Slovenská technická univerzita v Bratislave
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Stavebná fakulta
Akademický rok: 2021/2022
Evidenčné číslo: SvF-5342-105652

ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Študentka:	**Karolína Vallová**
ID študenta:	105652
Študijný program:	matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor:	matematika
Vedúca práce:	RNDr. Ľubica Staneková, PhD.
Vedúci pracoviska:	Ing. Marek Macák, PhD.

Názov práce: **Algoritmy a pomôcky na riešenie sudoku**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

Témou tejto práce sú algoritmy a pomôcky na riešenie sudoku. V práci bude uvedený prehľad voľne dostupných programov, ktoré ponúkajú pomôcky pri riešení sudoku. Takéto programy najčastejšie ponúkajú dve pomôcky (malú a veľkú) alebo namiesto riešiteľa vygenerujú všetky možnosti. Cieľom práce je urobiť program s viacerými pomôckami (kombinácia známych a vlastných pomôcok) a tiež popísať teóriu k pomôckam a algoritmy na riešenie sudoku.

Termín odovzdania bakalárskej práce:	05. 05. 2022
Dátum schválenia zadania bakalárskej práce:	18. 02. 2022
Zadanie bakalárskej práce schválil:	prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc. – garant študijného programu

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Sudoku je logická doplňovacia hra pre jedného hráča, ktorá sa v dnešnej dobe pre svoje jednoduché pravidlá a množstvu stupňov obtiažnosti stala veľmi populárnou pre väčšinu vekových kategórií.

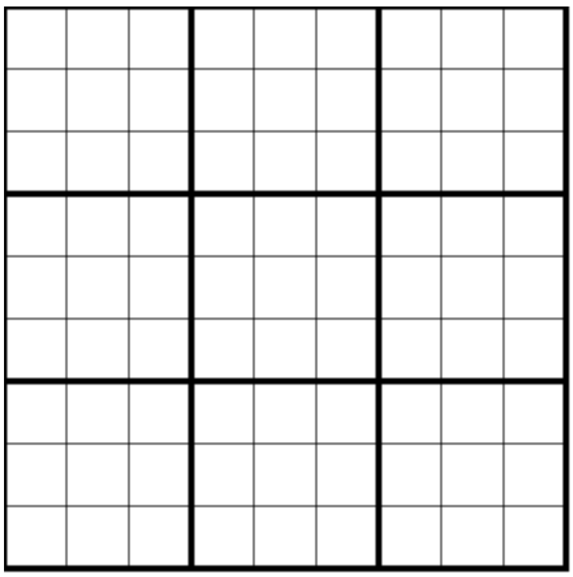
Prvá verzia Sudoku puzzle sa objavila vo francúzskych novinách na konci 19. storočia pod menom *Number Place*. A však jej popularitu si získala až v meste Manhattan, New York v 70. rokoch 20. storočia. Získala si ju vďaka pánovi z Nového Zélandu menom Wayne Gould, ktorý po 6. rokoch skonštruoval počitačový program na tvorenie zadaní Sudoku. Vďaka tomuto programu sa ľahko generovali zadania Sudoku, začali sa pravidelne a s úspechom publikovať do novín a táto logická hra sa rýchlo rozšírila do celého sveta. Neskôr táto hra bola publikovaná japonskou rébus firmou, ktorá ju pomenovala Sudoku, znamenajúc *jedno číslo práve raz* a tento názov jej zostal dodnes. [3]

Kapitola 2

Hra Sudoku

2.1 Princíp hry

Logickú hru Sudoku tvorí 81 políčok po 9 riadkov a 9 stĺpoch. Celá šachovnica sa delí na 9 3×3 štvorcov po 9 políčok.



Obr. 2.1: Prázdna sieť.

Cieľom hry je vyplniť tychto 81 políčok čislicami od $1 - 9$, pričom sa budú dodržiavť následovné tri základné pravidlá:

1. Každý riadok obsahovaje číslom 1 - 9 práve raz.
2. Každý stĺpec obsahovaje číslom 1 - 9 práve raz.
3. Každý 3×3 štvorec obsahovaje číslom 1 - 9 práve raz.

Na obrazku 2.2 vidíme už vyplnenú sieť hry Sudoku. Zároveň môžme vidieť, že takto vyplnená sieť dodržiava tri zakládne pravidlá hry a preto ju môžme nazvať aj jedným z mnoha správnych riešení Sudoku.

