review

1 Preliminary

- 1. Sets and Indices:
 - •
 - •
- 2. Variables:
- 3. Parameters:

2 Benders Decomposition

2.1 Unified Primal Subproblems for Benders Decomposition

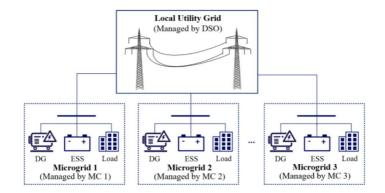


图 1: 系统结构示意图

为了表示方便, 将原始模型以矩阵形式重新表示为如下模型:

$$\min_{x,y,z} \quad \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} + \sum_{i} \mathbf{b}_{i}^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_{i} + \sum_{i} \mathbf{c}_{i}^{\mathrm{T}} \mathbf{z}_{i}$$
 (1a)

$$s.t. \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) \ge \mathbf{d} \tag{1b}$$

$$\mathbf{B}_i \mathbf{x} + \mathbf{C}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{z}_i \ge \mathbf{e}_i, \forall i \tag{1c}$$

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i}, \forall i \tag{1d}$$

根据标准的 Benders 分解方法, 原问题 (1a)-(1d) 被划分为一个上层主问题 (对应于 DSO 的决策) 和一组下层子问题 (对应于个体 MCs 的决策). 主问题表示为:

$$\min_{\mathbf{x},\theta} \quad \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \sum_{i} \theta_{i} \tag{2a}$$

s.t.
$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) \ge \mathbf{d}$$
 (2b)

$$\theta_i \ge 0, \forall i$$
 (2c)

其中 θ_i 为非负连续变量, 用 DSO 近似表示微电网 i 的运行成本. 在每次 迭代中, DSO 求解主问题, 并将一个试探解 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta}_i)$ 传递给每个 MC($\forall i$). 反过来, 每个 MC 依次求解两个 Benders 子问题, 以检验试探解的可行性和最优性, 然后通过 Benders 割反馈给 DSO. 可行性子问题为 ($\forall i$):

$$\min_{y_i, z_i, s_i} \quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mathbf{s}_i \tag{3a}$$

s.t.
$$\mathbf{C}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{s}_i \ge \mathbf{e}_i - \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{x}}$$
 (3b)

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i}, \mathbf{s}_i \ge \mathbf{0} \tag{3c}$$

其中 1 是一个元素为 1 的向量;0 是一个元素为 0 的向量; s_i 是非负松弛变量的向量. 当且仅当 (3a)-(3c) 的最优值为 0 时, 试探解 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta_i})$ 是可行的,

再继续求解最优性子问题 (4a)-(4c); 否则, 将一个可行割返回到主问题, .

$$\min_{\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i} \quad \mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_i + \mathbf{c}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{z}_i \tag{4a}$$

s.t.
$$\mathbf{C}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{z}_i \ge \mathbf{e}_i - \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{x}}$$
 (4b)

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i} \tag{4c}$$

在求解 (4a)-(4c) 后, MC i 检查得到的解 ($\hat{\mathbf{y}}_i, \hat{\mathbf{z}}_i$), 检查 DSO 近似的 微电网运行成本 $\hat{\theta}_i$ 是否达到 $\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{y}}_i + \mathbf{c}_i^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{z}}_i$. 如果没有, 则将一个最优割返回 到主问题 (2a)-(2d), 以重新估计微电网运行成本; 否则, MC i 接受试探解 ($\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta}_i$), 并且, 如果后续迭代中电力交换计划不变, 则与 DSO 达成协议. 当且仅当所有的 MC 都与 DSO 达成协议时, 迭代终止.

