Tallová

$$3 + 9 + 10 + 4 + 0 = \boxed{28}$$

① $\mathcal{U} = \mathcal{L}o\{(1,1,1),(3,1,-1)\}$

$\mathbb{R}^3$ so skalárnym súčinom Karolína Vallová

$\mathcal{U}$ je podpriesto $\mathbb{R}^3$

$$\overset{y_1}{} \qquad \overset{y_2}{}$$

$\mathcal{U} = \mathcal{L}o\{(1,1,1),(3,1,-1)\}$

báza $Z = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

ortogonálna báza

$$\vec{x}_1 = \vec{y}_1 = (1,1,1)$$

$$\vec{x}_2 = y_2 - proj_{\vec{x}_1}(\vec{y}_2) = y_2 - \frac{\langle \vec{y}_2, \vec{x}_1 \rangle}{\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle}\vec{x}_1 = \vec{y}_2 - \frac{3}{3}\vec{x}_1 = \vec{y}_2 - \vec{y}_1 \boxed{=}$$

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle = 3$$

$$\boxed{=} (2,0,-2) = x_2$$

$$\langle \vec{y}_2, \vec{x}_1 \rangle = 3 + 1 - 1 = 3$$

$$\langle x_2, x_2 \rangle = 4 + 4 = 8$$

③

$$Z = (\overset{x_1}{(1,1,1)}, \overset{x_2}{(2,0,-2)})$$

$$X = \left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{\langle x_1, x_1 \rangle}}, \frac{x_2}{\sqrt{\langle x_2, x_2 \rangle}}\right) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{3}}, \frac{x_2}{\sqrt{8}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{8}}(2,0,-2)\right)$$

ortonormálna báza X ✓

$$\mathcal{U}^{\perp} = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 : \vec{w} \perp \mathcal{U}\}$$

hľadáte 2 vektory?

dim($\mathbb{R}^3$)=3!

$1+1+1$

$$\langle \vec{w}_1, \vec{y}_1 \rangle = 0 \qquad \vec{w}_1 = (-1,1,1)$$

$-1+1+3$

$$\langle \vec{w}_2, \vec{y}_2 \rangle = 0 \qquad \vec{w}_2 = (-1,1,3)$$

$$X' = \left(\frac{\vec{x}_1'}{\sqrt{3}}, \frac{\vec{x}_2'}{\sqrt{8}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1), \frac{1}{\sqrt{8}}(2,0,2)\right)$$

$$\vec{x}_1' = \vec{w}_1$$

$$\vec{x}_2' = \vec{w}_2 - proj_{\vec{x}_1}(\vec{w}_2) = \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{w}_2, \vec{x}_1' \rangle}{\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle}\vec{x}_1 = \vec{w}_2 - \frac{3}{3}x_1 = \vec{w}_2 - \vec{w}_1 = (2,0,2) = \vec{x}_2'$$

$$Z' = ((-1,1,1),(2,0,2)) \qquad X' = \left(\frac{\vec{x}_1'}{\sqrt{3}}, \frac{\vec{x}_2'}{\sqrt{8}}\right)$$

②

Karolína Vallová

$$\det(A_\alpha - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)^3 - 2(\alpha-\lambda) = 0$$

$$\begin{matrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \end{matrix}$$

$(\alpha-\lambda)[(\alpha-\lambda)^2-2]=0$

$\lambda_1 = \alpha$

$\lambda_2 = \alpha - \sqrt{2}$

$\lambda_3 = \alpha + \sqrt{2}$ ✓

$\mathrm{spec}(A_\alpha) = \{\alpha-\sqrt{2}, \alpha, \alpha+\sqrt{2}\}$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$\alpha + 2\sqrt{2} = x$

~~$\alpha = \sqrt{2}$~~

~~$\det(A_{\sqrt{2}} - \lambda I)$~~

~~$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2}-(\alpha-\sqrt{2}) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}-(\alpha-\sqrt{2}) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}-(\alpha-\sqrt{2}) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha+2\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+2\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \sim$~~

~~$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x^2 & -x & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{array}\right) \sim$~~