2	7	4	1	5	9	3	6	8
1	8	5	3	2	6	7	9	4
3	6	9	4	7	8	1	5	2
7	5	8	6	4	1	9	2	3
6	2	3	9	8	5	4	7	1
9	4	1	2	3	7	5	8	6
8	3	6	7	9	4	2	1	5
4	1	7	5	6	2	8	3	9
5	9	2	8	1	3	6	4	7

Obr. 2.2: Vylúštená hra SUdoku.

2.2 Zadania hry a ich úrovne

2.2.1 Zadania hry

Intuitívne akúkoľvek čiastočne nevyplnenú sieť hry Sudoku 2.3 sa dá považovať za jej zadanie. Nie však každé nevyplnené Sudoku sa dá považovat za plnohodnotné zadanie. Vďaka kombinatorike vieme, že existuje práve 6.7×10^{21} riešení. Toto číslo vypočítali pomocou počítačového programu dvaja páni a to B. Felgenhauer a F. Jarvis v roku 2005 ako jeden z viacerých enumeračných problémov Sudoku. [1]

Zároveň vďaka experimentu z University College Dublin [2] bol v roku 2013 overný minimálny počet už zadaných čísel, aby sa zadanie považoalo za plnohodnotné. Tým sa myslí, aby zadanie hry malo riešenie. Gary McGuire overil minimálny počet čísel a to 17 čísel. Pri nevyplnených hrách Sudoku, kde je daných len 16 čisel, hra nemá riešenie, teda ma viac ako jediné riešenie a považuje sa za neplnohodnotné. Bežný počet čísle v zadaní hry pre začiatočníkov býva okolo 30 čísel.

čo nám naznačuje, že aj zadanie pre logickú hru Sudoku by malo mať svoje pravidlá alebo zásady. Avšak na takéto zásady sa prišlo potom ako sa hra predstavila verejnosti. Tieto tzv. nepísané pravidlá, ktorými by sa malo riadiť každé zadanie, aby sa považovalo za plnohodnotné, sú následovné:

1. Každé zadanie by malo mať práve jedno riešenie.
2. Každé zadanie by malo byť riešitelné bez hádania alebo pomoci počítača.
3. Každé zadanie by malo byť minimálne, tzv. po odstránení jednej číslice by už nemalo mať riešenie.

2			1				6	
	8	5		2			9	
				7		1		2
					1			3
			9		5			
9			2					
8		6		9				
	1			6		8	3	
	9				3			7

Obr. 2.3: Vzor zadania.

2.2.2 Úroveň hry

Každé plnohodnotné zadanie má teda svoje jediné riešenie. Ked sa pozrieme na počet čísel v zadaní, môžme približne určiť alebo aspoň hráčovi môže dať približnú predstavu o leveli obtiažnosti. Avšak aj pri minimálnom počte čísel môžme nájst lahšie alebo náročnejšie zadanie hry. Preto obtiažnosti hry by sa nemala určovať na základe počtu čisel v zadaní, ale na základe istého sytému, ktorý by určil úroveň obtiažnosti hry.

Existujú už rôzne systémy, ktoré ohodnotia úroveň zadania hry, jedným z týchto systémov môžme nájst na stránke Difficulty of Sudoku puzzle. Na tejto stránke sa každé zadanie hry ohodnotí pomocou metódy, ktorá je na základe týchto troch vecí:

1. Počet nevyplnených (prázdnych) políčok.
2. Koľko rôznych pomôcok treba použiť.
3. Ako často každú z tychto pomôcok treba zopakovat na vyriešenie hry.

Tento konkrétny system, ktorý každej použitéj pomôcke pridelí istú hodnotu (cenu) sa riadi nasledujúcou tabuľkou:

Tabuľka 2.1: Tabuľka hodnôt pre pomôcky.