可以将两个子问题合并统一表示为如下形式:

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{z} \in \mathbf{S}_i} \quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mathbf{s}_i + \xi_i + \zeta_i \tag{5a}$$

s.t.
$$\mathbf{b}_{i}^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_{i} + \mathbf{c}_{i}^{\mathrm{T}} \mathbf{z}_{i} + \xi_{i} \ge \hat{\theta}_{i}$$
 (5b)

$$-\mathbf{b}_{i}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_{i} - \mathbf{c}_{i}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_{i} + \zeta_{i} > -\hat{\theta}_{i} \tag{5c}$$

$$\mathbf{C}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{s}_i \ge \mathbf{e}_i - \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{x}} \tag{5d}$$

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i}, \mathbf{s}_i \ge \mathbf{0}, \xi_i, \xi_i \ge 0$$
 (5e)

其中, ξ_i , ζ_i 为额外的非负松弛变量. 当且仅当所有松弛变量 \mathbf{s}_i , ξ_i , ζ_i 在最优解处都为 0, MC i 接受试探解 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta_i})$.

主问题 (2a)-(2d) 和统一子问题 (5a)-(5e) 可以分别表示成如下紧凑的形式:

$$\min_{\mathbf{x}'} \quad \mathbf{a'}^{\mathrm{T}} \mathbf{x'} \tag{6a}$$

s.t.
$$\mathbf{H}(\mathbf{x}') \ge \mathbf{d}'$$
 (6b)

其中 x' 为 x 中元素与 θ_i ($\forall i$) 的聚合, **H** 为定义在 \mathbf{x}' 上的约束.

$$\min_{\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{s}_i'} \quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mathbf{s}_i' \tag{7a}$$

s.t.
$$\mathbf{C}'_{i}\mathbf{y}_{i} + \mathbf{D}'_{i}\mathbf{z}_{i} + \mathbf{s}'_{i} \ge \mathbf{e}'_{i} - \mathbf{B}'_{i}\widehat{\mathbf{x}}'$$
 (7b)

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i}, \mathbf{s}_i' \ge \mathbf{0} \tag{7c}$$

其中 \mathbf{s}_i' 为 ξ_i, ζ_i 与 \mathbf{s}_i 中所有元素的聚合.

2.2 Benders Cuts for Mixed-Integer Linear Subproblems

通过上述过程可知, 统一子问题 (7a)-(7c) 是一个混合整数规划问题, 常用的基于对偶化的 Benders 割生成方法无法实现原优化问题 (1a)-(1d) 可行域的外线性化 (outer linearization).

引入辅助 01 变量向量 $\tilde{\mathbf{z}}_i$, 限制 \mathbf{z}_i 等于 $\tilde{\mathbf{z}}_i$, 通过这样的变化, 可以将 \mathbf{z}_i 中的所有元素转化为连续变量. 即, 将 (7a)-(7c) 等价转化为如下形式:

$$\min_{\mathbf{y}_{i}, \mathbf{z}_{i}, \tilde{\mathbf{z}}_{i}, s'i} \quad \mathbf{1}^{\mathbf{T}} \mathbf{s}'_{i} \tag{8a}$$

s.t.
$$\mathbf{C}_{i}'\mathbf{y}_{i} + \mathbf{D}_{i}'\mathbf{z}_{i} + s_{i}' \ge \mathbf{e}_{i}' - \mathbf{B}_{i}'\hat{\mathbf{x}}' \quad (\boldsymbol{\mu}_{i})$$
 (8b)

$$\mathbf{z}_i = \tilde{\mathbf{z}}_i \quad (\boldsymbol{\nu}_i) \tag{8c}$$

$$\mathbf{s}_i' \ge \mathbf{0} \tag{8d}$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_i \in \{0, 1\}^{K_i} \tag{8e}$$

其中, μ_i 和 ν_i 分别为 (8b) 和 (8c) 的对偶变量的向量. 然后, 将 (8a)-(8e) 重写成以下形式:

$$\min_{\tilde{\mathbf{z}}_i \in \{0,1\}^{K_i}} \left\{ \min_{(y_i, z_i, s_i') \in P_i} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} s' \right\}$$
 (9a)

