

求解混合整数双层线性规划问题的分支定界算法研究

报告人: 杜洪博

导 师: 寇彩霞

北京邮电大学 理学院

2024 年 4 月 15 日

目录

- ① 双层规划问题
- ② 问题背景
- ③ 求解混合整数双层线性规划问题的分支定界算法
- ④ 未来工作安排

- ① 双层规划问题
- ② 问题背景
- ③ 求解混合整数双层线性规划问题的分支定界算法
- ④ 未来工作安排

双层规划问题简介¹

双层规划问题可以表示为如下形式:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} & F(x, y) \\ & G(x, y) \leq 0 \\ & y \in \arg \min_{y'} \{f(x, y') : g(x, y') \leq 0\}, \end{aligned} \tag{1}$$

- x 为上层 (Upper/Leader) 变量;
- y 为下层 (Lower/Follower) 变量;
- $F(x, y)$ 和 $f(x, y)$ 分别为上层和下层的目标函数;
- $G(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 分别为上层和下层的约束条件.

¹Ankur Sinha, Pekka Malo, and Kalyanmoy Deb. "A Review on Bilevel Optimization: From Classical to Evolutionary Approaches and Applications". In: [IEEE Transactions on Evolutionary Computation](#) 22.2 (Apr. 2018). Conference Name: IEEE Transactions on Evolutionary Computation, pp. 276–295. ISSN: 1941-0026.

双层规划问题简介

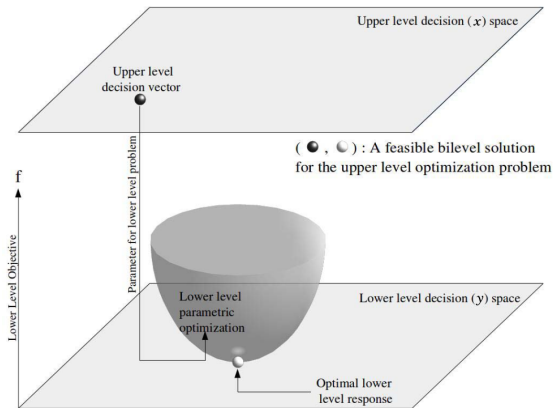


图 1: 双层规划问题示意图

- ① 双层规划问题
- ② 问题背景
- ③ 求解混合整数双层线性规划问题的分支定界算法
- ④ 未来工作安排

问题背景

在多能互补电力系统优化问题中需要同时考虑系统经济性和供电稳定性，为了刻画该问题，可以将其建模为混合整数双层规划问题。

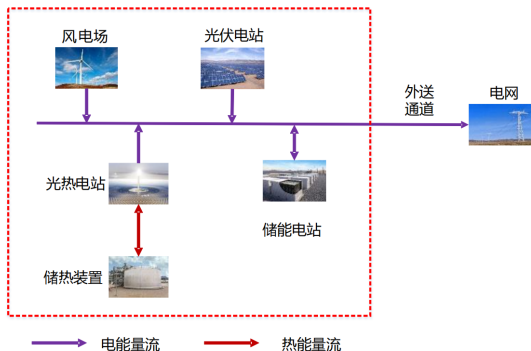


图 2: 系统示意图

- ① 双层规划问题
- ② 问题背景
- ③ 求解混合整数双层线性规划问题的分支定界算法
- ④ 未来工作安排

Fischetti, M., Ljubić, I., Monaci, M. et al. On the use of intersection cuts for bilevel optimization. Math. Program. 172, 77–103 (2018).

混合整数双层线性规划问题可以表示为如下形式:

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} \quad & c_x^T x + c_y^T y \\
 & G_x x + G_y y \leq q \\
 & x_j \text{ integer}, \forall j \in J_x \\
 & y \in \arg \min_{y'} \{ d^T y' : Ax + By' \leq b, \\
 & \quad y'_j \text{ integer}, \forall j \in J_y \}
 \end{aligned} \tag{2}$$

最优值函数单层化

引入最优值函数 $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \min_{y'} \{ d^T y' : By' \leq b - Ax, y'_j \text{ integer}, \forall j \in J_y \} \quad (3)$$

则原问题可以表示为:

$$\min_{x,y} \quad c_x^T x + c_y^T y \quad (4a)$$

$$G_x x + G_y y \leq q \quad (4b)$$

$$Ax + By \leq b, \quad (4c)$$

$$x_j \text{ integer}, \forall j \in J_x \quad (4d)$$

$$y_j \text{ integer}, \forall j \in J_y \quad (4e)$$

$$d^T y \leq \Phi(x) \quad (4f)$$

High Point Relaxation(HPR)

去除问题 (4) 中的约束(4f), 得到 HPR:

$$\min_{x,y} c_x^T x + c_y^T y \quad (5a)$$

$$G_x x + G_y y \leq q \quad (5b)$$

$$Ax + By \leq b, \quad (5c)$$

$$x_j \text{ integer}, \forall j \in J_x \quad (5d)$$

$$y_j \text{ integer}, \forall j \in J_y \quad (5e)$$

HPR 的最优值是问题 (4) 的一个下界.