Pomôcka	Cena za 1. použitie	Cena za dalšie použitie
Jedna pozícia	100	100
Jeden kandidát	100	100
Jedna línia kandidátov	350	200
Dvojité páry	500	250
Viaceré línie kandidátov	700	400
Zjavný pár	750	500
Skrýtý pár	1500	1200
Zjavná trojica	2000	1400
Skytá trojica	2400	1600
X-Wing a XY-Wing	2800	1600
Retazová reakcia	4200	2100
Zjavná štvorica	5000	4000
Skrytá štvorica	7000	5000

S velkým množstvom zadaní, ich úrovne sa príležitostne môžu málo líšiť, jedno riešenie môže byť o trošku lahšie ako dalšie, ktoré je len o menšiu hodnotu náročnejšie. A to len preto koľko pomôcok je potrebných na vyriešenie hry. Preto sa zoskupili úrovne zadaní, ktoré mali podobné ohodnotenie na základe vyššie pomenutéj tabuľky do šesť kategorií:

Tabuľka 2.2: Tabuľka úrovní hry Sudoku.

Úroveň	Dolná hranica	Horná hranica
Začiatočník	3600	4500
Lahká	4300	5500
Stredne tažká	5300	6900
Náročná	6500	9300
Čertovská	8300	14000
Diabolská	11000	25000

Jednotlivé kategórie sa prekrývajú niekde viac, niekde menej, avšak tieto prekryvy sú tam zámerne. Umožnujú pri vytváraní zadaní istú voľnosť, aby zadanie bolo stále v prijateľnom rozsahu.

Kapitola 3

Pomôcky na riešenie hry Sudoku

V Predchádzajúcej kapitole sme spomenuly pomôcky na vyriešenie logickej hry Sudoku. V tejto kapitole sa ich skusime čitatelovi vysvetli do čo najzrozumitelnejšej miery, aby si ich ako priležitostný alebo pravidlený hráč mohol prípadne aplikovať pri najbližšej hre. Postupne spomenieme vačšinu pormenutých pomôcok z už spomínanej tabuľky 2.1 hodnôt pre pomôcky.

Hlavná myšlienka za pomôckami logickej hry Sudoku je uľahčenie hľadania kandidáta alebo skupiny kandidátov, neskôr dedukciou aj nájsť konkrétne číslo pre konkrétne políčko v šachovnici.

3.1 Lahké Pomôcky

Medzi najlahšie a hlavne prvé pomôcky, s ktorými sa hráč stretne pri hraní hry Sudoku su základné tri pravidlá hry a ich rôzne aplikácie či už pri hladaní priamo čísla alebo kandidátov. Ako sa v predchadzajúcej kapitole spomínali princípy hry Sudoku, hlavná myšlienka je vyplniť šachovnicu číslami $1 - 9$, tak aby sa neopakovali tie isté čísla v riadku, stĺpci a v štvorci o veľkosti 3 x 3.

3.1.1 Jedna pozícia

Práve táto pomôcka patrí medzi tie najlahšie a hráčovy začiatočíkovi je vysvetlená ako prvá. Pomôcka *Jedna pozícia* využíva základne tri pravidlá hry. Nižsie na príklade môžme vidieť hru Sudoku v počiatočnej fázi riešenie. V posledných dvoch riadkoch môžeme vidieť už zvýraznené aj dve číslice 3. 3.1 Ak sa pozrieme na posledne tri riadky z dola a zameriame sa na číslo 3 môžme vidieť dve veci:

1. V treťom riadku z dola chýba číslo 3.

2. Číslo 3 chýba aj vo štvorci v ľavom dolnom rohu.

Keď spojíme tieto dva poznatky, vyjde nám, že číslo 3 sa musí nachádzať vo vrchnom riadku ľavého dolného štvorca. Avšak tam je voľné iba jedno políčko. Tým pádom vieme jednoznačne povedať, že číslo 3 sa bude nachádzať práve v tomto voľnom políčku.

2			1				6	
	8	5		2			9	
				7		1		2
					1			3
			9		5			
9			2					
8		6		9				
	1			6		8	3	
	9				3			7

Obr. 3.1: Príklad pomôcky Jedna pozícia.

3.1.2 Jeden kandidát

Medzi dalšie pomôcky, ktoré patria k tým lahším je pomôcka *Jeden kandidát.* Táto pomôcka využíva základne tri pravidlá hry, ale skor na zorientovanie medzi už určenými a hlavne voľnymi políčkami v šachovnici. Veľmi ojedinele nastane situácia, kedy jedno konkrétne políčko má iba jedného kandidáta na zváženie. Najlepšie je to vidieť na obrazku 3.2, kde sú v každom voľnom políčku vpísaní kandidáti na zváženie a jedno políčko je zvýraznené práve preto, lebo sa tam nachádza iba jeden kandidát na zváženie a to číslo 4.

