MATEMATIIKAN PROSEMINAARI HARJOITUSTYÖ

KALLE HEINONEN

Täydellisyys on erittäin tärkeä käsite metrisissä avaruuksissa ja sitä hyödynnetään paljon mm. metrisessä topologiassa ja matemaattisessa analyysissä. Banachin avaruudet ovat varsinkin keskeisessä roolissa funktionaalianalyysissa. Tässä harjoitustyössä todistamme yhden tärkeän avaruuden täydellisyyden.

Väite. Täydellistä normiavaruutta sanotaan Banachin avaruudeksi. Osoita, että vektoriavaruus $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$ varustettuna normilla $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ on Banachin avaruus.

Tarvitsemme todistukseen seuraavia esitietoja.

Määritelmä 1. *Metrisen avaruuden X jono (x_k) on Cauchy jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ kaikilla $n, m \geq N$ (Väisälä, Topologia I)*

Määritelmä 2. *Metrinen avaruus X on täydellinen, jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee. (Väisälä, Topologia I)*

Lause 1. *Metrinen avaruus $\mathbb{R}$ on täydellinen. (Väisälä, Topologia I)*

Lause 2. *Olkoon X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon (f_n) jono funktioita $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$. Tällöin, jos*

(i) f_n on jatkuva jokaisessa X:n pisteessä
(ii) (f_n) suppenee tasaisesti funktioon f

niin f on jatkuva jokaisessa X:n pisteessä. (G. Auliac J.-Y. Caby, Topologie et Analyse)

Määritelmä 3. *Olkoon $f_n : D \to X$. Jono (f_n) suppenee kohti kuvausta f pisteittäin D:ssä jos $f_n(x) \to f(x)$ kaikilla $x \in D$. (Väisälä, Topologia I)*

Todistus. Käydään todistus osissa (1), (2) ja (3). Olkoon avaruuden $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ jono (f_n) Cauchy.

(1) Osoitamme, että (f_n) suppenee pisteittäin rajafunktioon kiinnittämällä pisteen $t \in [0,1]$. Nyt
$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]}|f_n(t) - f(t)_m| = \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$
Täten pisteittäinen raja-arvo $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ on olemassa, sillä $\mathbb{R}$ on täydellinen .

(2) Seuraavaksi näytämme, että $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ suhteessa sup-normiin. Koska (f_n) on Cauchy, niin on olemassa N siten, että $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $n, m \geq N$. Tällöin saadan $\|f - f_N\|_\infty = \lim_{n\to\infty}\|f_n - f_N\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Nyt käyttämällä kolmioepäyhtälöä $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n - f + f_N - f_N\|_\infty$
$= \|f_n - f_N - (f - f_N)\|_\infty \leq \|f_n - f_N\|_\infty + \|f - f_N\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ kaikilla $n \geq N$.

(3) Viimeiseksi tulee osoittaa, että f on jatkuva. Tämä seuraa suoraan lauseesta 2, sillä (f_n) suppenee tasaisesti. Täten $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ on täydellinen.