求解混合整数双层线性规划问题的分支定界算法研究

报告人: 杜洪博

导　师: 寇彩霞

北京邮电大学 理学院

2024 年 4 月 21 日

目录

双层规划问题简介

双层规划问题可以表示为如下形式:

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} F(x,y) \\ &\qquad G(x,y) \le 0 \\ &\qquad y \in \arg\min_{y'} \{f(x,y') : g(x,y') \le 0\}, \end{aligned} \tag{1}$$

- x 为上层 (Upper/Leader) 变量;
- y 为下层 (Lower/Follower) 变量;
- $F(x,y)$ 和 $f(x,y)$ 分别为上层和下层的目标函数;
- $G(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 分别为上层和下层的约束条件;
- 领导者先做出决策, 并预测跟随者的反应.

双层规划问题简介

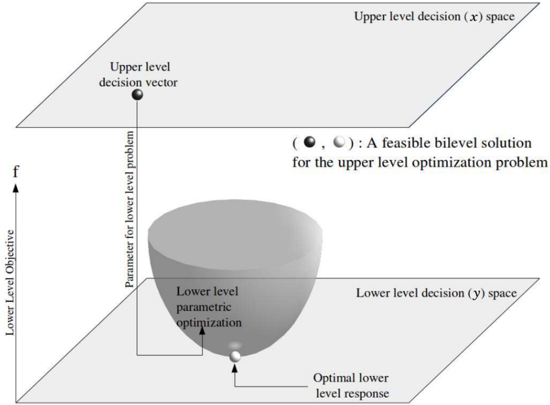

图 1: 双层规划问题示意图

问题背景

在多能互补电力系统优化问题中需要同时考虑系统经济性和供电稳定性，为了刻画该问题，可以将其建模为混合整数双层规划问题。

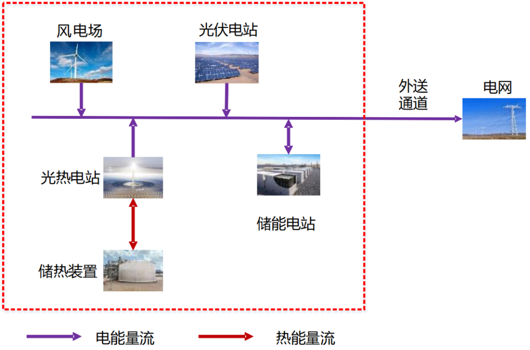

图 2: 系统示意图

Fischetti M, Ljubić I, Monaci M, et al. A new general-purpose algorithm for mixed-integer bilevel linear programs[J]. Operations Research, 2017, 65(6): 1615-1637.

MIBLP

混合整数双层线性规划问题可以表示为如下形式:

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c_x^T x + c_y^T y \\
& G_x x + G_y y \le q \\
& x_j \text{ integer}, \forall j \in J_x \\
& y \in \arg\min_{y'} \{ d^T y' : Ax + By' \le b, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad y'_j \text{ integer}, \forall j \in J_y \}
\end{aligned} \tag{2}
$$

- J_x 和 J_y 分别为上层和下层整数变量的下标集合.

值函数单层化重述

引入值函数 $\Phi(x)$ 表示 x 对应下层问题的最优值:

$$\Phi(x) = \min_{y}\{d^T y : By \leq b - Ax, y_j \text{ integer}, \forall j \in J_y\} \tag{3}$$

则原问题可以表示为:

$$\min_{x,y} \quad c_x^T x + c_y^T y \tag{4a}$$
$$G_x x + G_y y \leq q \tag{4b}$$
$$Ax + By \leq b, \tag{4c}$$
$$x_j \text{ integer}, \forall j \in J_x \tag{4d}$$
$$y_j \text{ integer}, \forall j \in J_y \tag{4e}$$
$$d^T y \leq \Phi(x) \tag{4f}$$

High Point Ralaxation(HPR)

去除问题 (4) 中的约束(4f), 得到 HPR:

$$\min_{x,y} \quad c_x^T x + c_y^T y \tag{5a}$$

$$G_x x + G_y y \leq q \tag{5b}$$

$$Ax + By \leq b \tag{5c}$$

$$x_j \text{ integer}, \forall j \in J_x \tag{5d}$$

$$y_j \text{ integer}, \forall j \in J_y \tag{5e}$$

存在的困难:

- HPR 可能会无界;
- 双层问题的最优解可能无法取到.

当 HPR 无界时，双层问题可能不可行、无界或有最优解[1].

Bilevel problem:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x + y \\ & 0 \le x \le 2 \\ & x \in \mathbb{Z} \\ & y \in \arg\max_{y'}\{dy' : y' \ge x, y' \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

HPR:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x + y \\ & 0 \le x \le 2 \\ & y \ge x \\ & x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- $d = 1 \quad \Rightarrow \Phi(x) = \infty$, 双层问题不可行;
- $d = 0 \quad \Rightarrow \Phi(x)$ 对于 $\forall y \in Y$ 都可行, 双层问题无界;
- $d = -1 \ \Rightarrow (x^*, y^*) = (2, 2)$, 双层问题有最优解.