2	347	3479	1	3458	489	3457	6	458
13467	8	5	346	2	46	347	9	4
346	346	349	34568	7	4689	1	458	2
4567	24567	2478	4678	48	1	245679	24578	3
13467	23467	123478	9	348	5	2467	12478	1468
9	34567	13478	2	348	4678	4567	14578	14568
8	23457	6	457	9	247	245	1245	145
457	1	247	457	6	247	8	3	459
45	9	24	458	1458	3	2456	1245	7

Obr. 3.2: Príklad pomôcky Jeden kandidát.

Pomôcka Jeden kandidát však nepratrí medzi prvú voľbu aj skúseného hráča, nie to ešte začiatočníka a hlavne kvôli pracnosti táto pomôcka vyžaduje. Na príkladnom obrázku 3.2 môžme vidieť koľko rôzne veľkých skupín kandidátov sa nachádza v tomto konkretnom zadaní hry. Preto sa táto pomôcka doporučuje používať pri vačšom počte už jasne daných čísel.

3.2 Pokročilé pomôcky

V tejto sekcii sa budú rozoberať pomôcky, ktoré môžu, ale vo vačšine prípadov neurčia konkrétne číslo konktretnému voľnému políčko, skôr zredukujú skupiny možných kandidátov pre jednotlivé políčka. Ked sa využije kombinácia takýchto pomôcok, hráča to priblíži k správnemu riešeniu, ak nie priamo k riešeniu. To však záleží na úrovni hry.

3.2.1 Jedna línia kandidátov

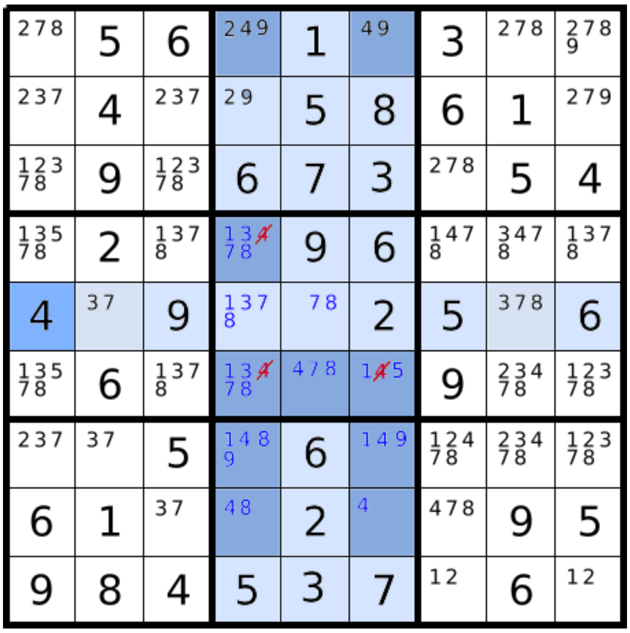
Jednou z prvých pokročilejších pomôcok je Jedna línia kandidátov. Ked sa pozrieme štvorec 3 x 3 v strede šachovnice na obrázoku 3.3, vidíme, že číslo 3 sa v tomto štvorci može nachádzať iba v dvoch voľnych už zvýraznených políčkach. V iných voľnych políčkach sa číslo 3 nachádzať nemôže, kvôli už jednoznačne daným čislam 3 vo štvrtom riadku z hora a v šiestom stĺpci z ľava. S týmto poznatkom daľej môžme povedat, že číslo 3 sa v piatom stĺpci bude nachádzať iba na týchto dvoch zvýraznených voľnych políčkach v strednom 3 x 3 štvorci. Na základe čoho dalej môžme s určitostou čislo 3 zo skupiny kandidátov vo voľnom políčku v piatom stĺpci a prvom riadku odstániť, kedže na tomto mieste sa toto číslo nebude nachádať.

2	47	3479	1	~~3~~458	489	357	6	58
1367	8	5	36	2	6	37	9	4
346	46	349	34568	7	4689	1	58	2
4567	24567	2478	4678	48	1	245679	24578	3
13467	2467	123478	9	348	5	2467	12478	168
9	4567	13478	2	348	4678	4567	14578	1568
8	3	6	457	9	247	245	1245	15
457	1	247	457	6	247	8	3	59
45	9	24	458	1458	3	2456	1245	7

Obr. 3.3: Príklad pomôcky Jedna línia kandidátov.

