

KALMÁR PÉTER

SZAKDOLGOZAT

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
HIDRODINAMIKAI RENDSZEREK TANSZÉK



SZAKDOLGOZAT

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
HIDRODINAMIKAI RENDSZEREK TANSZÉK

KALMÁR PÉTER
SZAKDOLGOZAT

Hasáb körüli áramlás numerikus vizsgálata rács-Boltzmann
módszer alkalmazásával

Témavezető:

Dr. Hegedűs Ferenc
egyetemi docens

Budapest, 2020

Szerzői jog © Kalmár Péter, 2020.

ZÁRADÉK

Ez a szakdolgozat/diplomatervezet elzártan kezelendő és őrzendő, a hozzáférése a vonatkozó szabályok szerint korlátozott, a dolgozat tartalmát csak az arra feljogosított személyek ismerhetik.

A korlátozott hozzáférés időtartamának lejártáig az arra feljogosítottakon kívül csak a korlátozást kérelmező személy vagy gazdálkodó szervezet írásos engedélyével rendelkező személy nyerhet betekintést a dolgozat tartalmába.

A hozzáférés korlátozása és a zárt kezelés 2020. év 12 hónap 30 napján ér véget.

Az eredeti feladatkiírás a mellékletek között megtalálható.

NYILATKOZATOK

Elfogadási nyilatkozat

Mellékelve.

Nyilatkozat az önálló munkáról

Alulírott, *Kalmár Péter* (ZNQXA7), a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem hallgatója, büntetőjogi és fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem és sajátkezű aláírással igazolom, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, és dolgozatomban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a hatályos előírásoknak megfelelően, a forrás megadásával megjelöltem.

Budapest, 2020.12.12

szigorló hallgató

TARTALOMJEGYZÉK

Jelölések jegyzéke	ix
1. Bevezetés.....	1
1.1. Célkitűzések.....	2
1.2. Áttekintés	2
2. Elméleti áttekintés	4
2.1. Rács Boltzmann módszer kialakulása.....	5
2.1.1. Sűrűségfüggvény	5
2.1.2. Boltzmann egyenlet:	6
2.1.3. Rács Boltzmann módszer.....	6
2.2. Hasáb körüli áramlás.....	7
3. A szimuláció menete	10
3.1. Geometria definiálása.....	11
3.2. Rácsmodell kiválasztása, definiálása	13
3.3. Makroszkópikus változók meghatározása.....	14
3.4. Kezdeti értékek definiálása.....	15
3.5. Főciklus.....	16
3.5.1. Makroszkópikus változók meghívása	17
3.5.2. Belépő és Kilépő peremfeltételek	17
3.5.2.1. Makroszkópikus változók módosítása a peremeken	18
3.5.2.2. Mikroszkópikus feltételek a peremeken.....	19
3.5.3. Ütközés.....	20
3.5.4. Határfelületek ütközési operátora.....	21
3.5.5. Tovább haladás	22
3.5.6. Áramlási kép vizsgálata.....	23
3.6. Adatok exportálása.....	23
4. A szimuláció validálása	24
4.1. Időjel	24
4.2. Spektrum	25
4.3. Hálófüggetlenségi vizsgálat	27
4.4. Időlépés vizsgálata.....	28
4.5. Paramétertanulmány	29
5. Összefoglalás.....	34
5.1. Összehasonlítás a szakirodalmi adatokkal:	34
5.2. Javaslatok	36
6. Felhasznált Források	37

7. Summary.....	38
-----------------	----

JELÖLÉSEK JEGYZÉKE

A táblázatban a többször előforduló jelölések magyar és *angol* nyelvű elnevezése, valamint a fizikai mennyiségek esetén annak mértékegysége található. Az egyes mennyiségek jelölése – ahol lehetséges – megegyezik hazai és a nemzetközi szakirodalomban elfogadott jelölésekkel. A ritkán alkalmazott jelölések magyarázata első előfordulási helyüknél található.

Latin betűk

Jelölés	Megnevezés, megjegyzés, érték	Mértékegység
u_v	valós áramlási sebesség	m/s
H_v	valós jellemző méret	m
Re_v	valós Reynolds szám	1

Görög betűk

Jelölés	Megnevezés, megjegyzés, érték	Mértékegység
γ_v	valós kinematikai viszkozitás	m^2/s

Indexek, kitevők

Jelölés	Megnevezés, értelmezés
i	általános futóindex (egész szám)
v	index a valós, természetben előforduló mennyiségek jelölésére
m	index a modellezett, a programban értelmezett mennyiségek jelölésére
$max.$	index a maximális érték jelölésére

1. BEVEZETÉS

Szakdolgozatom témája egy rács-Boltzmann módszeren alapuló program írása mely segítségével 1:1 oldalarányú hasáb körüli áramlás vizsgálata válik lehetővé, a kód GitHub-on megtalálható [1]. A szimulációs program python nyelven íródott Spyder fejlesztő környezetben, melynek nagy előnye, hogy jelentős mennyiségű külső csomaggal és programozást segítő funkcióval rendelkezik. A programozás során leggyakrabban használt csomag a „numpy” ami egy vektor bázisú szintakszis, mely jelentősen megkönnyíti és nem utolsó sorban felgyorsítja a mátrixok alkalmazását, melyek manipulálását magas szintű matematikai függvényekkel támogatja. A másik rendkívül hasznos csomag a „numba” ami az elkészült kód függvényeit fordítja le gépi kódra majd optimalizálja azt futtatás közben. Ezzel az optimalizálással jelentős szimulációs idő spórolható azonban megnehezíti némileg a programozást is, ugyanis a „numba” a folyamatos fejlesztés ellenére még nem optimalizál jól minden függvényt, illetve a függvények egy jó részét nem támogatja. További pozitívum, hogy a „numba” készítői figyelembe vették a felhasználói igényeket és ennek köszönhetően a „numpy” függvényeinek jelentős része támogatott.

Az áramló közegbe helyezett tompa test körül viszonylag alacsony Reynolds szám tartományban instacioner áramlás alakul ki. A test oldalfelületén kialakuló hátrréteg leválása során periodikus örvényleválás figyelhető meg mely frekvenciájának meghatározása létfontosságú a műszaki gyakorlatban. Ipari kéményeknél hidaknál, és egyéb karcsú építményeknél, a konstrukció sajátfrekvenciájának meghatározása, illetve elhangolása a területen jellemző Reynolds-szám intervallumhoz tartozó örvényleválási frekvenciáktól létfontosságú a rezonancia katasztrófa elkerülése végett. Amennyiben ez nem lehetséges, egyéb megoldásokhoz kell folyamodni.



1. ábra Ipari kémény körüli áramlás módosítása [2]

Az 1. ábrán a periodikus örvényleválás látható védekezés mentes esetben, illetve a gátolt örvényleválás a spirális bordákkal módosított kémény esetén. Az örvényleválás vizsgálata a repülő és a hajó iparban is megkerülhetetlen ezért a téma jelentős szakirodalommal rendelkezik. A hasáb körüli áramlás vizsgálatának nagy előnye, hogy a vizsgált objektum geometriája rendkívül egyszerű, azonban ennek ellenére komplex áramlástani folyamatok megfigyelésére ad lehetőséget. Ezen okokból vizsgálta a hasáb körüli áramlást Okajima [3], Yuo-Shen [4] és Shonkar [4] is. Munkájuk során létrehozott paramétertanulmány segítségével fogom validálni a saját fejlesztésű programomat.

1.1. Célkitűzések

Céлом a hasáb körüli áramlás numerikus szimulációjára alkalmas rács-Boltzman módszeren alapuló validált program írása python nyelven. A jelenség vizsgálata során az áramlási sebesség változtatása helyett a sebesség dimenziótlanítására szolgáló dimenziótlan számot a Reynolds számot definiálom:

$$Re [1] = \frac{H \cdot u}{\gamma} \quad 1.1$$

és változtatom, ahol H [m] a hasáb jellemző mérete, v [m/s] az áramló közeg sebessége, γ [m^2/s] pedig a kinematikai viszkozitás. A programot nulla és háromszáz közötti Reynolds szám tartományban paramétertanulmánnyal validálom. A paramétertanulmány során dimenziótlan számok segítségével vetem össze a szimuláció eredményeit a szakirodalmi adatokkal. További cél, egy olyan dokumentáció létrehozása mely során a programozásban jártas olvasó megismerkedhet a rács-Boltzmann módszer elméleti hátterével, struktúrájával és a leírtak figyelmes tanulmányozása után képessé válik reprodukálni a programot.

1.2. Áttekintés

A rács-Boltzman módszer elméleti áttekintése során bemutatásra kerül a Boltzman egyenlet majd ennek diszkretizált alakja. Ez után rátérek az áramlási tér definiálására, illetve létre hozom a vizsgálni kívánt 1:1 oldalarányú hasábot. A vizsgált problémának megfelelően D2Q9-es rács típust választok, majd meghatározom a makroszkópikus változók kezdeti értékét. A szimuláció felgyorsítása érdekében a makroszkópikus sebesség mátrix elemeit a Poiseuille profilnak megfelelően töltöm fel értékekkel. A makroszkópikus változók segítségével meghatározom az egyensúlyi eloszlás függvényét, majd a megoldót az egyensúlyi séma alkalmazásával inicializálom. A főciklusban Zou és He által kifejlesztett „velocity inlet” és „pressure outlet” peremfeltételeket [5] alkalmazok. Az áramlási tér alsó és felső határán, illetve a hasáb oldalfalain „full-way bounce back” peremfeltételt alkalmazok.

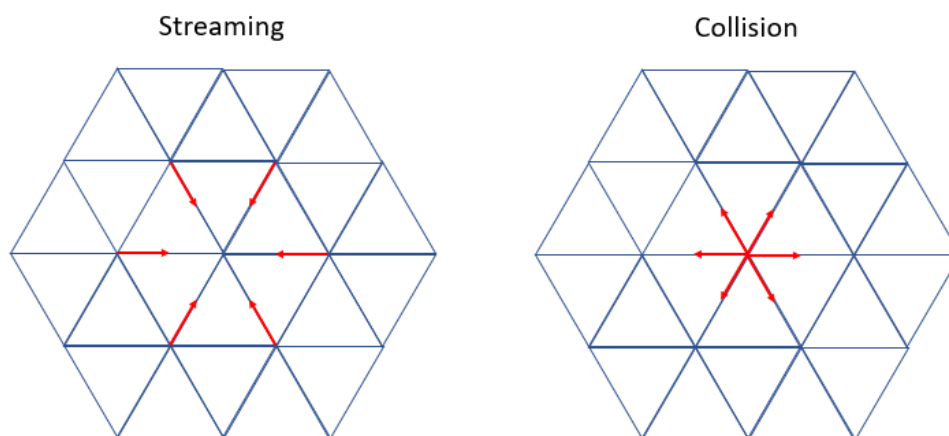
Az ütközést TRT (two relaxation time) ütközési operátorral modellezem. A paramétertanulmány megkezdése előtt hálózati függetlenségi vizsgálatot végzek Richardson extrapolációval, majd ellenőrzöm a szimuláció stabilitását a vizsgált tartományban. A hasáb hátoldalától négy hasábnyi távolságban monitorpontot helyezek el, mely segítségével a paramétertanulmány során minden időlépésben regisztrálom a makroszkopikus sebességek értékét a vizsgált rácsban. Az így létrehozott időjeleket gyors Fourier transzformálva meghatározom a spektrumokat. A spektrumokról leolvasható az adott Reynolds-számhoz tartozó Strouhal szám. A program validálását a spektrumokról leolvasott és a szakirodalomban megtalálható Strouhal számok összehasonlításával végzem el.

2. ELMÉLETI ÁTTEKINTÉS

A numerikus áramlástani szimulációk során térbeli és időbeli diszkretizáció alkalmazása általános, ugyanis ezen módszer alkalmazásával az áramlástani tér jól jellemezhető véges számú egyenlet megoldásával. A térbeli diszkretizálás méretének tekintetében három fő csoportot különböztethetünk meg: a makroszkópikus, a mikroszkópikus illetve a mezoszkópikus.

A makroszkópikus méret alkalmazására kiváló példa a véges térfogatok módszere, mely „a számítási tartományt kisebb térfogati elemekre bontja, amelyekben belül a keresett áramlástani mezőváltozók egyszerűbb (pl. lineáris) függvényekkel közelíthetők” [6]. A módszer nem vizsgálja molekuláris szinten az áramlást, ehelyett intenzív és extenzív állapotjelzők segítségével jellemzi azt.

Mikroszkópikus méretet alkalmaz a rács gáz automata (FHP) mely a Navier-Stokes egyenlet megoldásával írja le a folyadék dinamikáját. Az áramlási teret egyenlő oldalú háromszögek segítségével diszkretizálja, melyek csúcspontjaiban helyezkednek el a részecskék. A modellnek két fő része van, mely meghatározza a molekulák viselkedését a „streaming” (tovább haladás) és a „collision” (ütközés), ezek egymás utáni ismétlődését időlépésnek nevezzük. A molekulák időlépésenként (iteráció) az egyik csúcspontból a másik csúcspontba ugranak, amit a szakirodalom „streaming”-nek nevez. Minden csúcspontból hat lehetséges irány van a háló kialakításából kifolyólag. A 2. ábrán látható ahogy a részecskék a csomópontokban lokálisan ütköznek majd az előre definiált ütközési operátornak megfelelően visszaverődnek; ez a folyamat a „collision” [7].



2. ábra Rács gáz automata Tovább haladás - Ütközés

Mezoszkópikus méretet alkalmaz a rács Boltzmann módszer, amely a mikroszkópikus és a makroszkópikus mérettartomány között helyezkedik el. A rács-Boltzmann módszer működését tekintve több szempontból hasonlóságot mutat a rács gáz

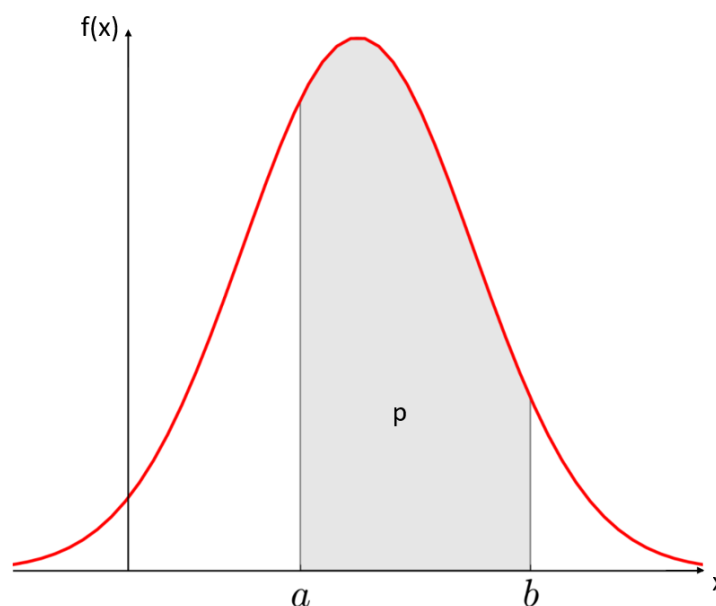
automatával, azzal a különbséggel, hogy az áramlást jellemző makroszkópikus változókat (sebesség, nyomás...stb) nem az egyenként modellezett diszkrét részecskék rácsonkénti (az áramlási teret borító haló alkotóelemeit rácsnak nevezzük) átlagolásával határozza meg, hanem közvetlenül statisztikai módszerekkel meghatározott, úgynevezett populációkkal modellezi a folyamatot és ezen populációkból számítja a makroszkópikus változókat. Ezen populációk bevezetésével jelentős számítási kapacitás spórolható meg.

2.1. Rács Boltzmann módszer kialakulása

Ebben a fejezetben bemutatásra kerül a Boltzmann egyenlet és ennek a diszkrét alakja, amit Rács Boltzmann módszernek nevezünk, illetve az előző pontban megismert populáció fogalma is definiálásra kerül.

2.1.1. SÚRÚSÉGFÜGGVÉNY

A sűrűségfüggvény, az angol irodalomban „probability density function”. A sűrűségfüggvény alatti terület azt adja meg, hogy a hozzá tartozó valószínűségi változó mekkora valószínűséggel esik az adott intervallumba [8] (3. ábra).