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

ak je ~~sa~~ $\mathrm{spec}(A_\alpha)$ trojprvková, má $A_\alpha$ $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ rôzne vlastné hodnoty, tak je $A_\alpha$ diagonalizovateľná pre $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, lebo ~~nikdy~~ $\alpha - \sqrt{2} \neq \alpha \neq \alpha + \sqrt{2}$ nikdy. ✓ ✓

→ $A_\alpha$ je diagonalizovateľná pre $\alpha \in \mathbb{R}$

→ $A_\alpha$ má vlastnú hodnotu rovnú $\sqrt{2}$ ~~ale~~ ~~[illegible]~~ pre $\alpha = 2\sqrt{2}$ alebo $\alpha = 0$

↘ alebo $\alpha = \sqrt{2}$, že? −1b

9

Karolina Vallová

③ $\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$

$\frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle + \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y}\rangle\right) =$

~~$= \frac{1}{2}\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle + \frac{1}{2}\langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y}\rangle$~~

$= \frac{1}{2}\left(\langle \vec{x}, \vec{x}+\vec{y}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle + \langle \vec{x}, \vec{x}-\vec{y}\rangle - \langle \vec{y}, \vec{x}-\vec{y}\rangle\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{x}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle +\right.$

$\left. + \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle - \cancel{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle} - \cancel{\langle \vec{y}, \vec{x}\rangle} + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(2\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + 2\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle\right) = \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

✓

⑩

④

Karolína Vallová

$P^2 = P = P^*$ ak $\vec{x} \in Ker(P)$ a $\vec{y} \in Im(P)$, tak $\vec{x} \perp \vec{y}$

$P\vec{x} = \lambda\vec{x}$ , $\vec{x} \neq \vec{0}$

$P\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$

$P\vec{x} - \lambda I\vec{x} = \vec{0}$

$(P - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$\vec{x} \in ker(P - \lambda I)$

$\lambda = 0$

$\vec{x} \in ker(P)$

$\vec{x} \in ker(P)$

$Ker(P) = det(P - \lambda I)$

podpriestor = číslo ?!

→ načo robíte toto ?

ak $\vec{x} \in ker(P)$

tak $P(\vec{x}) = \vec{0}$

ak $\vec{y} \in Im(P)$

$\vec{y} \neq P(\vec{x})$

$P: V \to V$

$P^*: V \to V$

$P^2: V \to V$

ak $\vec{x} \in ker(P)$ , $P\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{0} \in ker(P)$ ?

ak $\vec{y} \in ker(P)$, $\vec{y} = P(\vec{x}) = P\vec{x}$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, P\vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = 0$

to nie je ten istý $\vec{x}$, že ?

$P = P^*$

$ker(P) = ker(P^*)$

$ker(P) = (Im(P))^\perp$

tak ker(P) je kolmý na Im(P)

teda $\vec{x}$ ~~je~~ $\perp \vec{y}$

✓

- Veľa vecí tu je napísaných: niektoré pravdivé, iné nepravdivé, ďalšie nezmyselné.
- Čo ja teraz s tým?

④

Scanned with CamScanner

Karolína
Vallová

④

$P^2 = P = P^*$ ak $\vec{x} \in Ker(P)$ a $\vec{y} \in Im(P)$, tak $\vec{x} \perp \vec{y}$

$P\vec{x}_q = \lambda \vec{x}$ , $\vec{x} \neq \vec{0}$

$P\vec{x} - \lambda \vec{x} = \vec{0}$

$P\vec{x} - \lambda I \vec{x} = \vec{0}$

$(P - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$\vec{x} \in ker(P - \lambda I)$

$\lambda = 0$

$\vec{x} \in ker(P)$

$\vec{x} \in ker(P)$

$Ker(P) = det(P - \lambda I)$

ak $\vec{x} \in Ker(P)$

tak $P(\vec{x}) = \vec{0}$

~~ak $\vec{y} \in Im(P)$~~

~~tak $\vec{y} = P(\vec{x})$~~

$P : V \rightarrow V$

$P^* : V \rightarrow V$

$P^2 : V \rightarrow V$

ak $\vec{x} \in ker(P)$ , $P\vec{x} = \vec{0}$ , $\vec{0} \in ker(P)$

ak $\vec{y} \in ker(P)$ , $\vec{y} = P(\vec{x}) = P\vec{x}$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, P\vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = 0$

