenta y a buscar y contrastar información de fuentes fiables.

## 8. Autoevaluación

1. ¿Cuál es la forma más adecuada de expresar la cantidad  $4,04312 \pm 0,0356789$  m?
2. ¿Cuál es la forma más adecuada de expresar el resultado de la siguiente operación:  
 $(5 \pm 1) \times (7 \pm 2)$ ?
3. Se mide la distancia y el tiempo de viaje en 4 estaciones de un tren que se mueve a velocidad constante:

Distancia y tiempo				
Distancia (m)	0	914	1829	2743
Tiempo (s)	17,2	39,8	64,5	90,6

Empleando una regresión lineal, obtenga la velocidad del tren y su error asociado.

4. Sea una distancia  $x$  que se calcula como  $x = (x_1 \times x_2)/x_3$ . Los valores de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  son  $x_1 = 100 \pm 5$  cm,  $x_2 = 6,5 \pm 0,2$  cm y  $x_3 = 12,0 \pm 0,5$  cm ¿Cuál es el valor de  $x$ ?

Respuestas correctas: 1 -  $4,04 \pm 0,04$  m, 2 -  $35 \pm 17$ , 3 -  $37,3 \pm 0,8$  m/s, 4 -  $54 \pm 7$  cm



## 9. Resumen

En este texto introductorio hemos comentado algunos conceptos importantes a la hora de realizar las prácticas de laboratorio, tales como el concepto de medida y de error, el sistema internacional de unidades y un poco de análisis dimensional. Hemos visto la diferencia entre medidas directas y medidas indirectas y cómo realizar la propagación de errores y obtener valores medios de las cantidades que estamos estudiando. Se ha explicado que los datos deben representarse correctamente a través del redondeo y las unidades correspondientes. Además, los datos, tanto experimentales como obtenidos a partir de estos deben resumirse en tablas y gráficas y se ha explicado en el texto cómo debe hacerse. Muy por encima, hemos mostrado cómo se obtienen las fórmulas para realizar una regresión lineal por mínimos cuadrados a partir de un conjunto de datos.

## 10. Bibliografía

- *Curso y Ejercicios de Estadística*. V. Quesada, A. Isidoro, L.A. López (Alhambra Universidad).
- *A Practical Guide to Data Analysis for Physical Science Students*. Luois Lynos (Cambridge University Press)
- *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*. John R. Taylor. (Oxford University Press)
- *Análisis de Errores*. Carlos Sánchez del Río. (Eudema Universidad) [Descatalogado]
- *Experimentos caseros para un curso de física general*. M. Yuste Llandres, C. Carreras Béjar. (UNED)



# Parte II

## Guiones de Prácticas



# Péndulo simple

## 1. Propósito

- Comprobar que el movimiento de un cuerpo bajo la acción de la gravedad es independiente de la masa del cuerpo.
- Comprobar la dependencia del periodo de un péndulo de su longitud.
- Medir la aceleración de la gravedad.
- Comprobar la validez de la aproximación armónica.
- Emplear un montaje alternativo casero para hacer en el experimento en casa.

## 2. Fundamento Teórico

El péndulo simple, pese a su sencillez, es un sistema físico que permite comprobar algunos principios físicos muy generales así como la validez y los límites de algunas aproximaciones matemáticas muy utilizadas.

El péndulo simple ideal está formado por una masa  $m$ , suspendida de un punto fijo por medio de un hilo inextensible de longitud  $l$  cuya masa se desprecia. En este sistema la energía potencial se transforma en energía cinética y viceversa, debido a la acción de la fuerza gravitatoria  $F = mg$  que ejerce la Tierra sobre la masa  $m$ . Como resultado se obtiene un movimiento oscilatorio que se puede describir a partir de los siguientes conceptos: los siguientes parámetros:

- Una oscilación completa o ciclo es el desplazamiento de la masa desde uno de sus extremos más alejados hasta el otro y vuelta. Es decir, dos oscilaciones sencillas.
- Periodo,  $T$ , es el tiempo que tarda la masa en realizar la oscilación completa.
- Frecuencia,  $f$  es el número de oscilaciones realizadas por unidad de tiempo.
- Amplitud,  $A$ , es el máximo valor de la distancia al punto de equilibrio. Depende del ángulo  $\theta$  entre la vertical y el hilo.

Cuando las oscilaciones no son demasiado grandes, puede realizarse la aproximación  $\sin \theta \sim \theta$ , de forma que el movimiento oscilatorio del péndulo es armónico simple, obteniéndose que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.1)$$

De manera que el tiempo de oscilación no depende ni de la masa  $m$  ni (para amplitudes pequeñas) de la amplitud  $A$ . Entonces, despejando  $g$  se obtiene que:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad (2.2)$$

Así, puede calcularse el valor de  $g$  mediante varias medidas de  $l$  y de  $T$ .

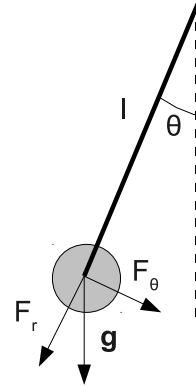


Figura 2.1: Péndulo simple

Para deducir las expresiones anteriores, las únicas fuerzas presentes que se emplean son las gravitatorias. Sin embargo, en el sistema físico actúan otras fuerzas sobre el cuerpo además de la gravedad. Por ejemplo, actúa el empuje hidrostático del aire, y sobre todo el rozamiento, que tiende a frenar el cuerpo y disminuir la amplitud de las oscilaciones. Esto no cambia el periodo, pero puede dificultar en la práctica su medida si las oscilaciones se hacen rápidamente muy pequeñas. Por eso, en la práctica es conveniente tomar masas que no sean pequeñas.

Además, el hilo del que está suspendido el cuerpo tiene inevitablemente una masa. Si esta masa del hilo fuera apreciable frente a la del cuerpo, el centro de masas total del sistema estaría ligeramente por encima del cuerpo y la longitud efectiva del péndulo sería algo menor que la longitud del hilo.

Todos estos efectos se minimizan si, al hacer la práctica, tomamos un cuerpo de masa suficientemente grande, de forma que las expresiones anteriores resultan aproximadamente válidas. En el Anexo al final de esta práctica se puede obtener más información sobre este sistema físico.

### 3. Material

- Soporte para colgar el péndulo
- Un transportador graduado para medir ángulos de oscilación.
- Hilo inextensible (sedal de caña de pescar)
- Bolas con masas diferentes

- Balanza
- Cronómetro

## 4. Procedimiento

1. Colgar una masa  $m$  de un hilo inextensible, por ejemplo, hilo de pescar. Separar el péndulo de la vertical un ángulo de unos  $20^\circ$  y medir el tiempo  $t$  que tarda en realizar 10 oscilaciones. Entonces el periodo será  $T = t/10$ .
2. Hacer lo mismo para varias longitudes del hilo (al menos 5).
3. Hacer una tabla en donde se recojan los valores del periodo  $T_i$  obtenido para cada longitud  $l_i$ .

	1	2	3	4	5	...
$l$						
$T$						

4. Representar en una gráfica los puntos de coordenadas  $(x_i, y_i) = (\sqrt{l_i}, T_i)$  y buscar la recta  $y = ax + b$  que mejor ajusta estos puntos por el método de los mínimos cuadrados.

Obtenida esta recta y comparada con la expresión teórica (2.1)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{l}$$

obtenemos

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

de donde es fácil deducir el valor  $g = (2\pi/a)^2$

5. Alternativamente, representar en una gráfica los puntos de coordenadas  $(x_i, y_i) = (T_i^2, l_i)$  y ajustar una recta. Ahora

$$l = \frac{g}{4\pi^2}T^2$$

y la pendiente será

$$a' = \frac{g}{4\pi^2}$$

6. Hacer los mismos pasos anteriores pero con amplitudes de oscilación de  $45^\circ$  o mayores. Comparar los periodos así obtenidos con los obtenidos para amplitudes pequeñas. Si ahora representamos  $T$  frente a  $\sqrt{l}$ , ¿la pendiente de la recta será mayor o menor?

7. Repetir los pasos con una masa  $m$  distinta. ¿Se obtienen los mismos resultados?
8. Representar los puntos  $(T_i, l_i)$  en papel logarítmico (log-log). ¿Cómo se distribuyen dichos puntos? Si no conociéramos la fórmula del periodo del péndulo, ¿cómo podríamos deducir de esta gráfica la dependencia del periodo respecto de la longitud?

## 5. Cuestiones

- Compare de forma crítica los valores de  $g$  obtenidos tanto a partir de las medidas individuales de cada grabación como el calculado a partir de la pendiente con el valor teórico de  $9,8 \text{ m/s}^2$ .
- ¿Observa alguna dependencia de la incertidumbre de la medida indirecta de  $g$  respecto a la longitud del péndulo,  $l$ ?

## 6. Anexos

### 6.1. Péndulo simple y movimiento armónico

Este sistema físico puede estudiarse, como suele pasar en mecánica, desde el punto de vista de las fuerzas o desde el punto de vista energético. Veámoslo de ambas maneras. Además, puede obtenerse también información a partir de razonamientos basados en análisis dimensional.

#### Fuerzas

Un péndulo ideal se reduce a un cuerpo puntual de masa  $m$  sujeto a un extremo de un hilo inextensible de longitud  $l$  y sin peso, que a su vez está sujeto a un punto fijo  $O$ . Cuando el cuerpo se separa un ángulo  $\theta$  de la vertical, la fuerza  $-mg$  que ejerce la gravedad sobre el mismo puede descomponerse en una componente radial  $F_r = -mg \cos \theta$  y una componente tangencial  $F_\theta = -mg \sin \theta$ . Puesto que el hilo es inextensible,  $l$  es constante, y el cuerpo describirá una trayectoria circular de radio  $l$  en torno al punto de suspensión  $O$ .

La velocidad angular del cuerpo en su trayectoria circular es  $\omega = d\theta/dt$ , y su velocidad tangencial es  $v_\theta = l(d\theta/dt)$ . El momento angular del cuerpo con respecto al punto  $O$  es entonces  $|L| = lmv_\theta = ml^2(d\theta/dt)$ .

Por otra parte, el momento de la fuerza  $F_\theta$  con respecto a  $O$  es  $|\tau| = lF_\theta = -lmg \sin \theta$ . La ecuación fundamental de la dinámica de rotación se traduce entonces en

$$\frac{dL}{dt} = \tau \Rightarrow ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -lmg \sin \theta \quad (2.3)$$

y finalmente

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (2.4)$$

Tal como está, esta ecuación no es fácil de resolver. Sin embargo, es bien sabido que la función  $\sin \theta$  admite un desarrollo en serie de la forma:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

Para  $\theta < 1$ , los términos en  $\theta^3, \theta^5, \dots$  son bastante menores que el término  $\theta$ , y podríamos aproximar  $\sin \theta$  por  $\theta$ . Veamos, por ejemplo, hasta que valor de  $\theta$  podríamos hacer dicha aproximación sin cometer errores mayores de un 5 %. Es decir, para que valor  $\theta_c$  el término  $\theta_c^3/6$  es un 5 % del término  $\theta_c$

$$\frac{\theta_c^3}{6\theta_c} = \frac{\theta_c^2}{6} = 0,05 \Rightarrow \theta_c \simeq 0,55\text{rad} \simeq 31^\circ$$

Por lo tanto, si las oscilaciones del péndulo tienen una amplitud menor que  $30^\circ$ , una buena aproximación a la ecuación 2.4 es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

Esta ecuación ya es muy fácil de resolver: es la ecuación de un oscilador armónico de frecuencia angular  $\sqrt{g/l}$ . Dicho de otra forma, el periodo de las oscilaciones del péndulo será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Si no hubiésemos hecho la aproximación  $\sin \theta = \theta$ , el movimiento ya no es armónico simple aunque sigue siendo periódico. Puede demostrarse que el periodo vale aproximadamente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_M}{2}\right)$$

siendo  $\theta_M$  la amplitud de las oscilaciones. Así, para  $\theta_M = 31^\circ$ , tendríamos

$$\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_M}{2} = 0,018$$

lo que da un error menor del 2 % para el periodo.

Puede llamar la atención el hecho de que el periodo no depende de la masa. Esto se debe a que la  $m$  aparece en los dos miembros de 2.3 y, por lo tanto, se cancela. Esto es una característica general del movimiento en un campo gravitatorio. Puesto que el peso de un cuerpo es proporcional a su masa, todos los cuerpos en un campo gravitatorio adquieren la misma aceleración, y su movimiento es independiente de la masa.

## Energía

Para una posición intermedia, la energía total del sistema será la suma de las energías potenciales y cinética. Esto es:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \quad (2.5)$$

donde  $h$  es la altura de la masa respecto al nivel de energía potencial del punto  $O$  en la posición de equilibrio del péndulo (alineado con la dirección de la gravedad).

Así, la trayectoria de la masa va a venir descrita por el ángulo  $\theta$ , de manera que la velocidad es:

$$v = l\omega = l\frac{d\theta}{dt}$$

La altura y  $\theta$  se relacionan mediante la expresión:

$$h = l(1 - \cos \theta)$$

Así que sustituyendo en la expresión de la energía, tenemos que:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin \theta = 0 \quad (2.6)$$

que es la ecuación del péndulo simple para oscilaciones de cualquier amplitud. Sin embargo, si suponemos oscilaciones pequeñas, tales que  $\theta < 5 - 10\%$ , podemos aproximar  $\sin \theta \sim \theta$  (con  $\theta$  en radianes) para obtener:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (2.7)$$

ecuación que tiene como solución un movimiento armónico de frecuencia  $\frac{g}{l}$ , o lo que es equivalente, de periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Para el caso más general, cuando el ángulo  $\theta$  es mayor, el periodo  $T$  depende del ángulo inicial,  $\theta_0$ , desde el cual se lanza el péndulo al comienzo del experimento. Es posible encontrar que la expresión integral para la conservación de la energía del sistema es:

$$\frac{1}{2}l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta) = mgl(1 - \cos \theta_0) \quad (2.8)$$

Este sistema se conoce como “péndulo no lineal” y su periodo puede escribirse como una fórmula no integral:

$$T_{nolineal} = T_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (2.9)$$

En el caso de que estamos tratando con ángulos  $\theta_0 < 50^\circ$ , puede obtenerse que la expresión anterior se puede aproximar como:

$$T \simeq T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (2.10)$$

Para ángulos mayores que estos sería necesario evaluar numéricamente la expresión (2.9).

### Análisis dimensional

Por otra parte, hay otra forma de ver cómo depende el periodo de las propiedades del péndulo, sin conocer siquiera la ecuación de movimiento. En principio cabría suponer que el periodo puede depender de la masa, de la longitud y de la aceleración de la gravedad; no hay otros parámetros en el sistema. Entonces buscaríamos una combinación de estos parámetros que tenga dimensiones de tiempo. Es decir:

$$[m]^\alpha [l]^\beta [g]^\gamma = M^\alpha L^\beta (LT^{-2})^\gamma = M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma} = T$$

que implica  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = -1/2$ ,  $\beta = 1/2$ , y así la única combinación posible para obtener una cantidad con dimensiones de tiempo es  $l^{1/2}g^{-1/2} = \sqrt{l/g}$  (que puede ir multiplicado por una constante puramente numérica).

## 7. Montaje alternativo

En esta sección se explica una forma sencilla y alternativa que el alumno puede realizar en casa para estudiar el péndulo simple. Sólomente necesita una cuerda, un imán y un ordenador con un micrófono. Una imagen del montaje experimental viene dada en la imagen 2.2.

### 7.1. Materiales

- Soporte para colgar la masa.
- Cuerda.
- Imán permanente.
- Micrófono (por ejemplo en 2.2 se ha empleado el “manos libres” de un móvil)
- Ordenador con tarjeta de sonido.

### 7.2. Procedimiento

Primero, colocamos el imán en el extremo del cable o cuerda. Para realizar esto se puede utilizar una tuerca que irá atada mediante un nudo simple a la cuerda. Hay que tener cuidado de que el nudo no deslice en la tuerca y que este realizado lo más centrado posible. En la tuerca se coloca el imán.

A continuación, colocamos la cuerda con el iman en el extremo en el soporte y medimos la longitud  $l$  de la misma, desde el extremo fijo al centro de masa del objeto que cuelga de la misma. Es importante que en la trayectoria y en las cercanías del imán no hay ningún objeto metálico, de forma que la trayectoria del péndulo no se vea influenciada por ninguna fuerza magnética.

Dejamos el péndulo en la posición de equilibrio y justo debajo, lo más pegado posible, colocamos el micrófono. Este micrófono puede ser cualquier tipo de micrófono comercial barato, tanto los que se emplean para conferencias por Internet o para los teléfonos móviles. Un detalle del montaje puede verse en la figura 2.3.

Para la realización de la práctica necesitamos grabar el sonido que capta el micrófono. Para esto puede utilizarse el software estándar de grabación que viene por defecto en cualquier sistema operativo. Para realizar las mediciones, damos a grabar sonido en el programa (asegurarse de subir al máximo el volumen de la entrada de sonido en el ordenador), movemos el imán separando el péndulo de su posición de equilibrio y lo soltamos, procurando, en la medida de lo posible, que el movimiento se produzca en

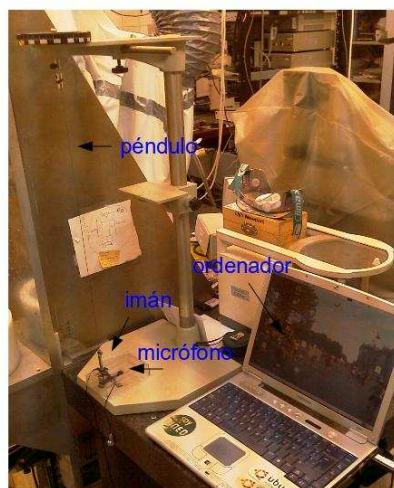


Figura 2.2: Montaje para la realización de la práctica.

un plano. Si observamos la señal grabada en el ordenador, veremos como se detectan picos o zumbidos en la señal cuando el imán pasa cerca del micrófono. Esto es debido a que el paso del imán varía el flujo magnético, produciendo una variación en la fuerza electromotriz que capta el micrófono.

Para la obtención de  $g$ , medimos varias veces, para una longitud, el proceso de oscilación del péndulo y grabamos los archivos de sonido en formato wav. Para obtener el valor de periodo a partir de la señal, hemos de emplear algún software de análisis de señales o de edición de audio. Existen multitud de programas gratuitos (freeware) que permiten medir, editar, grabar, filtrar, etc, señales de audio (por ejemplo, “Audacity” que está disponible para Linux y Windows). Con uno de estos programas, abrimos el archivo wav y tenemos que tener una señal como la de la figura 2.4.

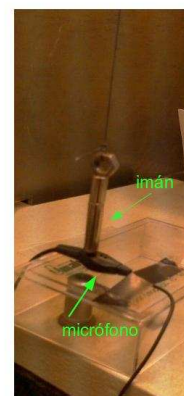


Figura 2.3: Imán y micrófono.

Como puede verse en la figura 2.4, se observan claramente unos picos que corresponden a los pasos del imán por el punto de equilibrio. El tiempo entre dos pasos es un semiperiodo. Este tiempo puede obtenerse midiendo directamente con el programa todo los tiempos de la señal, o empleando análisis de señales o algún otro software. Queda a la imaginación y a la pericia del alumno obtener el valor del periodo de la forma más fiable y con el menor error posible. La estimación del error asociado a cada medida también dependerá del método usado por el alumno y de las consideraciones que realice sobre el sistema experimental.

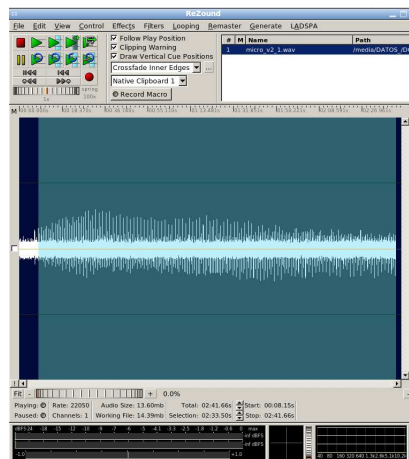


Figura 2.4: Ejemplo de la señal grabada con el micrófono.

A partir del periodo medio  $T$  obtenido (con el error correspondiente), obtenga el valor de  $g$  correspondiente. A continuación, cambie la longitud del péndulo y repeta el proceso. Si representamos  $4\pi^2 l$  frente a  $T^2$  en una gráfica obtenemos una recta que nos permite obtener el valor de  $g$  mediante una regresión lineal.

# Oscilador masa-muelle

## 1. Propósito de la práctica

- Comprobar la ley de Hooke en un muelle y medir su constante elástica.
- Analizar el movimiento armónico del oscilador y medir la constante elástica dinámicamente.
- Determinar la masa efectiva del muelle.

## 2. Introducción

Se denomina a un determinado cuerpo como “elástico” si al actuar una fuerza sobre él, este sufre una deformación tal que, al cesar la fuerza aplicada, el cuerpo recupera su forma original.

Existen muchos materiales en los cuales, cuando se ejerce una tensión que produce una deformación, esta deformación es directamente proporcional al esfuerzo aplicado. Esta relación de proporcionalidad se conoce como **Ley de Hooke**. Robert Hooke, fue un científico inglés, contemporáneo de Newton, que en 1676 descubrió y estableció la ley que lleva su nombre y que se utiliza para definir las propiedades elásticas de un cuerpo. Estudiando los efectos de las fuerzas de tensión y compresión, observó que había un aumento en la longitud del resorte que era proporcional a la fuerza aplicada.

Sin embargo, este comportamiento elástico solo se produce dentro de ciertos límites. Puede ocurrir que si la fuerza aplicada supera cierto valor, el material quede totalmente deformado, no volviendo a su situación inicial. Entonces, la Ley de Hooke deja de ser válida. A ese máximo esfuerzo que se aplica y que hace que el cuerpo deje de comportarse de forma elástica se le conoce como límite de elasticidad. Por otro lado, la relación que existe entre el esfuerzo y la deformación, se conoce como módulo de elasticidad o módulo de Young,  $E$ .

Tanto el módulo de Young como el límite de elasticidad, están determinados por la estructura molecular del material. Esto es, la distancia de equilibrio entre las moléculas de determinado material se basa en el equilibrio entre las fuerzas moleculares de atracción y repulsión. Sin embargo, si aplicamos una fuerza externa, las distancias moleculares cambian y el material se deforma. Si la deformación se encuentra por debajo del límite de elasticidad, las moléculas volverán a su posición de equilibrio cuando se deje de aplicar la fuerza la fuerza externa, recuperando el material su forma original. Sin embargo, si nos encontramos más allá del límite de elasticidad, las moléculas no podrán volver a su posición de partida y el material se deforma permanentemente o se rompe.

### 3. Fundamento teórico

El sistema formado por una masa  $m$  y un muelle fijo por uno de sus extremos es el caso más sencillo en el que se puede estudiar la fuerza elástica en un sólido y también el movimiento oscilatorio armónico.

Un cuerpo elástico sometido a una fuerza  $F$  sufre una deformación, estiramiento o compresión,  $\Delta l = l - l_0$  directamente proporcional a la fuerza aplicada. Esta relación de proporcionalidad

$$F = -k\Delta l \quad (3.1)$$

se conoce como **ley de Hooke**. El signo menos indica que la fuerza es recuperadora, es decir, que se opone a la deformación,  $l_0$  es la longitud natural del muelle y  $k$  es la constante elástica.