其中, $P_i = \{\text{Constraints }(8b) - (8d)\}$, 由于转换掉了 \mathbf{z}_i 的整数约束, 所以 (9a) 是一个线性规划问题. 因此, 对内层问题进行对偶化并变换为如下形式:

$$\min_{\tilde{\mathbf{z}}_{i} \in \{0,1\}^{K_{i}}} \left\{ \max_{(\boldsymbol{\mu}_{i}, \boldsymbol{\nu}_{i}) \in \mathcal{Q}_{i}} \left\{ \left(\mathbf{e}_{i}^{\prime} - \mathbf{B}_{i}^{\prime} \hat{\mathbf{x}}^{\prime}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}_{i} + \tilde{\mathbf{z}}_{i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nu}_{i} \right\} \right\}$$
(9b)

其中, $Q_i = \{ \mathbf{C}_i \boldsymbol{\mu}_i = 0, \mathbf{D}_i^{\prime \mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\nu}_i = 0, 0 \le \boldsymbol{\mu}_i \le 1 \}$, 根据极小极大不等式, 可以得到以下关系:

$$\min_{\tilde{\mathbf{z}}_{i} \in \{0,1\}^{K_{i}}} \left\{ \max_{(\boldsymbol{\mu}_{i}, \boldsymbol{\nu}_{i}) \in \mathcal{Q}_{i}} \left\{ \left(\mathbf{e}_{i}^{\prime} - \mathbf{B}_{i}^{\prime} \hat{\mathbf{x}}^{\prime}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}_{i} + \tilde{\mathbf{z}}_{i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nu}_{i} \right\} \right\} \\
\geq \max_{(\boldsymbol{\mu}_{i}, \boldsymbol{\nu}_{i}) \in \mathcal{Q}_{i}} \left\{ \min_{\tilde{\mathbf{z}}_{i} \in \{0,1\}^{K_{i}}} \left\{ \left(\mathbf{e}_{i}^{\prime} - \mathbf{B}_{i}^{\prime} \hat{\mathbf{x}}^{\prime}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}_{i} + \tilde{\mathbf{z}}_{i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nu}_{i} \right\} \right\}$$
(9c)

由于 $\tilde{\mathbf{z}}_i$ 是 01 变量, 所以可以通过枚举 $\tilde{\mathbf{z}}_i$ 的 0 和 1 可能的组合, 来确定 $\tilde{\mathbf{z}}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nu}_i$ 的最优值. 即:

$$\min_{\tilde{\mathbf{z}}_i \in \{0,1\}^{K_i}} \tilde{\mathbf{z}}_i^{\mathrm{T}} v_i = \max_{\boldsymbol{\omega}_i \in \mathcal{O}_i} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\omega}_i$$
 (9d)

其中, $\mathcal{O}_i = \{\omega_i \leq 0, \omega_i \leq \nu_i\}$. 于是可以得到 (9c) 右侧的等价表示:

$$\max_{(\boldsymbol{\mu}_{i},\boldsymbol{\nu}_{i})\in\mathcal{Q}_{i}} \left\{ \left(\mathbf{e}_{i}^{\prime} - \mathbf{B}_{i}^{\prime}\hat{\mathbf{x}}^{\prime}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}_{i} + \min_{\tilde{\mathbf{z}}_{i}\in\{0,1\}^{K_{i}}} \tilde{\mathbf{z}}_{i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nu}_{i} \right\}$$

$$= \max_{(\boldsymbol{\mu}_{i},\boldsymbol{\nu}_{i})\in\mathcal{Q}_{i}} \left\{ \left(\mathbf{e}_{i}^{\prime} - \mathbf{B}_{i}^{\prime}\hat{\mathbf{x}}^{\prime}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}_{i} + \max_{\boldsymbol{\omega}_{i}\in\mathcal{O}_{i}} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\omega}_{i} \right\} \tag{9e}$$