Aussmption1

变量 x, y 均为有界的.

[1] Pan Xu and Lizhi Wang. “An exact algorithm for the bilevel mixed integer linear programming problem under three simplifying assumptions”. In: Computers & Operations Research 41 (Jan. 2014), pp. 309–318. ISSN: 0305-0548. DOI: 10.1016/j.cor.2013.07.016. (Visited on 04/10/2024).

假设变量均有界, 且 HPR 可行.
最优解一定可以取到吗?

MIBLP:

- Mixed integer-Contiuous:
  使用 BLP 常用的单层化方法重述.
- Integer-Mixed integer:
  枚举上层变量.
- Contiuous-Mixed integer;
- Mixed integer-Mixed integer.
  如果上层变量中控制下层决策的变量 (链接变量) 是连续的, 那么双层问题的最优解可能无法取到.

当链接变量连续时，会导致双层问题最优解可能无法取到的情况[2].

$$\inf_{x,y} \quad x - y$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$y \in \arg\min_{y' \in \mathbb{Z}} \{y' : y' \geq x, 0 \leq y' \leq 1\}.$$

等价于求解:

$$\inf_{x} \{x - \lceil x \rceil : 0 \leq x \leq 1\}$$

显然下确界为 -1, 但无法达到.

Aussmption2

连续的上层变量不会出现在下层问题中.

[2] M. Köppe, M. Queyranne, and C. T. Ryan. "Parametric Integer Programming Algorithm for Bilevel Mixed Integer Programs". en. In: Journal of Optimization Theory and Applications 146.1 (July 2010), pp. 137–150. ISSN: 1573-2878. DOI: 10.1007/s10957-010-9668-3. (Visited on 04/12/2024).

枚举

定义

J_F : $J_F \subseteq J_x$, 表示链接变量的下标的集合.

尝试所有可能的上层变量 $x_j = x_j^*(j \in J_F)$, 在双层可行集中寻找最优解.

- $\Phi(x^*)$
- restricted HPR:

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c_x^T x + c_y^T y && \text{(6a)}\\
& G_x x + G_y y \leq q && \text{(6b)}\\
& Ax + By \leq b && \text{(6c)}\\
& x_j \text{ integer}, \forall j \in J_x && \text{(6d)}\\
& y_j \text{ integer}, \forall j \in J_y && \text{(6e)}\\
& d^T y \leq \Phi(x^*) && \text{(6f)}\\
& x_j = x_j^*, \forall j \in J_F && \text{(6g)}
\end{aligned}
$$

基本思想

针对值函数单层化重述的问题使用分支定界算法

通过分支求解 HPR 以及动态的执行 $d^T y \le \Phi(x)$ 约束.

给定 HPR 线性松弛问题的最优解 (x^*, y^*):

- (x^*, y^*) 对 HPR 不可行 (不满足整数约束)$\rightarrow$ 继续进行分支;
- (x^*, y^*) 对 HPR 可行, 且满足 $d^T y^* \le \Phi(x^*) \rightarrow$ 当前解为双层可行解, 正常进行最优解的更新;
- (x^*, y^*) 对 HPR 可行, 但 $d^T y^* > \Phi(x^*) \rightarrow (x^*, y^*)$ 不是双层可行解 (需要特殊处理).

Algorithm 1: 求解 MIBLP 的分支定界算法

Init: 在 HPR 上应用标准的分支定界算法，并关闭当前最优解的更新步骤

for 在每个无法继续进行标准分支的未探明节点上 **do**

  令 (x^*, y^*) 为当前节点 HPR 的整数解;

  计算下层问题的值函数 $\Phi(x^*)$;

  if $d^T y^* \le \Phi(x^*)$ **then**

    当前解 (x^*, y^*) 为双层可行解：更新最优解，探明当前节点;

  else

    if 变量 $x_j (j \in J_F)$，不是通过分支固定 **then**

      在不是通过分支固定的 $x_j (j \in J_F)$ 上继续分支，即使 x_j^* 为整数，以减少其在子节点之中的搜索区域;

    else

      令 $(\hat{x}, \hat{y})$ 为当前节点 restricted HPR 的最优解;

      使用 $(\hat{x}, \hat{y})$ 更新当前最优解，探明当前节点;

未来工作安排

1. 继续学习文献中的 Intersection Cuts 方法;
2. 复现算法并进行初步数值实验;
3. 根据电力系统优化模型的特点, 结合分解或割平面等方法进一步提高计算效率.

谢谢各位老师和同学！