En la situación experimental que emplearemos en esta práctica, (ver figura) el muelle está situado verticalmente y de su extremo pende un platillo portamasas de masa  $m_0$ . Este portamasas está sometido a su peso y a la fuerza elástica del muelle. Por la segunda ley de Newton y dado que ambas fuerzas son verticales se tiene que la resultante satisface

$$\sum F_y = -k \Delta y + m_0 g = m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (3.2)$$

donde  $\Delta y = y - l_0$ . Cuando el muelle está en equilibrio y en reposo, la resultante de las fuerzas es nula y la ecuación anterior se reduce a

$$k (y_0 - l_0) = m_0 g \quad (3.3)$$

donde  $y_0$  es la nueva posición de equilibrio del muelle. Si ahora ponemos una pesa de masa  $m$  sobre el platillo el muelle se estira hasta que la posición del platillo es  $y$ , esto es, el alargamiento es  $y - y_0$ , y la condición de equilibrio es

$$k(y - l_0) = (m + m_0)g \quad (3.4)$$

que con la ecuación 3.3 se escribe como

$$k(y - y_0) = mg. \quad (3.5)$$

Como esta ecuación no depende de  $l_0$  ni de  $m_0$  podemos determinar la constante elástica simplemente midiendo el alargamiento del muelle para varias masas. Este es el llamado método estático de medir la constante del muelle.

Hay un modo dinámico de medir la constante elástica que describimos a continuación. Si desplazamos el portamasas a una distancia  $y$  que no es la de equilibrio, la segunda ley de Newton nos dice que la resultante de las fuerzas es igual a la masa por la aceleración.

Pero, ¿cuál es la masa que se acelera? En este caso hay que considerar que además de la masa  $m$ , está la del platillo  $m_0$  y una masa efectiva del muelle  $m_{ef} = \alpha m_s$ . Esta masa efectiva es una fracción  $0 < \alpha < 1$  de la masa total  $m_s$  del muelle que tiene en cuenta que sólo se mueve una parte del muelle. Así pues, la ecuación 3.2 nos queda

$$-k(y - y_0) = (m + m_0 + \alpha m_s) \frac{d^2 y}{dt^2}. \quad (3.6)$$

Esta es la conocida ecuación de un oscilador armónico de masa  $M = m + m_0 + \alpha m_s$  y constante  $k$  cuyo periodo sabemos que es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (3.7)$$

El modo dinámico de obtener la constante elástica consiste en medir el periodo de las oscilaciones para varios valores de la masa  $m$ . Según la ecuación 3.7  $T^2(m)$  es una ecuación lineal

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} + 4\pi^2 \frac{\alpha m_s + m_0}{k} \quad (3.8)$$

cuya pendiente y ordenada en el origen son respectivamente

$$a = 4\pi^2/k \quad b = 4\pi^2(\alpha m_s + m_0)/k \quad (3.9)$$

## 4. Experimento

El dispositivo empleado para esta práctica es similar al que muestra la figura 3.1. Consiste en un soporte con un muelle del que cuelga un portamasas en el cual se colocan varios anillos de diferente masa. Hay una regla que permite medir la elongación del muelle.

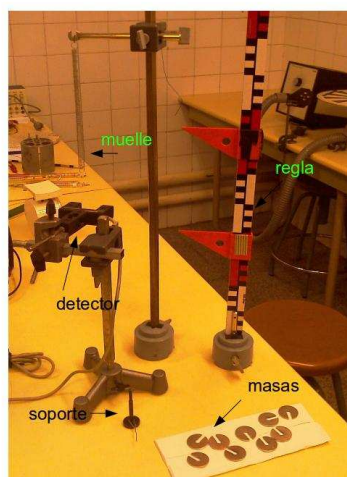


Figura 3.1: Montaje para la realización de la práctica.

#### 4.1. Materiales

- Soporte para la Ley de Hooke.
- Muelles de distinto tipo.
- Anillos con masas de distinto tipo.
- “Suspensor de masas” que vaya conectado a los muelles y que permita añadir las masas.
- Balanza.
- Cronómetro.
- Regla colocada junto al soporte para anotar deformaciones.
- Puerta y contador (opcional).
- Barras y conectores que permitan colocar dos muelles en serie o en paralelo (para extender la práctica)

#### 4.2. Procedimiento

##### Toma de datos

- Pese el muelle y la cestilla por separado.
- Elija los incrementos de masa que van a ser empleados según la rigidez del muelle disponible.



$m$	$m + m_0$	$y$	$y - y_0$	tiempo, $t$	Periodo, $T = t/n$	$T^2$

Tabla 3.1: Tabla de datos.  $t$  es el tiempo de  $n$  oscilaciones.

- Coloque el portamasas en la parte inferior del muelle y añada una masa suficiente para que el muelle quede tenso. Pese el platillo junto con esta masa y considere esta masa como  $m_0$ . Anote la posición de equilibrio sobre la regla y considere esta posición como  $y_0$ . Tome como referencia el punto inferior del portamasas.
- Coloque una masa  $m$  y mida la posición del punto de referencia  $Y$ .
- Estire o comprima levemente<sup>1</sup> el platillo hacia abajo de modo que, al dejarlo en libertad, empiece a oscilar verticalmente. Se dejan pasar las primeras oscilaciones hasta que se estabilice el movimiento, se cronometra el tiempo empleado en 20 oscilaciones. Empiece a contar en una de las posiciones extremas, la más alta o la más baja, y cuente una oscilación cada vez que la masa pasa por esa posición. Según la constante elástica del muelle puede ser conveniente utilizar un contador electrónico.
- Aumente la masa y repita la medición de la elongación y del periodo. Se deben tomar medidas para al menos cinco masas distintas completando los datos de la tabla 3.1
- Estime el error asociado a cada una de las medidas experimentales realizadas. ¿Cómo?

### 4.3. Análisis

1. Represente la deformación  $y - y_0$  frente a la masa  $m$  y ajuste los puntos a una recta de ecuación  $y = mx + b$ . Esto equivale a representar la ecuación 3.4 y, por tanto, permite calcular la constante  $g/k$  a partir de la pendiente de la recta. Determinar el valor de  $k$ . ¿Qué representa el valor obtenido de  $b$ ?
2. Represente  $T^2$  frente a  $m + m_0$ , que como nos dice la ecuación 3.7, es una recta. De esta gráfica estime el valor de la constante  $k$  a partir de la pendiente de la recta, ecuación 3.9.

<sup>1</sup>Es conveniente trabajar con pequeñas oscilaciones porque sólo en ese caso el periodo es independiente de la amplitud de la oscilación.

3. Compare los resultados de  $k$  obtenidos por el método estático y dinámico y determine el error relativo cometido suponiendo que el resultado correcto sea el estático.
4. Con los resultados del apartado anterior comente las diferencias entre ambos métodos desde un punto de vista experimental.
5. De esta gráfica estime la coordenada en el origen de la recta y de ahí con la ecuación 3.9, el valor de

$$\alpha = \frac{1}{m_s} \left( \frac{kb}{4\pi^2} - m_0 \right).$$

¿Qué significa este coeficiente? ¿En qué rango de valores espera que se encuentre?

#### 4.4. Cuestiones

- Obtenga explícitamente (mostrando y justificando los pasos intermedios) las expresiones 3.14 y 3.15.
- Una persona que “pesa” 80 kg se sube sobre una balanza. El resorte de esta se comprime 0,4 centímetros. ¿Cuál es la constante  $k$  del resorte?
- Sabiendo que la sección transversal del muelle tiene un diámetro de 2,5 cm y que la longitud natural de éste es de 11 cm, determinar el módulo de elasticidad del muelle.
- Si la energía potencial del muelle varía al estirarlo desde un extremo, ¿debería o no mantenerse constante la energía total del sistema? ¿Por qué?
- Obtenga el valor experimental del módulo de elasticidad de cada uno de los muelles empleados. ¿Es este módulo de elasticidad el mismo módulo de Young que el del material del que está formado el muelle?

## 5. Anexos

### 5.1. Más sobre la ley de Hooke

Se define el esfuerzo,  $\sigma$ , como la fuerza por unidad de área, tal que:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3.10)$$

donde  $F$  es la fuerza aplicada y  $A$  la sección transversal del material.

Por otro lado, la deformación,  $\epsilon$ , se define como :

$$\epsilon = \frac{\Delta x}{L} \quad (3.11)$$

donde  $\Delta x = x_2 - x_1$  es el alargamiento del material entre dos posiciones  $x_1$  y  $x_2$ ,  $L$  la longitud inicial del material.

Para los materiales elásticos la Ley de Hooke se expresa bajo la relación que existe entre deformación y esfuerzo están relacionados mediante el módulo de Young o módulo de elasticidad del material,  $E$ :

$$\sigma = E \epsilon \quad (3.12)$$

Si tenemos un material sobre el que se ejerce una fuerza en la dirección  $x$ , la Ley de Hooke nos dice que el alargamiento del material es proporcional a la fuerza aplicada mediante el uso de una constante elástica,  $k$ . De este modo:

$$F = -k \Delta x \quad (3.13)$$

Por tanto, relacionando las expresiones anteriores obtenemos que la constante  $k$  es:

$$k = \frac{A \cdot E}{L} \quad (3.14)$$

Además, la energía potencial adquirida por material,  $U$ , debido a la deformación sufrida, puede calcularse por medio de la siguiente expresión:

$$U = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad (3.15)$$

## 6. Práctica extra: Movimiento armónico simple

El sistema experimental aquí empleado puede usarse para estudiar el movimiento armónico simple. Esto es, supongamos que tenemos una partícula de masa  $m$ , fija a un muelle de constante  $k$  que oscila en la dirección vertical.

Csi que exista ninguna fuerza de fricción y despreciando la masa del resorte. Si aplicamos la segunda Ley de Newton:

$$F = m a$$

Entonces, utilizando la fuerza de la gravedad:

$$m a = -k (y + y_0) + m g$$

donde  $y$  es la coordenada vertical e  $y_0$  es la posición de equilibrio del muelle bajo acción de la gravedad. En ese caso, cuando el muelle y la masa está en reposo bajo su propio peso, tenemos que:

$$0 = -k y_0 + m g$$

de manera que la expresión general queda como:

$$m a = -k y \quad (3.16)$$

Ahora bien, sabemos que la aceleración instantánea es la derivada segunda de la posición:

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

que sustituida en la ecuación 3.16 nos daría la siguiente ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k y = 0 \quad (3.17)$$

Suponemos que las soluciones de esta ecuación son oscilaciones de la forma:

$$y(t) = A \cos(\omega t); \quad (3.18)$$

con frecuencia  $\omega$  y donde  $A$  es la máxima elongación. Si sustituimos esta solución en la ecuación 3.17, obtenemos que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.19)$$

Es decir, el periodo de oscilación,  $T = \omega/2\pi$  será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.20)$$

Elevando al cuadrado, tendríamos:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} \quad (3.21)$$

## 6.1. Procedimiento

- Coloque una masa y estire levemente el “suspensor de masas” hacia abajo. de modo que, al dejarlo en libertad, empiece a oscilar verticalmente
- Se dejan pasar las primeras oscilaciones hasta que se estabilice el movimiento, se cronometra el tiempo empleado en  $n$  oscilaciones, y se calcula el período.
- Repita la medición las veces que considere necesarias y vaya cambiando la masa.
- Obtenga de forma análoga a la sección anterior la constante  $k$  para cada uno de los distintos muelles representando  $T^2$  en función de  $m$ .
- Compare lo obtenido con los resultados de la sección anterior y comente las diferencias entre ambos métodos desde un punto de vista experimental.

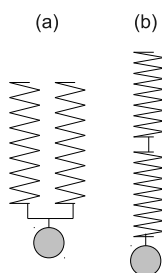


Figura 3.2: Configuración de dos muelles (a) en paralelo y (b) en serie.

## 7. Práctica alternativa: muelles en serie y en paralelo.

En el caso concreto de los muelles situados verticalmente, la Ley de Hooke nos dice que el alargamiento del material es proporcional a la fuerza aplicada mediante el uso de la constante elástica del muelle,  $k$ . De este modo:

$$F = -k \Delta x$$

y si introducimos una oscilación en el muelle, veremos que tiene un periodo de oscilación,  $T$  que será igual a:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

donde  $m$  es la masa del sistema.

Supongamos que en el sistema experimental vez de un muelle, empleamos un sistema de resortes con dos muelles, de constantes de recuperación  $k_1$  y  $k_2$ , situados en “serie” o en “paralelo” tal y como se muestra en la figura 3.2. Entonces la constante total del sistema  $k_T$  será, en el caso en serie:

$$\frac{1}{k_T} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (3.22)$$

Para el caso en paralelo:

$$k_T = k_1 + k_2 \quad (3.23)$$

A continuación explicamos con un poco más de detalle ambas situaciones

### En serie

Sean dos muelles en serie tal y como muestra la figura 3.2(b), sobre los que se ejerce una fuerza  $F$  creando un desplazamiento  $y$  Sean  $F_1$  y  $F'_1$  las fuerzas que se ejercen en la parte superior e inferior del muelle más cercano al suelo. De igual manera  $F_2$  y  $F'_2$

serán las fuerzas que se ejercen en la parte superior e inferior del muelle más alejado del suelo. Los desplazamientos del primer muelle será  $y_1$  y los del segundo  $y_2$ .

Despreciando el peso de los resortes y aplicando la segunda ley de Newton se obtiene que:

$$F'_1 - F = 0; \quad F'_2 - F_2 = 0$$

Por ley de acción y reacción se obtiene que:

$$F'_1 = F_2$$

De todo ello se deduce que:

$$F = F_1 = F_2$$

A su vez, el desplazamiento total será

$$y = y_1 + y_2$$

Dado que se cumple la ley de Hooke para cada uno de los muelles  $F_1 = -k_1 y_1$  y  $F_2 = -k_2 y_2$  y que  $F = -ky$ , tenemos que:

$$\frac{F}{k} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}$$

de donde finalmente tenemos que:

$$\frac{1}{k_T} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (3.24)$$

### En paralelo

Sean dos muelles en paralelo tal y como muestra la figura 3.2(a), sobre los que se ejerce una fuerza  $F$  creando un desplazamiento  $y$ . Sean  $F_1$  y  $F_2$  las fuerzas verticales en la dirección de  $F$  sobre cada uno de los muelles. El desplazamiento generado es el mismo para los dos muelles:  $y = y_1 = y_2$ .

La fuerza total ejercida es igual a la suma de las fuerzas sobre cada uno de los muelles:

$$F = F_1 + F_2$$

Por tanto, utilizando la ley de Hooke para cada uno de los muelles  $F_1 = -k_1 y_1$  y  $F_2 = -k_2 y_2$  y que  $F = -ky$ , tenemos que:

$$ky = k_1 y_1 + k_2 y_2$$

Y entonces:

$$k = k_1 + k_2$$

### 7.1. Procedimiento

- Repita el mismo proceso que en la práctica general, pero empleando dos muelles primero en serie y luego en paralelo.
- Obtenga la constante de recuperación de los muelles con el error asociado a las medidas. Compare con el resultado de emplear las fórmulas 3.22 y 3.23 (realizando el cálculo con los errores correspondientes).





# Conservación de la energía mecánica

## 1. Propósito

- Estudio de la conservación de la energía de un sólido con rotación y desplazamiento.
- Determinación del momento de inercia de la rueda de Maxwell.

## 2. Fundamento teórico.

Cuando un cuerpo se encuentra en movimiento las magnitudes que determinan su estado varían con el tiempo. Sin embargo, dependiendo de las condiciones en las que se produzca el movimiento algunas de estas magnitudes (o las sumas de ellas) permanecen constantes a lo largo del tiempo y pueden ser utilizadas para obtener información sobre como se mueve el cuerpo a lo largo del tiempo. A estas cantidades se les suele dar el nombre de *integrales del movimiento*.

Dependiendo del movimiento que se estudie en concreto existen diferentes magnitudes que se pueden conservar. En el caso concreto de sólidos o partículas que se muevan bajo la acción de fuerzas que se pueden derivar de un potencial (fuerzas conservativas) se observa que la suma de la energía potencial y cinética, la energía mecánica, es constante:

$$E = T + U \quad (4.1)$$

donde  $E$  es la energía mecánica del cuerpo,  $T$  la energía cinética y  $U$  su energía potencial. Supongamos que  $t_1$  y  $t_2$  son dos instantes diferentes de tiempo y que  $E_1 = T_1 + U_1$  es la energía mecánica en el instante  $t_1$  y que  $E_2 = T_2 + U_2$  es la energía mecánica en el instante  $t_2$ . Puesto que  $E$  es constante debe cumplirse:

$$E_1 = T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = E_2 \quad (4.2)$$

Ecuación que se conoce como: **Teorema de conservación de la energía mecánica.**

En el caso del sólido rígido la energía cinética tiene dos componentes, una debida al movimiento de traslación del cuerpo como un bloque (traslación del centro de masas) y otra debido a la rotación en torno a su eje central.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (4.3)$$

$U$  es la energía potencial, que en este caso se expresa como:

$$U = -mgh \quad (4.4)$$

el signo menos se debe a que se toma como origen de energía potencial el punto en el que la rueda está a la máxima altura (recordemos que donde tomar el origen de las energías potenciales es algo completamente arbitrario).

La ecuación de la energía mecánica queda como:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mgh \quad (4.5)$$

Donde se ha introducido el momento de inercia del sólido  $I$ .

Es posible simplificar un poco más esta ecuación si se recuerda que los módulos de las velocidades lineal y angular se encuentran relacionados por  $R$  el radio de giro del sólido:  $v = \omega R$  sen( $\omega, R$ ). En el caso concreto que estamos tratando en esta práctica el eje de rotación es perpendicular a la velocidad tangencial del sólido por lo que la anterior ecuación se simplifica para dar:  $v = \omega R$  y la ecuación de conservación de la energía puede escribirse como:

$$E = -mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2} \quad (4.6)$$

o,

$$E = -mgh + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)v^2 \quad (4.7)$$

donde  $I = mR^2$  es el momento de inercia de la rueda que gira.

Derivando con respecto al tiempo y recordando que  $E$  es constante con el tiempo obtenemos,

$$0 = -mgv + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)v\frac{dv}{dt} \quad (4.8)$$

Si se resuelve esta ecuación diferencial se puede obtener el valor de la velocidad:

$$v = \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}}.t \quad (4.9)$$

y si se integra la ecuación anterior con respecto al tiempo se puede obtener la posición del objeto (altura) en función del tiempo.

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}}\right)t^2 \quad (4.10)$$

### 3. Dispositivo Experimental

Para poder realizar esta práctica el alumno debe disponer de los siguiente materiales:

- Un pie en forma de A.
- Unas varillas de sustentación que mantengan el pie en posición vertical.
- Una rueda de Maxwell.
- Un dispositivo de barreras fotoeléctricas con el que medir intervalos de tiempo.
- Un contador de tiempos digital.
- Cables de conexión.
- Una regla con la que medir diferencias dentro del pie en forma de A.

### 4. Procedimiento.

El sistema experimental está formado por:

Un pie en forma de A dónde están colocadas unas varillas que sirven de sujeción para la rueda de Maxwell. Una varilla horizontal de donde cuelga la rueda de Maxwell. En la parte trasera del dispositivo se coloca una regla que permite medir diferencias de alturas. Por último se tiene un sistema de medida de intervalos de tiempos. Este está formado por una barra vertical que se coloca junto al dispositivo y sobre la que se colocan dos barreras fotoeléctricas con su correspondiente contador digital.

Para comenzar el trabajo experimental deben seguirse las siguientes indicaciones:

- **Elegir y marcar una altura superior de referencia.** Para ello se coloca la barrera fotoeléctrica superior a una altura fija. En principio no importa cual sea esta, pero cuanto más próxima a la barra superior se coloque, mejor. Utilizando la regla de la parte posterior del montaje se marca la altura de este punto con la máxima precisión posible.
- **Marcar una altura inferior de medida.** Se coloca la barrera inferior a una distancia de la barrera superior. Se marca en la regla posterior esta altura. Con la diferencia de las dos alturas medidas se obtiene la altura (o distancia) que recorrerá la rueda.
- **Enrollar la rueda de Maxwell.** Esto se hace girándola sobre su propio eje y de tal manera que los hilos se enrollen sobre el eje de fuera a dentro. Debe tratarse de que a ambos lados de la rueda los arrollamientos tengan densidades de hilo por unidad de longitud parecidas.

- **Soltar la rueda.** Al soltar la rueda debe procurarse eliminar lo máximo posible los movimientos de vaivén. En el momento de soltar la rueda esta debe estar lo más cerca que sea posible de la barra de superior. Así, en el momento que la rueda empiece a bajar el contador encargado del tiempo empezará a medir lo antes posible.
- **Paso por la segunda barrera.** Cuando el eje de la rueda cruza la segunda barrera se producen dos efectos. Por un lado se para el contador de tiempo que marca el tiempo que tarda la rueda en caer. Además se activa un segundo contador que mide el tiempo que tarda el eje de la rueda en cruzar este contador. Esto nos da el tiempo  $dt$  que tarda en pasar por el contador el eje de la rueda y que nos permite calcular el valor de la velocidad (instantánea) en ese punto.
- **Medida de la masa  $m$  y del radio del eje  $r$ .** Finalmente medimos la masa de la rueda  $m$  y el radio del eje  $r$ . Para medir la masa se toma la balanza y se coloca debajo de la rueda sin que sea necesario soltar la rueda del soporte. El radio del eje de giro debe medirse con un calibre.

El procedimiento experimental debe repetirse para **diez** diferencias de altura distintas. De esta manera el número de medidas que se obtienen permiten hacer un buen estudio estadístico de los resultados del experimento.

Con los valores obtenidos deberá hacerse una tabla que contenga las siguientes columnas:

- alturas  $h$ .
- tiempos de caída  $t$ .
- incrementos de tiempo  $dt$  al pasar por la segunda barrera fotoeléctrica.
- velocidades  $v$ .

Una vez obtenidos el diámetro del eje que cruza la barrera fotoeléctrica  $dx$  y el tiempo que tarda éste en pasar por la barrera inferior  $dt$  podemos obtener la velocidad como el cociente de las dos magnitudes:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (4.11)$$

## 5. Análisis de los datos.

### 5.1. Momento de Inercia.

Uno de los objetivos de la práctica es medir el momento de inercia de la rueda. Una manera sencilla de hacerlo es mediante el teorema de conservación de la energía mecánica.

Puesto que sabemos que esta energía es constante podemos utilizar que en el punto más alto de la trayectoria la energía cinética ( $T$ ) es cero y en el más bajo la energía potencial ( $U$ ) es cero e igualar los valores de la energía en esos puntos.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{Iv^2}{r^2} \quad (4.12)$$

Despejando es posible obtener una expresión para el momento de inercia:

$$I = \frac{2 \left( mgh - \frac{1}{2}mv^2 \right) r^2}{v^2} \quad (4.13)$$

Esta ecuación nos dice que podemos calcular el momento de inercia  $I$  para cada uno de pares de valores medidos  $(h, v)$ . Además debemos usar el valor de la masa de la rueda  $m$  que debemos haber medido con anterioridad, el radio del eje de giro de la rueda  $r$  (**NO el radio de la rueda** ya que esta gira en torno al eje), y el valor de la constante de la gravedad  $g = (9,8 \pm 0,1)m/s^2$ .

Usando estos diez valores se debe calcular el valor medio del momento de inercia y su error, que se puede obtener a partir de la teoría de propagación de los errores.