3.2.2 Dvojité páry

Dalšou pomôckou sú Dvojité paŕy, kde máme po dva páry kandidátov v dvoch stĺpoch a zároveň v dvoch štvorcoch 3 x 3 pre konkrétne číslo. Vďaka týmto dvom párom, potom vieme zredukovať kandidátov spomínaného čísla. Najlepšie je to však ukázať na obrázku 3.4. Tu môžme vidieť všetkých možných kandidátov v 3 x 3 stredných troch štvorcoch. Keď sa lepšie pozrieme na prvý a tretí, zistíme, že kandidáti pre číslo 4 sa v nich nachádzajú len v prvom a tretom stĺpci týchto štvorcov. Inak aj povedané, v prvom a tretom štvorci v strednom stĺpci sa číslo 4 nemôže nachádzať. Za to v strednom štvorci sa už nachádzajú kandidáti pre číslo 4 aj v stredom stĺpci. Preto môžme vyškrtnúť kandidátov pre číslo 4 v strednom štvorci v prvom a v tretom stĺpci, lebo v tomto štvorci sa musí číslo 4 nachádzať práve v strednom stĺpci.



Obr. 3.4: Príklad pomôcky Dvojité páry.

3.2.3 Viaceré línie kandidátov

Táto pomôcka je veľmi podobná pomôcke Dvojité páry, avšak v dvoch stĺpoch sa nenachádzajú kandidáti pre konkrétne číslo po dva-krát na dvoch políčkach, ale sa nachádzajú na viacerých políčkach. To opäť zredukuje možných kandidátov v treťom stĺpci či už na jednom alebo troch políčkach.

3.3 Náročné Pomôcky

3.3.1 Zjavný/á pár/trojica/štvorica

Pômocka Zjavné páry patrí medzi tie najužitočnejšie pomôcky a sú zároveň najlepšie zbadateľné. Jej princíp spočíva v tom, že sa nájde dvojica po dvoch kandidátov na dvoch políčkach a v tychto políčkach sa nenachádzajú iný kandidáti. Na obrázku 3.5 môžme vidieť takýto pár v hornom pravom štvorci a to kandodátov pre čísla 5 a 8. V týcto políčkach sa môžu nachádzať iba týto dvaja kandidáti, potom môžme tychto dvoch kandidátov vyškrtnúť z ostatných voľnych políčok. Čo v tomto prípade znamená, že v tomto políčku, kde sme vyškrtli kandidáta pre číslo 5, zostatne už iba jeden kandidát a to pre číslo 3.

2	347	3479	1	458	489	3~~5~~	6	58
1	8	5	3	2	6	7	9	4
346	346	349	458	7	489	1	58	2
4567	24567	2478	4678	48	1	24569	24578	3
3467	23467	123478	9	348	5	246	12478	168
9	34567	13478	2	348	478	456	14578	1568
8	23457	6	457	9	247	245	1245	15
457	1	247	457	6	247	8	3	59
45	9	24	458	1458	3	2456	1245	7

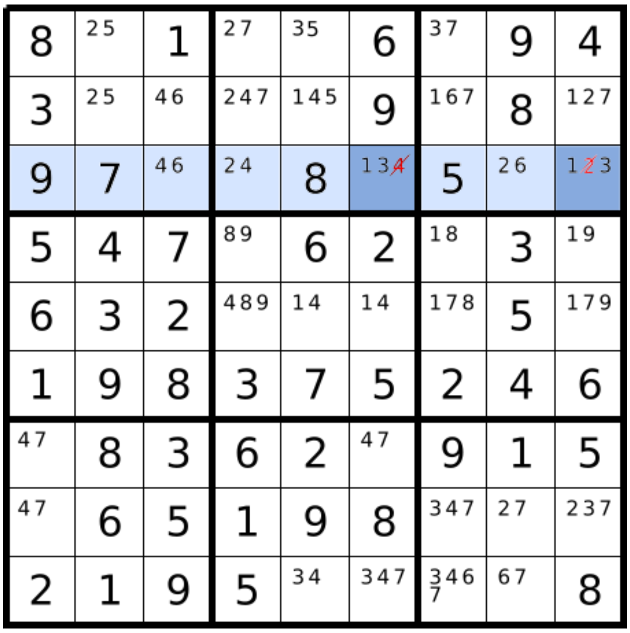
Obr. 3.5: Príklad pomôcky Zjavný pár.