3. ábra. Sűrűségfüggvény [9]

Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény segítségével a következőképpen határozható meg:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad 2.1$$

2.1.2. BOLTZMANN EGYENLET:

Az alábbi egyenlet

$$f(x + dx, p + dp, t + dt)dx dp = f(x, p, t)dx dp \quad 2.2$$

ütközés nélküli esetben, nagy szabad úthosszal rendelkező ideális gázok esetén érvényes, ahol $f(x, p, t)dx dp$ a sűrűségfüggvény, mely megadja annak a valószínűségét, hogy egy adott pozíció (x), és momentum (p) intervallumban az adott időpillanatban (t) hány darab molekula található, ezt röviden populációnak is nevezzük. $f(x + dx, p + dp, t + dt)dx dp$ a sűrűségfüggvény mely a zavartalanul tovább áramló molekulákat jellemzi a következő időlépésben.

A fenti egyenlet kikötései jelentősen korlátozzák az egyenlet felhasználhatóságát, ezért ütközést leíró tagok kerültek bevezetésre:

$$f(x + dx, p + dp, t + dt)dx dp = f(x, p, t)dx dp + (\Gamma^+ - \Gamma^-)dx dp dt \quad 2.3$$

ahol $\Gamma^- dx dp dt$ „azon molekulák száma, melyek nem érkeznek meg a várt helyükre adott időlépés alatt ütközés következtében” [7]. $\Gamma^+ dx dp dt$ „azon molekulák száma melyek a vártnál különböző helyről és impulzussal indulnak azonban ütközés következtében a várt helyre érkeznek” [7].

A 2.2 egyenletet elsőrendű Taylor sorba fejtvé kapjuk a Boltzmann egyenletet:

$$v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_p f + \frac{\partial f}{\partial t} = \Gamma^+ + \Gamma^- \quad 2.4$$

ahol v a mikroszkópikus sebesség és F a molekuláris viszonylatban kicsi intermolekuláris erő. A Boltzmann egyenlet egy nem lineáris integro-differenciálegyenlet, melyet meglehetősen bonyolult megoldani és igen jelentős számítási kapacitást igényel. [10]

2.1.3. RÁCS BOLTZMANN MÓDSZER

A rács-Boltzmann módszer a Boltzmann egyenlet térbeli, sebességtérbeli és időbeli diszkretizálásával jön létre. Az áramlási teret egyenközű hálóval borítjuk, mely csomópontjaiban definiáljuk a populációkat. A háló tetszőlegesen nem variálható, ugyanis a hálót alkotó megfelelő rácstípus gondoskodik a makroszkópikus irányfüggetlenségről, illetve az impulzus egyenlet koordinátarendszer függetlenségéről. A populációk időlépésenként az egyik csomópontból a közelben lévő csomópontok egyikébe „ugranak” az előre definiált rácssebességek függvényében. Az ütközési operátor gondoskodik az ütközések megfelelő modellezéséről.

$$f_i(x + v_i \cdot \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) + \Omega_i(x, t) \quad 2.5$$

ahol „ $f_i(x, t)$ azon részecskék, melyek v_i sebességgel haladnak a környező pontok egyikébe, $v_i \cdot \Delta t$ a soron következő időlépésben $t + \Delta t$ [11], $\Omega_i(x, t)$ ütközés modellezésére szolgáló ütközési operátor. Ütközési operátorok nagy palettája áll rendelkezésre, azonban ebben a fejezetben, az érthetőség kedvéért az áramlástan modellezésre alkalmas legegyszerűbb ütközési operátor kerül bemutatásra, az úgynevezett BGK operátor, ami Bhatnager, Gross és Krook nevéhez fűződik.

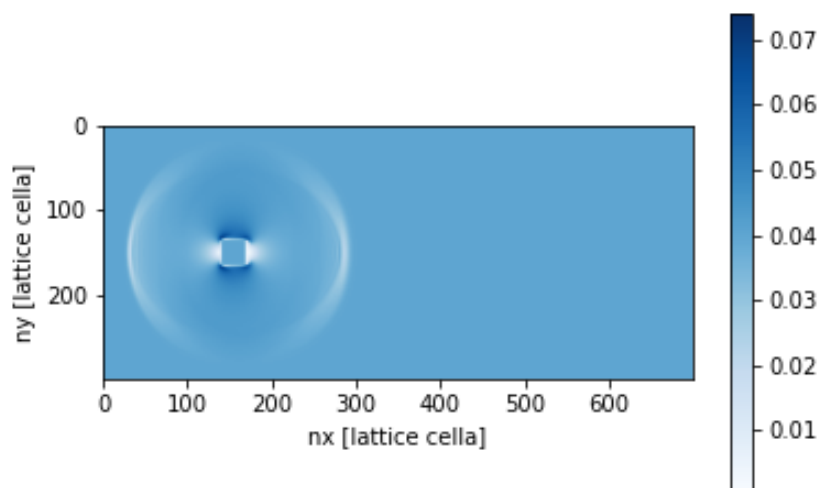
$$\Omega_i(f) = \frac{f_i - f_i^{eq}}{\tau} \cdot \Delta t = \omega \cdot (f_i - f_i^{eq}) \cdot \Delta t \quad 2.6$$

ahol f_i^{eq} a helyi egyensúlyi eloszlásfüggvény, ami nem más, mint a Maxwell-Boltzmann eloszlás megcsonkított sorozata. A sűrűségfüggvények mindegyike egy adott f_i^{eq} által jellemzett egyensúlyi állapotba tart, τ a relaxációs tényező, ω a relaxációs frekvencia, ami a relaxációs tényező reciproka. A helyi egyensúlyi eloszlásfüggvény, illetve a relaxáció tényező határozza meg a megoldandó probléma típusát, diffúzió, hőtranszport, energia egyenlet megoldása ugyanezzel a módszerrel lehetséges. A módszer további taglalása az érthetőség kedvéért a 3. „A szimuláció menete című fejezetben folytatódik”, ahol a szimuláció gyakorlati megvalósítása kerül bemutatásra.

2.2. Hasáb körüli áramlás

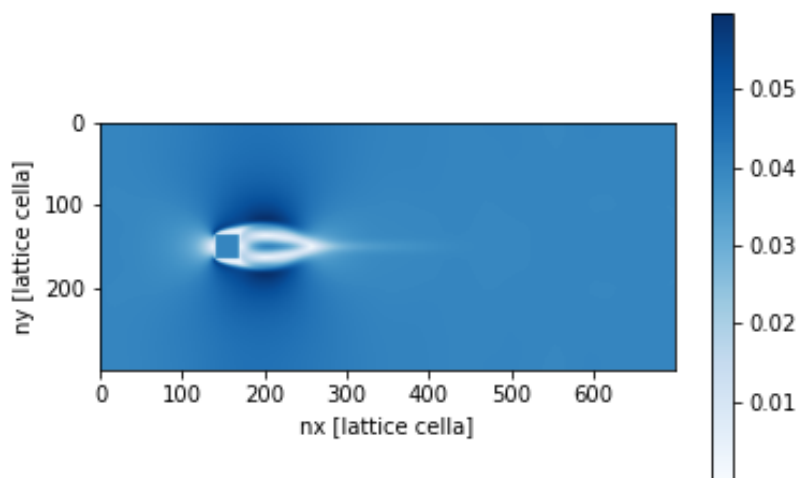
Jelen fejezetben a hasáb körül kialakuló áramkép kerül bemutatásra, melynek jelentősége ezen szakdolgozat keretében az, hogy a kialakult áramkép segítségével a program futása közben ellenőrizhetővé válik a szimuláció. Nyilvánvaló, hogy ez a szemrevételezés validálásra nem alkalmas, azonban értékes futási idő spórolható meg, ha meghatározott iterációnként ábrázolásra kerül a sebesség az áramlási térben, ezáltal könnyedén láthatóvá válik a fizikai folyamat nem megfelelő modellezése.

Az áramlás kialakulását $Re=300$ -nál mutatom be az általam pythonban írt program segítségével. Az áramlás kifejlődését a program egy egyszerűsített verziója segítségével mutatom be, ahol nem vezettem be speciális peremfeltételeket az áramlási térszélein. Ennek az egyszerűsítésnek az az oka, hogy bár ilyen kondíciókkal kevésbé pontos eredmény érhető el azonban, sokkal jobban megfigyelhető a hasáb körül kialakuló áramkép (nincsenek határoló falak). Itt a lehető legegyszerűbb és egyben legprimitívebb peremfeltételt a periodikus peremfeltételt alkalmaztam. Melynek lényege az, hogy az áramlási térből kilépő részecskék a tovább haladás lépésében a szemközti oldal megfelelő rácsaiba lépnek be.



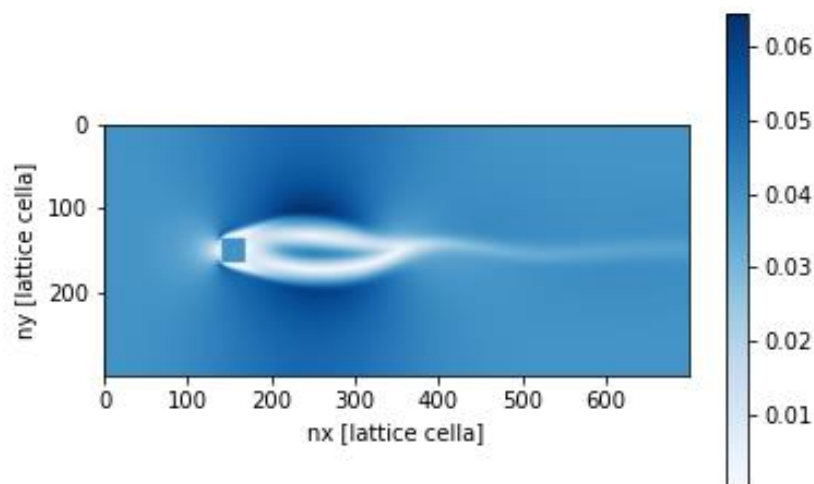
4. ábra Áramkép kialakulása 200. iterációnál

A 4. ábrán jól látható, hogy a szimuláció elején lökeshullám alakul ki, aminek lecsillapodása függ a használt peremfeltételektől, az áramlási tér nagyságától, és a cellaszám-tól. Jelen esetben 2000 iteráció szükséges ehhez.



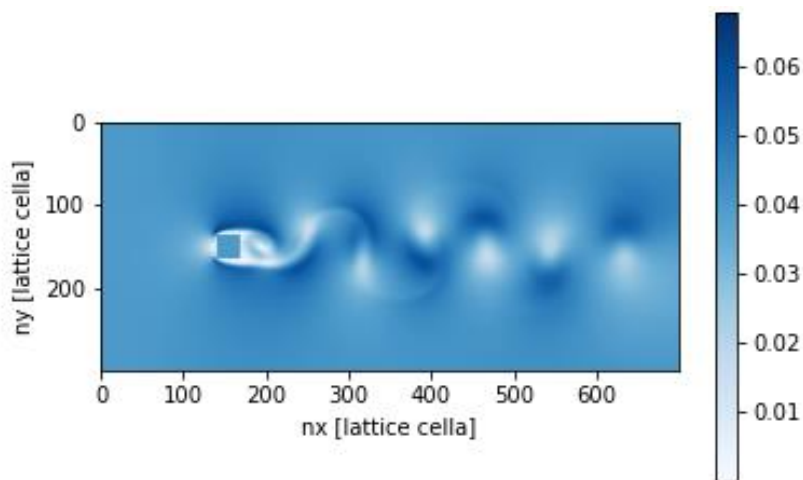
5. ábra Áramkép kialakulása 8000. iterációnál

Az 5. ábrán megfigyelhető, hogy a hasáb homlokfelületén torlópont alakul ki, ahol az áramlási sebesség nulla, a nyomás pedig maximális. A hasáb alsó, illetve felső oldal-lapján határréteg alakul ki, ami egy viszonylag vékony réteg, ami a fal mentén kezdődik, ahol a tapadási törvény értelmében az áramlási sebesség zérus és addig tart, amed-dig az áramlási sebesség meg nem egyezik a főáramlási sebességgel. A hasáb alsó és felső lapja fölött az áramvonalak meggömbülnek, domborúvá válnak így az Euler egyenletnek megfelelően a nyomás lecsökken, az áramlási sebesség pedig megnő. A hasáb hátoldalán az áramvonalak meggömbülnek, homorúvá válnak, az Euler egyenletnek megfelelően a nyomás megnövekszik, az áramlási sebesség pedig lecsökken.



6. ábra Áramkép kialakulása 28000. iteráció

A 6. ábrán megfigyelhető, hogy a hasáb alsó és felső oldalán két egymással ellentétes irányban forgó folyadékreszket tartalmazó nyíróréteg (örvényfelület) úszik le folyamatosan, amely két, egymással szemben „forgó” örvénybe göngyölődnek fel [12] a hasáb mögött.

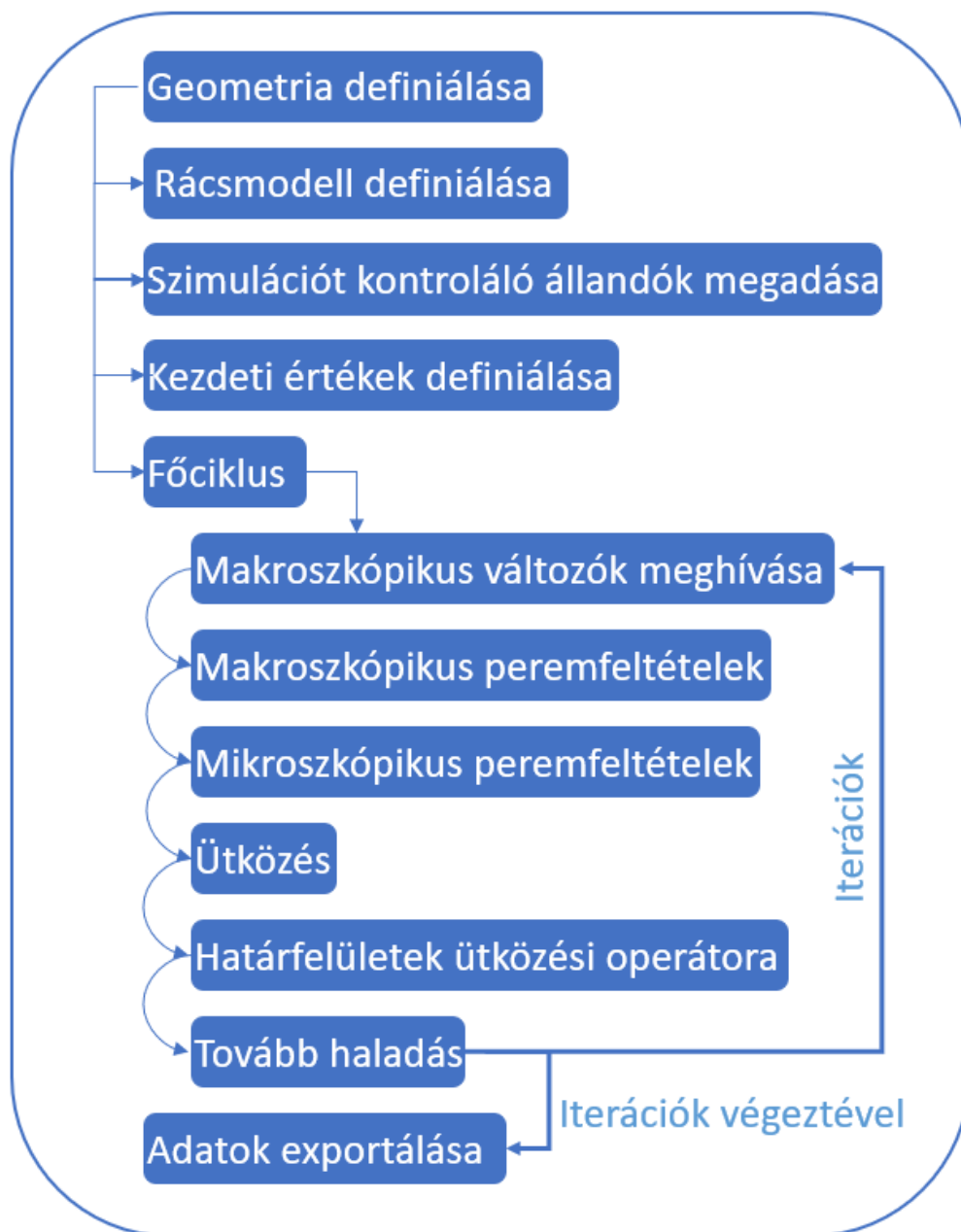


7. ábra Áramkép kialakulása 50000. iteráció

Jellemzően 50-es Reynolds-szám fölött instacioner áramlás figyelhető meg. Tehát a jelenleg vizsgált 300-as Reynold szám esetén az egyik örvény dominánssá válik és magafelé húzza a másik örvényt, ami keresztezi a domináns örvény nyíróréteg utánpótlását ezért a domináns örvény leválik. Ez a jelenség periodikusan ismétlődik, mely jól megfigyelhető a 7. ábrán [12].