En el siguiente paso obtendremos el momento de inercia a partir de representaciones gráficas. Para ello se debe representar  $v$  frente a  $t$  y  $h$  frente a  $t^2$ . Mirando las ecuaciones 8 y 9 vemos que la velocidad es proporcional al tiempo y que la altura es proporcional al tiempo al cuadrado. Si representamos los datos de esta manera ( $v$  frente a  $t$  y  $h$  frente a  $t^2$ ) obtendremos dos rectas (una para cada representación) de las que podemos obtener sus pendientes. Estas tienen el mismo valor que las constantes de proporcionalidad de  $t$  y  $t^2$  de las ecuaciones 8 y 9.

Para obtener los momentos de inercia a partir de estas representaciones gráficas deben seguirse los siguientes pasos:

- **Gráficas** Representar la velocidad  $v$  frente al tiempo  $t$  y la altura frente al tiempo al cuadrado  $t^2$  con algún programa de representación gráfica.
- **Ajuste** Ajustar ambas gráficas a una recta por mínimos cuadrados. Del ajuste se obtienen el valor de la pendiente y la ordenada en el origen con **sus respectivos errores** como se indicó en la sección de cálculo de errores.
- **Cálculo del momento de Inercia** A partir de las pendientes de ambas rectas, que se denominarán:  $m_v$  para la gráfica de  $v$  frente a  $t$  y  $m_h$  para la gráfica de  $h$  frente a  $t^2$  podemos obtener el valor del momento de inercia usando las ecuaciones:

$$m_v = \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}} \quad (4.14)$$

$$m_h = \frac{1}{2} \left( \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}} \right) \quad (4.15)$$

de las que se puede despejar dos valores del momento de inercia que denominaremos  $I_v$  e  $I_h$ . Estos se pueden comparar con el valor que se obtuvo de forma directa a partir de las medidas.

## 6. Cuestiones

- ¿Existe una gran diferencia entre los valores de los momentos de inercia calculados utilizando diferentes maneras? En caso de que las diferencias existan comente su significado indicando cuales pueden ser las causas.
- En el apartado en el que se calcularon los momentos de inercia a partir de las pendientes no se hizo indicación ninguna sobre los errores de las mismas. Indique una manera de estimar el error en el valor del momento de inercia en este caso.
- A la hora de representar algunas gráficas se ha pedido que para algunas de las magnitudes la representación se haga frente al cuadrado de otras y no frente a sus valores (sin elevar al cuadrado). Indique el por qué de este tipo de representación.
- ¿Por qué en el caso de la energía potencial se considera que las alturas son negativas?
- ¿Qué forma tienen las gráficas de las energías cinética y potencial? ¿Como son esas variaciones en función de la altura y la velocidad?

# Resistencia eléctrica

## 1. Propósito de la práctica

- Comprobar la ley de Ohm para un hilo conductor. Esto es, medir la intensidad de la corriente eléctrica que pasa por un hilo conductor y determinar la relación entre intensidad, voltaje y resistencia.
- Medir y determinar tres de los factores de los que depende la resistencia de un hilo conductor, la longitud, la sección y la resistividad del material del que está hecho el conductor.

## 2. Fundamento teórico

La Ley de Ohm es una ley empírica que establece que si entre los extremos de un hilo conductor se mantiene una diferencia de potencial  $\Delta V$ , por el conductor circula una corriente de intensidad  $I$  tal que

$$\frac{\Delta V}{I} = R \quad (5.1)$$

donde la resistencia  $R$  es una constante para cada conductor que depende tanto del material del que está hecho como de su forma. La ley de Ohm establece, por tanto, que  $R$  no depende de la intensidad, que es el comportamiento que presentan la mayoría de los conductores. Sin embargo hay materiales llamados no óhmicos que presentan una resistencia que sí depende de la intensidad.

La resistencia de un material óhmico al paso de la corriente depende en primer lugar de la resistividad  $\rho$  del material. Cuanto menor es la resistividad mejor conductor es el material. Así, la plata, que es uno de los mejores conductores tiene una resistividad de  $\rho = 0,016 \Omega\text{m}$  mientras que la baquelita, que es un aislante, tiene una resistividad de  $\rho = 10^{20} \Omega\text{m}$ . Para una determinada substancia, la resistencia también depende de la forma. Para el caso de un cable, que es un cilindro de longitud  $L$  y sección  $S$  la resistencia es proporcional a la longitud e inversamente proporcional a la sección, según la ecuación

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (5.2)$$

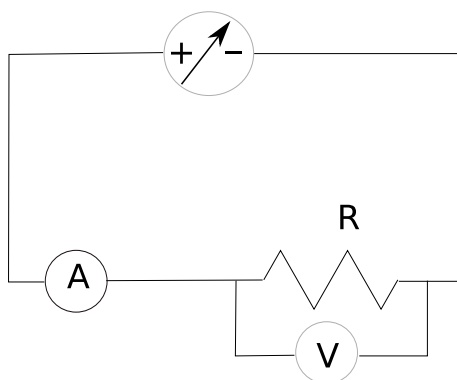


Figura 5.1:

En esta práctica vamos a comprobar que la ley de Ohm, ecuación (5.1), se cumple para el cobre y que la resistencia de hilos verifican la ecuación (5.2). En esta práctica no se va a tratar de la variación de la resistividad con la temperatura.

### 3. Dispositivo experimental

El dispositivo experimental es el de la figura 5.1. Un hilo conductor,  $R$  que se conecta en serie con un amperímetro  $A$  y la fuente de alimentación. Con un voltímetro  $V$  se mide la diferencia de potencial entre los extremos del hilo conductor.

#### 3.1. Material necesario

- Hilos de cobre con recubrimiento aislante (de bobinado) con varios diámetros comprendidos entre 0,1 y 0,8 mm.
- Un voltímetro que permita medir mV y amperímetro capaz de medir mA.
- Fuente de alimentación en potencia regulable.

### 4. Procedimiento

Se monta el circuito para un hilo de determinada sección, colocando las pinzas de la fuente de manera que la distancia sea  $L$  ( $L$  no es la longitud del hilo sino la distancia entre los puntos donde se establece la diferencia potencial). Con la fuente apagada se instala el circuito según se ha descrito para un cable de longitud y sección dadas. Nos aseguramos de que las escalas del amperímetro y del voltímetro son las adecuadas. Asegúrese de que los botones selectores de la fuente están al mínimo. Las medidas se efectúan siempre de la misma manera: manipulando los botones de la fuente establecemos una corriente  $I$  y con la ayuda del voltímetro anotamos el valor de  $\Delta V$ . Tomar



$\phi$	$S$

Tabla 5.1: Sección del hilo  $S$  frente al diámetro  $\phi$ .

así 6 valores de  $I$  a intervalos regulares teniendo en cuenta que la intensidad no debe sobrepasar los  $2,5 - 3,0 \text{ A}$  <sup>1</sup>. Se repite el procedimiento para 4 longitudes diferentes del hilo.

A continuación, se sustituye el hilo por otro de diferente sección y se repite el procedimiento hasta completar la tabla 5.2. Es importante que para los hilos de diferentes secciones utilicemos las mismas longitudes. Si en vez de la sección se conoce el diámetro de los hilos conviene hacer los cálculos y rellenar la tabla 5.1.

## 5. Análisis

- Ley de Ohm. Representar en una gráfica  $\Delta V$  en función de  $I$  para cada una de las series de datos. Cada serie se debe ajustar a una recta cuya pendiente es la resistencia del conductor según vemos en la (5.1). ¿Qué significa la ordenada en el origen que se obtiene en el ajuste de los datos? ¿Por qué no salen todas las rectas con la misma pendiente?
- A partir de los ajustes anteriores completar la tabla la tabla 5.3 en la que se representa los valores de la resistencia de cada serie en función de la longitud y la sección de cada cable.
- Dependencia de  $R$  con  $L$ . Representar gráficamente los valores de  $R$  frente a  $L$ , y comprobar que para cada sección de hilo se obtiene una recta, cuya pendiente es  $\rho/S$ . Calcular las correspondientes regresiones lineales y obtener la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de las rectas y su correspondiente error. ¿Qué significa ahora la pendiente de cada recta? ¿Cuántas rectas hay? ¿Por qué?
- Dependencia de  $R$  con  $S$ . Representar gráficamente los valores de  $R$  frente a  $1/S$ , y comprobar que para cada valor de la longitud  $L$  del hilo se obtiene una recta, cuya pendiente es  $\rho L$ . Calcular las correspondientes regresiones lineales y obtener la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de las rectas y su correspondiente error. ¿Qué significa ahora la pendiente de cada recta? ¿Cuántas rectas hay? ¿Por qué?

<sup>1</sup>Es conveniente utilizar potencias ( $I\Delta V$ ) pequeñas para evitar el calentamiento del hilo conductor durante la medida.

$L$	$S =$		$S =$		$S =$		$S =$	
	$I$	$\Delta V$	$I$	$\Delta V$	$I$	$\Delta V$	$I$	$\Delta V$

Tabla 5.2: Tabla de datos. Intensidad de la corriente  $I$  y diferencia de potencial  $\Delta V$ , para diferentes longitudes  $L$  y secciones  $S$ .

$S =$		$S =$		$S =$		$S =$	
$L$	$R$	$L$	$R$	$L$	$R$	$L$	$R$

Tabla 5.3: Resistencia de cada conductor según su longitud  $L$  y sección  $S$ .

- Medida de la resistividad. Después de demostrar la dependencia funcional de la resistencia con la longitud y la sección vamos a calcular el valor de la resistividad del material de que están compuestos los hilos conductores. Para ello representamos  $R$  frente a  $L/S$ . Ajustar los valores a una recta, cuya pendiente es, según la ecuación (5.2), la resistividad del material. Comparar el error cometido con los valores de la resistividad que se pueden obtener de las dos gráficas anteriores. ¿Por qué es este el método con el que se obtiene el menor error?
- Con el valor de la resistividad calculado y con la ayuda del libro de texto<sup>1</sup> o por buscando en internet, identificar el material del que está fabricado el hilo.

## 6. Cuestiones

1. ¿Por qué se dice que la ley de Ohm es una ley empírica?



# Medida del campo magnético terrestre

## 1. Propósito de la práctica

- Analizar el campo magnético creado por un conductor rectilíneo. Comprobar la ley de Biot y Savart.
- Medir la componente horizontal del campo magnético terrestre

## 2. Fundamento teórico

Por la Ley de Biot y Savart, el campo magnético en un punto  $P$  del espacio situado a una distancia  $r$  de un hilo conductor rectilíneo por el que circula una intensidad de corriente  $I$  es un vector de módulo

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (6.1)$$

y dirección tangente a las líneas de campo que son circunferencias concéntricas de radio  $r$  contenidas en el plano perpendicular al conductor. En la ecuación anterior  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Tm/A}$  es la permeabilidad magnética del vacío. El campo magnético terrestre es aproximadamente igual al campo generado por un dipolo magnético situado en el centro de la Tierra como se muestra en la figura (6.1).

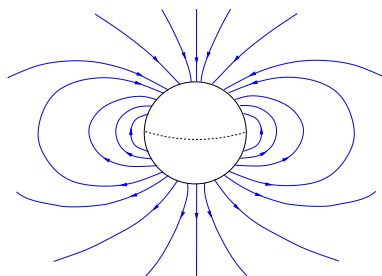


Figura 6.1: Las líneas del campo magnético terrestre salen del polo sur y entran por el polo norte.

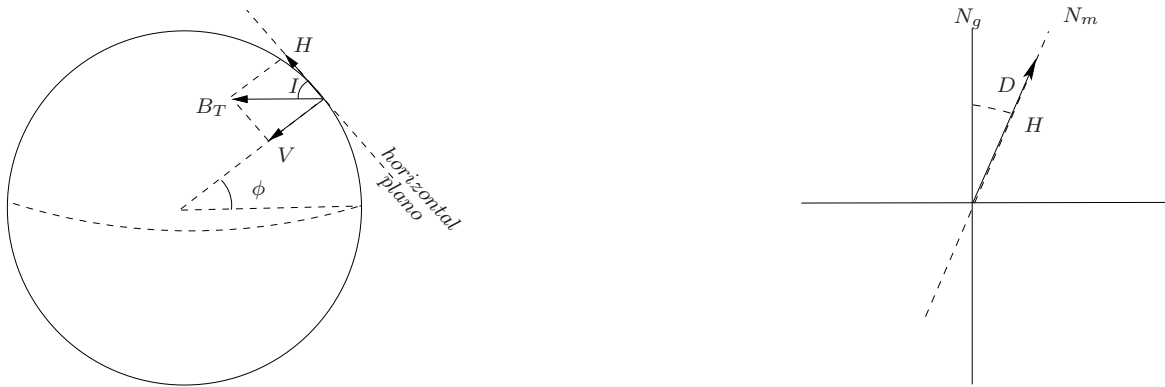


Figura 6.2: A la izquierda, se muestra las componentes horizontal  $H$  y vertical  $V$  en las que se puede descomponer el campo magnético terrestre  $B_T$  en un punto  $P$  de la superficie terrestre de latitud  $\phi$ . En la figura de la derecha se muestra la declinación magnética, en este caso positiva, como el ángulo que forma  $H$  con la dirección al Polo Norte geográfico  $N_g$ .

En un punto  $P$  de la superficie terrestre de latitud geográfica  $\phi$ , el campo magnético se puede descomponer en una componente horizontal  $H$  dirigida al Norte, y una componente vertical  $V$  que en el hemisferio norte está dirigida hacia el centro de la Tierra en sentido contrario en el hemisferio sur. El ángulo  $I$  que forma la dirección del vector campo magnético con la horizontal del lugar se denomina ángulo de inclinación, ver figura (6.2), de signo positivo cuando  $V$  está dirigido hacia el centro de la Tierra, y negativo cuando está dirigido en sentido opuesto. La dirección del campo magnético terrestre varía con el tiempo y en general es tal que el polo norte magnético no coincide con el polo norte geográfico. Se llama desviación magnética al ángulo que forma la dirección de la componente horizontal del campo terrestre, esto es, la dirección de la brújula y la dirección al Polo Norte geográfico. Este ángulo es positivo si la desviación es hacia el Este y negativo hacia el Oeste.

### 3. Dispositivo experimental

El esquema del montaje se muestra en la figura (6.3). Consiste en un cable conductor, rígido y rectilíneo colocado horizontalmente sobre el eje vertical de una brújula. La brújula está situada sobre un apilamiento de discos iguales que nos permiten variar la altura de la misma y, por tanto, su distancia  $d$  al cable.

Los extremos del cable se conectan a una fuente de alimentación de manera que por el cable se hace circular una corriente  $I$ , que se mide mediante un amperímetro. El campo magnético generado  $B$  está contenido en el plano horizontal y es perpendicular al cable. Si la dirección del cable se toma de manera cuando no pasa corriente esté orientado en la dirección de la aguja, esto es, en la dirección de la componente horizontal del campo magnético terrestre  $H$ , el campo magnético generado y el magnético son perpendiculares y la aguja de la brújula se desvía de su posición original Norte-Sur hasta formar

un ángulo  $\alpha$  tal que

$$\tan \alpha = \frac{B}{H}$$

Sustituyendo el campo magnético inducido, ecuación (6.1), se tiene

$$\tan \alpha = \frac{\mu_0}{2dH} I \quad (6.2)$$

### 3.1. Material necesario

1. Cable rígido de cobre de X cm,
2. brújula,
3. 5 discos de 0,5 cm de espesor,
4. fuente de alimentación,
5. polímetro.

## 4. Procedimiento

- Coloque la brújula sobre la pila de discos de manera que la orientación de la aguja sea paralela al cable. Mida la distancia  $d_1$  entre el cable y la aguja imantada de la brújula.
- Manipule la fuente de alimentación de manera que se establezca una corriente  $I$  en el conductor y después de que se equilibre mida el ángulo  $\alpha$  que forma la aguja con el cable. Anote la intensidad que mide el amperímetro.
- Modifique la intensidad a intervalos regulares y complete las primeras dos columnas de la tabla 6.1. Estime los intervalos de manera que la intensidad máxima no llegue al máximo permitido por la fuente y que la mínima produzca una desviación apreciable de la brújula.
- Repita el procedimiento quitando sucesivamente disco a disco, midiendo en cada caso la nueva distancia  $d_i$  del cable a la aguja imantada. Complete de esta manera el resto de las columnas de la tabla 6.1.

$I$	$\alpha(d_1)$	$\alpha(d_2)$	$\alpha(d_3)$	$\alpha(d_4)$	$\alpha(d_5)$

Tabla 6.1: Tabla de desviaciones de la aguja para diferentes intensidades. Cada serie corresponde a una distancia  $d_i$  entre la aguja y el cable.



Figura 6.3: En la figura de la izquierda se muestra la brújula bajo el hilo conductor y sobre una pila de discos. En la figura de la derecha se muestran la componente horizontal del campo magnético terrestre, el campo inducido por la corriente y el ángulo  $\alpha$  que forma la brújula, que está dirigida en la dirección del campo resultante, y el hilo conductor.



## 5. Análisis

1. Representar para cada distancia  $d_i$  la  $\tan \alpha$  en función de la intensidad  $I$  y ajustar los puntos a una recta, que según la ecuación (6.2), tiene por pendiente

$$a = \frac{\mu_0}{2d_i H}.$$

Para cada una de las series de medidas obtener el valor de la componente horizontal del campo magnético  $H$ .

2. Determinar para cada serie de datos el error cometido en la determinación de  $H$ .
3. Hacer una tabla de  $ad_i = \mu_0/(2H)$  para comprobar que toma un valor constante  $k$ , de donde se tiene que el valor del campo magnético terrestre es

$$H = 0,5\mu_0/k$$

4. Calcular el error cometido en  $H$ .
5. Comparar el resultado con el valor local del campo en la localidad donde se realiza la práctica, valor que se puede encontrar en ([www.ngdc.noaa.gov](http://www.ngdc.noaa.gov)). Para Madrid de coordenadas geográficas 43 deg 3' N y 3 deg 41' O la componente horizontal del campo terrestre es  $B_T = 44,7 \mu\text{T}$ ,  $H = 25,4 \mu\text{T}$ ,  $D = -1 \text{ deg } 43'$ ,  $I = 55 \text{ deg } 18'$ .



# Polímetro y osciloscopio

## 1. Propósito de la práctica

Esta práctica tiene por objeto aprender el manejo de dos instrumentos muy comunes en el laboratorio, como son el polímetro y osciloscopio. Para ello nos proponemos realizar las medidas más usuales con estos instrumentos.<sup>1</sup>

### 1.1. Polímetro: Introducción

El polímetro es un instrumento de medida de carácter general, que como su nombre indica, sirve para medir voltajes, corrientes y resistencias en una gama más o menos amplia de valores, que depende del número de escalas que tenga el aparato.

Los polímetros usuales sirven para medir voltajes, corrientes y resistencias en corriente continua (c.c.), así como voltajes y corrientes en alterna (c.a.). El aparato tiene una entrada común para unir al potencial más bajo (tierra) y una o dos entradas adicionales. Una de estas entradas es de carácter general (para todo tipo de medida) y la otra, en el caso de existir, suele utilizarse para medida de corrientes. Con una serie de conmutadores, o un conmutador rotatorio, seleccionamos el tipo de medida a realizar (voltajes, corrientes o resistencias), a continuación si se mide en c.c. o en c.a. y terminamos con la selección de la escala adecuada, **comenzando por la más alta.**

Si el aparato es analógico, las medidas se hacen con un galvanómetro d'Ánsorval o de aguja, en cuya carátula están gravadas las distintas escalas. En el caso de polímetros digitales, en la pantalla numérica aparecen los valores y una serie de símbolos que indican si se miden voltajes, corrientes o resistencias, además del signo en el caso de voltajes.

**PRECAUCION:** Nunca conectar el polímetro con la escala de corrientes directamente a la red o una pila, pues dañará irreversiblemente el aparato. Poner las escalas empezando por la más alta. No aplicar voltajes cuando el aparato está preparado para medida de corrientes o resistencias.

---

<sup>1</sup>Este guión es cortesía de Victoriano... y se reproduce con permiso de la UNED

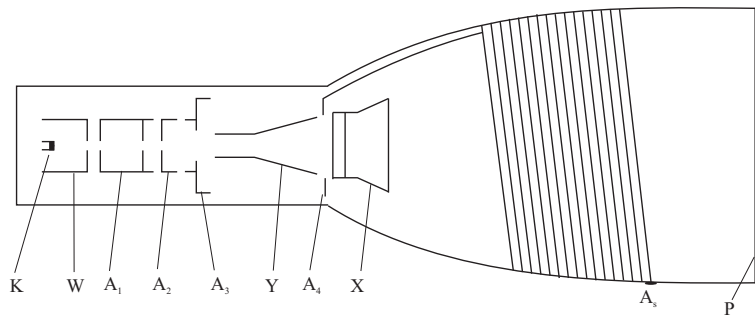


Figura 7.1: Tubo de rayos catódicos

## 1.2. Osciloscopio

### Introducción

El osciloscopio es un instrumento diseñado para observar magnitudes eléctricas, que pueden o no depender del tiempo, pero generalmente su utilidad mayor es en el caso de señales eléctricas dependientes del tiempo. Es decir, en él podemos observar y medir un voltaje entre dos terminales que dependa del tiempo (salida de un generador de funciones, la red, etc.), o la corriente que atraviesa una resistencia conocida, si medimos el voltaje en sus bornes.

Dada la facilidad del osciloscopio para observar señales variables, se utiliza para mostrar transitorios y señales que varían muy rápidamente, así como para la medida de intervalos de tiempo entre dos valores de un voltaje o el desfase entre dos señales sinusoidales.

El osciloscopio refleja en la pantalla lo que ocurre en el tiempo con la señal eléctrica observada.

### Tubo de rayos catódicos (TRC)

El componente principal de un osciloscopio es el tubo de rayos catódicos (TRC), cuyos elementos esenciales se muestran en la Fig.1.

Todos ellos están dentro de un recipiente de vidrio en forma de botella, en el que se hace el vacío.  $K$  es el cátodo, donde se produce la emisión de electrones mediante el calentamiento del material que lo compone.

$W$  es un cilindro al que se le aplica un voltaje que controla la corriente del haz de electrones y por tanto el brillo que produce el haz al chocar con la pantalla fosforescente  $P$ .

$A_1 - A_2 - A_3$  constituyen el sistema que enfoca y acelera el haz de electrones.

$A_4$  es un electrodo donde se aplica un voltaje para corregir las distorsiones del haz sobre la pantalla.

$A_5$  es un electrodo en forma de hélice al que se aplica el voltaje de post-aceleración, aceleración posterior al paso entre las placas de desviación del haz.

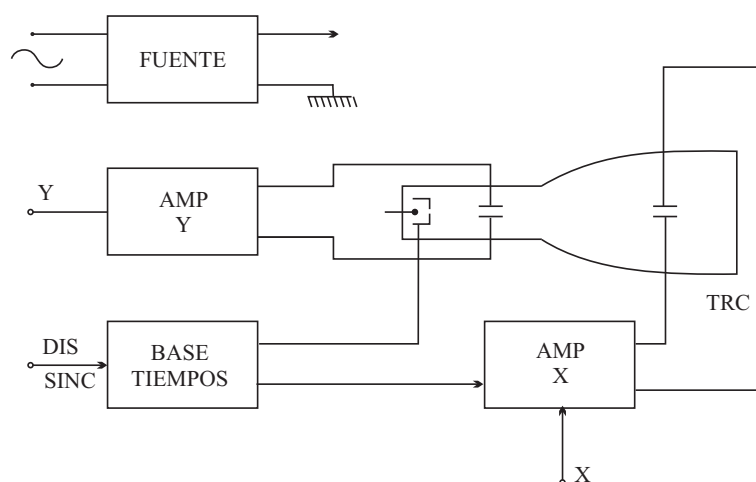


Figura 7.2: Componentes del osciloscopio

$P$  es la pantalla donde incide el haz de electrones. Esta pantalla está recubierta de un material fosforescente, que permite observar donde incide el haz mediante el destello que produce el choque de los electrones con el material fosforescente. La persistencia del centelleo depende del material con que se recubre la pantalla.