Pre trojice alebo štvorie platí podobný postup, akurát sa nachádzajú kandidáti na iba na troch alebo iba na štyroch políčkach. Niekedy je zjavná trojica zbatateľná v tvare po troch kandidátov, rozdelená po dvoch na troch políčkach alebo zjavná štvorica kandidátov je cez štyri políčka po rôznych počtoch rozdelená. Nezáleží čí sa nachádza pár, trojica alebo štvorica v stĺpci, štvorci alebo v riadku.

3.3.2 Skrytý/á pár/trojica/štvorica

Skrytý pár nie je vždy ľahké nájsť, ale za to keď sa už nájde, tak vie veľmi pomôcť priblížiť hráča k riešeniu. Takýto pár sa nájde medzi skupinami viacerých kandidátov, avšak pre iba tento pár platí, že sa môže nachádzať na voľnych políčkach iba na dvoch miestach. Na obrázku 3.6 sa takyto príklad nachádza v treťom riadku z hora. Pre kandidátov pre čísla 3 a 1 v tomto riadku platí, že sa môžu nachádzať iba na políčkach tmavomodrej farby. Preto kandidáta pre číslo 2 v jednom z týchto políčkom môžme odstrániť a tak isto aj kandidáta pre číslo 4 v druhom políčku.

Skryté trojice a štvorice sa dajú nájsť v podobných situáciách, avšak pri tejto pomôcke trojice sa najdú menej často ako páry, a štvorice sa náchádzajú veľmi ojedinele a to iba v zadaniach z najnáročnejších úrovní.



Obr. 3.6: Príklad pomôcky Skrytý Pár.

3.3.3 X-wings

Pomocou X-Wing pomôcky vieme redukovať možných kandidátov na jednotlivých políčkach, dokonca kandidátov vrámci štvorcov. Princíp tejto pomôcky spočíva v nájdení dvoch párov jedného kandidáta v dvoch riadock alebo v stĺpcoch, ktoré spojením sa vytvorí písmeno **X**, vďaka ktorému sa eliminujú zvyšný kandidáti tohto čísla v danom riadku alebo stĺpci. Najlepšie bude túto pomôcku predstaviť na konkrétnom príklade.

Majme zadanie zadanie už v určitom štádiu riešenia a máme situáciu, kde hladáme kandidáta pre číslo 4. V štyroch štvorcoch ešte nieje jednoznačný kandidat pre toto číslo, ale máme v dvoch riadkoch, v 3. a 6. zhora po dva kandidáty pre číslo 4 (modrou farbou označené na obrázku 3.7). Zároveň veĺmi doležitý faktor pre pomôcku *X-Wing* je splnený a to, že práve tieto štyri čísla 4 sú aj pod sebou v dvoch stĺpcoch a to v 2. a 5. zľava. (označené šipkou na obrázku 3.7)

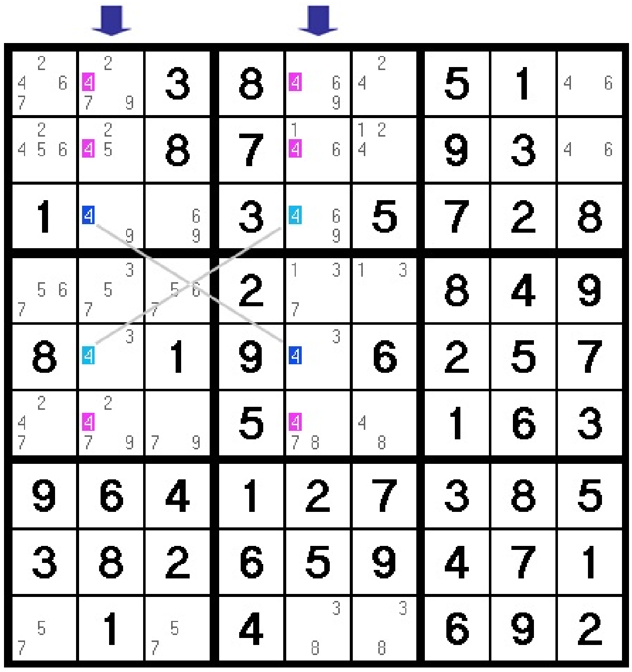
Tieto štyri vyznačené čísla 4 tvoria štvoruholník alebo ak ich spojíme krížom, písmeno **X**. Na základe základných pravidiel, vieme, že v týchto dvoch riadkoch a stĺpcoch môže byť iba po jednom čísle 4. Vďaka tejto pomôcke môžme eliminotvať ostatných kandidátov v ich stĺpcoch (označené ružovou) a ponechať iba týchto štyroch kandidátov. Vďaka tejto eliminácií vieme prípadne prísť na jednoznačného kandidáta pre iné číslo a priblížiť sa tak k riešeniu.