其中,右侧就变成了一个线性规划问题.可以该问题将重写为如下形式 (记为统一的对偶子问题):

$$F_{D,i}^* = \max_{(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\nu}_i, \boldsymbol{\omega}_i) \in \mathcal{Q}_i \cap \mathcal{O}_i} \left\{ (\mathbf{e}_i' - \mathbf{B}_i' \hat{\mathbf{x}}')^{\mathrm{T}} \, \boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\omega}_i \right\}$$
(10a)

其中, $F_{D,i}^*$ 为与 $\hat{\mathbf{x}}'$ 有关的最优值, 并且 μ_i 和 ω_i 有最优解 $(\hat{\mu}_i, \hat{\omega}_i)$.

因此, MC i 求解 (10a) 以检查 DSO 在每次迭代中传递过来的试探解 $\hat{\mathbf{x}}$, 如果 $F_{D,i}^* > 0$, 则 MC i 返回如下的割 (记为统一 Benders 割):

$$\left(\mathbf{e}_{i}^{\prime} - \mathbf{B}_{i}^{\prime} x^{\prime}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{i} + \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{\omega}}_{i} \leq 0 \tag{10b}$$

2.3 Feasibility Restoration Cuts for Mitigating Duality Gap

由于 01 变量 $\tilde{\mathbf{z}}_i$ 的存在, 可能会使得 $F_{D,i}^*$ 与统一原始子问题 (7a)-(7c) 之间产生对偶间隙. (7a)-(7c) 的目标函数值为正对应 DSO 传递的试探解 $\hat{\mathbf{x}}'$ 是不可行的, 这种情况下应当将该试探解割掉. 考虑以下两种情况:

- 1. $F_{D,i}^*$ 为正, 说明 $\hat{\mathbf{x}}'$ 违反了 (10b), 当后续迭代 (10b) 加入到主问题后, 该试探解将被割掉.
- 2. $F_{D,i}^*$ 非正, 说明 $\hat{\mathbf{x}}'$ 没有违反 (10b), 此时 (10b) 就无法割掉该试探解, 且后续迭代中主问题的最优解就会被卡在 $\hat{\mathbf{x}}'$ 处. 也就是说, 统一Benders 割还不够紧.

为了解决第二种情况, 必要时 MCi 在求解统一对偶子问题后, 还需要求解如下可行性恢复子问题:

$$F_{F,i}^* = \min_{\mathbf{x}', \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i} \quad \Delta_i(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}')$$
(11a)

s.t.
$$\mathbf{B}_{i}'\mathbf{x}' + \mathbf{C}_{i}\mathbf{y}_{i}' + \mathbf{D}_{i}'\mathbf{z}_{i} \ge \mathbf{e}_{i}'$$
 (11b)

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i} \tag{11c}$$

其中 $\Delta_i(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}')$ 表示试探解 $\hat{\mathbf{x}}'$ 与满足 (11b)-(11c) 的任意解之间可行性违 反程度的度量, 如下所示:

$$\Delta_i(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}') = \sum_h \frac{|x_h' - \hat{x}_h'|}{\vartheta_h}$$
 (11d)

其中 x'_h 和 \hat{x}'_h 分别为 \mathbf{x}' 和 $\hat{\mathbf{x}}'$ 中的元素, h 为元素的索引, ϑ_h 为与 \hat{x}'_h 相 关的归一化因子, 如下所示:

$$\vartheta_h = \begin{cases} |\hat{x}_h'|, & if \, |\hat{x}_h'| > 0\\ \tau, & if \, |\hat{x}_h'| = 0 \end{cases}, \forall h$$
(11e)

其中 τ 是一个足够小的正数. 引入一个辅助连续变量 σ_h 来表示 $|x'_h - \hat{x}'_h|$, 并将 (11d) 重写为如下形式:

$$\Delta_i(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}') = \sum_h \frac{\sigma_h}{\vartheta_h} \tag{11f}$$

并受到如下约束的限制:

$$\sigma_h \ge x_h' - \hat{x}_h', \sigma_h \ge \hat{x}_h' - x_h', \forall h \tag{11g}$$

$$\sigma_h \le \hat{x}_h' - x_h' + M\delta_h, \sigma_h \le x_h' - \hat{x}_h' + M(1 - \delta_h), \forall h$$
 (11h)

为了使 (11d) 中的绝对值表达式更容易处理, 引入 δ_h 和 M, 其中 δ_h 是辅助 01 变量, M 是一个足够大的正数.