$X$  e  $Y$  son las placas donde se aplican los voltajes que desvían el haz de electrones. Dichas placas se disponen de forma que los planos de  $X$  e  $Y$  sean perpendiculares. A las placas  $X$  se aplica el voltaje de desviación horizontal y a las  $Y$  el vertical. Con esta disposición se logran desviaciones del haz en coordenadas cartesianas. Dependiendo de la distancia entre las placas  $X$  o entre las placas  $Y$ , es necesario aplicar mayor o menor voltaje para lograr una deflexión del haz hasta el borde de la pantalla  $P$ . Un valor usual es 50 V por cm. de desviación.

### Diagrama de bloques

La Fig.2 es un diagrama de bloques donde se muestran los componentes fundamentales de un osciloscopio.

#### a) Fuente de alimentación

Convierte el voltaje de la red en los voltajes de corriente continua y alterna necesarios para que funcionen los distintos componentes del osciloscopio.

#### b) Amplificador vertical

La función del amplificador vertical (AMP.  $Y$ ) es aumentar la amplitud de la señal que se aplica a los terminales de entrada para lograr una deflexión mayor del haz al atravesar las placas verticales ( $Y$ ) del TRC. Este amplificador lleva acoplado un atenuador para adaptar la señal de entrada a la desviación en V/cm o V/div deseada sobre la pantalla. Generalmente la sensibilidad del osciloscopio se puede variar desde 1mV/cm hasta 10V/cm.

El paso de banda depende del tipo de amplificador, el más común es de 0 a 20 Mc/s (Mhz).

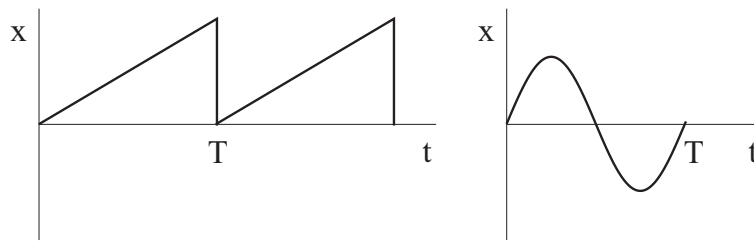


Figura 7.3: Base de tiempos

Los osciloscopios suelen tener dos canales de entrada, es decir, dos amplificadores verticales de entrada idénticos, que permiten observar dos señales simultáneamente, con lo cual podemos compararlas.

Para obtener oscilogramas en  $X - Y$ , se aplica un canal a las placas horizontales,  $X$  y otro a las verticales,  $Y$ .

### c) Base de tiempos

Para observar mediante el osciloscopio un voltaje que varía con el tiempo, necesitamos que el haz de electrones se desplace horizontalmente con velocidad constante al mismo tiempo que se aplica dicho voltaje a las placas verticales. En coordenadas cartesianas los desplazamientos del haz, debido a los voltajes aplicados en las placas, describen una curva representada por  $y = f(x)$ . Por ejemplo: Si sobre las placas horizontales aplicamos un voltaje en forma de diente de sierra, como el indicado en la Fig.3(a),

La Fig.4 muestra la composición de los dos voltajes y el resultado que se observa en la pantalla del osciloscopio. Vemos que sobre la pantalla se refleja un voltaje sinusoidal de la misma forma que el aplicado en las placas verticales.

La base de tiempos (BT) está constituida por un circuito que genera un voltaje en forma de diente de sierra como el indicado anteriormente, cuyo periodo  $T$  podemos variar. Dicha BT lleva además un dispositivo de disparo (Trigger) que permite iniciar la generación del diente de sierra en un instante determinado por la señal que deseamos observar u otra externa. Tanto el disparo como el período sirven para sincronizar la señal a observar con el voltaje en diente de sierra, con lo cual la señal permanece estable sobre la pantalla. Si el inicio del diente de sierra es anterior al paso por cero de la señal vertical, ésta comenzará en la pantalla con valor distinto de cero. Por otra parte, tanto si no se inicia siempre el diente de sierra para el mismo valor del voltaje vertical, como si el periodo del diente de sierra no es un múltiplo del correspondiente a la señal vertical, no permanecerá estable la señal sobre la pantalla del osciloscopio. Los circuitos de la base de tiempos llevan dispositivos para sincronizar las señales y permitir su observación de forma estable, así como controlar el inicio y zona que deseamos observar. Estos dispositivos son: Control del periodo (mando de la base tiempos), control para el inicio de la señal de disparo y voltaje utilizado como señal de disparo (interna o externa).

### d) Amplificador horizontal

Este dispositivo sirve para amplificar la señal que se aplica a las placas horizontales ( $X$ ). En los osciloscopios de dos canales, para observar diagramas en  $X - Y$ , se utiliza

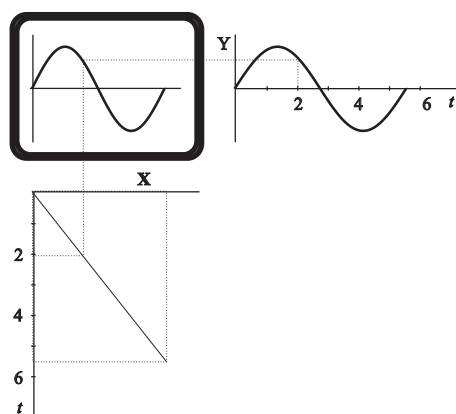


Figura 7.4: Composición de voltajes

como amplificador horizontal uno de los amplificadores verticales.

### Dispositivos para el control del osciloscopio

En la figura 5 muestra el panel frontal de un osciloscopio HITACHI V-212 con la localización de todos los dispositivos para su control que describimos a continuación:

- 1 - Interruptor de encendido.
- 2 - Piloto.
- 3 - Control de foco.
- 4- Giro de línea horizontal.
- 5 - Control de intensidad.
- 8 - 9 - Entradas canal 1 y 2.
- 10 - 11 - Conmutadores de entrada para canales 1 y 2. (AC, GND, DC) (CA, TIERRA, CC).
- 12 - 13 - Mandos de atenuación de entrada para los canales 1 y 2.
- 14 - 14 - Mandos de atenuación continua para los canales 1 y 2. PULL (TIRAR) multiplica por cinco ( $\times 5$ ) la ganancia.
- 16 - 17 - Controles de posición vertical.
- 18 - Selector del modo de operación de los amplificadores verticales.  
CH1 = Canal 1 solo. CH2 = Canal 2 solo. ALT = Canal 1 y 2 alternados. CHOP = los dos canales simultáneos muestreados con 250 kHz. ADD = suma algebraica de los dos canales.
- 22 - Selector de la base de tiempos. La posición  $X - Y$  se usa para que la entrada del canal 1 (CH1) se aplique a las placas horizontales y la del 2 a las verticales.





- Caja de resistencias
- Fuente de alimentación de c.c. ó pilas de 1,5 V
- Condensadores de 0,1  $\mu\text{F}$  y 1  $\mu\text{F}$ .

### 3. Procedimiento

#### 3.1. MEDIDAS CON EL POLÍMETRO

##### Medida de resistencias

Para seis de las resistencias que se suministran en la práctica se determinará en primer lugar el valor nominal,  $R_{nom}$ , aplicando el código de colores. A continuación, seleccionando el modo para medir resistencias en el polímetro y poniendo la escala adecuada, se obtienen los valores experimentales de las resistencias,  $R_{exp}$ . No olvidar indicar las unidades en que se mide cada resistencia.

##### Resultados:

$R_{nom.}$	$R_{exp.}$

##### Medidas de voltaje en c.c.

Se tomarán seis medidas de voltajes suministrados por la fuente de alimentación de voltaje variable. Para ello, se selecciona el modo para medir voltajes en c.c. en el polímetro y la escala adecuada, y se conecta el polímetro a la salida de la fuente. Si el polímetro lo permite, realizar medidas para cada tensión en tres escalas diferentes para ver el grado de precisión de cada una.

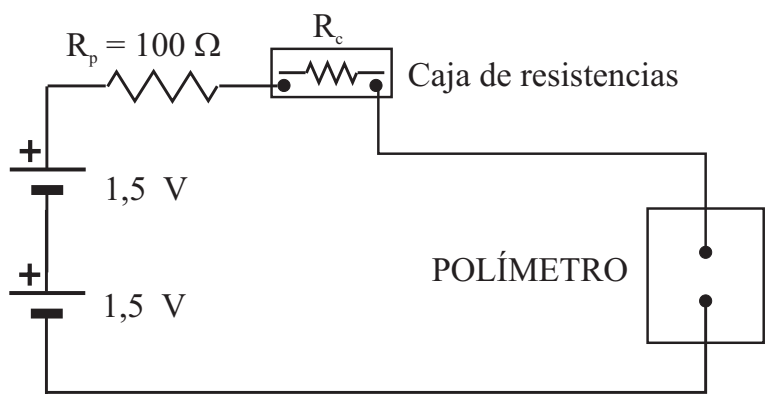


Figura 7.6:

Resultados:

Tensión aplicada	Polímetro		
	Escala 1:	Escala 2:	Escala 3:

3.2. Medida de corrientes en c.c.

Montar el circuito indicado en la figura 7 y medir la corriente para seis valores distintos de la resistencia total del circuito. Para ello variar el valor de la resistencia  $R_c$  que suministra la caja de resistencias. En primer lugar se selecciona el modo para medir corrientes en c.c. en el polímetro y la escala adecuada. Para esto último, debemos calcular previamente, aplicando la ley de Ohm, cual será la corriente que circulará por el circuito en el caso más desfavorable, esto es  $R_c = 0$ . El valor de la resistencia de protección  $R_p$  es orientativo.

De nuevo, compararemos los resultados experimentales con los teóricos, obtenidos de aplicar la ley de Ohm al circuito.

Resultados:

$V =$ (V)		
$R$	$i_{teor} = V/R$	$i_{exp}$

### Medida de voltajes en c.a.

Disponiendo los conmutadores para medida de voltajes en c.a., comenzando por la escala más alta, medir el voltaje en los enchufes de la red.

Resultados:

$$V_{red} =$$

## 3.3. MEDIDAS CON EL OSCILOSCOPIO

**PRECAUCION:** No se debe mantener el centelleo (spot) debido a la incidencia del haz de electrones en la pantalla en un punto fijo y con intensidad ligeramente superior a la normal, ya que se daña la pantalla por destrucción del material fosforescente.

### Calibrado del osciloscopio

Generalmente los osciloscopios actuales disponen de una salida que proporciona un voltaje de calibración. Este suele ser de 0,5 ó 1 V pico a pico ( $V_{pp}$ ) y de 1 kHz de frecuencia. Aplicando este voltaje a los canales de entrada del osciloscopio, nos permite comprobar si las desviaciones verticales sobre la pantalla se corresponden con lo indicado por la posición del mando correspondiente. De forma análoga se procede con la base de tiempos.

Por ejemplo: Si aplicamos una onda rectangular de  $f = 1$  kHz ( $T = 10^{-3}$ ) y el voltaje de pico a pico es  $V_{pp} = 1$  V, poniendo el atenuador en 0,5 V/div y la base de tiempos en  $T = 1$  ms ( $10^{-3}$  s), debe aparecer en la pantalla una onda rectangular que ocupe dos divisiones de pico a pico y una división por periodo.

Conectar cada una de las sondas del osciloscopio a la salida **31** del mismo y comprobar la calibración.

**Resultados:**

Canal	$V_{pp}$	$T$
1		
2		

**Medidas de voltajes**

Realizaremos una serie de medidas que nos permiten aprender el manejo del osciloscopio y la medida de voltajes correspondientes a señales periódicas suministradas por el generador de funciones. También compararemos las medidas realizadas con el osciloscopio y el polímetro para esta señales de c.a. Para ello es necesario introducir el concepto de valor eficaz y valor medio de una función periódica.

Dada una señal eléctrica periódica,  $f(t)$ , se define su valor medio y su valor eficaz como

$$\langle f \rangle = f_m = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \quad (7.1)$$

$$f_e = \left( \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (7.2)$$

- Calcular los valores medio y eficaz para las señales sinusoidal y rectangular dadas por:

$$V(t) = V_o \sin \omega t$$

$$V(t) = \begin{cases} V_o & \text{para } 0 \leq t < T/2 \\ -V_o & \text{para } T/2 \leq t < T \end{cases}$$

**Resultados:**

Señal	$V_m$	$V_e$
Sinusoidal		
Rectangular		

- Utilizando frecuencias inferiores a 5 kHz, aplicamos una señal sinusoidal procedente del generador de funciones a uno de los canales de entrada del osciloscopio para medir la amplitud de la misma. A continuación medimos esta misma señal con el polímetro (seleccionando el modo voltaje c.a.) y, por último, determinamos los valores eficaz y medio de la señal aplicando los resultados obtenidos en el apartado anterior. De esta forma podemos comparar las medidas realizadas con el osciloscopio y el polímetro.

### Resultados:

Tipo de señal	$V_o$ osci.	$V$ poli.	$V_e$ eficaz	$V_m$ medio
sinusoidal				
sinusoidal				
sinusoidal				
rectangular				
rectangular				

### Impedancia de entrada del osciloscopio

Para medir la impedancia de entrada de un osciloscopio, que es muy elevada, lo que se hace esencialmente es construir un divisor de tensión con una resistencia muy elevada para que sea comparable con la impedancia de entrada del osciloscopio. Montamos el circuito indicado en la figura 8. Aplicando la ley de Ohm, es fácil ver que

$$V_i = \frac{R_{en}}{R_{en} + R_i} V_o \quad \text{de donde} \quad R_{en} = \frac{V_i}{V_o - V_i} R_i$$

Medimos el voltaje,  $V_i$ , en el osciloscopio para dos valores de  $R_i$ ,  $R_1 = 0,5 \text{ M}\Omega$  y  $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$  y aplicando la expresión anterior, determinamos dos valores para  $R_{en}$ . El valor pedido será la media aritmética de los dos datos.

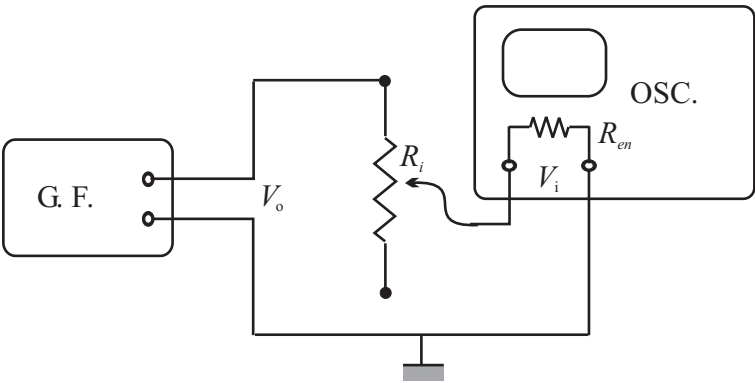


Figura 7.7:

Resultados:

$R_i(\text{M}\Omega)$	$V_i(\quad)$
0	$V_o =$
0,5	
1,0	

$\overline{R_{en}} =$

Medida de intervalos de tiempo y frecuencias

Se aplica a los canales verticales una señal periódica (sinusoidal, rectangular o triangular), procedente del generador de funciones. Utilizando el mando de la base de tiempos (BT), modificamos su posición hasta que en la pantalla aparezcan de dos a tres ciclos completos. Medimos las divisiones que hay entre dos puntos de corte de la señal con el eje X, cuando la señal pasa por el cero de su valor alterno. Esta medida, multiplicada por el factor (s/div) que marca la escala de la BT, nos da el intervalo temporal que deseamos medir. En el ejemplo propuesto dicho intervalo es un semiperiodo, multiplicando por dos tendremos el periodo de la señal aplicada. La frecuencia se calcula teniendo en cuenta la relación  $f = 1/T$ .

Resultados:

$f_{\text{nomi.}}$ (kHz)	$T$ (s)	$f_{\text{exp.}}$ (kHz)
0.5		
1.0		
2.5		
5.0		
7.5		

### Medidas de fase

El desfase entre señales del mismo periodo puede medirse con el osciloscopio. Aplicando cada señal a uno de los canales verticales, aparecerán las dos señales en la pantalla. Si existe un desfase entre ellas, sus máximos, ceros y mínimos estarán desplazados. Midiendo el intervalo de tiempo entre dos ceros consecutivos nos dará un valor  $t$ , que está relacionado con el desfase por la ecuación,

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{t}{T} \quad (7.3)$$

Aunque esta forma de medir desfases es rápida, suele utilizarse el método basado en la figura de Lissajous que se obtiene aplicando señales sinusoidales a las placas  $X$  e  $Y$ , cuyas ecuaciones sean respectivamente,

$$\begin{aligned} x &= x_o \sin \omega t \\ y &= y_o \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (7.4)$$

La figura 6 muestra la composición sobre el osciloscopio de las señales sinusoidales aplicadas respectivamente en las placas  $X$  e  $Y$

En los puntos C y D,  $y = 0$ , por tanto,

$$\sin(\omega t + \theta) = 0$$

Esta igualdad se cumple para,

$$\omega t + \theta = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Es decir,

$$\omega t = n\pi - \theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

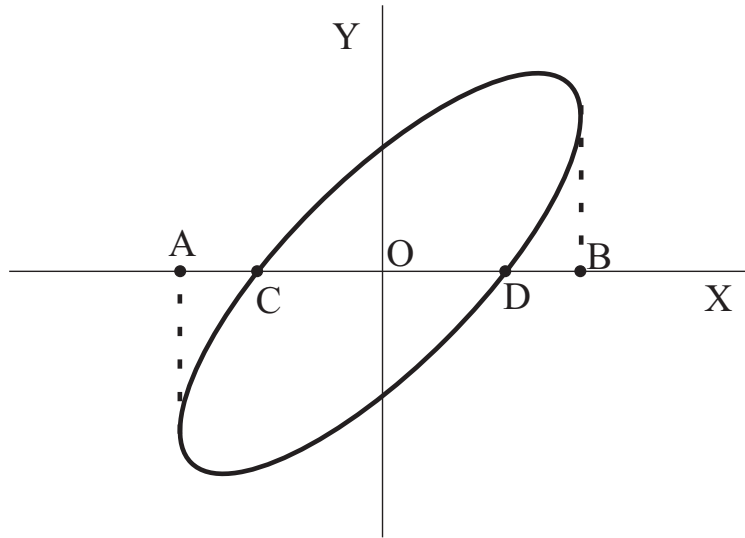


Figura 7.8:

Llevando esta relación a la ecuación para  $x$  se obtiene,

$$x = x_o \sin(n\pi - \theta) = \pm x_o \sin \theta \quad \begin{cases} + & \text{para } n = 1, 3, 5, \dots \\ - & \text{para } n = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

Como  $x_o$  es la amplitud en el eje  $X$

$$AB = 2x_o$$

La distancia entre C y D viene dada por,

$$CD = 2x_o \sin \theta = AB \sin \theta$$

Midiendo las distancias  $AB$  y  $CD$  sobre la pantalla, podemos calcular el desfase  $\theta$  mediante la relación,

$$\theta = \arcsin \left( \frac{CD}{AB} \right) \quad (7.5)$$

**REALIZACIÓN:** Montamos el circuito indicado en la figura 9. El conjunto formado por la resistencia  $R_1$ , el condensador  $C$  y la resistencia variable  $R$ , constituyen un desfasador que proporciona en los puntos A y B voltajes sinusoidales cuyo desfase podemos variar con la resistencia  $R$ .

En el circuito desfasador se calculan los voltajes en A y B de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} V_{OA} &= \frac{V_o}{2R_1} R_1 = \frac{V_o}{2} \\ V_{OB} &= \frac{V_o}{R - j/\omega C} \left( -\frac{j}{\omega C} \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$



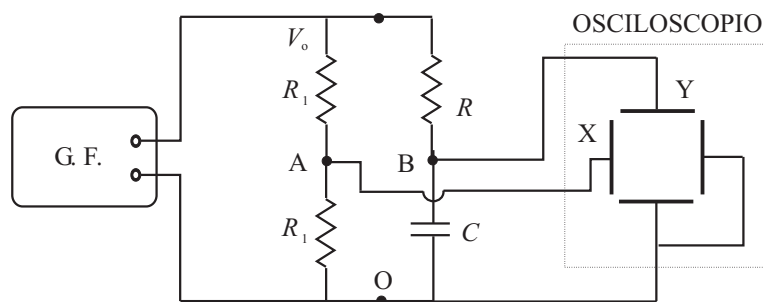


Figura 7.9:

Realizando operaciones queda,

$$V_{OB} = V_o \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega C)^2} \quad (7.7)$$

El módulo de  $V_{OB}$  es,

$$V_{OB} = \frac{V_o}{((1 + (\omega CR)^2)^{1/2}} \quad (7.8)$$

La fase es,

$$\theta = -\arctan(\omega CR) \quad (7.9)$$

La impedancia de entrada del circuito desfasador es,

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{2R_1} + \frac{j\omega C}{1 + j\omega CR}$$

De la relación anterior se deduce que para  $R = 0$

$$\mathbf{Z} = \frac{2R_1(1 - j\omega 2R_1C)}{1 + (\omega 2R_1C)^2}$$

Calcular esta impedancia con los valores siguientes:  $R_1 = 1\text{ k}\Omega$ ,  $C = 0,1\text{ }\mu\text{F}$  y  $f = 1\text{ kHz}$  ( $\omega = 2\pi f$ ).

Cuando  $R = \infty$  dicha impedancia es,

$$\mathbf{Z} = 2R_1$$

Las ecuaciones (7.6) y (7.9) muestran que las diferencias de fase entre los dos voltajes se pueden variar con el potenciómetro  $R$ .

Manteniendo fija la amplitud y frecuencia del oscilador, mediante la resistencia  $R$  variamos el desfase. Medir el desfase para cinco valores distintos de la resistencia  $R$ , utilizando la figura de Lissajous y la ecuación (7.5) y compararlo con el valor teórico obtenido mediante la ecuación (7.9).