3.3.4 XY-wings pomôcka

Princíp *XY-Wing* pomôcky eliminuje kandidátov pomocou dôležitého konceptu priesečníkov pri riešení Sudoku. Najskôr si predstavíme princíp priesečníkov.

Princíp priesečníkov

Dve políčka sa nazývajú priesečníkmi, ak zdielajú rovnaký riadok, stĺpec alebo malý štvorec 3 x 3. Týmto povedané čísla v týchto políčkach nesmú byť tie isté čísla.



Obr. 3.7: Príklad pomôcky X-wings.

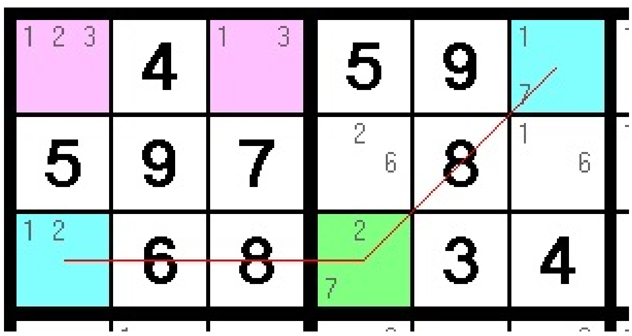
XY-Wing

Táto pomôcka sa vzťahuje na tri políčka. Pre každé z týchto troch políčok je dôležité, aby mali iba po dvoch kandidátov, ktoré sú navzájom logicky prepojené ako to je na obrázku 3.8 označené modrou a zelenou farbou.

Na obrázku môžeme vidieť, že na zeleno vyfarbené políčko má priesečníky s oboma jeho krídlami, modrými políčkami. Na to, aby sme mohli uplatniť tento algoritmus, modré políčka navzájom nemusia mať priesečník, ale musia zdielať jedno a to isté číslo z kandidátov. Zároveň oba kandidáti v zelenóm políčku sa musia tiež nachádzať v jednom z modrých políčok.

Predstavme si, že na zelenom políčku by bolo číslo 7, potom by pravé na modrom políčku bolo číslo 1. Ak by zelené políčko bolo číslo 2, zase ľavé políčiko by bolo číslo 1. Z toho nám vyplýva, že práve jedno z modrých políčok bude číslo 1.

Na základe tohto faktora, vieme povedať, ze kandidátov pre číslo 1 vyznačené ružovou farbou v prvom štvorci môžeme eliminovať a napríklad v tomto prípade vylúštiť ľavý štvorček s jednoznačnými kandidátmi.



Obr. 3.8: Príklad pomôcky XY-wings.

Kapitola 4

Dostupné programy

Popis a komentare k dostupnym programom

Bibliografia

1. FELGENHAUER, B.; JARVIS, F. *Summary of method and results*. 2005. Dostupné tiež z: http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/ed44.html. Online; zverejnené 17-jún-2005.
2. MCGUIRE, G. *There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku - Minimum Number of Clues Problem*. Ed. UNIVERSITY COLLEGE DUBLIN Dublin, I. 2012. Dostupné tiež z: http://www.math.ie/McGuire_V1.pdf. Online; zverejnené 1-januára-2012.
3. SMITH, D. *So you thought Sudoku came from the Land of the Rising Sun...* Ed. GUARDIAN, T. 2005. Dostupné tiež z: https://www.theguardian.com/media/2005/may/15/pressandpublishing.usnews. Online; zverejnené 15-Máj-2005.