Karolína Vallová

⑤

$AB = BA \qquad B^2 = 0$

λ je vlastnou hodnotou A

práve vtedy ak λ je vlastnou hodnotou

A + B

$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \ , \vec{x} \neq \vec{0}$

$(A+B)\vec{x} = \lambda\vec{x} \ , \vec{x} \neq \vec{0}$

$A\vec{x} + B\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$\lambda\vec{x} + B\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$B\vec{x} = \lambda\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$

$B\vec{x} = \vec{0}$

$B^2\vec{x} = \vec{0}$

$B^2 = 0$

Domotané. Čo sú predpoklady? Čo je záver?

Vy dokazujete skutočne toto:

$A + B = A \Rightarrow B^2 = 0$

$AB = BA$

$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \ , \ \vec{x} \neq \vec{0}$

$BA\vec{x} = B\lambda\vec{x} = \lambda B\vec{x} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$

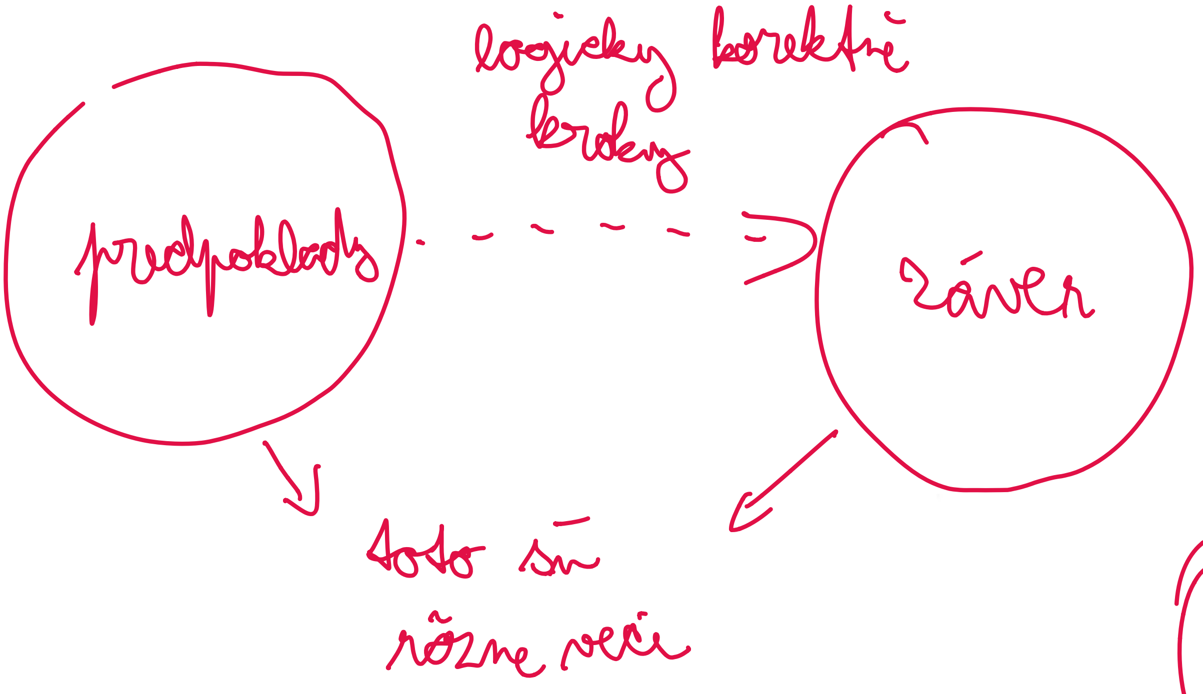
$B\vec{x} = \vec{0}$

$AB\vec{x} = A\vec{0} = \vec{0}$

$BA\vec{x} = AB\vec{x} = \vec{0}$

$AB = BA$

detto.



0