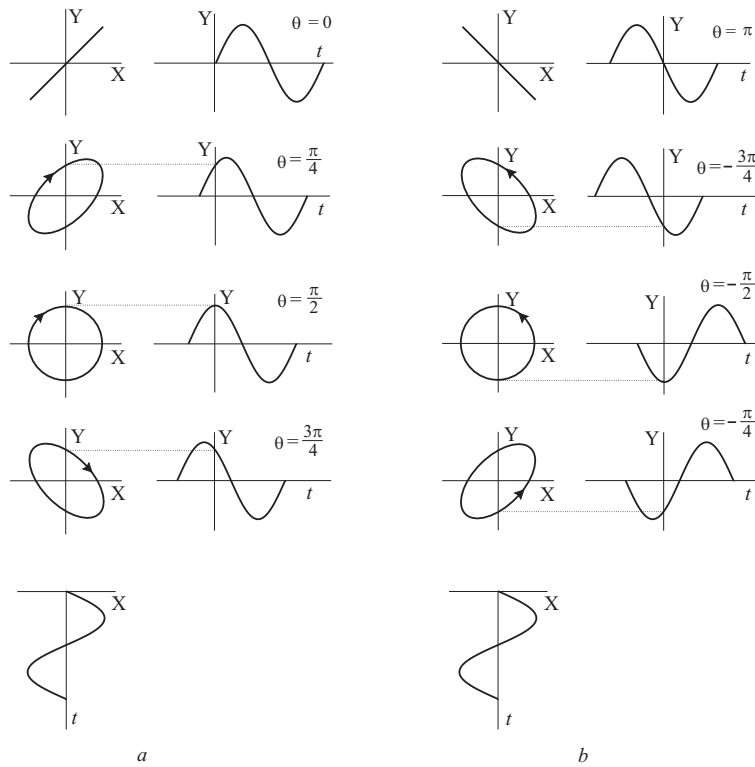


Figura 7.10:

Con la ayuda de la figura 10a y figura 10b, podemos apreciar a qué valores de los desfases corresponde cada figura de Lissajous. En dichas figuras se muestra que las correspondientes al primer y cuarto cuadrante sólo se distinguen por el sentido de giro, que no se aprecia en el osciloscopio. Lo mismo ocurre entre el segundo y tercer cuadrante. Para saber si el desfase es de  $-45^\circ$  ó  $45^\circ$  debemos utilizar otro procedimiento.

En el experimento propuesto, con el desfasador podemos averiguar el cuadrante, pues un aumento del desfase en el primer cuadrante nos lleva a la figura de la circunferencia, o una elipse vertical si la amplitud de las dos señales es distinta; mientras que una disminución de la fase en el cuarto cuadrante nos llevará a la figura de la recta correspondiente a  $\theta = 0$ . Si se conectan los distintos componentes como indica la figura 9, los desfases estarán en el cuarto cuadrante. Si se invierte la polaridad de alguna de las señales, supongamos que es la señal  $Y$ , la fase aumenta en  $\pi$ , por lo que pasaríamos a las figuras correspondientes al segundo cuadrante, es decir, el eje mayor de la elipse cruza del segundo a cuarto cuadrante en lugar del primero al tercero.

### Resultados:

Medidas de fase				
$R_1 =$ ( )	$C =$ ( )			
$R$ ( )	CD	AB	$\theta(^{\circ})$	$\theta_{\text{teo.}}(^{\circ})$

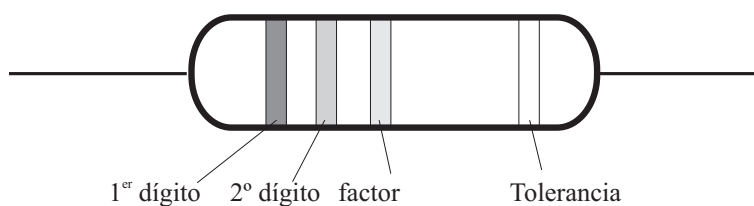


Figura 7.11:

## 5. Código de colores para las resistencias

CODIGO			
Color	1 <sup>er</sup> dígito	2º dígito	Factor
Plata			$10^{-2}$
Oro			$10^{-1}$
Negro		0	1
Marrón	1	1	$10^1$
Rojo	2	2	$10^2$
Naranja	3	3	$10^3$
Amarillo	4	4	$10^4$
Verde	5	5	$10^5$
Azul	6	6	$10^6$
Violeta	7	7	$10^7$
Gris	8	8	$10^8$
Blanco	9	9	$10^9$

### DISPOSICIÓN DE LOS COLORES

1 <sup>er</sup> dígito	2º dígito	Factor	Tolerancia
Tolerancia	Oro = $\pm 5\%$	Plata = $\pm 10\%$	Sin banda = $\pm 20\%$

### VALORES BASICOS DE LAS RESISTENCIAS

Valor	1 <sup>er</sup> color	2º color	Valor	1 <sup>er</sup> color	2º color
10	Marrón	Negro	33	Naranja	Naranja
12	Marrón	Rojo	39	Naranja	Blanco
15	Marrón	Verde	47	Amarillo	Violeta
18	Marrón	Gris	56	Verde	Azul
22	Rojo	Rojo	68	Azul	Gris
27	Rojo	Violeta	82	Gris	Rojo

# Análisis de Instrumentos (I): Resistencia interna.

## 1. Objetivos

- Determinar de la resistencia interna de un galvanómetro, una fuente de corriente continua (c.c.) y la de un voltímetro.

## 2. Introducción

Se conoce como **resistencia interna** de un instrumento a la que se pone de manifiesto cuando forma parte de un circuito. Si es un elemento activo como una pila o batería, la resistencia interna se debe a los componentes internos (electrolito contactos internos etc.), y se pone de manifiesto por la caída de tensión en los bornes o terminales de la pila cuando suministra corriente a un resistencia externa.

Cuando se trata de un elemento pasivo como un voltímetro, dicha resistencia se debe a los conductores que componen los contacto y bobinas internas del aparato y se pone de manifiesto absorbiendo una corriente cuando el voltímetro se pone en paralelo con otra resistencia en un circuito. De forma análoga se comporta un amperímetro, la diferencia entre amperímetro y voltímetro es que en su construcción se procura que el amperímetro tenga la resistencia más baja posible y en el voltímetro la más elevada.

En esta práctica determinaremos la resistencia interna en tres situaciones distintas: un galvanómetro d'Arsonval, una fuente de corriente continua (c.c) y por último, mediremos la resistencia interna de un voltímetro. A continuación explicamos con un poco más de detalle las tres situaciones:

### 2.1. Galvanómetro de d'Arsonval

En la medida de magnitudes eléctricas, corrientes y voltajes, uno de los instrumentos utilizados tradicionalmente es el galvanómetro d'Arsonval. Dicho instrumento, esque-

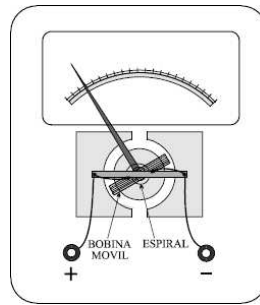


Figura 8.1: Galvanómetro d'Arsonval

matizado en la figura 8.1, consta de una bobina de gran número de espiras de hilo muy fino, devanadas sobre una armadura de material no magnético y muy ligero de peso, que puede girar entre los polos de un imán. Dos resortes en espiral proporcionan el par recuperador con el que se establece el equilibrio entre la fuerza de naturaleza eléctrica y la mecánica debida al resorte. Una aguja solidaria con la bobina señala la desviación producida por la fuerza entre la corriente que pasa por la bobina y el campo magnético del imán. La armadura se dispone de manera que el campo magnético sea radial y uniforme sobre la zona recorrida por la bobina en sus movimientos.

Puede deducirse que la desviación de la aguja es proporcional a la intensidad que circula por la bobina, dicha proporcionalidad se expresa mediante la relación:

$$\theta = \frac{N A B}{K} I \quad (2.1)$$

$N$  = n° de espiras,  $A$  = área de la espira,  $B$  = inducción magnética,  $K$  = constante del resorte.

La sensibilidad del galvanómetro es directamente proporcional al n° de espiras, área de la espira e inducción magnética, e inversamente proporcional a la constante del resorte. En los aparatos actuales suele utilizarse una pantalla digital. En estos aparatos las magnitudes eléctricas se digitalizan mediante un dispositivo electrónico que transforma la señal analógica en digital, y se presentan en forma numérica.

### Medida de la resistencia interna.

La determinación de la resistencia interna se hace mediante el circuito indicado en la figura 8.2, denominado como “Puente de Weanstone”.

En este circuito tenemos que:

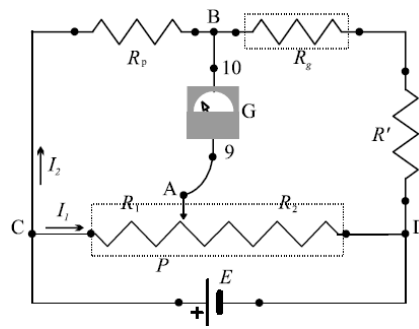


Figura 8.2: Puente de Weanstone

- La resistencia  $R_x$  incógnita se encuentra en el brazo BD. Este brazo está formado por dos resistencias conectadas en serie,  $R_g$  y  $R'$ ; mientras que  $R_g$  representa la resistencia del microamperímetro y  $R'$  es una resistencia de protección de valor conocido.
- $G$  un galvanómetro o microamperímetro de cero en el centro de la escala, que se utiliza como detector de cero.
- La resistencia  $R'$  se usa para limitar la corriente en la rama donde está el microamperímetro, de forma que no sobrepase su fondo de escala ( $50 \mu\text{A}$  ó  $100 \mu\text{A}$ ), según sea el microamperímetro y la fuente o pila  $E_o$  utilizada.
- $R_p$  es una resistencia de valor conocido.
- $P$  es un potenciómetro lineal calibrado. Un potenciómetro es un dispositivo o componente electrónico de tres terminales, formado por una resistencia y un contacto deslizante que, mediante un mando, se puede situar en cualquier punto de la resistencia; los terminales extremos se corresponden con los extremos de la resistencia y el terminal intermedio está unido al contacto deslizante. En general, la lectura de un potenciómetro calibrado nos da la resistencia  $R_1$ , por lo que el valor de  $R_2$  será

$$R_2 = R - R_1$$

siendo  $R$  el valor nominal del potenciómetro (el valor de la resistencia entre los terminales extremos)

El equilibrio del puente se logra desplazando el cursor del potenciómetro o puente de hilo desde su posición central hacia la derecha o izquierda hasta lograr que no pase corriente por el galvanómetro, es decir cuando  $V_A = V_B$ .

En la posición de equilibrio, esto es, el galvanómetro  $G$  no detecta paso de corriente, se cumple que:

$$\begin{aligned} V_{CB} &= V_{CA} \\ V_{BD} &= V_{AD} \end{aligned}$$

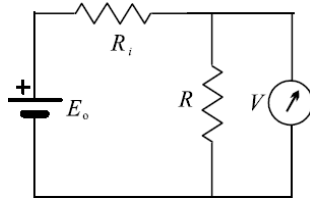


Figura 8.3:

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= I_2 R_p \\ I_1 R_2 &= I_2 R_x \end{aligned} \quad (8.1)$$

donde

- $R_1$  es la resistencia correspondiente a la longitud de hilo del puente  $(C - A)$ , o a la parte del potenciómetro situada en esa zona.
- $R_2$  es la resistencia correspondiente a la zona  $A - D$ .
- $R_x$  es la resistencia del brazo donde está el microamperímetro incógnita y que a su vez es igual a  $R_x = R_g + R'$ .

A partir del sistema de ecuaciones (8.1), se despeja  $R_x$

$$R_x = \frac{R_p R_2}{R_1} = R_g + R'$$

De donde la resistencia del microamperímetro se obtendrá mediante la relación:

$$R_g = \frac{R_p R_2}{R_1} - R' \quad (8.2)$$

## 2.2. Fuente de corriente continua (c.c)

Para determinar la resistencia interna de una fuente de corriente continua (c.c.) se dispone un circuito como el indicado en la figura 8.3. Si suponemos que el voltímetro tiene una resistencia interna muy elevada, es decir, se aproxima a un voltímetro ideal, la relación entre el voltaje medido y la f.e.m. de la fuente para dos valores de  $R$  diferentes es:

$$R \frac{E_o}{R_i + R} = V ; \quad R' \frac{E_o}{R_i + R'} = V'$$



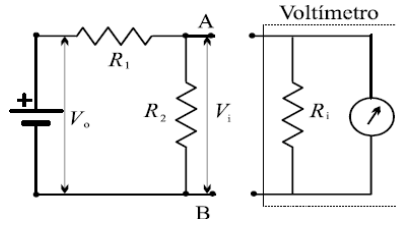


Figura 8.4:

$$\frac{V}{V'} = \frac{R(R_i + R')}{R'(R_i + R)}$$

Si elegimos  $R' = 10R$ , desarrollando la ecuación anterior, obtenemos una expresión para  $R_g$  en función de datos conocidos.

$$R_i = \frac{10R(V' - V)}{10V - V'} \quad (8.3)$$

### 2.3. Voltímetro

Para determinar la resistencia interna de un voltímetro utilizamos un circuito como el indicado en la figura 8.4, en donde las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  deben tener valores bastante elevados de forma que sean comparables a la resistencia interna del voltímetro y el circuito sea sensible a dicha resistencia interna.

En la Fig. 8.3 la parte dentro del recuadro de puntos representa el circuito equivalente del voltímetro, una resistencia  $R_i$  en paralelo con un elemento de medida de resistencia infinita (voltímetro ideal).

Conociendo los valores de  $R_1$  y  $R_2$  y midiendo con el voltímetro la caída de tensión en  $R_2$ , esto es  $V_i$ , y el voltaje de salida de la fuente,  $V_o$ , podemos determinar  $R_i$

$$I = \frac{V_o}{R_1 + (R_2 R_i / (R_2 + R_i))} \quad I = V_i \frac{R_2 + R_i}{R_2 R_i}$$

Igualando las expresiones, operando y despejando  $R_i$ , obtenemos:

$$R_i = \frac{V_i R_1 R_2}{V_o R_2 - V_i (R_1 + R_2)} \quad (8.4)$$

Si  $R_1 = R_2$ , la expresión anterior queda de la forma:

$$R_i = R_1 \frac{V_i}{V_o - 2V_i} \quad (8.5)$$

## 3. Experimento

### 3.1. Materiales

- 1 Microamperímetro de 100  $\mu\text{A}$  fondo de escala.
- 1 Microamperímetro de 50  $\mu\text{A}$  cero en el centro.
- 1 Puente de hilo o potenciómetro calibrado de 1  $\text{k}\Omega$ .
- 1 Fuente de c.c. de salida variable.
- 1 Polímetro.
- 1 Resistencia patrón (caja de resistencias hasta 9999  $\Omega$ ).
- Resistencias de distintos valores.
- Potenciómetros lineales de 1  $\text{k}\Omega$ , 10  $\text{k}\Omega$  y 100  $\text{k}\Omega$

### 3.2. Metodología

#### Resistencia interna del microamperímetro

Montamos en circuito de la figura 2.2 y equilibramos el puente para calcular  $R_g$ . De forma orientativa, para un valor de  $E_o = 0,5 \text{ V}$ , unos valores de  $R' = 100 \Omega$ ,  $R_p = 1 \text{ k}\Omega$  y un potenciómetro calibrado de 1  $\text{k}\Omega$ , permitirán equilibrar el puente fácilmente.

**PRECAUCIÓN:** El contacto del cursor  $A$  no debe estar continuamente conectado, ya que lejos del equilibrio la corriente, tanto en el galvanómetro de cero como en el microamperímetro, puede superar los valores límite y deteriorar los aparatos. Se recomienda realizar un contacto momentáneo para cada posición del cursor, hasta llegar a la zona próxima al equilibrio, donde las corrientes se aproximan a los valores mínimos, es decir, a cero en el galvanómetro de cero y al determinado por  $R_p$ ,  $R_g$ ,  $R'$  y  $E_o$  en el microamperímetro.

#### Resultados:

$$\begin{aligned}R_1 &= \\R_2 &= \\R_g &= \end{aligned}$$

**Resistencia interna de una fuente de c.c.**

Para determinar la resistencia interna de la fuente de corriente continua (c.c.) montamos el circuito indicado en la figura 8.3 colocando dos resistencias diferentes  $R$  y  $R'$  medimos las respectivas caídas de tensión  $V$  y  $V'$ , y aplicamos la ecuación (8.3). Si la fuente de alimentación es buena, tendrá una resistencia interna muy pequeña y, entonces, para apreciar la caída de tensión en dicha resistencia, una de las resistencias empleadas debe ser pequeña de manera que la caída de tensión en ella sea comparable a la caída de tensión en la resistencia interna. Unos valores orientativos para  $R$  y  $R'$  pueden ser  $1\ \Omega$  y  $10\ \Omega$ .

**Resultados:**

$$\begin{array}{lll} R = & V = & \\ R' = & V' = & \boxed{R_g =} \end{array}$$

**Resistencia interna de un voltímetro**

Para determinar la resistencia interna de un voltímetro montamos el circuito indicado en la figura 8.4. Conociendo los valores de  $R_1$  y  $R_2$ , y con las lecturas de la medida del voltímetro  $V_o$  y  $V_i$ , determinamos  $R_i$ , aplicando la ecuación (8.5). Como resistencias  $R_1$  y  $R_2$  elegimos  $R_1 = R_2 = 5,6\ \text{M}\Omega$ .

**Resultados:**

$$\begin{array}{lll} R_1 = & V_o = & \\ R_2 = & V_i = & \boxed{R_i =} \end{array}$$

**3.3. Cuestiones**

1. En un galvanómetro d'Arsonval, cuando pasa mucho tiempo, disminuye la inducción magnética **B**. ¿Disminuye o aumenta la sensibilidad del galvanómetro?
2. ¿Puede un galvanómetro d'Arsonval medir corriente alterna de 50c/s?
3. Tenemos dos fuentes de alimentación, una con resistencia interna dos veces superior a la otra. ¿Cuál de ellas se aproxima más a la fuente ideal?
4. Una fuente de c.c. tiene una f.e.m. de 1V y una resistencia interna de  $1\text{k}\Omega$ . ¿Qué error se comete al medir la f.e.m. de la fuente con un voltímetro cuya resistencia interna sea  $1\text{M}\Omega$ ?

5. En el cálculo de la resistencia interna de una fuente de c.c., representado en la figura 8.3: ¿Qué relación habría entre  $V$  y  $E_o$  si  $R = R_i$ ? ¿Cómo se modificarían las relaciones anteriores si la resistencia interna del voltímetro,  $R_V$ , no fuera mucho mayor que  $R$  y  $R_i$ ?

# Análisis de Instrumentos (II): Construcción de un amperímetro, un voltímetro y un óhmetro

## 1. Objetivos

El objetivo de esta práctica es que el alumno comprenda el funcionamiento de los aparatos de medida básicos en un laboratorio de Electricidad y aprenda su manejo correcto. Esta práctica es la **continuación** de la práctica denominada “Análisis de Instrumentos (I): Resistencias internas”. Para poder realizarla **es necesario haber completado la primera parte de la misma**. En esta segunda parte, la práctica consistirá en:

- Construir un amperímetro y un voltímetro de varias escalas.
- Contruir un Óhmetro de varias escalas

## 2. Introducción

El objetivo de la práctica es, como se ha dicho, construir instrumentos de medida de magnitudes eléctricas de varias escalas partiendo de un galvanómetro d’Ársonval que se proporciona en la práctica y que tiene un fondo de escala de  $100\ \mu\text{A}$  de fondo de escala. El primer paso será, determinar la resistencia interna de dicho instrumento base, es decir del galvanómetro de partida, algo que ya se ha realizado en la práctica anterior.

### 2.1. Construcción y calibración de un amperímetro.

Tomando como instrumento base el microamperímetro de la práctica anterior, vamos a construir un dispositivo para medir corrientes mayores mediante la aplicación de resistencias en paralelo calculadas de forma adecuada.

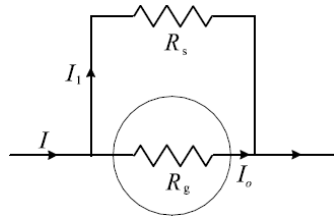


Figura 9.1: Construcción de un amperímetro

En concreto, en esta práctica construiremos amperímetros de 1 mA y de 10 mA de fondo de escala. Para ello conectaremos en paralelo con el microamperímetro una resistencia de manera que la corriente que llegue al conjunto se bifurque, por la rama donde está el microamperímetro pasarán como máximo los  $100\ \mu\text{A}$  que admite el aparato y el resto, hasta el nuevo fondo de escala, pasarán por la otra rama. En la figura 9.1 se muestra el esquema del circuito.

En la figura tenemos que

- $R_g$  es la resistencia interna del microamperímetro de partida (que se ha obtenido en la práctica anterior).
- $I_o$  es la corriente de fondo de escala del amperímetro (en nuestro caso  $I_o = 100\ \mu\text{A}$ ).
- $I$  es la corriente del nuevo fondo de escala.

Según el circuito de la figura 9.1, si deseamos un amperímetro cuyo fondo de escala sea  $I$  mA, la resistencia,  $R_s$ , que debemos poner en paralelo se obtiene aplicando las leyes de Kirchhoff :

$$I_o R_g = I_1 R_s \quad , \quad R_s = R_g I_o / I_1$$

Por otra parte:

$$I_1 + I_o = I$$

de donde se deduce que:

$$R_s = \frac{I_o}{I - I_o} R_g \quad (9.1)$$

Además, la intensidad que en realidad medimos con el instrumento construido es:

$$I_{med} = I_{leida} (1 + R_g / R_s) \quad (9.2)$$

donde  $I_{leida}$  es la desviación de la aguja en el microamperímetro de partida.

Para calibrar el amperímetro construido nos serviremos del polímetro comercial suministrado en la práctica. Disponemos los instrumentos como indica el circuito de la figura 9.2. y medimos simultáneamente la corriente en el amperímetro patrón  $I_p$  y en el construido  $I_x$ . A cada desviación de escala  $I_x$  corresponderá una corriente medida en  $I_p$ .

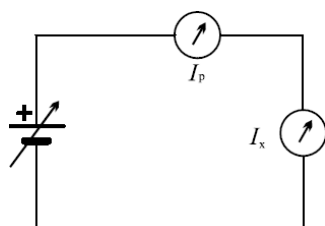


Figura 9.2: Calibración del amperímetro

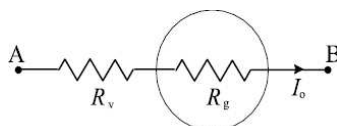


Figura 9.3: Construcción de un voltímetro

## 2.2. Construcción y calibración de un voltímetro.

En este apartado se construirá un voltímetro, cuyo fondo de escala sea  $V$  voltios, a partir del microamperímetro de partida. Para conseguir dicho voltímetro debemos colocar, en serie con el microamperímetro, una resistencia  $R_v$  como muestra la figura 9.3.

Dicha resistencia debe verificar que:

$$V = V_{AB} = (R_v + R_g) I_o \quad (9.3)$$

Donde  $V$  es el fondo de escala deseado;  $R_v$  la resistencia que debemos poner en serie;  $R_g$  la resistencia interna del microamperímetro,  $I_o$  la corriente de fondo de escala, es decir  $100 \mu\text{A}$  en nuestro caso.

El cálculo de la resistencia  $R_v$  se hace partiendo de los datos  $R_g$ ,  $V$  e  $I_o$  mediante la expresión:

$$R_v = (V/I_o) - R_g \quad (9.4)$$

Un parámetro característico de un voltímetro se expresa mediante la relación entre la resistencia total ( $R_v + R_g$ ), y el fondo de escala en voltios, es decir, el n° de ohmios/voltio. De (9.2) se deduce que:

$$\frac{R_v + R_g}{V} = \frac{1}{I_o} \quad (9.5)$$

La expresión (9.5) muestra que la relación ( $\Omega/V$ ) en cada aparato viene determinada por la corriente de fondo de escala del microamperímetro de partida, que a su vez se relaciona con la sensibilidad del microamperímetro, ya que cuanto menor sea  $I_o$  mayor

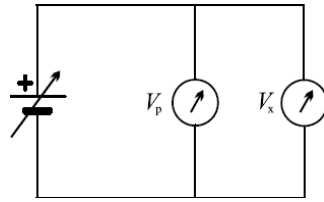


Figura 9.4: Calibración del voltímetro

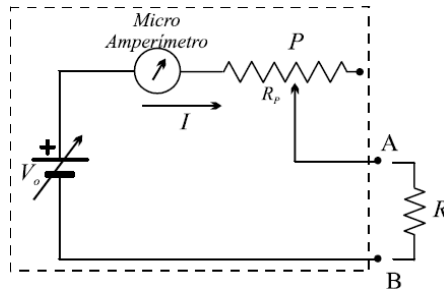


Figura 9.5: Óhmetro

es la relación  $\Omega/V$  y mejor será el voltímetro.