3. A SZIMULÁCIÓ MENETE

Ebben a fejezetben a hasáb körüli áramlás szimulációjára alkalmas program egy lehetséges megvalósítása kerül bemutatásra, mely python nyelven íródott. A 8. ábrán a program elvi vázlata látható, melynek minden pontja részletes kifejtésre kerül az egyes alfejezetekben.



8. ábra A szimulációs program folyamatábrája

3.1. Geometria definiálása

A rács Boltzmann modellben egyenközű háló alkalmazására van lehetőség, tehát a helyi hálósűrítés nem megengedett a háló, illetve az időlépések szoros egymásba kapcsolódása miatt, ez a jelenség a 4.1. „Időlépés vizsgálata” című fejezetben kerül részletezésre. A modell során időlépésenként a populációk egyik rácspontból a másik rácspontba megadott mikroszkopikus sebességgel (v_i) érkeznek, ezért az esetlegesen ki-sebbre vett rácsoakat fizikailag nem megfelelően modellezné a megoldó.

Ezek alapján a helyes hálóméret megválasztása kulcsfontosságú, mivel a modell pontossága ezzel befolyásolható a legnagyobb mértékben. A modell tervezését érdemes a Reynolds-szám bevezetésével kezdeni. Definiálni kell egy, a természetben létező valós Reynolds-számot és egy modellezés során használt Reynolds-számot, ami csak a szimulációban fog létezni. Az áramlási hasonlóság fennáll mindaddig, ameddig a Reynolds-számok megegyeznek, illetve a valós és a modellezett tárgy geometriailag hasonlóak. Jelen esetben a modellezett és a valós tárgynak egyenlő oldalú hasábnak kell lennie. Tehát a valós Reynolds szám (Re_v) a következőképpen határozható meg:

$$Re_v [1] = \frac{u_v \cdot H_v}{\gamma_v} \quad 3.1$$

ahol u_v valós makroszkópikus áramlási sebesség [m/s], H_v valós hasáb magasság [m], γ_v valós kinematikai viszkozitás [m^2/s]. A modellezett Reynolds szám (Re_m) a következőképpen definiálható:

$$Re_m [1] = \frac{u_m \cdot H_m}{\gamma_m} \quad 3.2$$

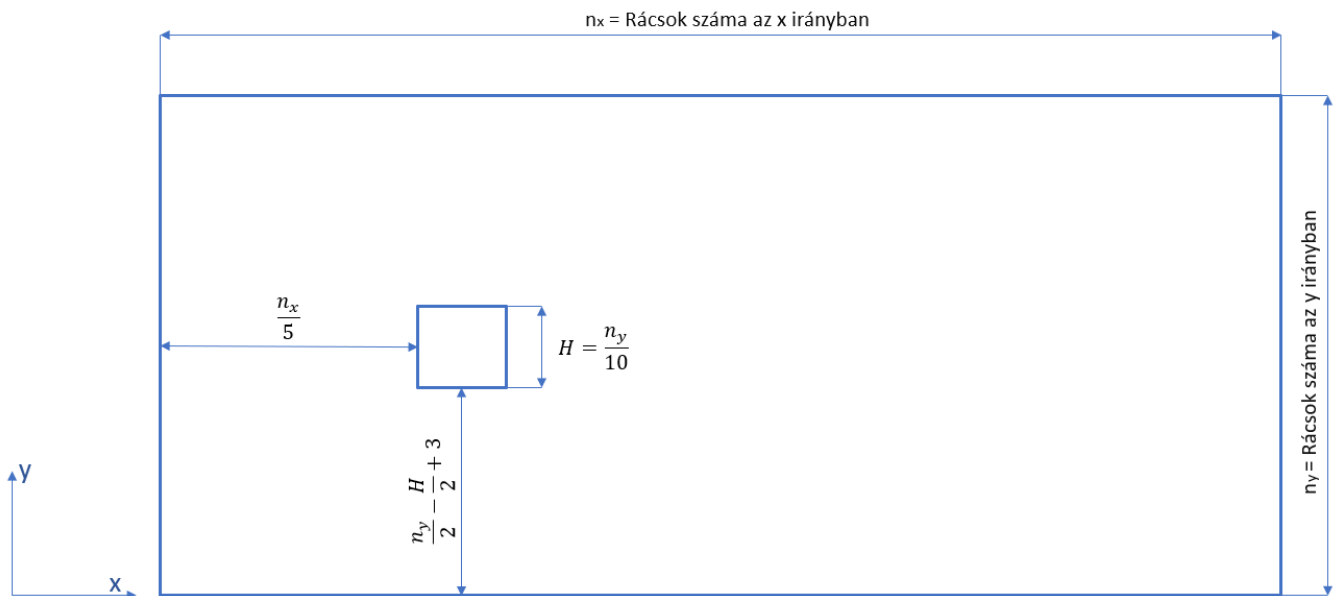
ahol u_m szimuláción belüli értelmezett (modellezett) makroszkópikus áramlási sebesség σ , $\sigma = (\Delta x / \Delta t)$, $\Delta x = 1$ [rács egység], $\Delta t = 1$ [időlépés], H_m a hasáb szimulációban értelmezett magassága [Δx], γ_{modell} a szimulációban értelmezett kinematikai viszkozitás [$\Delta x^2 / \Delta t$]. Tehát a cél az, hogy azonos Reynolds-számok mellett vizsgáljuk az áramlást, úgy, hogy a modell stabilitása szempontjából kedvező modellezési sebességet, jellemző méretet és viszkozitást válasszunk. A megfelelő választáshoz az alábbi megfontolásokat kell figyelembe venni:

- a) A modell makroszkópikus sebessége nem haladhatja meg a 0,1-et, az instabilitás elkerülése érdekében.
- b) A modellbeli viszkozitás a következőképpen definiálható:

$$\gamma_{modell} = \frac{1}{3} \cdot (\tau - 0,5) \quad 3.3$$

- c) A viszkozitás nem lehet sem negatív, sem nulla, tehát a relaxációs tényező τ [1] értékének meg kell haladnia a 0,5-öt.
- d) Ha relaxációs paraméter 0,5 körüli értéket vesz fel, akkor az instabilitást eredményez, mely könnyen belátható a képlet segítségével.
- e) A most használt modell alacsony Mach-szám tartományban érvényes

A stabilitás növelhető sűrűbb háló alkalmazásával, ami nagyobb jellemző méretet is jelent mivel programozási szempontból az áramlási tér nem más, mint egy $n_x \times n_y$ méretű mátrix, ahol n_x a rácsek száma x irányban az áramlási térben, míg n_y az y irányban.



9. ábra Áramlási tér

A 9. ábrán látható az alkalmazott geometria, a hasáb x irányú pozíciója azért helyezkedik el jóval közelebb az áramlási tér jobb oldalához, mert a szimuláció szempontjából releváns folyamatok a hasáb mögött zajlanak le. A hasáb y irányú pozíciója azért aszimmetrikus az áramlási tér x irányú szimmetria tengelyére, mert a módszer során érdemes kerülni a tengely szimmetriát stabilitási okokból kifolyólag. Az áramlási tér magassága (n_y) és a hasáb magassága közötti arány igen fontos szerepet játszik az áramlás kialakulásában, jelen szimuláció esetén 0,1-es „blockage ratio” került alkalmazásra, ami definíció szerint a hasáb magasságának és az áramlási tér magasságának a hányadosa. A(modellezett) makroszkópikus sebesség nagyságát célszerű a lehető legalacsonyabb értéken tartani mivel a Mach szám nagyságának alacsonyan tartása feltétele a stabilitásnak. Azonban a szimulációs sebesség csökkenésével a relaxációs tényező értéke egyre jobban megközelíti a 0,5-öt. Ezen megfontolások alapján a modellezett makroszkópikus érték nagyságát 0,04-nek választom, ezen döntés részletes kifejtése a 5.5 „Paramétertanulmány” című fejezetben található. A szimulációkat pedig az 1. táblázatban megadott közepes hálón futtatom, a hálófüggetlenségi vizsgálatot pedig, a közepes a durva és a sima háló összehasonlításával fogom elvégezni a 4.1. „Hálófüggetlenségi vizsgálat” című fejezetben. A kinematikai viszkozitás pedig adottá válik a Reynolds-szám a jellemző méret és a makroszkópikus sebesség ismeretében.

1. táblázat Hálók rács száma

	n_x [rács egység]	n_y [rács egység]	H [rács egység]	Rácsok száma [db]
Durva háló	560	240	24	134400
Közepes háló	840	360	36	302400
Sima háló	1260	540	54	680400

Programozás szempontjából érdemes most szétválasztani azokat a rácsoakat, amik részt vesznek az áramlásban, tehát folyadékként viselkednek a rácshoz tartozó populációk, illetve azokat, amik nem. A modellezés során a hasáb, illetve az áramlási tér alsó és felső határai „no slip wall” peremfeltétellel lesznek ellátva. Létre kell hozni egy $n_x \times n_y$ nagyságú mátrixot mely elemei az áramlási tér rácspontjai lesznek. Logikai operátor segítségével (Igaz, Hamis) az áramlásban részt vevő elemek értékét „Hamis”-ra kell állítani, míg a hasáb területén lévő rácsoakat, illetve az alsó és felső határokat egy rács vastagságban „Igaz”-ra kell állítani, ezen rácsoak képzik majd a határoló falakat. Definiálni kell egy függvényt, ami legenerálja ezt a mátrixot és meghívhatóvá teszi a további felhasználás érdekében.

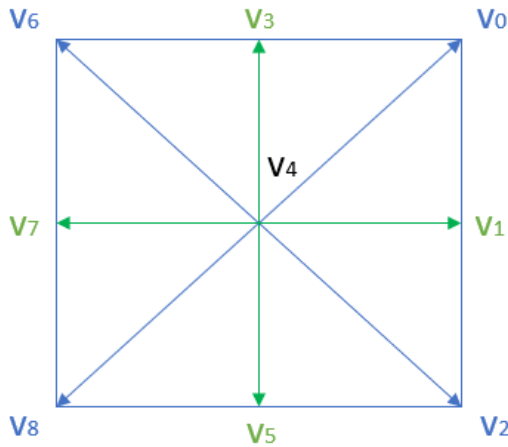
3.2. Rácsmodell kiválasztása, definiálása

Két dimenziós áramlási szimuláció esetén minimum D2Q9-es hálót kell alkalmazni, ahol a D2 a kétdimenziós kiterjedésre utal, míg a Q9 a kilenc különböző irányú rácspontokra. Kevesebb rácsponttal rendelkező hálók nem biztosítanak a makroszkopikus irányfüggetlenséget, míg több rácsponttal rendelkező hálók esetén a numerikus hiba nagysága csökken és nagyobb stabilitást lehetne elérni, azonban a számítási idő is jelentősen nőne. Ezért D2Q9 háló alkalmazása mellett döntöttem. A 10. ábrán a D2Q9 rácshoz tartozó rácspontok láthatóak, melyek mértékegysége a makroszkopikus sebességekhez hasonlóan $\Delta x / \Delta t$. A v_4 rácspont a nyugalomban lévő részecskéket szimbolizálja, nagysága: $v_4 = 0$. Az ortogonális irányú makroszkopikus rácspontok nagysága: $v_{1,3,5,7} = 1$. A diagonális rácspontok irányában közlekedő populációknak nagyobb utat kell megtenniük időlépésenként, ezért ezen rácspontok nagysága: $v_{0,2,6,8} = \sqrt{2}$.

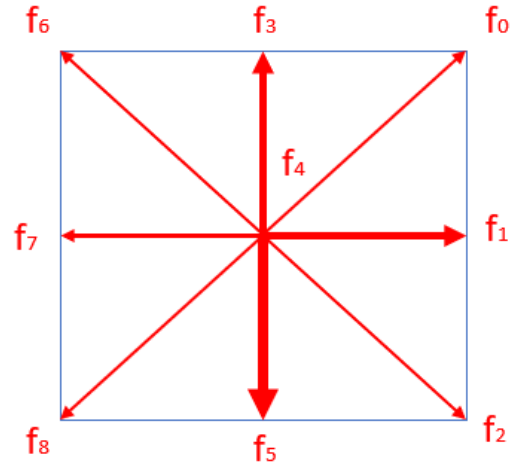
Az eltérő sebességek kiegyensúlyozása érdekében irányokhoz rendelt súlyozásokat kell bevezetni, melynek felhasználását a későbbi fejezetekben fogom bemutatni.

A súlyozások értékei a következők:

- A v_4 rácsponttal tartozó súly: $w_4 = 4/9$
- Az ortogonális irányú sebességekhez tartozó súlyok: $w_{1,3,5,7} = 1/9$
- A diagonális irányú sebességekhez tartozó súlyok: $w_{0,2,6,8} = 1/36$



10. ábra Rács sebességek



11. ábra Populációk

A 11. ábrán a populációk láthatóak az egyes irányokban, a nyilak vastagsága arányos a populáció pillanatnyi nagyságával. Az f_4 populáció a nyugalomban lévő részecskéket reprezentálja. Fontos megjegyezni, hogy minden egyes populációhoz tartozik egy nyugalmi populáció, melyek teljesen hasonlóan helyezkednek el a rácsokban. A szimuláció kulcsfontosságú elemei a populációk, melyeket célszerű egy $9 \times n_x \times n_y$ méretű mátrixként kezelni, ugyanis minden egyes rácsponthoz a térben kilenc darab populáció tartozik. Hasonlóan létre kell hozni egy mátrixot az egyensúlyi populációk számára is. Az áramlást a populációk folyamatos változása írja le, ezért érdemes mátrixokban gondolkodva megérteni és programozni a rács Boltzmann modellt.

3.3. Makroszkópikus változók meghatározása

a) Sűrűség:

A modellben a sűrűség egy hely és időfüggő változó, minden rács saját sűrűséggel rendelkezik tehát a sűrűséget is érdemes egy $n_x \times n_y$ méretű mátrixként kezelni. Értéke az adott rácsban található populációk összegeként határozható meg, ami jól szemlélteti a populációk és az általuk reprezentált részecskék kapcsolatát.

$$\rho(x, t) = \sum_{i=0}^8 f_i(x, t) \quad 3.4$$

ahol $\rho(x, t)$ a sűrűség

b) Nyomás:

Ideális gázok esetén a nyomás arányos a sűrűséggel. Izotermál esetben az arányossági tényező egyenlő a gázban mért hangsebesség négyzetével [10]. A sűrűséghez hasonlóan minden rács egy nyomásértékkel rendelkezik, tehát célszerű ezt is mátrixként kezelni.

$$p(x, t) = c_s^2 \cdot \rho(x, t) \quad 3.5$$

ahol p a nyomás az egyes rácsookban, c_s^2 a modellbéli hangsebesség négyzete, ami D2Q9 esetén $1/3 \sigma$.

c) Makroszkopikus sebesség:

A félreértések elkerülése végett érdemes tisztázni, hogy a 3.1. Geometria definiálása című fejezetben meghatározott makroszkopikus sebesség a befűvés sebessége, az áramlási tér belsejében ettől eltérő makroszkopikus sebességek jönnek létre a hasáb és az alsó, illetve a felső határoló fal miatt ezen sebességek rácsonkénti meghatározása a cél jelenleg.

Minden rács rendelkezik egy x , illetve egy y irányú makroszkopikus sebességkomponenssel ezért a makroszkopikus sebesség mátrixa egy $2 \times n_x \times n_y$ méretű mátrix.

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \cdot \sum_{i=0}^8 v_i \cdot f_i(x, t) \quad 3.6$$

3.4. Kezdeti értékek definiálása

A most következő kezdeti értékekkel, fog elindulni a szimuláció, ezen értékek egyszer kerülnek felhasználásra, mégpedig úgy, hogy ezek segítségével definiálhatóak a populációk a főciklus előtt. Minél pontosabb kezdeti értékek kerülnek meghatározásra ebben a pontban a modellben, annál gyorsabban fog kifejlődni az áramlás.