当 HPR 无界时, 双层问题可能不可行、无界或有最优解².

Bilevel problem:

$$\max_{x,y} x + y$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$x \in \mathbb{Z}$$

$$y \in \arg \max_{y'} \{d \cdot y' : y' \geq x, y' \in \mathbb{Z}\}.$$

HPR:

$$\max_{x,y} x + y$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$y \geq x$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$d = 1$, 不可行; $d = 0$, 无界; $d = -1$, 有最优解.

Aussmption1

HPR 的 LP 松弛可行集为有界的多面体.

²Pan Xu and Lizhi Wang. "An exact algorithm for the bilevel mixed integer linear programming problem under three simplifying assumptions". In: *Computers & Operations Research* 41 (Jan. 2014), pp. 309–318. ISSN: 0305-0548. DOI: 10.1016/j.cor.2013.07.016. (Visited on 04/10/2024).

假设变量均有界, 且 HPR 可行.
最优解一定可以取到吗?

MIBLP:

- Mixed integer-Continuous:
使用 BLP 常用的单层化方法重述.
- Integer-Mixed integer:
枚举上层变量.
- Continuous-Mixed integer;
- Mixed integer-Mixed integer.

当连续的上层变量出现在下层时, 会导致双层问题最优解无法取到的情况³.

$$\begin{aligned} \inf_{x,y} \quad & x - y \\ & 0 \leq x \leq 1 \\ & y \in \arg \min_{y' \in \mathbb{Z}} \{y' : y' \geq x, 0 \leq y' \leq 1\}. \end{aligned}$$

等价于求解:

$$\inf_x \{x - \lceil x \rceil : 0 \leq x \leq 1\}$$

Aussmption2

连续的上层变量不会出现在下层问题中.

³M. Köppe, M. Queyranne, and C. T. Ryan. "Parametric Integer Programming Algorithm for Bilevel Mixed Integer Programs". en. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 146.1 (July 2010), pp. 137–150. ISSN: 1573-2878. DOI: 10.1007/s10957-010-9668-3. (Visited on 04/12/2024).

枚举

定义

$J_F : J_F \subseteq J_x$, 表示出现在下层问题中的上层变量 (链接变量) 下标的集合.

尝试所有可能的上层变量 $x_j = x_j^* (j \in J_F)$ 的组合, 在双层可行集中寻找最优解.

- $\Phi(x^*)$
- restrict HPR:

$$\min_{x \in X, y \in Y} c_x^T x + c_y^T y \quad (6a)$$

$$G_x x + G_y y \leq q \quad (6b)$$

$$Ax + By \leq b, \quad (6c)$$

$$d^T y \leq \Phi(x^*), \quad (6d)$$

$$x_j = x_j^*, \forall j \in J_F \quad (6e)$$

Algorithm 1: 求解 MIBLP 的分支定界算法

Init: 在 HPR 上应用标准的分支定界算法, 并关闭当前最优解的更新步骤

```

1 for 未探测的节点无法进行分支 do
2   令  $(x^*, y^*)$  为当前节点 HPR 的整数解;
3   计算下层问题的值函数  $\Phi(x^*)$ ;
4   if  $d^T y^* \leq \Phi(x^*)$  then
5     当前解  $(x^*, y^*)$  为双层可行解: 更新最优解并继续探测当前节点;
6   else
7     if 变量  $x_j (j \in J_F)$ , 不是通过分支固定 then
8       在不是通过分支固定的  $x_j (j \in J_F)$  上继续分支, 即使  $x_j^*$  为整数;
9     else
10      令  $(\hat{x}, \hat{y})$  为当前节点 restricted HPR 的最优解;
11      可能使用  $(\hat{x}, \hat{y})$  更新当前最优解, 并继续探测当前节点;

```

- ① 双层规划问题
- ② 问题背景
- ③ 求解混合整数双层线性规划问题的分支定界算法
- ④ 未来工作安排

未来工作安排

- ① 继续学习文献中的 Intersection Cuts 方法;
- ② 复现算法并进行初步数值实验;
- ③ 根据电力系统优化模型的特点, 结合分解或割平面等方法进一步提高计算效率.

谢谢各位老师同学！