Para calibrar el voltímetro construido nos serviremos del polímetro comercial suministrado en la práctica. Disponemos los instrumentos como indica el circuito de la figura 9.4. y medimos simultáneamente el voltaje con el voltímetro construido  $V_x$  y con el polímetro considerado como voltímetro patrón  $V_p$ .

Variando la tensión suministrada por la fuente de c.c. de salida variable establecemos una correspondencia entre la medida del voltímetro patrón  $V_p$  y la desviación de la aguja en el microamperímetro  $I_{leida}$ , a la que corresponde a su vez una tensión medida

$$V_{med} = I_{leida}(R_g + R_v) \quad (9.6)$$

### 2.3. Construcción y calibración de un óhmetro.

Ahora nos proponemos construir un dispositivo para la medida de resistencias (óhmetro), para ello utilizamos el microamperímetro de los experimentos anteriores dispuesto como indica el circuito de la Fig. 9.5. La resistencia  $R$  representa la resistencia que proyectamos medir,  $P$  es un potenciómetro que se utiliza para calibrar el punto de resistencia cero.

El aparato funciona y se calibra de la forma siguiente:

- En primer lugar seleccionamos un valor de operación para la tensión  $V_0$ , por ejemplo  $V_0 = 0,5$  V.



- El punto de resistencia infinita se corresponde con el circuito abierto, es decir, cuando entre  $A$  y  $B$  no se conecta ninguna resistencia, por el microamperímetro no pasa corriente ( $I = 0$ ); resumiendo, a  $I = 0$  corresponde  $R = \infty$ .
- Seguidamente, cortocircuitamos los terminales  $A - B$  ( $R = 0$ ) y mediante el ajuste del potenciómetro  $P$  debemos lograr que la corriente que pasa por el microamperímetro sea  $100 \mu A$ . Es decir, a  $I = 100 \mu A$  corresponde  $R = 0$ . De esta forma hemos calibrado los puntos correspondientes a  $R = 0$  y  $R = \infty$ .
- Por último, para calibrar las desviaciones intermedias de la aguja del microamperímetro utilizamos una caja de resistencias que conectamos entre  $A$  y  $B$ . Para cada desviación de la aguja del microamperímetro tendremos un valor de  $R$ . Por tanto, a cada desviación le adjudicamos el valor de la resistencia correspondiente.

La resistencia medida por nuestro óhmetro vendrá dada por la expresión,

$$R_{med} = \frac{V_0}{I_{leida}} - R_P$$

donde  $R_P$  es el valor de la resistencia que suministra el potenciómetro.

Fijando un nuevo valor para la tensión, por ejemplo  $V' = 2V_0$ , cambiamos la escala de nuestro óhmetro. Efectivamente, si fijamos una nueva tensión ( $V' = 2V_0$ ) para ajustar el punto de resistencia cero (cortocircuitando los terminales) tendremos que seleccionar un nuevo valor para la resistencia que suministra el potenciómetro que será

$$R_P = \frac{V_o}{I_o}$$

$$R'_P = \frac{V'}{I_o} = \frac{2V_o}{I_o} = 2R_P$$

Y la resistencia medida para la misma corriente  $I$  vendrá dada por

$$R = \frac{V_0}{I} - R_P$$

en el primer caso y

$$R' = \frac{2V_0}{I} - R'_P = 2 \left( \frac{V_0}{I} - R_P \right) = 2R$$

en el segundo, es decir, para la misma desviación de la aguja del microamperímetro corresponde una resistencia  $R'$  dos veces mayor; el cambio de tensión nos sirve en este caso para multiplicar la escala por dos.

En todo lo anterior hemos supuesto que fuente de voltaje es ideal, y por tanto la tensión no depende de la corriente que suministra.

La relación entre  $R$  e  $I$  es  $R = (V/I)$ , por tanto la escala no es lineal, ya que  $\ln R = \ln V - \ln I$ , es decir la escala será logarítmica.

## 3. Experimento

### 3.1. Materiales

- 1 Microamperímetro de  $100\ \mu\text{A}$  fondo de escala.
- 1 Microamperímetro de  $50\ \mu\text{A}$  cero en el centro.
- 1 Puente de hilo o potenciómetro calibrado de  $1\ \text{k}\Omega$ .
- 1 Fuente de c.c. de salida variable.
- 1 Polímetro.
- 1 Resistencia patrón (caja de resistencias hasta  $9999\ \Omega$ ).
- Resistencias de distintos valores.
- Potenciómetros lineales de  $1\ \text{k}\Omega$ ,  $10\ \text{k}\Omega$  y  $100\ \text{k}\Omega$

### 3.2. Metodología

#### Construcción y calibrado de miliamperímetros

Hacemos los cálculos para construir un miliamperímetro de fondo de escala  $I' = 1\ \text{mA}$  y otro de  $I'' = 10\ \text{mA}$ . Para su construcción tenemos que usar una resistencia  $R_s$  cuyo valor obtenemos teóricamente mediante la ecuación,

$$R_s = \frac{I_o}{I - I_o} R_g \quad (2.12)$$

La resistencia real en el laboratorio la podemos conseguir empleando un puente de hilo calibrado, o una caja de resistencias.

Para la calibración del miliamperímetro construido montamos el circuito de la figura 9.2, en donde el amperímetro patrón empleado será un polímetro comercial (el fondo de escala inicial será superior al fondo de escala del miliamperímetro que queremos calibrar). Con la fuente de alimentación suministramos un voltaje tal que la intensidad que circule por el microamperímetro sea la máxima posible (es decir,  $100\ \mu\text{A}$ ). A continuación vamos bajando la tensión aplicada y para cada desviación de la aguja del microamperímetro, anotamos el correspondiente valor del amperímetro patrón.

Para comparar los resultados, determinamos el valor teórico que se mediría con nuestro instrumento, dado por (9.2).

### Construcción y calibrado de voltímetros

Como aplicación hacemos los cálculos para construir un voltímetro de fondo de escala  $V' = 1$  voltio,  $V'' = 5$  voltios y  $V''' = 10$  voltios. Para su construcción tenemos usar la resistencia  $R_v$  cuyo valor hemos obtenido teóricamente. En el laboratorio, esto lo podemos conseguir empleando la caja de resistencias y si no es suficiente tendremos que poner una resistencia fija en serie con la caja de resistencias, de forma que consigamos el valor que hemos calculado teóricamente.

Para la calibración del voltímetro construido montamos el circuito de la figura 9.5, en donde el voltímetro patrón empleado será un polímetro comercial (el fondo de escala inicial será superior al fondo de escala del voltímetro que queremos calibrar). Con la fuente de alimentación suministramos un voltaje tal que la intensidad que circule por el microamperímetro sea la máxima posible (es decir,  $100 \mu A$ ). A continuación vamos bajando la tensión aplicada y para cada desviación de la aguja del microamperímetro, anotamos el correspondiente valor del voltímetro patrón.

De nuevo, comparamos los resultados experimentales con los teóricos dados por la ecuación (9.6).

### Construcción y calibrado de un óhmetro con dos escalas

Para la construcción del óhmetro montamos el circuito de la Fig. 9.5. Unos valores orientativos de la tensión y el potenciómetro serían:  $V_0 = 0,5$  V y  $P = 10$  k $\Omega$ . Para determinar el punto de  $R = 0$ , posicionamos el potenciómetro en el valor máximo y cortocircuitamos los terminales A-B. A continuación, ajustamos el potenciómetro de forma que la corriente que pasa por el microamperímetro sea la máxima posible (es decir,  $100 \mu A$ ). De esta manera quedan determinados el punto de  $R = 0$ . El otro extremo de la escala,  $R = \infty$ , corresponde al circuito abierto, esto es,  $I = 0$ .

Seguidamente, calibramos el óhmetro determinando el valor de la resistencia correspondiente a las desviaciones intermedias de la aguja del microamperímetro, para ello colocamos entre los terminales A y B una caja de resistencias y para cada desviación de la aguja, anotamos el correspondiente valor de la resistencia. Si necesitamos un valor de la resistencia superior al máximo proporcionado por la caja de resistencias, pondremos una resistencia de valor conocido en serie con la caja, de esta forma ésta última nos permitirá hacer el ajuste fino.

Por último, fijamos una nueva tensión,  $V' = 2V_0$  y volvemos a calibrar el óhmetro comprobando que para la misma desviación de la aguja corresponde una resistencia doble que la anterior.

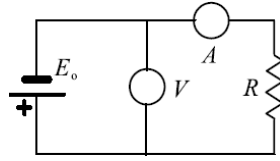


Figura 9.6:

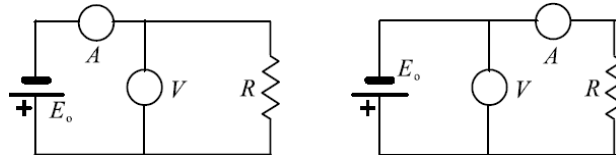


Figura 9.7:

### 3.3. Cuestiones

1. Un microamperímetro tiene una resistencia interna de  $1\text{k}\Omega$  y el otro de  $500\ \Omega$ . ¿Cuál de los dos perturbará menos la medida del circuito de la figura 9.6, cuando deseamos medir  $R$ ?
2. Para utilizar el instrumento como voltímetro: ¿Qué microamperímetro será mejor, el de  $50\mu\text{A}$  ó el de  $100\ \mu\text{A}$  fondo de escala? ¿Cuántos  $\Omega/V$  corresponden a cada microamperímetro?
3. Dos voltímetros tienen respectivamente resistencias internas de  $1\text{M}\Omega$  y  $10\ \text{M}\Omega$ . ¿Cuál de los dos perturba menos las medidas?
4. En los circuitos de la figura 9.7, el voltímetro tiene una resistencia de  $10\ \text{M}\Omega$  y el amperímetro de  $1\ \text{k}\Omega$ . ¿Con cuál de las dos disposiciones se comete menos error en las medidas para calcular  $R$ ?

# Ecuación de los gases perfectos

## 1. Propósito.

- Determinación de la ecuación de estado de los gases ideales.

## 2. Fundamento teórico.

En termodinámica es posible expresar el estado de una sustancia (gaseosa o líquida) mediante una relación (ecuación) entre las variables que determinan su estado (presión(P), volumen (V), temperatura absoluta (T)). En el caso de un gas ideal estas se relacionan mediante la denominada "*ecuación de los gases ideales*":

$$pV = nRT \quad (10.1)$$

donde  $n$  es el número de moles de gas y  $R$  es la constante universal de los gases.

A partir de esta ecuación es posible definir unos coeficientes que relacionan dos de las variables entre sí mientras la otra (la tercera) se mantiene constante. Estos tienen nombres propios: el coeficiente de expansión isobárico  $\alpha$ , el coeficiente de expansión isovolumétrico  $\beta$ , y la compresibilidad isoterma  $\kappa$ . Sus definiciones matemáticas son:

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (10.2)$$

$$\beta = \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (10.3)$$

$$\kappa = -\frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (10.4)$$

donde los subíndices  $p$ ,  $V$  y  $T$  nos indican que, en cada uno de los casos, una de las variables termodinámicas permanecen constantes en el proceso que se realiza. Los valores que se denotan como  $p_0$ ,  $V_0$  (y  $T_0$  en su caso) son valores de referencia apropiados para como se realiza cada uno de los experimentos. Por ejemplo, en el caso de que el experimento se lleve a cabo encima de una mesa, podremos suponer que se está realizando a temperatura ambiente, o a presión constante, ...

Teniendo en cuenta la ecuación de estado de nuestro sistema (que relaciona las variables termodinámicas entre sí y las relaciones 1.3 a 1.5 es posible establecer relaciones entre los diferentes coeficientes. Partiendo de la ecuación 1 es posible escribir:

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp \quad (10.5)$$

En un proceso en el que se mantenga constante el volumen  $dV = 0$  y por lo tanto podemos despejar:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = - \frac{\partial V}{\partial T} / \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\alpha}{\kappa} \quad (10.6)$$

y que puede relacionarse, asu vez, con  $p_0$  por medio de  $\beta$ ,

$$p_0 \beta = \frac{\alpha}{\kappa} \quad (10.7)$$

En procesos usuales las dependencias de las variables termodinámicas  $V$  y  $p$  con respecto a  $T$  son lineales de manera que en los procesos que se realizan a presión y volumen constante los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  pueden relacionarse con  $T$  mediante las expresiones:

$$V = V_0 (1 + \alpha \theta) \quad (10.8)$$

$$p = p_0 (1 + \beta \theta) \quad (10.9)$$

donde  $\theta = T - T_0$  y  $T_0$  es la temperatura a la cual el volumen del sistema es  $V_0$  y la presión del sistema es  $p_0$ . Estas expresiones nos permiten caracterizar de forma completa el comportamiento de un gas mediante la medida de un dos de los coeficientes de la terna  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\kappa$ . Esto se hace mediante la representación y posterior ajuste de curvas  $V - T$  a presión constante o  $p - V$  a temperatura constante.

En esta práctica se estudiarán las curvas  $p - V$  a temperatura constante y  $p - T$  a volumen constante usando una determinada masa de gas contenido en un recipiente cerrado.

### 3. Dispositivo Experimental.

Para poder realizar esta práctica el alumno debe disponer de los siguiente materiales:

- Baño termostático.
- Dispositivo integrado para el estudio de las leyes delos gases que comprende un recipiente de gas, un sistema de circulación de agua termostatzada y un manómetro de mercurio.

## 4. Procedimiento.

Parte A Montaje experimental. Se proporciona el sistema de medida montado de forma que solo es necesario que el estudiante ponga atención a las siguientes consideraciones:

- a) Controlar que el sistema experimental disponga de agua suficiente como para cubrir toda la resistencia de calentamiento del termostato. El agua no debe abundar ya que esto ralentiza mucho el proceso de termalización (se tarda mucho tiempo en alcanzar el equilibrio térmico).
- b) El tubo donde se mide tiene sección constante. Es por ello por lo que el volumen de fluido contenido en el mismo es proporcional a  $l$ , la longitud que se lee en la escala. Es por ello por lo que en las relaciones matemáticas en las que aparezca  $l$  pueden reescribirse en función de  $V$ .
- c) Hay que tener en cuenta que la presión del gas que hay encerrado hay dos contribuciones: la presión del gas exterior (presión atmosférica)  $p_a$  y la que se origina por la diferencia de altura entre las columnas de gas  $\Delta p$ . La presión atmosférica se debe medir de alguna forma en el laboratorio.
- d) Debemos dejar el capilar del depósito de mercurio abierto durante todo el proceso de medida para no introducir presiones adicionales. Al terminar debe cerrarse de nuevo para evitar pérdidas de gas por emanación.

Parte B Toma de las medidas. La toma de datos consiste en obtener la información necesaria para poder representar las curvas  $p - V$  a temperatura constante y  $p - T$  a volumen constante. Puesto que el cambio de temperatura es el proceso más lento debido al proceso de termostatación para llegar a la temperatura que se quiere es recomendable que una vez que el dispositivo tenga una temperatura se tomen todas las medidas necesarias a esa temperatura. Es por ello por lo que se propone al alumno el siguiente esquema de toma de datos:

- a) Se coloca el depósito de mercurio a una determinada altura que, en lo sucesivo, se denomina posición de referencia.
- b) Debemos tomar, al menos, 8 datos diferentes para cada una de las temperaturas. Esto se debe repetir a intervalos de 5 grados Kelvin entre 303 y 353 grados Kelvin.
- c) Para cada uno de los valores de temperatura se toman varios (al menos 8) valores de presión y de volumen. Se debe comenzar la medida con el depósito de mercurio en la posición de referencia y, posteriormente, se debe cambiar la posición del mismo. Es necesario (y muy importante) asegurarse de que los valores del volumen sean los mismos para todas las temperaturas a las que se realizan las medidas. Esto permitirá tener datos para hacer una representación  $p - T$  a volumen constante. Tras finalizar una serie

de medidas se lleva el depósito de mercurio a la posición de referencia y se comprueba que los valores de la presión y volumen coinciden con los que se tomaron en la primera de las medidas hechas con este valor de la temperatura.

## 5. Análisis de los datos

- Dibuje varias gráficas  $p - V$  a temperatura constante, eso debe hacerse para varios valores de  $T$  (varias gráficas). El dibujo debe hacerse utilizando una escala logarítmica. Para varias de ellas, (al menos dos o tres) debe hacerse un ajuste por mínimos cuadrados. Esto permitirá comprobar que el volumen y la presión son inversamente proporcionales. De la representación gráfica obtenga el valor del coeficiente  $kV_0$ .
- Dibuje varias gráficas  $p - T$  a volumen constante, los valores que se tomen para el volumen deben seguir una relación logarítmica. Ajuste los datos obtenidos por mínimos cuadrados y compruebe que la presión y la temperatura son directamente proporcionales. Calcule el valor del coeficiente  $p_o\beta$ .
- Realice un análisis de los errores de los datos obtenidos.

## 6. Cuestiones

- En el caso de que el gas contenido en el recipiente sea nitrógeno, indique el número de moles de este gas hay en el interior del recipiente.
- Cree que es posible calcular el coeficiente de expansión isóbaro. Indique cómo.



# Densidad de sólidos y líquidos

## 1. Propósito de la práctica

- Demostrar el principio de Arquímedes
- Determinar la densidad de un sólido a partir de la densidad de un líquido patrón (agua)
- Determinar la densidad de un líquido.

## 2. Fundamento teórico

El principio de Arquímedes afirma que todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta una fuerza de empuje vertical igual al peso del volumen de líquido que desaloja.

Un sencillo montaje experimental para verificar el principio se muestra en la figura (11.1).

De un dinamómetro cuelgan un cilindro hueco (h) y un cilindro macizo (m), de un material cualquiera, tales que el cilindro macizo encaja exactamente en el cilindro hueco. Cuando se pesa en aire el conjunto cilindro hueco+cilindro macizo, la fuerza que mide el dinamómetro es  $P_{h+m}$ . Si ahora se repite la pesada de modo que el cilindro macizo esté totalmente sumergido en agua mientras que el cilindro hueco está por encima del nivel del agua, el dinamómetro medirá una fuerza  $P_{h+m} - E_m$ , siendo  $E_m$  el empuje que ejerce el agua sobre el cilindro macizo sumergido, que es igual al peso de un volumen equivalente de agua. Por lo tanto, si ahora llenamos de agua el cilindro hueco, el peso de este agua compensará el empuje  $E_m$  y el peso total del conjunto cilindro lleno de agua+cilindro macizo sumergido será igual al peso inicial  $P_{h+m}$ .

Una vez demostrado de esta forma el principio de Arquímedes, podemos utilizarlo para medir densidades de sólidos y líquidos con respecto a la densidad de un líquido de referencia (por ejemplo, el agua).

Sea entonces un cuerpo sólido de volumen  $V$ . Si el cuerpo se sumerge completamente en un líquido, desalojará un volumen  $V$ . El peso real del sólido es  $P = \rho_s V g$  y el peso



Figura 11.1: Posición relativa del cilindro macizo, negro, y el cilindro superior hueco antes de que el primero se sumerja en agua.

del líquido desalojado es  $E = \rho_l V g$ , donde  $\rho_s$ ,  $\rho_l$  son respectivamente las densidades del sólido y del líquido. El peso aparente del sólido dentro del líquido es

$$P_{ap} = P - E = (\rho_s - \rho_l) V g. \quad (11.1)$$

Por otra parte, también podemos escribir

$$\frac{\rho_s}{\rho_l} = \frac{P}{E} = \frac{P}{P - P_{ap}}. \quad (11.2)$$

Por lo tanto, la densidad relativa del sólido frente al líquido se puede determinar simplemente pesando el sólido en el aire y pesándolo cuando está sumergido en el líquido.

Supongamos ahora que volvemos a pesar el mismo cuerpo sólido sumergido en otro líquido de diferente densidad  $\rho'_l$  y obtenemos un peso aparente  $P'_{ap}$ . Entonces tendremos

$$\frac{\rho'_l}{\rho_l} = \frac{P - P'_{ap}}{P - P_{ap}}, \quad (11.3)$$

con lo que podemos determinar la densidad relativa entre los dos líquidos sin necesidad de conocer la densidad del sólido (que en este caso actúa sólo como un intermediario).

Para obtener la densidad del sólido con mayor precisión conviene hacer una serie de pesadas. Para ello vamos a utilizar un suspensor de pesas al que iremos añadiendo sucesivamente  $n$  pesas de masa  $m$  de un material del que queremos medir su densidad  $\rho_s$ . Como generalmente el suspensor no está fabricado con el mismo material que las pesas, supongamos que ocupa un volumen  $V_{susp}$  y tiene una densidad  $\rho_{susp}$ . Para este sistema de pesas y suspensor se tiene que el peso del sistema en aire

$$P = nmg + m_{susp}g = n\rho_s V_s g + \rho_{susp} V_{susp} g. \quad (11.4)$$

Si representamos el peso del sistema en función del número de pesas la ecuación (11.4) es una recta de ecuación  $P = an + b$  donde la pendiente y la ordenada en el origen son:

$$a = \rho_s V_s g \text{ y } b = \rho_{susp} V_{susp} g \quad (11.5)$$

Análogamente podemos escribir el peso aparente, sumergido en agua, es

$$P_{ap} = P - E = n(\rho_s - \rho_l)gV_s + (\rho_{susp} - \rho_l)V_{susp}g. \quad (11.6)$$

que también es una función lineal de constantes

$$a' = (\rho_s - \rho_l)V_sg \text{ y } b' = (\rho_{susp} - \rho_l)V_{susp}g \quad (11.7)$$

### 3. Dispositivo experimental

El dispositivo se muestra en la figura 11.1 y consiste en:

#### 3.1. Material necesario

- Soporte vertical
- Dinamómetro de precisión
- Juego de cilindros con gancho, uno macizo y otro hueco en el que el primero quepa exactamente.
- Recipiente para líquidos
- Bolas macizas de material sólido (cristal, acero, ...) o suspensor con juego de pesas iguales.
- Agua destilada, vino, glicerina.

### 4. Procedimiento

#### 4.1. Primera parte

1. Con un dinamómetro, pesar en aire el conjunto cilindro hueco+cilindro macizo y anotar la lectura del dinamómetro. A continuación, repetir la medida con el cilindro macizo sumergido completamente en agua. En esta situación, verter suavemente agua en el cilindro hueco y comprobar que cuando éste está lleno se recupera la lectura inicial del dinamómetro.
2. Repetir el experimento con otros líquidos.

$n$	$P_v$	$P_a$	$(P_v - P_a)$

Tabla 11.1: Tabla de pesos reales (en aire) y aparentes (sumergido) para las cinco pesas.