Elsőként célszerű meghatározni a makroszkopikus sebességeket az egyes rácspontokban. A megfelelő áramlás kifejlődésének felgyorsítása érdekében a makroszkopikus sebesség mátrixban Poiseuille sebességprofil alakítok ki [13]:

$$u_x(y) = \frac{\Delta p}{4 \cdot \gamma \cdot L_x} \cdot y \cdot (L_y - y) \quad 3.7$$

ahol y a futó paraméter $0 \leq y < n_y$ (a python nullától számol) [-], $u_x(y)$ a makroszkopikus sebességmátrix x irányú komponenseinek értéke y irányban rácsonként változva, $L_y = n_y - 1$ (a python nullától számol) [Δx], $L_x = n_x - 1$ (a python nullától számol) [Δx], Δp hajóerő a következőképpen határozható meg [14]:

$$\Delta p = \frac{16 \cdot \gamma \cdot \rho \cdot L_x \cdot u_m}{L_y^2} \left[\frac{\text{rács egység}^3}{\text{időlépés}^2} \right] \quad 3.8$$

Tehát a makroszkopikus sebesség x irányú komponense y paraméter függvényében a következő:

$$u_x(y) = \frac{4 \cdot u_m}{L_y^2} \cdot y \cdot (L_y - y) \quad 3.9$$

Az így meghatározott sebesség komponens „sort” a makroszkopikus sebességmátrix minden oszlopába fel kell vinni annak érdekében, hogy az egész áramlástanban jelen legyen a kifejlett profil. A mátrix y irányú komponenseinek az értékét minden rácspan nullára kell állítani.

A következő lépés a sűrűség definiálása az egyes rácspontokban. Ilyenkor a legáltalánosabb eljárás az, hogy kezdeti értéknek egyet választunk, ez azt jelenti, hogy létre kell hozni egy $n_x \times n_y$ méretű mátrixot melynek minden eleme egy. Ez a mátrix a sűrűségmátrix.

A makroszkopikus kezdeti értékek az egyensúlyi eloszlás függvény, vagy más néven egyensúlyi populációk meghatározása végett szükségesek. Az egyensúlyi eloszlás függvény, ami egy $9 \times n_x \times n_y$ méretű mátrix, csak a makroszkopikus változóktól függ, tehát a mikroszkopikus változóktól, azaz a populációktól nem. Az egyensúlyi populáció a következőképpen számítható:

$$f_i^{eq}(i, \rho, u) = \rho \cdot w_i \cdot \left(1 + \frac{v_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{1}{2 \cdot c_s^4} \cdot (v_i \cdot u)^2 - \frac{1}{2 \cdot c_s^2} \cdot u^2 \right) \quad 3.10$$

A kezdeti érték megadásának célja az, hogy ezek segítségével a sűrűségfüggvény meghatározhatóvá válik az egész áramlástanban a főiteráció előtt.

A sűrűségfüggvény inicializálására több séma létezik, a következőkben a legegyszerűbb megoldás kerül bemutatásra az úgynevezett egyensúlyi séma:

$$f_i = f_i^{eq}(i, \rho, u) \quad 3.11$$

Tehát a populációkat egyenlővé tesszük az egyensúlyi populációval, a főciklusba való beérkezés előtt. Ezt a megoldást alapvetően lamináris időfüggetlen áramlások esetén szokás használni, azonban az általam vizsgált Reynolds szám tartományban nem fog jelentős hibát okozni. Magasabb Reynolds számok esetén érdemes a nem egyensúlyi sémát alkalmazni.

3.5. Főciklus

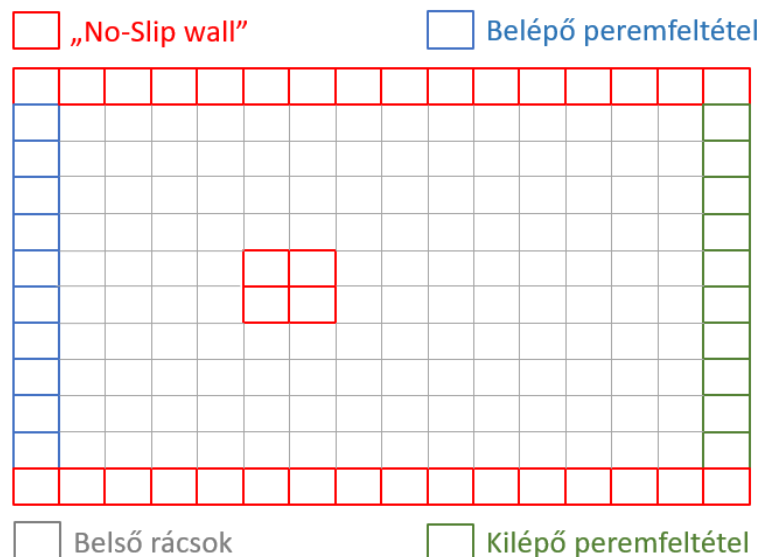
A tényleges szimuláció ebben a ciklusban zajlik, tapasztalatom alapján a 3.1 Geometria definiálása című fejezetben meghatározott hálózattal, azaz rácsszámmal az áramlás kifejlődéséhez minimum 300000 iteráció, azaz időlépés szükséges. Azonban ezzel az iterációszámmal még nem lehet vizsgálni a folyamatot, ezért 350000 időlépéssel futtatom le a szimulációt, így már kellően nagy intervallum áll rendelkezésre az örvényleválás frekvenciájának meghatározásához.

3.5.1. MAKROSZKÓPIKUS VÁLTOZÓK MEGHÍVÁSA

Ebben a pontban a sűrűség, illetve a makroszkópikus sebesség meghatározása a cél az egész áramlási tér összes rácsára a 3.3 „Makroszkópikus változók meghatározása” című fejezetben taglaltaknak megfelelően. Ezen mátrixok meghatározásához elegendő a populációk ismerete az egyes rácsokban, amik előzőleg meghatározásra kerültek a 3.4. „Kezdeti értékek definiálása” című pontban. Elsőre értermetlennek tűnhet ez a folyamat, hiszen a kezdeti értékek segítségével meghatározott populációkból ugyan azokat a kezdeti értékeket kapjuk vissza. Ez a nulladik iterációnál valóban így is van, azonban minden iteráció végén változnak a populációk értékei, tehát a nulladik iteráció végén meghatározott populációkból fogja a megoldó meghatározni az első iteráció makroszkópikus változóit, és ez így folytatódik minden iterációnál.

3.5.2. BELÉPŐ ÉS KILÉPŐ PEREMFELTÉTELEK

A 12. ábrán láthatóak a használni kívánt peremfeltételek, melyek közül a belépő, illetve a kilépő peremekkel fogok foglalkozni ebben a fejezetben. A „no-slip wall” feltétel a 3.5.3 „Határfelületek ütközési operátora” című pontban kerül bemutatásra. A peremfeltételeknek két fő célja van: az egyik, hogy az áramlási tér végein lévő ismeretlen populációkat meghatározza a másik pedig, hogy az áramlási tér „nagyobb” tűnjön”, ezáltal jelentős számítási kapacitás spórolható. A következőkben bemutatásra kerülnek Zou és He által kifejlesztett belépő és kilépő peremfeltételek [5].



12. ábra Használt peremfeltételek

3.5.2.1. Makroszkópikus változók módosítása a peremeken

„Belépő peremfeltétel”

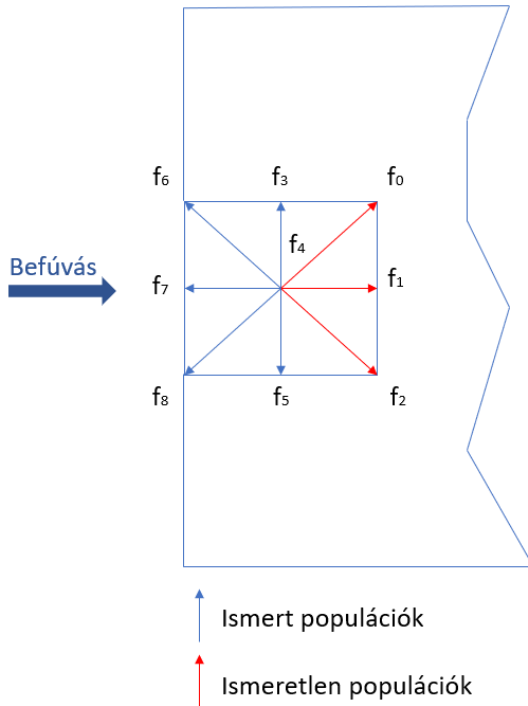
A cél az, hogy a hasábot egy kifejtett Poisseuille profil érje el folyamatosan a szimuláció során ezt meg lehetne oldani úgy, hogy elegendő nagyságú áramlási teret biztosítunk a profil kialakulására és gondoskodunk az egyenletes befúvásról a peremen, azonban ez jelentősen megnövelné a számítási kapacitást.

E helyett a 3.4. „Kezdeti értékek definiálása” című fejezetben bemutatottak alapján kell meghatározni a makroszkópikus sebesség profilt egy rács vastagságban az első és az utolsó rács kihagyásával az ábra alapján. Ezekre a rácsokra ugyanis a „No-Slip wall” peremfeltétel érvényes.

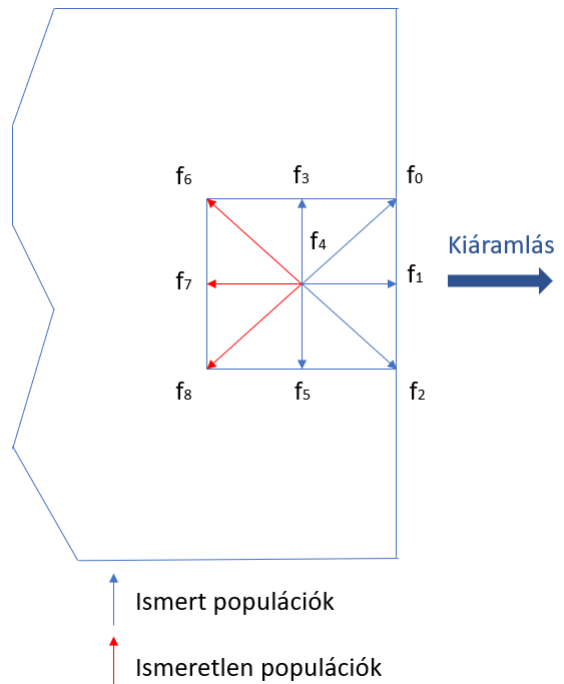
A sűrűség mátrix kérdéses elemei a sebesség és az ismert populációk segítségével meghatározhatóak a következőképpen:

$$\rho = \frac{1}{u} \cdot (f_4 + f_3 + f_5 + 2 \cdot (f_7 + f_6 + f_8)). \quad 3.12$$

A fenti egyenlet egy átrendezett változata a 3.6 egyenletnek azzal a különbséggel, hogy az ismeretlen „beáramló populációkat” a „kiáramló populációkkal” helyettesítettük a 13. ábrának megfelelően.



13. ábra Belépő - populációk



14. ábra Kilépő - populációk

„Kilépő peremfeltétel”

Az áramlási tér jobb szélén konstans nyomás kialakítása a cél, a 3.5 egyenlet alapján a nyomás a modellbéli hangsebesség és a sűrűség függvénye. Jelen esetben a hangsebesség konstans, tehát a háló jobb szélén lévő rácson az első és az utolsó rács kivételével állandó sűrűséget kialakítva állandó nyomást határozunk meg a peremen. A perem mentén a sűrűség mátrix elemeinek értékét az első és az utolsó kivételével egyre állítottam, a sebesség mátrix ezen elemeinek y irányú komponenseit nullára állítottam.

A sebesség mátrix x irányú komponensei a perem mentén a fent említett rácson kihagyásával a 3.12 egyenlethez hasonlóan határozható meg, az ismeretlen „beáramló” populációkat a „kiáramló” populációkkal helyettesítve a 14. ábra alapján.

$$u = \frac{1}{\rho} \cdot (f_4 + f_3 + f_5 + 2 \cdot (f_1 + f_0 + f_2)) \quad 3.13$$

3.5.2.2. Mikroszkopikus feltételek a peremeken

„Belépő peremfeltétel”

Az ismeretlen populációk a bal oldali peremen az első és az utolsó rács kihagyásával a következőképpen határozhatóak meg:

$$f_1 = f_7 - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot u_x \quad 3.14$$

$$f_0 = f_8 + \frac{1}{2} \cdot (f_5 - f_3) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_y + \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot u_x \quad 3.15$$

$$f_2 = f_6 + \frac{1}{2} \cdot (f_3 - f_5) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_y + \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot u_x \quad 3.16$$

ahol u_x a sebesség mátrix x irányú komponensei, u_y a sebesség mátrix y irányú komponensei.

„Kilépő peremfeltétel”

Az ismeretlen populációkat a jobb oldali peremen az első és az utolsó rács kihagyásával az előző ponthoz hasonlóan határozhatóak meg:

$$f_7 = f_1 - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot u_x \quad 3.17$$

$$f_8 = f_0 + \frac{1}{2} \cdot (f_3 - f_5) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_y + \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot u_x \quad 3.18$$

$$f_6 = f_2 + \frac{1}{2} \cdot (f_5 - f_3) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_y + \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot u_x \quad 3.19$$

3.5.3. ÜTKÖZÉS

A 2.1.3 „Rács-Boltzmann módszer” című fejezetben bemutatásra került a BGK ütközési operátor, ami az egyik legnépszerűbb megoldások egyike. Azonban stabilitása és pontossága megkérdőjelezhető ezért a TRT („two-relaxation-time”) ütközési operátort használtam fel a szimuláció során. A TRT futási ideje, számítási kapacitás igénye hasonló a BGK-hoz azonban a szimmetrikus, illetve aszimmetrikus tagok hatására jobb közelítés érhető el vele, illetve növelhető a szimuláció stabilitása [15].

A TRT a következőképpen implementálható:

$$f_i^{out} - f_i = \Omega_i = -\omega^+ \cdot (f_i^+ - f_i^{eq+}) - \omega^- \cdot (f_i^- - f_i^{eq-}) \quad 3.20$$

ahol:

$$f_i^{out}$$

a populációk az ütközés után,

$$f_i^+ = \frac{f_i + f_{8-i}}{2} \quad 3.21$$

a szimmetrikus populáció,

$$f_i^- = \frac{f_i - f_{8-i}}{2} \quad 3.22$$

az aszimmetrikus populáció,

$$f_i^{eq+} = \frac{f_i^{eq} + f_{8-i}^{eq}}{2} \quad 3.23$$

a szimmetrikus egyensúlyi populáció,

$$f_i^{eq-} = \frac{f_i^{eq} - f_{8-i}^{eq}}{2} \quad 3.24$$

az aszimmetrikus egyensúlyi populáció,

$$\omega^- = \frac{1}{\frac{\Lambda}{\frac{1}{\omega^+} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}} \quad 3.25$$

az aszimmetrikus relaxációs frekvencia,

$$\Lambda = \frac{1}{4}$$

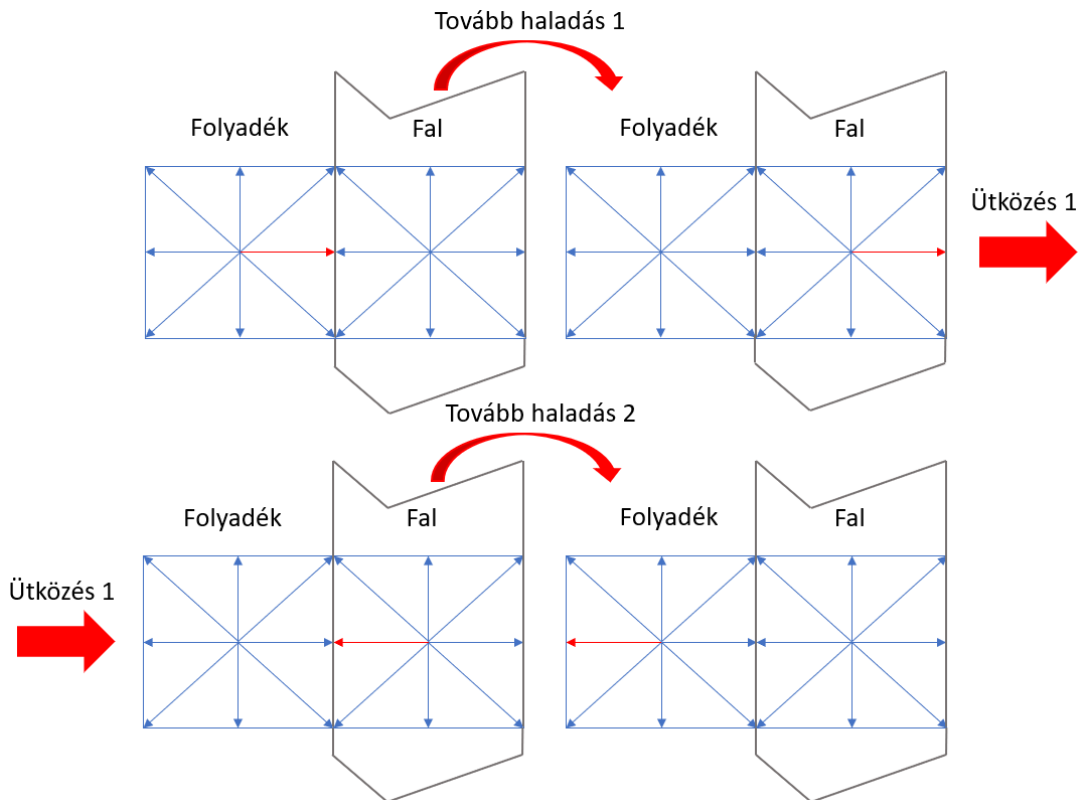
pedig a szakirodalomban „magic” paraméter néven emlegetett konstans, ennél az értéknél a legstabilabb a szimuláció és egyben a legpontosabb is [16].