在求解可行性恢复子问题 (11a)-(11c) 后, 在后续迭代中, 将如下割平面 (记为可行性恢复割) 和统一 Benders 割一并加入的主问题中:

$$\Delta_i(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}') \ge F_{F,i}^* \tag{11i}$$

2.4 Iteration Process

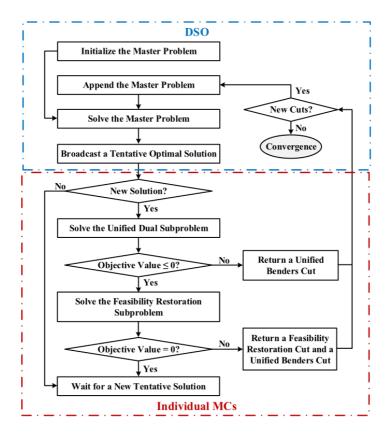


图 2: 迭代过程示意图

3 双层问题: 小规模模型提取

仅提取上下层模型中相耦合的变量所涉及到的约束条件, 其余约束省略.

3.1 上层模型

3.1.1 上层目标函数

以多能互补系统等年值下的系统总投资最小为优化目标:

$$\min\left(C_{cap} + C_{o\&m} + C_{dep}\right) \tag{1}$$

式中, C_{cap} 为系统等年值下的总投资成本, $C_{o\&m}$ 为系统年运维成本, C_{dep} 为系统折旧成本.

系统等年值下的总投资成本计算方式如下:

$$C_{cap} = \sum_{k=1}^{4} C_{cap,k} \cdot \frac{r(1+r)^m}{(1+r)^m - 1}$$
 (2)

式中, r 为折现率, m 为设备的使用年限, $C_{cap,k}$ 分别为风电、光伏、储能电池逆变器、储能电池装置、光热、储热装置投资成本.

$$\begin{cases} C_{cap,1} = C_W \cdot \lambda_W \\ C_{cap,2} = C_V \cdot \lambda_V \\ C_{cap,3} = C_B \cdot \lambda_{B_1} + E_B \cdot \lambda_{B_2} \\ C_{cap,4} = C_S \cdot \lambda_{S_1} + E_S \cdot \lambda_{S_2} \end{cases}$$

$$(3)$$

式中, 所有的 C, E 均为优化变量.

系统运维成本和折旧成本计算方式如下:

$$\begin{cases}
C_{o\&m} = C_{cap} \cdot \gamma_o \\
C_{dep} = \frac{C_{cap}(1 - \gamma_r)}{m}
\end{cases}$$
(4)

3.1.2 上层约束条件

1. 界约束

$$\begin{cases}
0 \le C_W \le C_W^{\text{max}} \\
0 \le C_V \le C_V^{\text{max}} \\
0 \le C_B \le C_B^{\text{max}} \\
0 \le E_B \le E_B^{\text{max}} \\
0 \le C_S \le C_S^{\text{max}} \\
0 \le E_S \le E_S^{\text{max}}
\end{cases} \tag{5}$$

2. 储能时长约束

$$\begin{cases} E_B = N_B \cdot C_B \\ N_B \ge \underline{N}_B \end{cases} \tag{6}$$

3.2 下层模型

3.2.1 下层目标函数

以等年值下的系统收益最大为优化目标:

$$\max I$$
 (7)

3.2.2 下层约束条件