## 4.2. Segunda parte

1. Con un dinamómetro se pesa el suspensor y a continuación se realiza una serie de pesadas añadiendo sucesivamente pesas. Anotar las medidas que marca el dinamómetro  $P_{vac}$  completando la segunda columna de la tabla 11.1.
2. Repetir la serie de pesadas después de sumergir el suspensor y las pesas en un recipiente de agua destilada cuidando de que el nivel del agua llegue siempre a la misma altura del suspensor. Anotar las nuevas medidas del dinamómetro en la columna  $P_{agua}$  de la tabla (11.1).
3. Representar en una gráfica el peso en aire  $P$  frente al número de pesas, que es equivalente a comprobar la ecuación (11.4). Calcular mediante una regresión lineal el valor de la pendiente  $a$  y el su ordenada en el origen  $b$ .
4. Representar en una gráfica el peso aparente  $P_{agua}$  frente a el número de masas  $n$ . Como esta relación corresponde a la ecuación (11.6), ajustando los datos a una recta, obtener  $a'$  y  $b'$ .
5. Representar en una gráfica  $P_{vac}/(P_{vac} - P_{agua})$  que según la ecuación (11.2) corresponde a la densidad media del sistema formado por las pesas y el suspensor
6. Repetir el procedimiento con vino o con glicerina. Anotar  $P_{vino}$  o  $P_{glic}$ . Para aligerar la práctica se puede utilizar solamente una pesada.

## 5. Análisis

1. Con la ayuda de la ecuación (11.5) determinar la masa de las pesas o, si esta es conocida, la aceleración de la gravedad. Estimar también la masa del suspensor.
2. La densidad del agua se toma como patrón; es decir,  $\rho_{agua} = 1000 \text{ kg/m}^3$ . De las ecuaciones (11.5) y (11.7) se tiene que

$$\frac{a'}{a} = 1 - \frac{\rho_l}{\rho_s} \quad \frac{b'}{b} = 1 - \frac{\rho_l}{\rho_{susp}} \quad (11.8)$$

y, por tanto, se puede calcular la densidad de las pesas y la del suspensor. Determinarlas con sus respectivos errores.

3. Otra manera de obtener la densidad del sólido es con la ayuda de de (11.2), en este caso la densidad media del sistema suspensor pesas es

$$\rho_s = \rho_{agua} \frac{P_{vac}}{P_{vac} - P_{agua}} = \frac{P_{vac}}{P_{vac} - P_{agua}} \text{ g/cm}^3$$

Si el sistema fuera homogéneo la densidad sería constante, independiente del numero de pesas, pero en este caso la densidad es variable como se muestra en la gráfica. ¿Por qué? ¿Cómo sería la curva si el número de pesas fuera mucho más grande?

Esta gráfica debería ser una recta horizontal, pero parece que la densidad del sólido aumenta con el numero de pesas. Esto se debe a que el suspensor es de un material más ligero que el material del que están hechas las piezas. Como lo que en realidad estamos midiendo es la densidad media de las pesas y el suspensor si se pudiera continuar añadiendo pesas esta curva tendería asintóticamente a la densidad de las pesas.

4. Así mismo, de (11.3) se tiene que las densidades del vino y de la glicerina serán

$$\rho_{vin} = \frac{P_{vac} - P_{vin}}{P_{vac} - P_{agua}} \text{ g/cm}^3 \quad \rho_{glic} = \frac{P_{vac} - P_{glic}}{P_{vac} - P_{agua}} \text{ g/cm}^3 \quad (11.9)$$

## 6. Cuestiones

1. Aunque hemos llamado  $P_{vac}$  al peso que marca el dinamómetro cuando en el recipiente no hay líquido, lo cierto es que en el recipiente hay aire y lo que marca el dinamómetro es en realidad  $P_{aire} = (\rho_s - \rho_{aire})Vg$ . ¿Qué influencia tendrá esto en los resultados?
2. Comparando la densidad del sólido según el método que utiliza la ecuacion (11.1) con la obtenida según la ecuación 11.2, se ve que ambas densidades no coinciden. Cuál puede ser la razón de este comportamiento?



# Viscosidad

## 1. Propósito de la práctica

Lo que se pretende con esta práctica es determinar la viscosidad del aceite de oliva (o de otros líquidos) mediante el procedimiento de Stokes.

## 2. Fundamento teórico

Para determinar la viscosidad  $\eta$  de un líquido muy viscoso se utiliza frecuentemente un método debido Stokes que consiste en estudiar el movimiento de una esfera maciza de radio  $r$  en el seno de dicho líquido. Cuando el radio es pequeño con respecto a las dimensiones de la vasija que contiene el líquido, la fuerza de viscosidad  $F_\eta$  que se opone al movimiento de la esfera se puede expresar de la siguiente manera:

$$F_\eta = -6 \pi \eta r v$$

donde  $v$  es la velocidad con que se mueve la esfera dentro del líquido. La fuerza  $F_\eta$  tiene siempre la misma dirección que la velocidad y se opone a ella. Por esta razón hemos suprimido la notación vectorial, aunque hemos afectado del signo negativo a la igualdad.

Si la esfera es de mayor densidad que el líquido, se puede estudiar su movimiento de caída según el eje  $Z$  vertical con la siguiente ecuación del movimiento (segunda ley de Newton):

$$m_b \frac{d^2 z}{dt^2} = -m_b g + m g - 6 \pi \eta r \frac{dz}{dt}$$

donde  $-m_b g$  representa el peso de la esfera, que va siempre hacia abajo, y  $m g$  el empuje de Arquímedes debido a la masa  $m$  del líquido que desaloja, que va hacia arriba. La fuerza  $F_\eta$  de viscosidad se opone a la variación de la coordenada  $z$  con el tiempo ( $dz/dt = v$ ). Esta ecuación diferencial se resuelve fácilmente (ver Apéndice) proporcionando las siguientes expresiones de  $z(t)$  y  $v(t)$ :

$$z(t) = z_0 + \beta (1 - e^{-\alpha t} - \alpha t)$$

$$v(t) = -\alpha \beta (1 - e^{-\alpha t})$$

donde  $z_0$  es la altura a la que se encuentra la esfera en reposo para  $t = 0$ , y donde  $\alpha$  y  $\beta$  tienen las siguientes expresiones en función de la viscosidad  $\eta$ , del radio  $r$  y de las densidades  $\rho_b$  y  $\rho$  de la esfera y del líquido, respectivamente:

$$\alpha = \frac{9}{2} \frac{\eta}{r^2 \rho_b} \quad ; \quad \beta = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right) \frac{g}{\alpha^2}$$

El parámetro  $\alpha$  es directamente proporcional a la viscosidad  $\eta$  e inversamente proporcional al cuadrado del radio  $r$  de la esfera. Si  $\alpha$  es grande (viscosidad elevada o radio muy pequeño) el término exponencial de las ecuaciones del movimiento disminuye muy rápidamente y el movimiento se hace prácticamente uniforme. En este caso su velocidad es constante e igual a:

$$v = -\alpha \beta = -\frac{2}{9} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right) g \frac{\rho_b}{\eta} r^2$$

Por consiguiente, la determinación experimental de la velocidad  $v$  nos permite calcular la viscosidad  $\eta$  del líquido, ya que las demás magnitudes son constantes del experimento:

$$\eta = -\frac{2}{9} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right) g \frac{\rho_b}{v} r^2 \quad (12.1)$$

### 3. Dispositivo experimental

En el experimento se determina la velocidad  $v$  de caída de una gota de agua en el interior de una botella de aceite. En la Figura 1 puede verse el dispositivo en funcionamiento. La altura  $z$  de la gota se mide tomando el origen de coordenadas arbitrariamente en la superficie de la mesa de laboratorio. El origen de tiempos es el del cronómetro, arbitrario también<sup>1</sup>.

El material necesario para realizar la práctica es el siguiente:

- Una botella de litro de aceite de oliva con las paredes planas, lisas y transparentes.
- Dos cuentagotas.
- Un cronómetro digital.
- Una jeringa de plástico aforada de una capacidad de 5 ó 10 cm<sup>3</sup>.
- Una balanza de construcción casera.
- Una cámara fotográfica digital.

---

<sup>1</sup>Esta circunstancia no influye en el experimento ya que lo que se quiere determinar es la velocidad de caída de la gota, que no depende de dónde hayamos tomado los orígenes de posición y de tiempo.





Figura 1: *Dispositivo experimental.*

## 4. Procedimiento

Para utilizar la fórmula (1) en el cálculo de  $\eta$  es necesario determinar experimentalmente el radio  $r$  de la gota de agua, la densidad  $\rho$  del aceite de oliva y la velocidad de caída  $v$  de la gota en el interior del aceite. Por consiguiente necesitamos realizar los tres tipos de experimentos que describimos a continuación.

### 4.1. Primer experimento: Determinación del radio de la gota de agua

El radio de las gotas de agua que produce el cuentagotas se puede determinar de la siguiente manera: Se cuenta el número de gotas necesario para obtener un determinado volumen de agua, que se puede medir con la jeringa aforada. Esta operación se realiza varias veces contando en cada caso alrededor de un centenar de gotas. En la Tabla I se indican el número de gotas, el volumen ocupado y el radio medio.

Tabla I: *Radio  $r_i$  de las gotas de agua producidas por el cuentagotas*

n° de gotas	volumen (cm <sup>3</sup> )	$r_i$ (mm)
91	5	2,36
107	7	2,50
107	7	2,50
137	8	2,41
146	8	2,36
158	9	2,39
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...

A partir de la Tabla I deducimos el radio medio de la gota con el error con que viene afectado debido a la dispersión observada:

$$r = \frac{\sum r_i}{n} = 2,42 \text{ mm } (\pm 0,05 \text{ mm})$$

donde  $n$  es el número de mediciones realizadas. Como puede verse, la dispersión en el valor del radio de la gota es cercana al 4 % del valor medio.

Este experimento también sirve para determinar el volumen medio  $V_b$  de una gota de agua producida por el cuentagotas:

$$V_b = \frac{4}{3} \pi r^3 = 59 \text{ mm}^3 (\pm 7 \text{ mm}^3)$$

#### Determinación del error en la medida del radio $r$ :

- Error del aparato de medida: En la jeringa aforada el error en la medida del volumen es de media división entre cincuenta o más. Por lo tanto:  $\pm 100 \times (0,5/50) = \pm 1 \%$ .
- Error debido a la dispersión aleatoria del valor medio de  $r$ :

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{\sum (r - r_i)^2}{n(n-1)}} = 0,026 \text{ mm} \Leftrightarrow 1 \%$$

- Error total  $\Delta r$ :

$$\pm (1 \% + 1 \%) = \pm 2 \% \Rightarrow \Delta r = \pm 0,05 \text{ mm}$$

#### Determinación del error en la medida del volumen $V_b$ de una gota de agua:

Como el volumen de la gota depende de su radio  $r$  elevado al cubo, el porcentaje de error en él es tres veces mayor que el determinado para  $r$ . Es decir:

$$\pm 3 \times 4 \% = \pm 12 \% \Leftrightarrow \Delta V_b = \pm 7 \text{ mm}^3$$

## 4.2. Segundo experimento: Determinación de la densidad del aceite

Para determinar la densidad  $\rho$  del aceite se puede proceder de la siguiente manera:

En uno de los vasos de plástico (platillos) de la balanza de construcción casera (ver Figura 2) se deposita un volumen  $V$  conocido de aceite medido con la jeringa aforada. En el otro vaso se deposita un volumen  $V_a$  de agua medido con la jeringa aforada que esté próximo a equilibrar la balanza pero que pese menos que el volumen  $V$  de aceite. Se equilibra el peso de éste añadiendo el número  $n$  de gotas necesario con el cuentagotas. En estas condiciones, el volumen total de agua  $V_T$  que equilibra en peso al volumen  $V$  de aceite es:

$$V_T = V_a + n V_g$$

Esta operación se realiza una decena de veces.

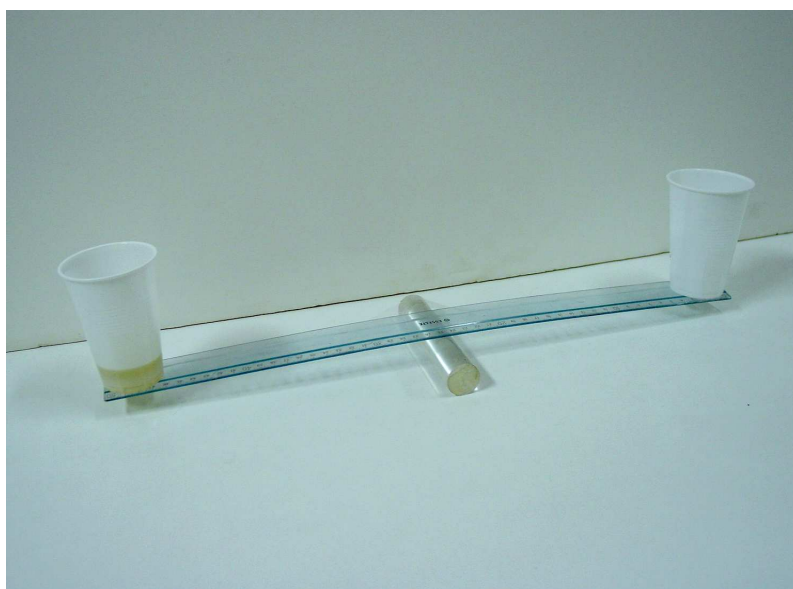


Figura 2: *Balanza de construcción casera.*

En la Tabla II se indica el volumen de aceite, el volumen de agua que equilibra la balanza y la relación  $\rho/\rho_b = V/V_T$  de las densidades.

Tabla II: *Volumen de aceite frente a volumen del agua que equilibra la balanza*

$V \text{ (cm}^3\text{)}$	$V_T \text{ (cm}^3\text{)}$	$(\rho/\rho_b)_i$
30	27,6	0,920
30	27,7	0,923
30	27,4	0,913
30	27,9	0,930
30	27,5	0,917
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...

Utilizando la Tabla II se puede determinar el valor de la relación entre las densidades del aceite y del agua. El valor medio obtenido con su error correspondiente es:

$$\frac{\rho}{\rho_b} = \frac{1}{n} \sum (\rho/\rho_b)_i = 0,92 (\pm 0,01)$$

Como puede verse, la dispersión es inferior al 2 % en este caso. Recordando que el valor de la densidad  $\rho_b = 1000 \text{ kg m}^{-3}$  en el Sistema Internacional de unidades, obtenemos el valor de la densidad  $\rho = 920 \text{ kg m}^{-3}$  para el aceite.

Determinación del error en la medida de la relación de densidades  $\rho/\rho_b$ :

- Error del aparato de medida: En la jeringa aforada el error en la medida del volumen es de media división entre cincuenta o más. Por lo tanto:  $\pm 100 \times (0,5/50) = \pm 1 \%$ .
- Error debido a la dispersión aleatoria del valor medio de  $\rho/\rho_b$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum ((\rho/\rho_b) - (\rho/\rho_b)_i)^2}{n(n-1)}} = 0,0029 \Leftrightarrow 0,3 \%$$

- Error total  $\Delta(\rho/\rho_b)$ :

$$\pm (1 \% + 0,3 \%) = \pm 1,3 \% \Rightarrow \Delta(\rho/\rho_b) = \pm 0,01$$

### 4.3. Tercer experimento: Determinación de la velocidad de caída de la gota de agua

Para determinar la velocidad  $v$  de caída de una gota de agua en el seno del aceite el modo de operar puede ser el siguiente:

1. Se pone el cronómetro en marcha y se le deja funcionar durante el tiempo que dure la operación. Cuando la gota ha llegado al fondo de la botella se para el cronómetro y se vuelve a poner a cero para la operación siguiente.

2. Se deposita con cuidado una gota de agua con uno de los cuentagotas. Si la gota de agua no logra penetrar debido a la tensión superficial del aceite, se añade un poco de éste con el otro cuentagotas y se observa cómo se introduce la gota en la botella, iniciando su descenso.
3. Se toman diferentes instantáneas desde una misma posición con la cámara fotográfica durante el descenso de la gota.
4. Con las diferentes tomas fotográficas se establece una tabla de valores experimentales de la posición  $z$  de la gota frente al instante de tiempo indicado por el cronómetro (Tabla III). El instante de tiempo viene indicado por el cronómetro y la posición  $z$  se mide sobre la fotografía por comparación entre los píxeles que le corresponden y los que ocupa la altura de la botella.

Tabla III: Posición  $z_j$  para cada instante de tiempo  $t_j$  para la gota  $i$

$t_j$ (s)	$z_j$ (cm)
20,79	20,6
25,02	16,6
29,30	12,4
33,84	7,9
38,41	3,6
...	...
...	...
...	...
...	...

5. Se representa gráficamente la posición  $z_j$  frente al tiempo  $t_j$  y del ajuste de la recta que resulta se obtiene la velocidad  $v_i$  de caída de la gota  $i$  y el error  $\Delta v_i$  que afecta a la medida.

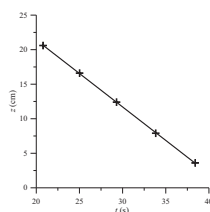


Figura 3: Posición  $z_j$  frente al tiempo  $t_j$  y recta de ajuste para la gota  $i$ .

Para realizar la operación de ajuste se ha admitido que dicha velocidad  $v_i$  de la gota  $i$  es constante, por lo que se utiliza la siguiente expresión lineal:

$$z = v_i t + z_{0,i}$$

La pendiente de la recta es la velocidad  $v_i$  buscada y el error  $\Delta v_i$  con que viene afectada la medida de dicha pendiente se calcula con la siguiente fórmula:

$$(\Delta v_i)^2 \cong \frac{1}{n-2} \frac{\sum (z_j - v_i t_j - z_{0,i})^2}{\sum (t_j - \tau)^2}$$

En el caso representado en la Figura 3 el resultado es el siguiente:

$$v_i = -0,969 \text{ cm s}^{-1} (\pm 0,005 \text{ cm s}^{-1})$$

Es decir, el error relativo es de 0,5 %.

6. Se repite la operación con medio centenar de gotas. Esto es necesario debido a que las gotas no tienen siempre el mismo radio, sino que se observa una dispersión en su valor, lo que hace que exista también una dispersión en el valor de la velocidad de caída y se necesite trabajar con valores medios de  $v$  y de  $r$  para determinar  $\eta$ .
7. Se consignan los valores de la velocidad obtenidos para cada gota con su correspondiente error en la Tabla IV.

Tabla IV: Velocidad  $v_i$  de cada gota con el error  $\Delta v$  que afecta a la medida

gota n°	$v_i$ (cm s <sup>-1</sup> )	$\Delta v$ (cm s <sup>-1</sup> )
1	- 0,762	$\pm 0,005$
2	- 0,851	$\pm 0,005$
3	- 0,969	$\pm 0,005$
4	- 1,051	$\pm 0,005$
5	- 1,162	$\pm 0,005$
6	- 1,270	$\pm 0,005$
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...

Al observar los valores  $v_i$  de la Tabla IV se saca la conclusión de que sus diferencias, que en algunos caso son mayores del 50 %, no pueden explicarse por el error en la determinación de  $v_i$ , que es bastante pequeño, sino de que deben ser debidas a que las gotas utilizadas tienen distinto radio  $r_i$ .

De los valores de  $v_i$  de la Tabla IV obtenemos el siguiente valor medio de  $v$  con el error que afecta a la medida:

$$v = \frac{\sum v_i}{n} = 1,01 \text{ cm s}^{-1} (\pm 0,08 \text{ cm s}^{-1})$$

#### Determinación del error en la medida de la velocidad $v$ :

- Error debido a la dispersión aleatoria del valor medio de  $v$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (v - v_i)^2}{n(n-1)}} = 0,08 \text{ mm} \Leftrightarrow 8 \%$$

#### 4.4. Cálculo de la viscosidad del aceite

Para proceder al cálculo de la viscosidad del aceite por este procedimiento debemos utilizar en la fórmula (1) los valores medios tanto del radio  $r$  como de la velocidad  $v$ . Haciendo esto obtenemos para la viscosidad  $\eta$  el siguiente valor:

$$\eta = -\frac{2}{9} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right) g \frac{\rho_b}{v} r^2 = 0,10 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} (\pm 0,02 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1})$$

Este valor de la viscosidad  $\eta$  del aceite está en buen acuerdo con el que se determina en laboratorios profesionales ( $\eta = 0,084 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  a  $20^\circ\text{C}$ ), encontrándose su discrepancia dentro del error experimental del procedimiento.

### 5. Análisis y conclusiones

Analizando los valores de la posición  $z(t)$  de una de las gotas, consignados en la Tabla III y representados gráficamente en la Figura 3, se constata que su variación es lineal. Al proceder a su ajuste, la pendiente de la línea recta que resulta es la velocidad  $v_i$  de descenso de la gota, que viene indicada con su error  $\Delta v_i$  en la Tabla IV. Para cada gota en particular el error en la velocidad resulta ser inferior al 0,5 %, lo que quiere decir que el movimiento es rectilíneo y uniforme. Nos encontramos en la región en que se puede considerar constante la velocidad de caída, o, lo que es lo mismo, en la región en que las fuerzas que actúan sobre la esfera de agua están equilibradas, siendo nula su resultante. Esto es debido a que la constante  $\alpha$  (proporcional a la viscosidad e inversamente proporcional al cuadrado del radio de la gota) es suficientemente elevada para que el término exponencial  $e^{-\alpha t}$  pueda considerarse despreciable cuando ha transcurrido un lapso de tiempo muy inferior al segundo desde el comienzo del movimiento de caída.

### 6. Cuestiones y ejercicios en torno a la práctica

La conclusión a que hemos llegado sobre la constancia de la velocidad de caída de la gota sugiere una serie de preguntas.

La fórmula que proporciona la solución general para la velocidad:

$$v(t) = -\alpha \beta (1 - e^{-\alpha t})$$

contiene una exponencial decreciente con el tiempo que hace que su valor crezca de manera continua desde 0 para el instante inicial hasta  $v_\infty$  cuando  $t$  tiende a infinito. Este valor límite es el que hemos utilizado para calcular  $\eta$ . Estrictamente hablando la velocidad  $v$  no sería nunca constante, pero en la práctica, a partir de un intervalo de tiempo  $\Delta t$  relativamente pequeño desde el inicio del movimiento, la diferencia entre el valor  $v(t)$  y  $v_\infty$  es inferior al error experimental producido por el dispositivo de medida. Esto nos conduce a proponer los siguientes ejercicios para realizar de manera voluntaria:

1. Si tomamos una gota promedio de radio  $r = 2,42$  mm, determinar el intervalo  $\Delta t$  de tiempo que ha de transcurrir desde el inicio de su movimiento de caída para que  $(v_\infty - v(\Delta t))$  sea inferior al 0,5 % del valor de  $v_\infty$ .
2. La gota promedio tarda 19,8 s en descender 20 cm en el aceite. ¿Cuánto tiempo tardaría en descender una esfera de acero del mismo radio? (Procédase por tanteo en la ecuación de  $z(t)$ ).
3. Si en lugar de poner una gota de agua en la parte superior de una botella llena de aceite ponemos una gota de aceite en el fondo de una botella llena de agua, lo que observamos es que la gota asciende. Escribir las ecuaciones que describirían este movimiento ascendente y calcular el tiempo que tardaría en alcanzar el régimen de velocidad constante. Calcular, así mismo, el tiempo que invertiría en subir 20 cm.
4. En los razonamientos teóricos sobre la práctica hemos supuesto que la gota es perfectamente esférica para poder aplicar la fórmula de Stokes. Explicar las razones que existen para sospechar que la gota no es perfectamente esférica y tratar de evaluar de alguna manera su separación a la esfericidad.
5. Si en lugar de estudiar el movimiento de gotas de líquido (agua o aceite) en el seno de otro líquido estudiamos el movimiento de burbujas de aire, ¿qué cosas nuevas aparecerían en el problema?