Az ütközési operátor az áramlási tér minden populációjára érvényes, beleértve a peremeken lévő rácsokat is. A folyadék dinamikáját az egyensúlyi állapotba való relaxációként modellezzük. Látható, hogy fizikailag értelmezhető ütközés és ebből fakadó visszaverődés nem történik. A rácsoiban lévő populációk iránya megmarad azonban nagyságuk változik a relaxációs frekvenciák, illetve az egyensúlyi populációk függvényében.

3.5.4. HATÁRFELÜLETEK ÜTKÖZÉSI OPERÁTORA

A hasáb oldalain, illetve az áramlási tér alsó és felső peremén „No-slip wall” peremfeltétel került kialakításra a fal tulajdonságainak megfelelő modellezése érdekében. A fent említett peremfeltétel fizikailag úgy értelmezhető, hogy a tapadás törvényének megfelelően a fal közvetlen közelében lévő folyadékréteg sebessége megegyezik a fal sebességével, ami jelen esetben zérus. A rács Boltzmann modell során a fal közvetlen közelében lévő folyadék vastagsága egy rács egység nagyságú. A határréteg ezzel a megoldással kialakítható.

„No-slip wall” peremfeltétel kialakítására többféle megoldás létezik, a megoldót az egyik leggyakrabban használt és egyben legkönnyebben implementálható megoldással a „Full-way Bounce-Back” modellel láttam el.



15. ábra Fullway Bounce Back - folyamatábra

A 15. ábra a módszer folyamatát mutatja be, a 3.5.1. Makroszkópikus változók meghívása című fejezetben taglaltakhoz hasonlóan érdemes a nulladik időlépés helyett az első időlépés segítségével vizsgálni a folyamatot. A nulladik időlépés során módosult az ábrán pirossal jelölt populáció „tovább ugrott” a mikroszkópikus sebességének megfelelő irányban lévő következő rácspontba (a 15. ábrán: „Tovább haladás 1”). A szomszédos rács a 3.1. Geometria definiálása című pontban falként lett definiálva. A módszer ettől függetlenül engedi a populációt az adott rácspontba lépni. Az első időlépésben a 3.5.3 „Ütközés” című pontban a TRT ütközési operátornak megfelelően a populáció értéke megváltozik, azonban iránya megmarad. Ezt követően a határfelületek ütközési operátora írja felül az f_i^{out} mátrix azon elemeit, melyek előzőleg falként lettek definiálva. A fent említett ütközési operátor nem változtatja meg a populációk értékét, hanem az egymással szemközt lévő populációkat felcseréli (a 15. ábrán „Ütközés 1”). Ez a folyamat a következőképpen írható le:

$$f_i^{out} = f_{8-i} \quad 3.26$$

A rácsban lévő populációk számozása szabadon választható. A TRT ütközési operátor, illetve a „Full-way Bounce Back” alkalmazásánál érdemes az általam választott számozást használni, aminek hatalmas előnye, hogy az f_i populációval szemközt lévő populáció az f_{8-i} populáció, ami jelentősen megkönnyíti a programozást.

Az ütközés végeztével a falba belépő populáció az eredeti irányával ellenkező irányba mutat. Majd a következő időlépésben a 3.5.5. „Tovább haladás” című fejezetben leírtaknak megfelelően kilép a falból és a következő rácspontba érkezik (15. ábra „Tovább haladás 2”).

3.5.5. TOVÁBB HALADÁS

A populációk a makroszkópikus sebességeiknek megfelelő irányban időlépésenként a szomszédos rácspontokba áramlanak a következőképpen:

$$f_i(x + v_i \cdot \Delta t, t + \Delta t) = f_i^{out} \quad 3.27$$

Ez a szabály a populáció mátrix összes elemére érvényes, azonban a peremeken lévő rácscok áramlási térből kifelé mutató populációinak tovább haladását nem definiálja az egyenlet. Ezen probléma megoldható periodikus peremfeltétel alkalmazásával, ami az áramlási tér összes határán érvényes. A peremfeltétel jól beágyazható a fenti egyenletbe feltételek segítségével úgy, hogy amennyiben az adott populáció eléri a tér határát akkor a populáció a szemközti határon lévő rácspan folytatja útját. Ezen populációk átírásra kerülnek a következő iterációnak az elején az adott határon használt peremfeltétel által.

3.5.6. ÁRAMLÁSI KÉP VIZSGÁLATA

Feltételekkel megadható, hogy adott iteráció számonként a megoldó mentse ki egy képet, amin a makroszkópikus sebességek ábrázolva vannak rácsonként az áramlási térben, ezáltal könnyen észrevehetővé válnak a nagyobb modellezési, illetve figyelematlenségi hibák. A kialakult áramkép a 2.2 „Hasáb körüli áramlás” című fejezetben meghatározottak alapján ellenőrizhetővé válik.

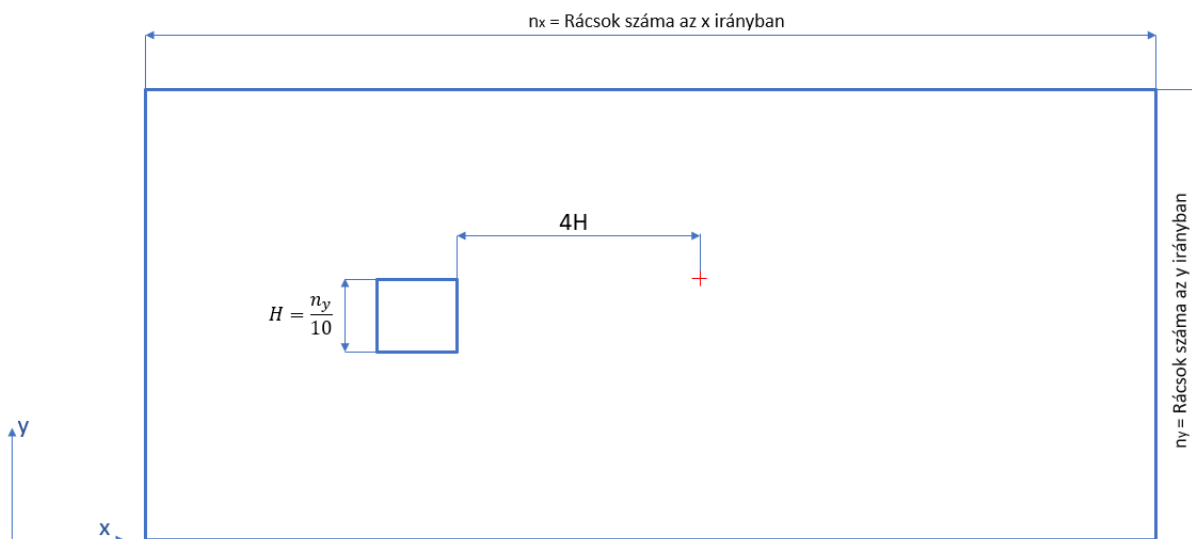
Ezt a folyamatot érdemes az iteráció végére helyezni, így nem kell külön memóriát elkülöníteni az adatok tárolására ugyanis a kép mentése után a következő iterációban a makroszkópikus sebességek átírásra kerülnek.

3.6. Adatok exportálása

A szimuláció célja a nyomás és az abszolút sebesség regisztrálása egy előre meghatározott monitor pontban (rácspan) időlépésenként. Az abszolút sebesség a következőképpen határozható meg:

$$u_{abs} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad 3.28$$

A monitor pont a hasáb felső élével egyvonalban, a hasáb hátlapjától négy H távolságban került elhelyezésre a 16. ábrán látható módon.



16. ábra Monitor pont

Az adatokat célszerű egy a ciklus előtt definiált listába regisztrálni időlépésenként, majd a szimuláció végeztével .xlsx formátumban exportálni.

4. A SZIMULÁCIÓ VALIDÁLÁSA

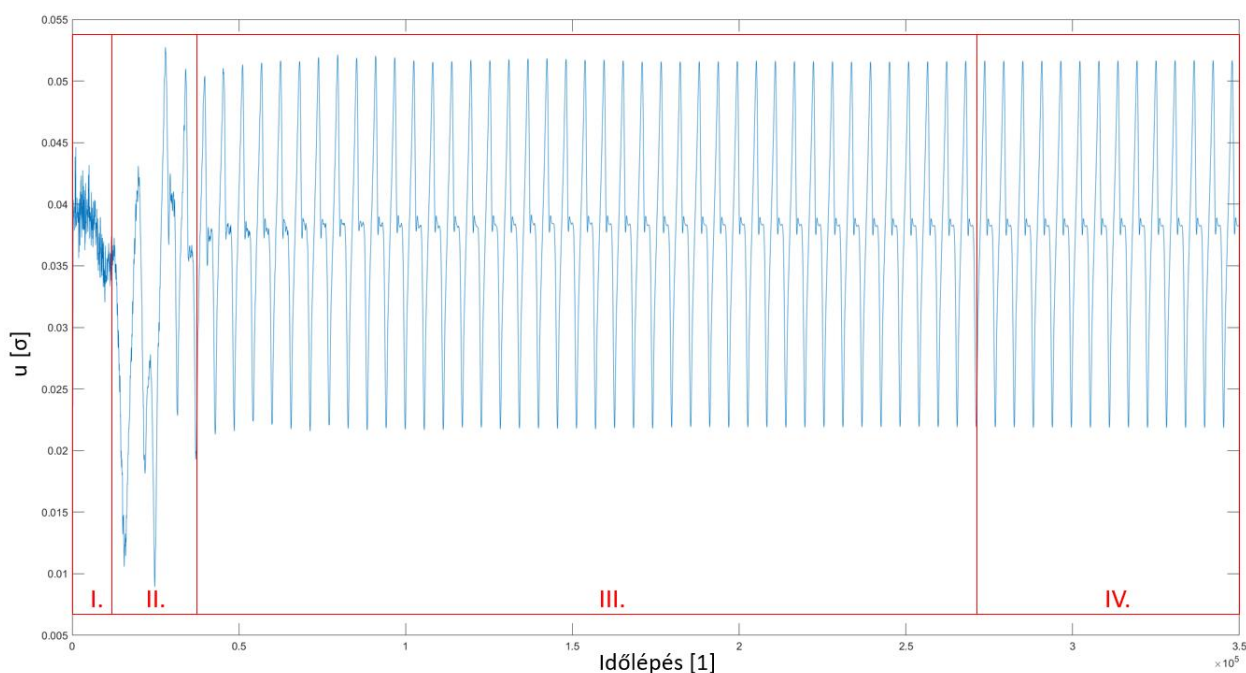
A hasáb körüli áramlás igen jelentős irodalommal rendelkezik, nem véletlenül ugyanis komplex áramlástani folyamatok megfigyelésére ad lehetőséget, bonyolult geometria nélkül. Számos kísérleti, illetve szimulációs kutatás eredménye áll rendelkezésre mely segítségével ellenőrizhetővé válik az általam írt rács Boltzmann módszeren alapuló áramlástani megoldó program. A validálást a Strouhal szám segítségével fogom elvégezni mely a frekvencia dimenziótlanítására szolgáló dimenziótlan szám.

$$St = \frac{f_m \cdot H_m}{u_m} \quad 4.1$$

ahol f_m az örvényleválás frekvenciája $[1/\Delta t]$.

4.1. Időjel

A 3.6. „Adatok exportálása” című pontban meghatározottak alapján a monitorpontban regisztrált makroszkopikus sebességek időlépésenként rendelkezésre állnak. A sebességeket ábrázolva az időlépések függvényében megkapjuk az időjelet. Célszerű az ábrázolást Matlab R2020a segítségével létrehozni ugyanis, igen könnyen kezelhető és sokoldalú megjelenítést biztosít. Illetve a következő pontban bemutatásra kerülő spektrumot a Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék által biztosított Matlab-ban írt program segítségével, fogom létrehozni (I. Melléklet). Az időjel segítségével jól láthatóvá válik az áramlás kialakulása, illetve a már kifejlődött állapotban megfigyelhetővé válik a periodikus örvényleválás. A 17. ábrán a kétszázas Reynolds számhoz tartozó időjel látható.

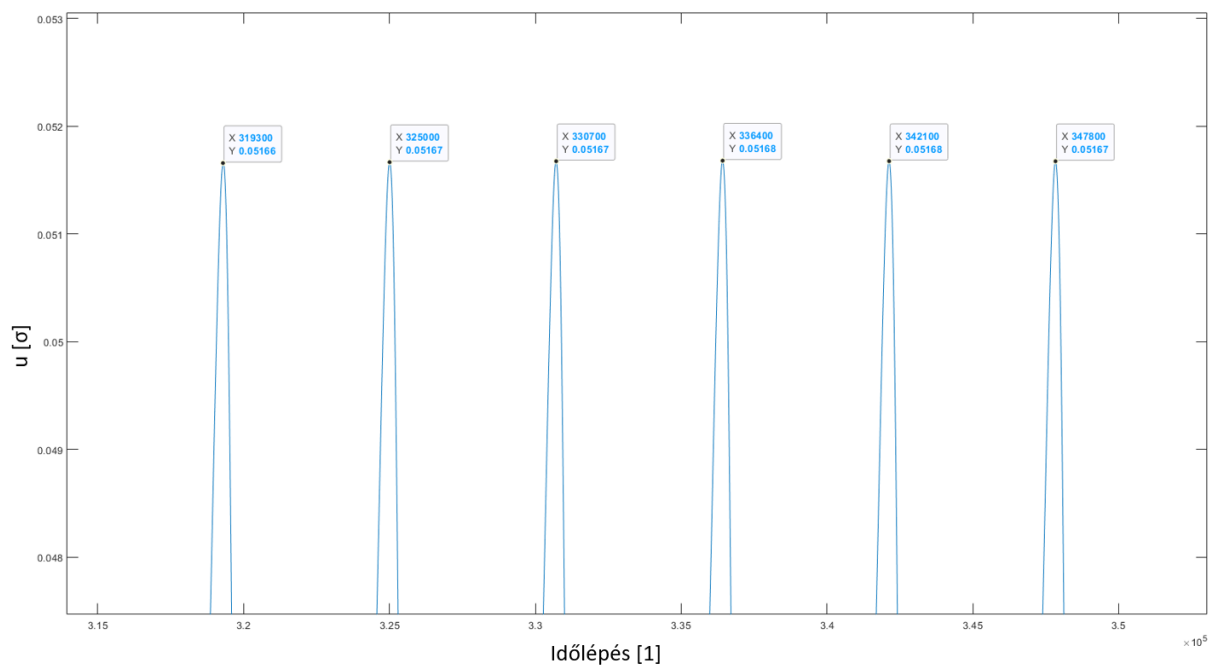


17. ábra Időjel Re=200

Az áramlás kialakulása és ebből fakadóan az időjel is négy intervallumra osztható. Az első intervallumban a lökéshullám kialakulása, illetve lecsillapodása figyelhető meg ami a közepes hálónál megközelítőleg 15000 időlépést vesz igénybe. A második tartományban kialakulnak a határrétegek majd megkezdődik a határréteg leválása és ebből kifolyólag az örvények rendszertelen „leúszása” a hasáb oldalfelületeiről. A harmadik intervallum a 40000. időlépéstől a 270000. időlépésig tart. Ez a leghosszabb intervallum, ahol az örvények leválása folyamatosnak tekinthető, egyre jobban megközelítik a stabil kialakult áramlási képet azonban még tapasztalható némi oszcilláció melynek mértéke folyamatosan csökken. A negyedik és egyben utolsó szakaszban az örvények leválása teljesen periodikusnak tekinthető. Az iterációt érdemes addig folytatni ameddig releváns információt biztosít, tehát nincs értelme jelentős számítási kapacitást és időt szentelni olyan adatok kinyerésére melyek ismétlődnek. Ezért a használt rácsszámnál 350000 időlépésig folytatom a szimulációt, ahol eltérések a makroszkópikus sebességek ötödik tizedesjegyénél tapasztalhatók, amik numerikus hibának tekinthetők. Az időjelről elviekben leolvasható a periódus idő, ami segítségével az örvényleválás frekvenciája is meghatározható azonban ez jelentős pontatlansággal járna, ezért érdemes más módszerhez fordulni.

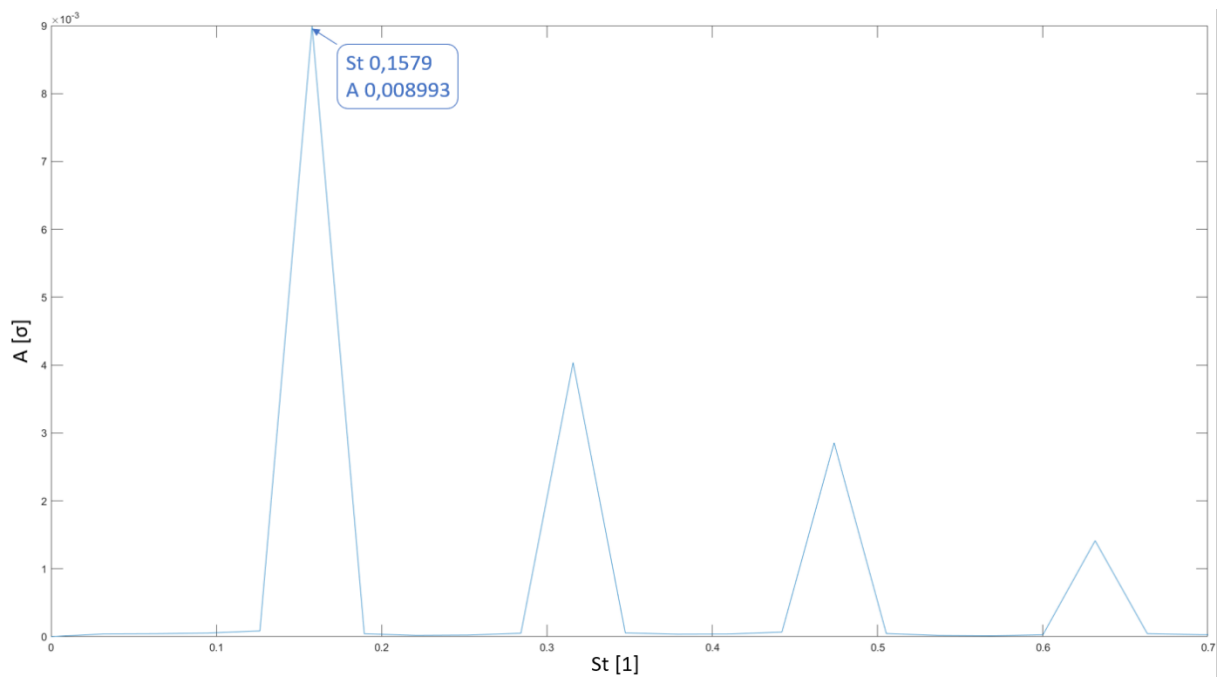
4.2. Spektrum

Az időjelet gyors Fourier transzformálva meghatározható a spektrum. Ami „a függőleges tengely az együttható nagyságának, a vízszintes tengely a kiszámított körfrekvencia (frekvencia) értékének ábrázolását teszi lehetővé, így egy frekvencia-amplitúdó összefüggés szemléltetésére nyílik mód” [17]. A tanszék által biztosított program segítségével meghatározható a spektrum Strouhal szám amplitúdó formában. Bemenetként biztosítani kell a monitorpontban mért makroszkópikus sebességeket időlépésenként, a modellezett makroszkópikus sebességet, a jellemző méretet, ami jelen esetben jellemző rácsszám, illetve meg kell adni egy periodikus időlépés tartományt. A bemenő adatok a szimulációban bevezetett és alkalmazott mértékegységekkel rendelkeznek, ami nem jelent problémát mert a Fourier transzformációt végző program nem rendelkezik olyan belső adattal, aminek mértékegysége lenne ezért kimenő adatként az amplitúdó dimenziója is a szimulációban bevezetett mértékegységeknek megfelelően [1/időlépés]. A Strouhal szám értelemszerűen dimenziótlan marad. A pontos eredmények érdekében megfontoltan olyan tartományt kell választani, ahol az áramlás már biztosan periodikus ezért jellemzően az utolsó 6 „csúcs” között végeztem el a transzformációt. A 18. ábrán a kétszázas Reynolds számhoz tartozó időjel utolsó hat periódusa látható.



18. ábra Időjel utolsó öt periódusa Re=200

A tartomány megválasztása után indítható a gyors Fourier transzformáció. Az ebből kapott spektrumon láthatóvá válik az alapfrekvencia, ami jelen esetben örvényleválás frekvenciáját jellemző Strouhal szám és annak felharmonikusai. A felharmonikusok olyan szinuszos jelek melyek az alapfrekvencia egész számú többszörösei. A 19. ábrán a kétszázas Reynolds számnál mért időjel spektruma látható.



19. ábra Spektrum Re=200

4.3. Hálófügggetlenségi vizsgálat

A hálófügggetlenségi vizsgálat elengedhetetlen része a szimulációs program validálásának. A vizsgálat segítségével következtethetünk a térbeli diszkretizálás okozta hiba nagyságára, illetve megbizonyosodhatunk arról, hogy a tér megfelelően lett felbontva. A rács Boltzmann modell során azonos nagyságú rácsok használhatóak, így egyéb módszerekkel ellentétben nem kell külön vizsgálni a helyi hálósűrítések aránytartását. A hálófügggetlenségi vizsgálatot a 3.1. „Geometria definiálása” című fejezetben bemutatott durva, közepes és a sima hálón végzem el 200-as Reynolds számnál. A durva háló rácsszámát minden irányban 1,5-szörösére növelve a közepes hálót kapjuk eredményül, a sima háló a közepes hálóból hasonlóképpen határozható meg. Az előző pontokban tárgyalt módon létrehozom az időjelet melynek a kiválasztott tartományából (utolsó hat csúcs) létrehozom a spektrumot. A spektrumról leolvasható a leválási frekvenciához tartozó Strouhal szám. Az egyes hálókhoz tartozó Strouhal számok a 2. táblázatban találhatóak, a szimulációs idővel együtt:

2. táblázat Hálófügggetlenségi vizsgálat

	Durva háló	Közepes háló	Sima háló
Strouhal szám [1]	0,1633	0,1579	0,1513
Iterációk száma [db]	200000	300000	450000
Szimulációs idő [óra]	5	17	63

Az így kapott Strouhal számokat a Richardson extrapoláció segítségével hasonlítom össze, mely egy kiváló módszer a diszkretizációs hiba becslésére ε_h ami [6] alapján a következőképpen határozható meg:

$$\varepsilon_h = \frac{\Phi_h - \Phi_{2h}}{r^p - 1} = \frac{0,1513 - 0,1579}{1,5^{-0,4949} - 1} = 0,036 [1] \quad 4.2$$

ahol:

$$p = \log_r \left(\frac{\Phi_{2h} - \Phi_{4h}}{\Phi_h - \Phi_{2h}} \right) = \log_{1,5} \left(\frac{0,1579 - 0,1633}{0,1513 - 0,1579} \right) = -0,4949 [1] \quad 4.3$$

a konvergencia mért rendje,

$$r = 1,5$$

a sűrítési arány,

$$\phi_h = 0,1513$$

a finom hálón mért leválási frekvenciához tartozó Strouhal szám,

$$\Phi_{2h} = 0,1579$$

a közepes hálón mért leválási frekvenciához tartozó Strouhal szám,

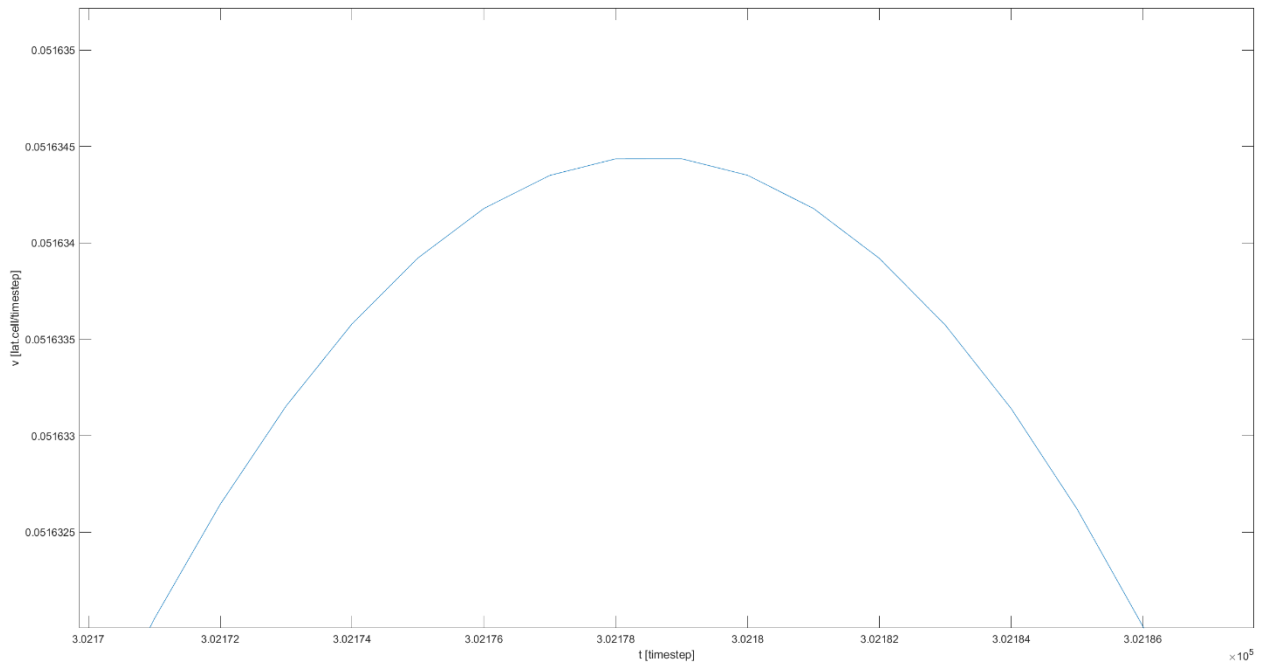
$$\phi_{4h} = 0,1633$$

a durva hálón mért leválási frekvenciához tartozó Strouhal szám.

A Richardson extrapoláció alapján a diszkretizációs hiba megközelítőleg 3,6% ami nem minősül jelentős eltérésnek, ezért megfelelőnek tartom. A vizsgálat során kedvezőbb lenne a rácsszámok nagyságát minden irányban kétszeresre növelni, ami összesen négyszeres rácsszámot jelentene azonban ez jelentős számítási kapacitást igényelne ugyanis a rácsszám négyszeresére növelése mellett az időlépést felére kéne csökkenteni a periodikus megoldás elérése érdekében. Ez a jelenség a térbeli és időbeli diszkretizálás szoros összekapcsolódásának a következménye, ami a rács Boltzmann módszer tulajdonsága. Ennek a szoros összekapcsolódásnak az oka a mikroszkópikus sebességekben keresendő, ugyanis a részecskéket reprezentáló populációk a mikroszkópikus sebességeknek megfelelően egy időlépés alatt egy rácsegyiséget haladnak. Fizikailag ez úgy értelmezhető, hogy egy adott populációnak egy adott sebességgel kétszer annyi időre van szüksége kétszer akkora út megtételéhez.

4.4. Időlépés vizsgálata

Az előző fejezetben kifejtésre került a rács-Boltzmann módszer térbeli és időbeli diszkretizálásának szoros összekapcsolódása, azonban a megfelelő térbeli felbontás nem jelenti feltétlenül azt, hogy az időbeli felbontás is megfelelő. Ennek ellenőrzése az időjel szemrevételezésével történik. Megfelelő felbontás esetén a mintavételezési pontokat összekötő szakaszok lágyan simulnak egymásba, nincsenek hirtelen „hegyes” változások, melyek arra utalnának, hogy az áramlás egy meghatározó mozzanata két időlépés között történt. Az időlépés vizsgálatát a közepes háló időjelenének egy csúcsán fogom ellenőrizni, ami a 20. ábrán látható.



20. ábra

A 20. ábrán jól látható, hogy a mérési pontokat összekötő szakaszok szépen illeszkednek egymáshoz, nem látható jelentős ugrás vagy hirtelen szintemelkedés ezért az idő felbontást megfelelőnek tartom. Fontos figyelembe venni, hogy a rács-Boltzmann módszer alkalmazása során nem lehetséges az időlépés módosítása a rácsszám módosítása nélkül.

4.5. Paramétertanulmány

Az általam fejlesztett programot egy Dell laptopon futtattam ami 8 GB RAM-al és egy Intel(R) Core(TM) i7-3632QM CPU @ 2.20GHz processzorral rendelkezik. A laptop hűtése nem megfelelő ilyen masszív igénybevételhez, ez a probléma a sima hálón történő szimuláció során az aránytalanul megnövekedett szimulációs időben nyilvánul meg. Ezért a paramétertanulmányt a közepes hálón végzem el, ami a hálófüggetlenségi vizsgálat során bemutatottaknak megfelelően nem rendelkezik számottevő hibával. A paramétersöprést 0 és 300 közötti Reynolds szám tartományban végzem el, 25-ös lépésközzel. A 3.1 „Geometria definiálása” című fejezetben meghatározásra került a modellezett makroszkópikus áramlási sebesség és a jellemző méret a közepes háló esetén. Ezek az értékek nem változnak a Reynolds szám változtatása esetén, tehát a paramétersöprés során a kinematikai viszkozitás fog szimulációnkként megváltozni. Azonban a kinematikai viszkozitás a 3.3 egyenletnek megfelelően függ a relaxációs paramétertől, aminek értéke nem lehet 0,5 (ebben az esetben a kinematikai viszkozitás értéke nulla lenne, ami fizikailag nem értelmezhető), illetve ezen érték közvetlen környezetében a program instabillá válik. A paraméter tanulmány megkezdése előtt érdemes meghatározni az egyes Reynolds számokhoz tartozó relaxációs paramétereket az instabilitás okozta időveszteségek elkerülése végett.

A 3.2 és a 3.3 egyenletekből kifejezve a relaxációs paraméter a következőképpen meghatározható:

$$\tau = \frac{3 \cdot u_m \cdot H_m}{Re_m} + 0,5 \quad 4.4$$

Az 3. táblázatban az egyes Reynolds számokhoz tartozó relaxációs paraméterek láthatóak:

3. táblázat

Re [1]	τ [1]	Re [1]	τ [1]
25	0,6728	175	0,5247
50	0,5864	200	0,5216
75	0,5576	225	0,5192
100	0,5432	250	0,5173
125	0,5346	275	0,5157
150	0,5288	300	0,5144

A legkisebb relaxációs paraméter a háromezrads Reynolds számnál található, értéke jelentősen megközelíti a kritikus 0,5-et. Ilyen esetben [11] alapján egy lineáris közelítés alkalmazásával ellenőrizhető, hogy az adott τ értékhez mekkora a megengedhető legnagyobb modellezett makroszkópikus sebesség $u_{m,max}$. ahol a szimuláció még stabilan viselkedik:

$$|u_{m,max}| = 8 \cdot \left(\frac{\tau}{\Delta t} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad ha: \frac{\tau}{\Delta t} < 0,55 \quad 4.5$$

ahol $\Delta x = 1$ [rács egység] és $\Delta t = 1$ [időlépés] mivel a rács Boltzmann módszer során nem ruháztam, fel dimenziókkal sem a rács nagyságokat sem pedig az időlépéseket. A 4.5 egyenletbe behelyettesítve:

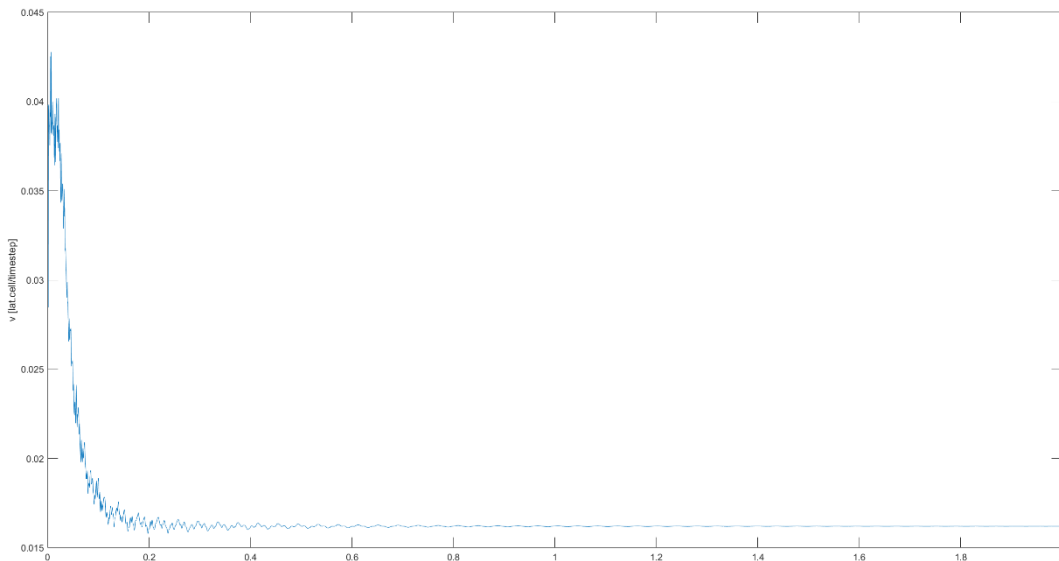
$$|u_{m,max}| = 8 \cdot \left(\frac{0,5144}{1} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{1} = 0,1152 \sigma$$

mivel $u_m \ll u_{m,max}$. ezért a relaxációs paraméterek megfelelőek. Stabilitás szempontjából kulcsfontosságú megvizsgálni a modellbéli Mach számot, ugyanis jelen számítások, illetve egyszerűsítések alacsony Mach szám tartományban érvényesek, meghatározása az alábbi egyenlettel lehetséges:

$$Ma = \frac{u_m}{c_s} = \frac{0,04}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = 0,0692 [1] \quad 4.6$$

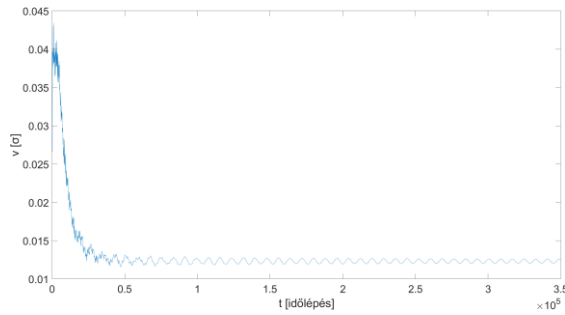
A gyakorlatban 0,1 az a Mach szám érték, aminél még a közeg inkompresszibilisnek tekinthető [11], tehát a használt modellezett makroszkópikus sebességnél a szimuláció stabil lesz.