## 7. Propuesta de experimento sugerido por esta práctica

También de manera voluntaria se podría realizar una tarea que consiste en proponer un experimento sugerido por esta práctica, describir el dispositivo experimental para llevarlo a cabo, y realizar los cálculos necesarios para predecir el resultado esperado. Aunque resulta una tarea complicada puede ser muy formativa.



## 8. Apéndice

### Ecuaciones del movimiento de la gota de agua en el aceite

Se trata de encontrar las soluciones de la siguiente ecuación diferencial de la función  $z(t)$ :

$$m_b \frac{d^2 z}{dt^2} = -m_b g + m g - 6 \pi \eta r \frac{dz}{dt}$$

Poniendo las masas  $m_b$  de la esfera y  $m$  del aceite en función de sus densidades respectivas:

$$m_b = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_b \quad ; \quad m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

y dividiendo ambos miembros de la ecuación por  $m_b$ , obtenemos la siguiente ecuación diferencial de segundo grado para  $z(t)$ :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} = -\alpha^2 \beta$$

donde:

$$\alpha = \frac{9}{2} \frac{\eta}{r^2 \rho_b} \quad ; \quad \beta = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right) \frac{g}{\alpha^2}$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo grado a la que le falta el término de grado cero correspondiente a la función  $z(t)$ . Haciendo el cambio funcional:

$$\frac{dz}{dt} = \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt}$$

se obtiene una nueva ecuación diferencial en  $\theta(t)$  que es ordinaria y de primer grado:

$$\frac{d\theta}{dt} + \alpha \theta = -\alpha^2 \beta$$

Esta ecuación tiene una solución general  $\theta(t)$  que es la suma de la solución general  $\theta_h(t)$  de la ecuación homogénea y de una solución particular  $\theta_p$  cualquiera de la ecuación completa:

$$\frac{d\theta_h}{dt} + \alpha \theta_h = 0$$

$$\frac{d\theta_p}{dt} + \alpha \theta_p = -\alpha^2 \beta$$

La solución general de la ecuación homogénea se obtiene resolviendo la ecuación característica:

$$R + \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad R = -\alpha \quad \Rightarrow \quad \theta_h(t) = A e^{-\alpha t}$$

donde  $A$  es una constante de integración que depende de las condiciones iniciales.

Una solución particular de la ecuación completa es aquella cuya primera derivada es nula:

$$\frac{d\theta_p}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_p(t) = -\alpha \beta$$

Por lo tanto:

$$\theta(t) = A e^{-\alpha t} - \alpha \beta$$

Como la función  $\theta(t)$  es, en realidad, la velocidad  $v(t)$  de la gota de agua, la condición inicial que debe cumplir es que sea igual a cero cuando se inicia el movimiento. Si tomamos en ese instante el origen de tiempos, esta condición conduce a la siguiente expresión:

$$\theta(0) = 0 = A - \alpha \beta \quad \Rightarrow \quad A = \alpha \beta$$

Por lo tanto:

$$\theta(t) = \alpha \beta (e^{-\alpha t} - 1) = \frac{dz}{dt}$$

Integrando ahora esta última ecuación obtenemos la expresión general para  $z(t)$ :

$$z(t) = \alpha \beta \left( -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} - t \right) + B$$

donde  $B$  es una nueva constante de integración que depende de la condición inicial para  $z(t)$ . Si para  $t = 0$  la gota se encuentra a la altura  $z_0$  iniciando el movimiento de descenso, esta condición conduce a la siguiente expresión:

$$B = z_0 + \beta$$

Finalmente, las expresiones de  $z(t)$  y  $v(t)$  para estas condiciones de contorno son:

$$z(t) = z_0 + \beta (1 - e^{-\alpha t} - \alpha t)$$

$$v(t) = -\alpha \beta (1 - e^{-\alpha t})$$

# Reflexión y refracción de la luz

## 1. Propósito de la práctica

Lo que se pretende con esta práctica es estudiar las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz en la superficie de separación del aire y del agua y el fenómeno de la reflexión total.

## 2. Fundamento teórico

Uno de los primeros fenómenos luminosos que abordó la Ciencia es el de la reflexión y refracción de la luz en la superficie de separación de dos medios dieléctricos transparentes. En la Figura 1 se puede ver una cubeta de plástico que contiene agua hasta la mitad de su altura. La parte superior de la cubeta está llena de aire al que se ha añadido un poco de humo de cigarrillo para visualizar un rayo láser de He-Ne que incide desde la izquierda sobre la superficie de separación aire-agua<sup>1</sup>. Se puede ver cómo el rayo incidente se escinde en otros dos rayos: uno que se refleja sobre la superficie hacia arriba y otro que se transmite (o refracta) al interior del agua. El rayo reflejado y el incidente forman el mismo ángulo con la normal a la superficie de separación, mientras que el ángulo de refracción es distinto del de incidencia y se acerca a la normal.

Estas observaciones fueron hechas ya en la antigüedad por los griegos y los romanos, pero no se establecieron matemáticamente hasta el siglo XVII en que Descartes y Newton las publicaron en sus tratados sobre Óptica. Para enunciarlas aquí vamos a precisar algunos términos:

- Se llama *punto de incidencia* al punto en que incide el rayo sobre la superficie de separación de los dos medios, que es el mismo del que salen los rayos reflejado y refractado.
- Los ángulos de incidencia  $\theta_i$ , de reflexión  $\theta_r$  y de refracción (o transmisión)  $\theta_t$  son los que forman, respectivamente, el rayo incidente, el rayo reflejado y el rayo refractado con la normal en el punto de incidencia, tomándolos siempre comprendidos entre 0 y 90°.

---

<sup>1</sup>El láser de He-Ne se encuentra fuera del encuadre de la fotografía.

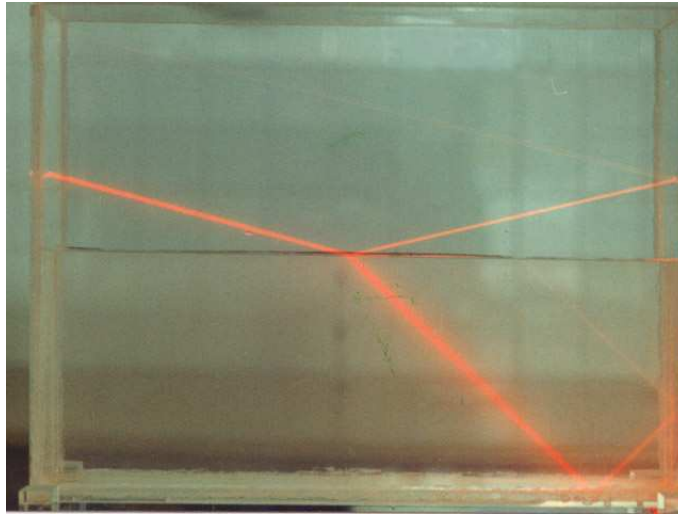


Figura 13.1: Figura 1: Reflexión y refracción de un rayo láser de He-Ne.

En estas condiciones, las leyes de la reflexión y de la refracción se enuncian de la siguiente manera:

1. El rayo incidente, el rayo reflejado, el rayo refractado y la normal están en un mismo plano que se denomina *plano de incidencia*.
2. Los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales (*ley de la reflexión*):

$$\theta_i = \theta_r$$

3. El seno del ángulo de refracción es proporcional al seno del ángulo de incidencia (*ley de la refracción*):

$$\text{sen } \theta_r = \frac{1}{n} \text{sen } \theta_i$$

donde  $n$  es el *índice de refracción* del medio hacia el que se transmite la luz (el agua, en el caso de la Figura 1) respecto al medio de donde proviene (el aire). El índice  $n$  es el cociente entre la velocidad de la luz en el medio de donde proviene y la velocidad de la luz en el medio a donde se transmite. Cuando el medio de donde proviene la luz es el vacío se dice que  $n$  es el índice de refracción absoluto del medio a donde se transmite la luz. El índice de refracción absoluto es siempre mayor que la unidad.

4. Las leyes de la reflexión y de la refracción son reversibles. Esto quiere decir que las direcciones de incidencia/reflexión y de incidencia/transmisión son intercambiables. Una consecuencia de esta ley es que cuando la luz pasa de un medio de índice de refracción absoluto mayor a otro de índice menor se produce el fenómeno de la *reflexión total*, que conlleva la existencia de un *ángulo límite* para el fenómeno de la refracción.

Lo que nos proponemos en esta práctica es comprobar estas leyes.

### 3. Dispositivo experimental

Un ejemplo de dispositivo experimental<sup>2</sup> es el que está indicado en la Figura 2.

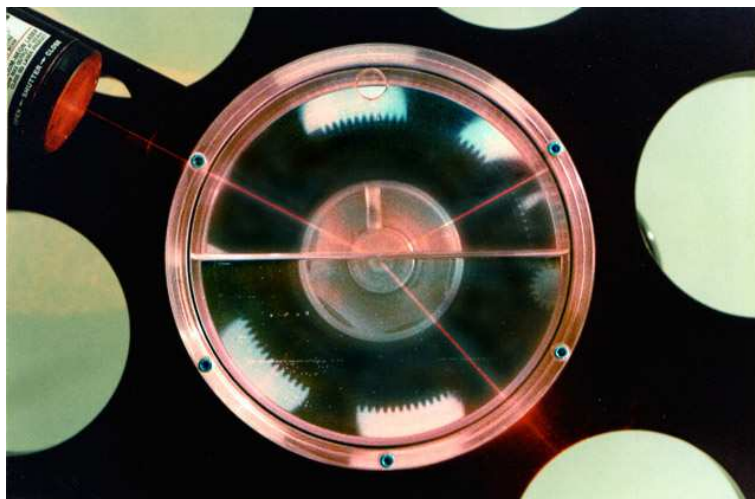


Figura 13.2: Figura 2: Dispositivo experimental.

El material de que consta el dispositivo es el siguiente:

- Una cubeta cilíndrica de metacrilato que se llena de agua (u otro líquido) hasta la mitad.
- Un laser de He-Ne de unos pocos miliwatios de potencia.
- Un soporte donde colocar la cubeta y el láser. El soporte dispone de escalas circulares concéntricas graduadas para medir ángulos. (Las escalas quedan fuera del encuadre de la Figura 2.)

### 4. Procedimiento

Se coloca la cubeta en el soporte de manera que su centro se encuentre en el centro de los círculos de las escalas graduadas. Así, cuando el rayo láser incide radialmente sobre la cubeta, los ángulos de incidencia, reflexión y refracción se determinan directamente sobre las escalas circulares.

Para comprobar las leyes enunciadas más arriba podemos realizar tres experimentos con el dispositivo descrito.

---

<sup>2</sup>Pueden utilizarse dispositivos más sencillos, como la propia cubeta paralelepípedica de plástico transparente de la Figura 1 y un puntero láser de los que se pueden adquirir en tiendas especializadas en venta por Internet o en establecimientos de productos para los aficionados a la Astronomía.

### **Primer experimento: Comprobación de que los tres rayos involucrados y la normal están en el mismo plano**

Este experimento es totalmente cualitativo y consiste en realizar las siguientes operaciones:

- Se hace incidir el láser en una dirección cualquiera y sobre cualquier punto de la superficie de separación aire-agua. Se puede observar que los rayos incidente, reflejado y refractado se encuentran siempre en un plano vertical.
- Se coloca el láser de manera que su dirección esté contenida en el plano vertical perpendicular al eje de la cubeta (plano de la Figura 2) y se le hace incidir sobre el centro de la misma. Se observa que los tres rayos y la normal al punto de incidencia están en el mismo plano vertical.

La conclusión que se obtiene de este experimento es que se puede definir el plano de incidencia y que es adecuado medir los ángulos de incidencia, reflexión y refracción con respecto a la normal a la superficie de separación de los medios. Hay que hacer resaltar que si en este experimento el plano de incidencia es siempre vertical es debido a que la superficie de separación aire-agua es horizontal.

### **Segundo experimento: Medida de los ángulos de reflexión y refracción**

Para comprobar las leyes de la reflexión y de la refracción vamos a determinar los ángulos de reflexión y de refracción para diversos ángulos de incidencia. Con el dispositivo experiemetal propuesto se pueden obtener al mismo tiempo los datos experimentales de los que deducimos estas dos leyes.

Antes de llevar a cabo la medida hay que verificar lo siguiente:

- El nivel del agua en la cubeta contiene al centro geométrico de la misma. Si no es así, hay que añadir agua o elimiarla hasta que se consiga.
- Al hacer girar el láser para obtener los diferentes ángulos de incidencia el rayo pasa siempre por el centro de la cubeta. Si no es así, la incidencia no es radial y la medida de los ángulos con los círculos graduados no es buena.

Hecho esto, el procedimiento consiste en colocar el láser de manera que obtengamos una serie de ángulos de incidencia y determinar los ángulos de reflexión y refracción correspondientes.

En la Tabla I se indican los resultados obtenidos en una prueba<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>No se incluyen en ella los datos relativos a ángulos superiores a 40°

$\theta_i(^{\circ})$	$\theta_r(^{\circ})$	$\theta_t(^{\circ})$
5,0	-	3,5
10,0	10,0	7,0
15,0	15,0	11,0
20,0	20,0	14,5
25,0	25,0	18,0
30,0	30,0	21,5
35,0	34,5	25,5
40,0	...	...
45,0	...	...
50,0	...	...
55,0	...	...
60,0	...	...
65,0	...	...
70,0	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...

Tabla I: Ángulos de incidencia,  $\theta_i$ , de reflexión,  $\theta_r$ , y de refracción,  $\theta_t$

*Determinación del error en la medida de los ángulos:*

- Error del aparato de medida: Los círculos graduados tienen divisiones cada medio grado, por lo que para el error en la medida del ángulo debido al aparato podemos tomar la mitad de esta cantidad, redondeada con una sola cifra significativa:

$$\text{error del aparato} = \pm 0,3^{\circ}$$

### Comprobación de la ley de la reflexión

Utilizando la Tabla I se puede comprobar la ley de la reflexión. En la Figura 3 se hace la representación gráfica de los valores del ángulo de reflexión  $\theta_r$  frente a los del ángulo de incidencia  $\theta_i$ . Puede verse que la representación gráfica es una línea recta de pendiente unidad, lo que significa que los ángulos  $\theta_i$  y  $\theta_r$  son iguales.

El ajuste lineal se ha llevado a cabo utilizando la expresión siguiente:

$$\theta_r = m \theta_i + b$$

El resultado obtenido para la pendiente  $m$  y la ordenada en el origen  $b$  es el siguiente:

$$m = 1,012 \pm 0,004 \quad ; \quad b = 0,42^{\circ} \pm 0,09^{\circ}$$

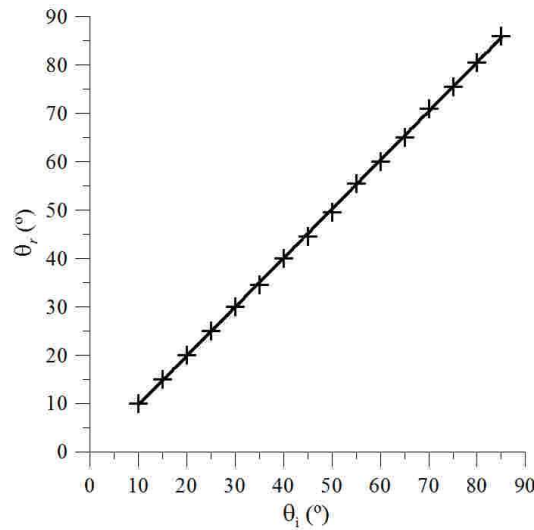


Figura 3: Ángulo de reflexión  $\theta_r$  frente a ángulo de incidencia  $\theta_i$ .

### Comprobación de la ley de Snell o de la refracción

Utilizando la Tabla I se puede comprobar la ley de la refracción. En la Figura 4 se hace la representación gráfica de los valores del seno del ángulo de refracción frente a los del seno del ángulo de incidencia. Puede verse que la representación gráfica es una línea recta.

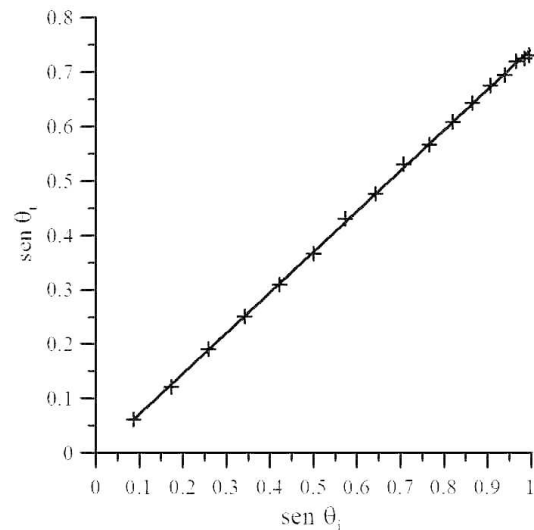


Figura 4: Seno del ángulo de refracción  $\theta_t$  frente al seno del ángulo de incidencia  $\theta_i$ .

El ajuste lineal se ha llevado a cabo utilizando la expresión siguiente:

$$\text{sen } \theta_t = m \text{ sen } \theta_i + b$$



El resultado obtenido para la pendiente  $m$  y la ordenada en el origen  $b$  es el siguiente:

$$m = 0,745 \pm 0,003 \quad ; \quad b = -0,0036 \pm 0,0009$$

### Aproximación paraxial o de Gauss

Por el interés práctico que tiene vamos a analizar la aproximación de la ley de Snell para ángulos pequeños. Esta aproximación es importante porque conduce a las leyes de las lentes y de los espejos, que han permitido contruir telescopios, microscopios y demás aparatos con los que se obtiene una buena formación de las imágenes. La ley consiste en suponer que para ángulos suficientemente pequeños el seno, la tangente y el ángulo expresado en radianes tienen el mismo valor. En estas condiciones el ángulo de refracción es proporcional al de incidencia:

$$\theta_t = m \theta_i$$

En la Figura 5 puede verse la representación gráfica del ángulo de refracción frente al ángulo de incidencia obtenida a partir de los valores de la Tabla I.

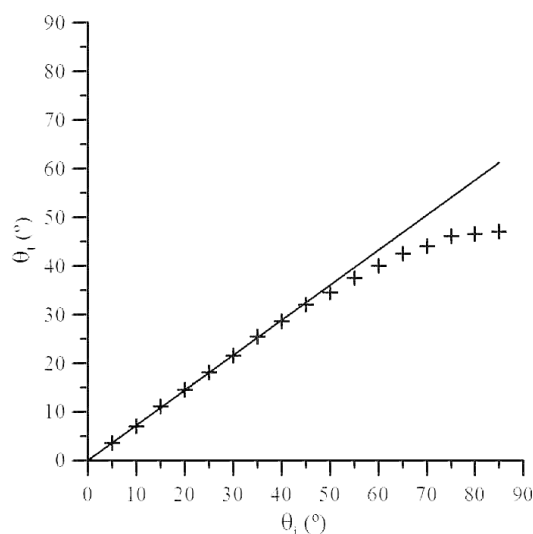


Figura 5: Ángulo de refracción  $\theta_t$  frente al ángulo de incidencia  $\theta_i$ .

Para valores del ángulo de incidencia inferiores a  $40^\circ$  la representación es prácticamente una línea recta, cuyos parámetros son muy próximos a los de la recta de la Figura 4:

$$m = 0,720 \pm 0,007 \quad ; \quad b = 0,02^\circ \pm 0,07^\circ$$

La validez de la aproximación lineal depende de la indeterminación con que se conozcan los índices de refracción de los medios involucrados.

## 5. Tercer experimento: ángulo límite

Con el dispositivo experimental de la Figura 2 se puede comprobar la reversibilidad de las leyes de la reflexión y de la refracción intercambiando las direcciones de los rayos que intervienen en cada una de ellas. Al intercambiar los rayos de incidencia y transmisión, es decir, al incidir sobre la superficie agua-aire desde el interior del agua, la transmisión hacia el aire se hace cumpliendo la ley estudiada más arriba, pero en este caso el ángulo de incidencia en el interior del agua no alcanza los noventa grados. Su máximo valor es lo que se denomina ángulo límite para esta superficie y es el valor al que tiende  $\theta_t$  en la Figura 5. Por encima de este valor se produce reflexión total en la superficie agua-aire, que actúa como un espejo.

El ángulo límite se puede determinar de la siguiente manera: se incide con el láser por la parte inferior de la Figura 2 con ángulos para los cuales haya transmisión hacia el aire. Se va haciendo aumentar los valores del ángulo de incidencia hasta que deja de aparecer el rayo en la parte superior de la cubeta. Se repite la operación, pero ahora con valores del ángulo de incidencia para los cuales no haya transmisión de la luz al aire. Se va haciendo disminuir gradualmente estos ángulos hasta que aparezca el rayo transmitido en la parte superior de la cubeta. En la Tabla II se indican dos series de valores de los ángulos de incidencia para el caso en que haya o no haya transmisión de la luz al aire.

Tabla II: *Ángulos de incidencia,  $\theta_i$ , desde el agua en torno al ángulo límite*

$\theta_i(^{\circ})$	Transmisión	No transmisión
47,0	X	-
48,0	X	-
48,5	X	-
48,8	X	-
49,0	-	X
49,3	-	X
49,5	-	X
50,0	-	X
51,0	-	X
52,0	-	X

Del análisis de la Tabla II se deduce que el valor del ángulo límite  $\theta_l$  debe encontrarse entre  $48,8^{\circ}$  y  $49,0^{\circ}$ . Es decir, su valor se puede tomar como:

$$\theta_l = 48,9^{\circ} \pm 0,3^{\circ}$$

## 6. Análisis y conclusiones

Los resultados obtenidos sirven para comprobar las leyes de la reflexión y de la refracción, para constatar la existencia de la reflexión total y para determinar el índice de refracción del agua respecto del aire.

- *Ley de la reflexión:* La pendiente de la recta de la Figura 3 es igual a la unidad, con una indeterminación del 1 %.
- *Ley de la refracción:* La pendiente de la recta de la Figura 4 es igual a 0,745 con una indeterminación del 0,5 %. De aquí se deduce el siguiente valor para el índice de refracción del agua:

$$n = \frac{1}{0,745} = 1,34 \pm 0,006$$

La diferencia entre este valor y el que se encuentra en la literatura (1,33) está dentro del margen de error del experimento.

- *Aproximación paraxial o de Gauss:* La pendiente de la recta de la Figura 5 es igual a 0,720 con una indeterminación del 1 %. Esto corresponde a un índice de refracción para el agua de:

$$n = \frac{1}{0,720} = 1,39 \pm 0,01$$

La diferencia entre la aproximación paraxial y la ley de Snell está dentro del margen de error de la medida.

- *Reflexión total y ángulo límite:* El fenómeno de la reflexión total se traduce por la existencia de un ángulo límite  $\theta_l$  que está relacionado con el índice de refracción relativo entre los medios. Se produce cuando el ángulo de refracción tiende a  $90^\circ$  y la ley de Snell nos proporciona dicha relación. En el caso de la superficie agua-aire:

$$\text{sen } \theta_l = \frac{1}{n} \text{ sen } 90^\circ \Rightarrow n = \frac{1}{\text{sen } \theta_l} = \frac{1}{\text{sen } 48,9^\circ} = 1,327 \pm 0,006$$

El resultado obtenido para  $n$  por este método coincide con el obtenido por la ley de Snell, dentro de los márgenes de error de la medida.

En consecuencia, el experimento es adecuado para estudiar las leyes elementales de la Óptica.