A paraméter söprést a huszonötös Reynolds számtól indítom, ahol a vártan megfelelően némi kezdeti oszcilláció után egy konstans időjelet kapok, ami az alábbi ábrán látható. Az időjel 180000 időlépés után éri el a konvergencia állapotát.

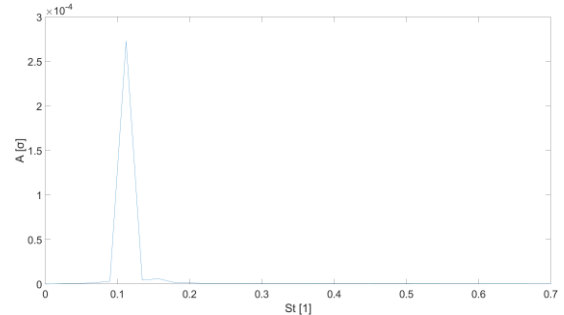


21. ábra Időjel Re = 25

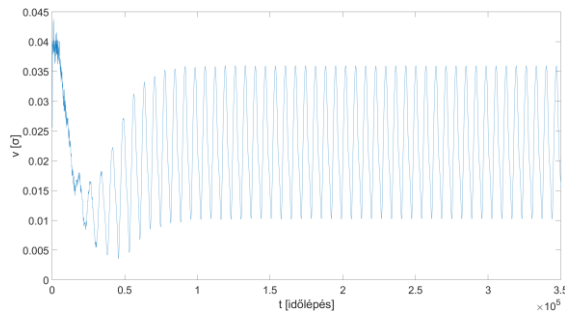
E fölötti értékeknél is tapasztalható némi oszcilláció azonban mértéke a numerikus hiba nagyságrendjében mozog, ezért a spektrum elkészítése nem indokolt. Az instacioner áramlás és ezáltal az örvényleválás 42,5-ös Reynolds számnál jelentkezik először a szakirodalomban [3]. Az 50-es Reynolds számnál mért időjel (22. ábra) ennek megfelelően periodikusan váltakozik, a spektrumon (23. ábra) a leválási frekvencia szépen kivehető, azonban felharmonikusok nem figyelhetőek meg. A 75-ös Reynold számnál (24. ábra, 25.ábra) megjelennek a felharmonikusok, illetve az 50-es Reynolds számhoz képest Strouhal szám növekedés tapasztalható. A Reynolds szám növelésével a Strouhal szám értékének növekedése figyelhető meg egészen a 175-ös Reynolds számig, a 200-as Reynolds számnál mért Strouhal szám megegyezik a 175-ös Reynolds számnál kapottal. Az itt mért maximális Strouhal szám értéke 0,1579. Ezután folyamatos Strouhal szám csökkenés figyelhető meg. A felharmonikusok a Reynolds szám növelésével egyre dominánsabbá válnak azonban periódus többszöröződés nem tapasztalható. A Reynolds számokhoz tartozó időjelek és spektrumok a 22.-43. ábrákon láthatóak:



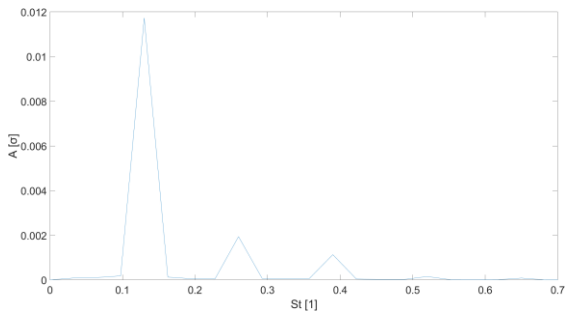
22. ábra Időjel Re=50



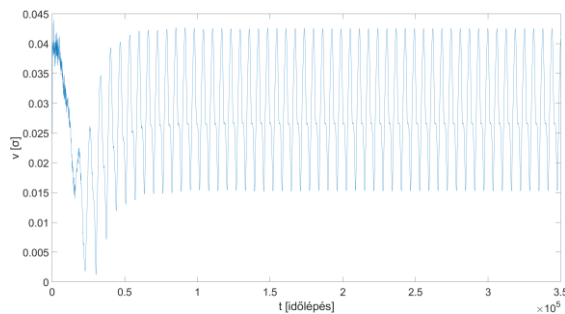
23. ábra Spektrum Re=50



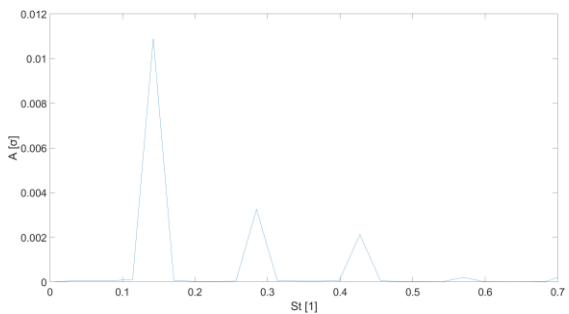
24. ábra Időjel Re=75



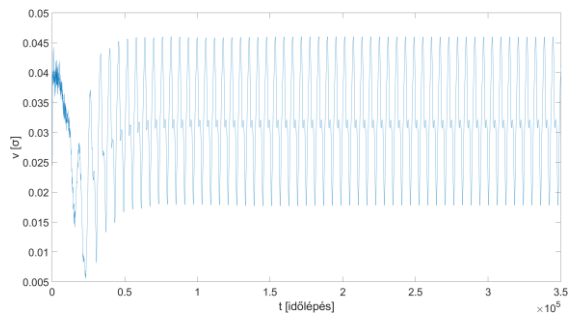
25. ábra Spektrum Re=75



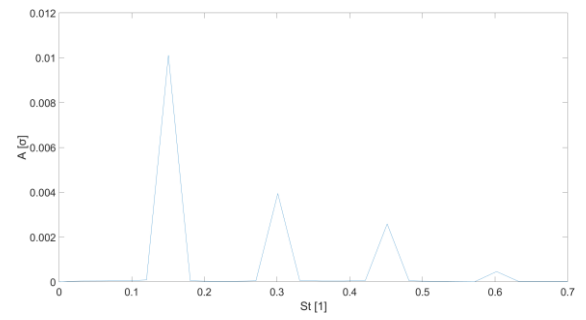
26. ábra Időjel Re=100



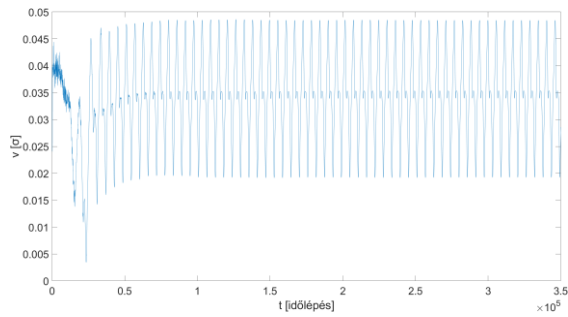
27. ábra Spektrum Re=100



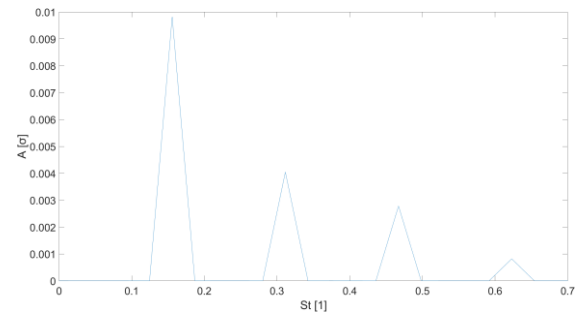
28. ábra Időjel Re=125



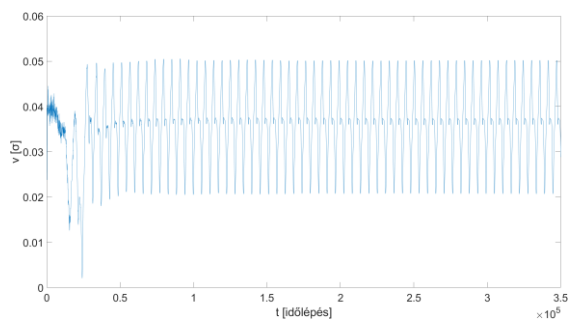
29. ábra Spektrum Re=125



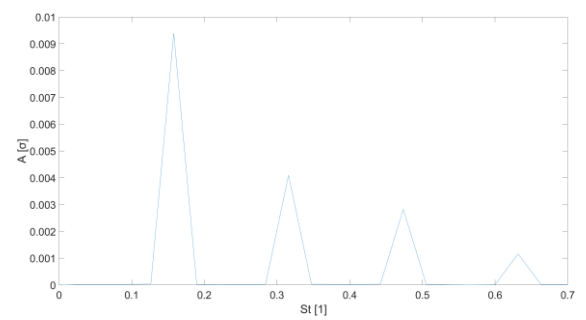
30. ábra Időjel Re=150



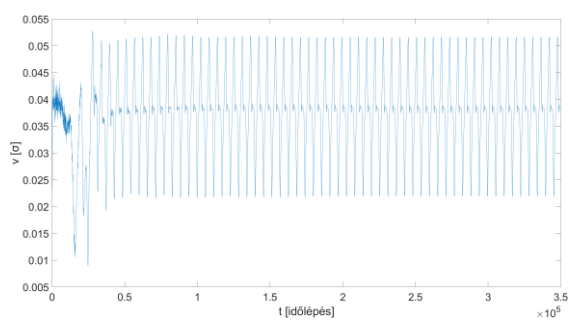
31. ábra Spektrum Re=150



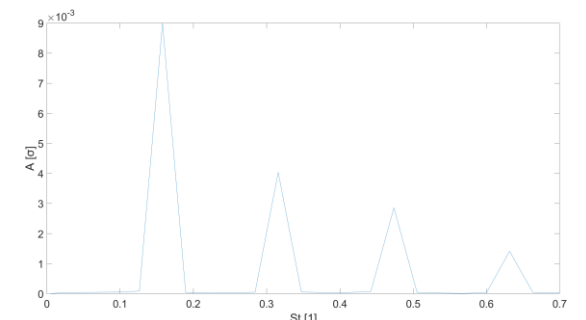
32. ábra Időjel Re=175



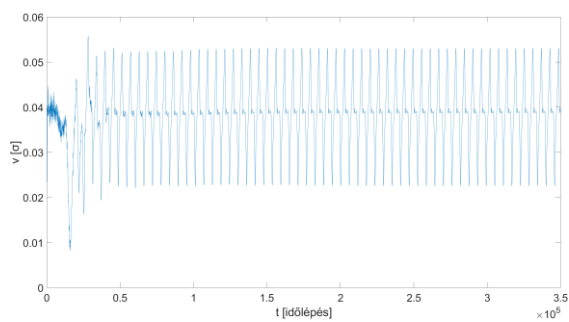
33. ábra Spektrum Re=175



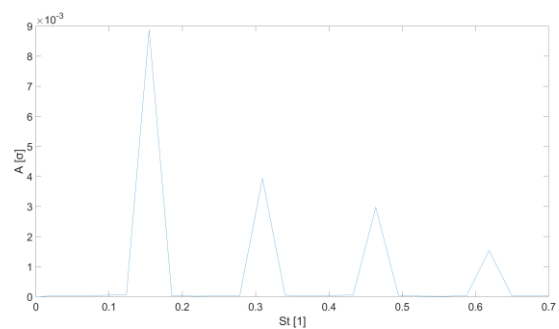
34. ábra Időlépés Re=200



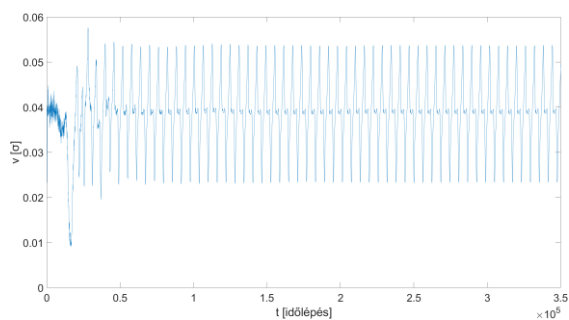
35. ábra Spektrum Re=200



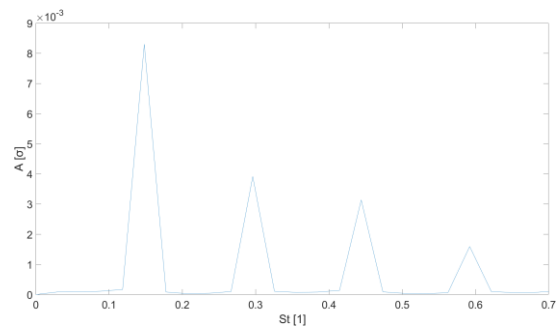
36. ábra Időjel $Re=225$



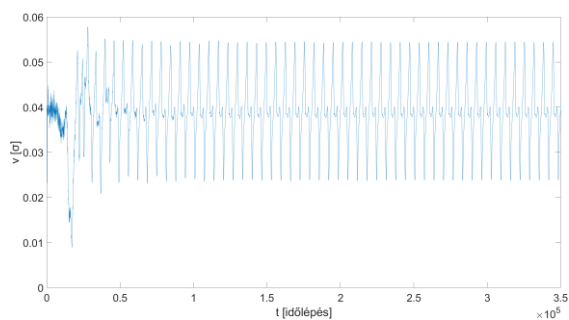
37. ábra Spektrum $Re=225$



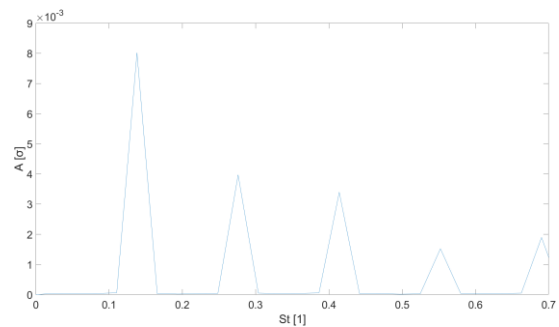
38. ábra Időjel $Re=250$



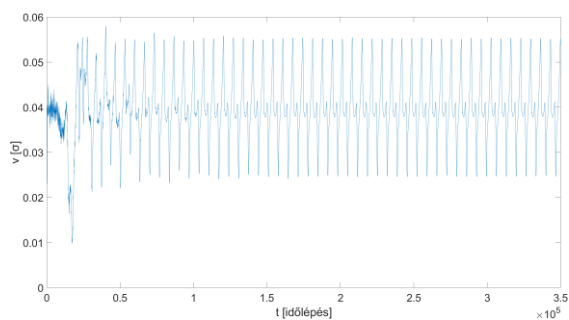
39. ábra Spektrum $Re=250$



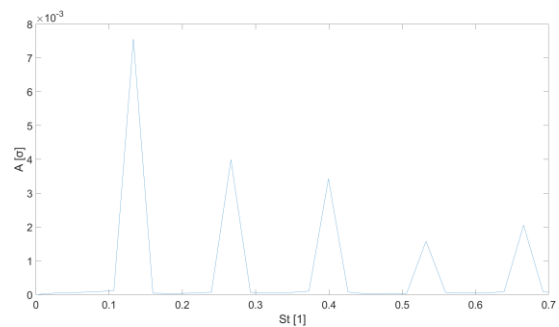
40. ábra Időjel $Re=275$



41. ábra Spektrum $Re=275$



42. ábra Időjel $Re=300$



43. ábra Spektrum $Re=300$

5. ÖSSZEFOGLALÁS

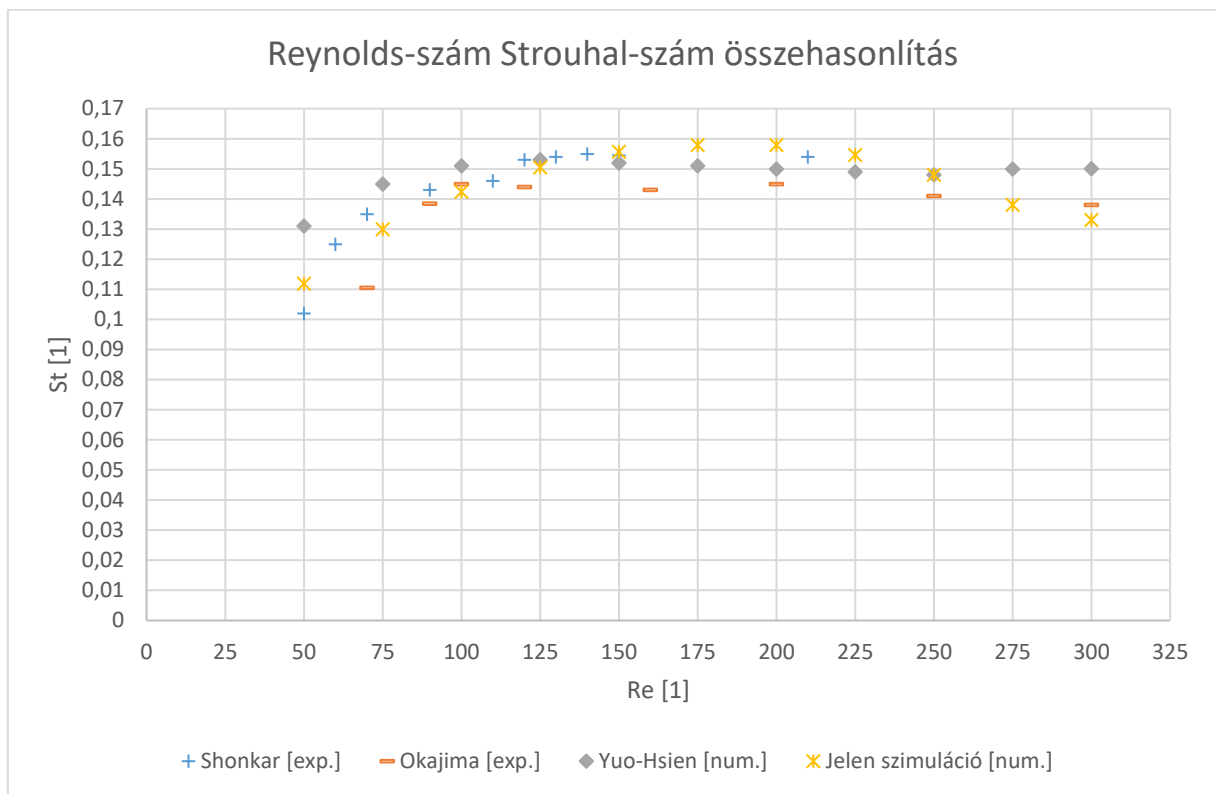
5.1. Összehasonlítás a szakirodalmi adatokkal:

Yuo-Hisen és társai [4] által numerikusan modellezett egyenlő oldalú hasáb körüli áramlás esetén a $0 \leq Re \leq 42,5$ tartományban stacioner áramlást míg, a $42,5 \leq Re \leq 294$ tartományban egy periódusú örvényleválást mértek. Tanulmányuk során bistabilitást tapasztaltak a $294 \leq Re \leq 320$ tartományban, tehát ebben az intervallumban a szimulációnak két megoldása létezik. A kezdeti értékektől függően egy periódusú, illetve három periódusú eredmény lehetséges. Szimulációjuk során 130-as Reynolds számig a Strouhal számok egyenletes növekedését tapasztalták, ezen a ponton a Strouhal szám elérte a maximális értékét, az ezt követő Reynold számokhoz folyamatosan csökkenő Strouhal számok tartoznak. Yuo-Hisen és társai [4] által mért és megfogalmazott eredmények, összhangban vannak a jelen szimulációban tapasztaltakkal. Az 4. táblázatban láthatóak az egyes Reynolds számokhoz tartozó Strouhal számok, melyek segítségével grafikusan is összevethetővé válnak a szimulációs eredménnyel.

4. táblázat Reynolds számok - Strouhal számok

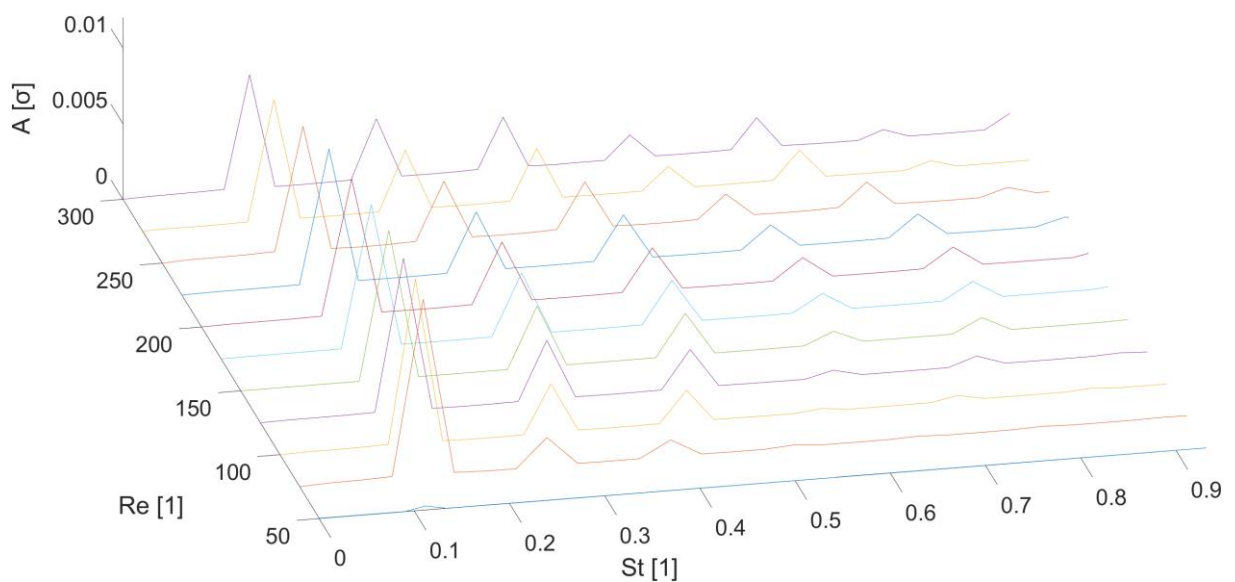
Re [1]	St [1]	Re [1]	St [1]
25	-	175	0,1579
50	0,1119	200	0,1579
75	0,13	225	0,1546
100	0,1424	250	0,148
125	0,1505	275	0,138
150	0,1557	300	0,1331

Az 44. ábrán láthatóak Shonkar [4] és Okajima [3] eredményei, amiket kísérleti úton határoztak meg, illetve Yuo-Hisen [4] és a jelen munka eredményei melyek numerikus úton kerültek meghatározásra. Az általam írt rács Boltzman módszeren alapuló program eredményei jól megközelítik a Shonkar által mért Strouhal számokat, Okajima munkájával is analógiát mutat jellegét tekintve, azonban 125-ös Reynolds szám felett hozzá képest átlagosan egy századdal nagyobb Strouhal számot regisztráltam. A hasáb körüli áramlás numerikus vizsgálata során, 275-ös Reynolds szám felett az időjel periodikus oszcillálására lettem figyelmes, melynek nagysága a vizsgált tartományban nem jelentős, azonban feltételezhető, hogy a Reynolds szám növelésével az instabilitás is növekedni fog.



44. ábra Shonkar[4], Okajima[3], Yuo-Hsien[4], és a saját eredmények összehasonlítása

A paramétertanulmányt összefoglaló vízesés diagrammon (45. ábra) megfigyelhetők a leválási frekvenciához tartozó csúcsok, illetve a felharmonikusok fejlődése a Reynolds szám függvényében.



45. ábra Vízesés diagram

5.2. Javaslatok

Az általam alkalmazott rács Boltzman módszer tovább fejleszthető. Pontossága és stabilitása növelhető MRT („Multi-Relaxation Time”) ütközési modell alkalmazásával. A szükséges iterációk száma csökkenthető pontosabb kezdeti érték megadással, ami kivitelezhető a nem egyensúlyi séma alkalmazásával. „Half-way Bounce-Back” módszer használatával az alsó, illetve a felső falakon, valamint a hasáb oldalain tovább növelhető a pontosság. A rács Boltzmann módszer struktúrájából fakadóan könnyen paralelizálható, hatékonyan programozható. A metódus teljes egészében futtatható GPU-n („Graphics Processing Units”), amivel jelentős számítási idő spórolható.

Érdemes megjegyezni, hogy a módszer jelentős hátrányokkal is rendelkezik ugyanis helyi hálósűrítés nem alkalmazható tehát igen jelentős rácsszámmal kell dolgozni olyan tartományokban is, amik ezt nem igénylik. Továbbá a stabilitási problémák nehéz kiküszöbölhetősége miatt jelentős programozási és kalibrálási időt igényel.

Összességében kijelenthető, hogy a rács Boltzman módszer kiválóan alkalmazható hasáb körüli áramlás numerikus szimulációjára. A metódus egyre nagyobb népszerűségnek örvend, a bővülő szakirodalmak és az alternatív megközelítések hatására egyre több numerikus probléma oldható meg vele, így könnyen elképzelhető, hogy a következő 10-15 évben a szimulációs piac egyik legmeghatározóbb módszerévé válik.

6. FELHASZNÁLT FORRÁSOK

1. https://github.com/KalmarPeter/LBM_flow-around-a-square-cylinder
2. <https://www.mecaenterprises.com/getting-twisted-about-helical-strakes/>
3. ATSUSHI OKAJIMA (1982): *Strouhal numbers of rectangular cylinders*, J. Fluid Mech. vol. 123, pp. 379-398.
4. YUO-HSIEN SHIAU ET AL. (1999): *Multistability and symmetry breaking in the two-dimensional flow around a square cylinder*, Phys. Rev. E, vol. 60, no. 5, pp. 6188-6191.
5. QISU ZOU, XIAOYI HE (1997): *On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model*, Phys. Fluids, vol.9, no.6, pp. 1591-1598.
6. KRISTÓF GERGELY (2019): *Áramlások numerikus modellezése*, Akadémia kiadó, online.
URL: <https://mersz.hu/kristof-aramlasok-numerikus-modellezese>
7. MICHAEL C. SUKOP, DANIEL T. THORNE, JR. (2006): *Lattice Boltzmann Modeling*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
8. http://www.hds.bme.hu/letoltesek/targyak/BMEGEVGBX14/mugaz_ea_jegyzet_jav.pdf
9. <http://work.thaslwanter.at/Stats/html/statsDistributions.html>
10. C. V. PAO (1974): *A Nonlinear Boltzmann Equation in Transport Theory*, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol 194, pp. 167-175.
11. TIMM KRÜGER ET AL. (2017): *The Lattice Boltzmann Method Principles and Practice*, Springer International Publishing, Switzerland.
12. LAJOS TAMÁS (2015): *Az áramlástan alapjai*, Dr. Lajos Tamás, Budapest.
13. Y. B. BAO, JUSTIN MESKAS (2011): *Lattice Boltzmann Method for Fluid Simulations*, Simon Fraser University, Burnaby, Kanada.
14. GLENN O. BROWN (2002): *The History of the Darcy-Weisbach Equation for Pipe Flow Resistance*, Environ. and Wat. Resours., pp. 34-43, Washington D.C.
15. IRINA GINZBURG (2005): *Equilibrium-type and link-type lattice Boltzmann models for generic advection and anisotropic-dispersion equation*, Advances in Water Resources, vol. 28, no. 11, pp. 1171-1195.
16. IRINA GINZBURG ET AL. (2010): *Optimal Stability of Advection-Diffusion Lattice Boltzmann Models with Two Relaxation Times for Positive/Negative Equilibrium*, J. Stat. Phys., vol. 139, no. 6, pp. 1090-1143.
17. http://moodle.autolab.uni-pannon.hu/Mecha_tananyag/mereselmelet/ch06.html

7. SUMMARY

The topic of my final thesis is to write a program, based on the lattice-Boltzmann method, which makes it possible to investigate the flow around a square cylinder with 1:1 aspect ratio.

The simulation program was written in python in the Spyder development environment, which has the great advantage of having a significant amount of external packages and programming support functions. During the theoretical review of the lattice-Boltzmann method, the Boltzmann equation and its discrete form are presented as well.

After that, I am defining the flow domain, and then I create the geometry of the square cylinder which will be examined. According to the investigated problem, I choose the grid type D2Q9 and then determine the initial value of the macroscopic variables.

In order to increase the speed of the simulation, I populate the elements of the macroscopic velocity matrix with values according to the Poiseuille profile. With the assistance of macroscopic variables, I determine the equilibrium distribution function and then initialize the solver using the equilibrium scheme. In the main cycle, I use the “velocity inlet” and “pressure outlet” boundary conditions developed by Zou and He [5]. I apply a “full-way bounce back” boundary condition at the lower and upper end of the domain and on the side walls of the cylinder. I simulate the collision with a TRT (two relaxation time) collision operator.

Before starting the parameter study, I perform a mesh independence test with Richardson extrapolation and then check the stability of the simulation in the examined interval. At a distance of four cylinder from the back of the cylinder, a monitoring point has been placed in order to register the value of the macroscopic velocities in the examined grid at each time step during the parameter study. The time signal can be determined with the registered macroscopic velocities and the timesteps. The spectra can be created with fast Fourier transformation from the time signals thus created. The Strouhal number for a given Reynolds number can be read from the spectra. The validation of the program is performed by comparing the Strouhal numbers read from the spectra and the data found in the literature.

8. MELLÉKLET

I.Melléklet

```
function SpectraFromCFX
    FileName = 'Re300kozepeshalol1.0.xlsx';
    TimeStart=316100;
    TimeEnd =349900;
    Length =36;
    Velocity =0.04;

    Data=xlsread(FileName,'Sheet2');
    Index=find( Data(:,1)>TimeStart & Data(:,1)<TimeEnd );
    FilteredData=Data(Index,:);
    SignalAverage=mean(FilteredData(:,2) );
    [freqs, amps, phases, coefs] = real_fft( FilteredData(:,1), FilteredData(:,2)-SignalAverage );
    StrouhalNumber=freqs * Length / Velocity;
    figure(1)
    plot(StrouhalNumber,amps)
    set(gca,'FontSize',23)
    xlim([0 0.7])
    xlabel('St [1]')
    ylabel('Re [1]')
    zlabel('A [σ]')
    set(gcf,'color','w');

    % The FFT function -----

function [freqs, amps, phases, coefs] = real_fft( t, signal )

    timestep = t(2)-t(1);
    N = length(signal);
    N_half = ceil((N+1)/2);
    freqs(1:N_half,1) = 1/timestep * (0:N_half-1)/N;
    % 1/timestep = mintavételezési frekvencia

    coefs = fft(signal);
    amps(1:N_half,1) = 2/N*abs( coefs(1:N_half) );
    amps(1) = amps(1)/2;
    if (mod(N,2)==0) amps(N_half)=amps(N_half)/2; end;
    phases(1:N_half,1) = angle(coefs(1:N_half));
```