

# 双层优化模型及 Benders 分解算法讨论分析

北京邮电大学优化组

杜洪博

2024 年 2 月 5 日

## 1 Benders Decomposition

### 1.1 Unified Primal Subproblems for Benders Decomposition

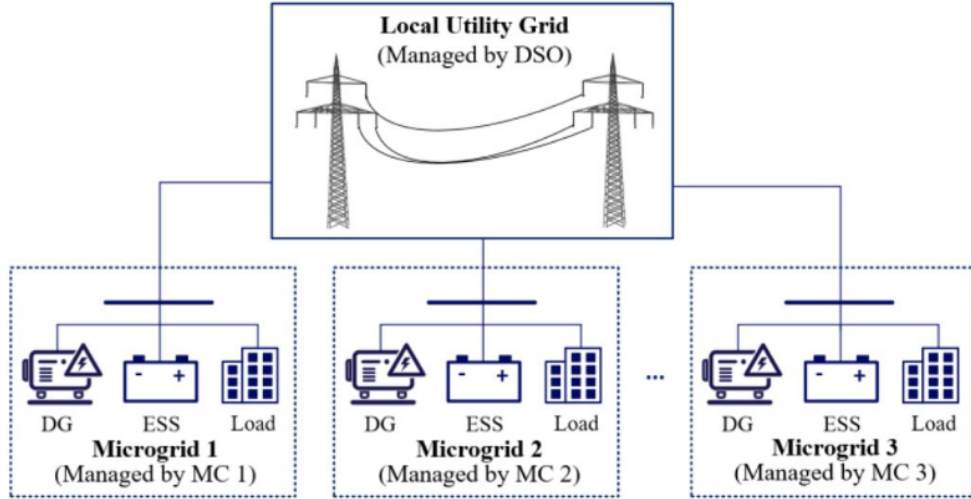


图 1: 系统结构示意图

为了表示方便, 将原始模型以矩阵形式重新表示为如下模型:

$$\min_{x,y,z} \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \sum_i \mathbf{b}_i^T \mathbf{y}_i + \sum_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{z}_i \quad (1a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{G}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{d} \quad (1b)$$

$$\mathbf{B}_i \mathbf{x} + \mathbf{C}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{z}_i \geq \mathbf{e}_i, \forall i \quad (1c)$$

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i}, \forall i \quad (1d)$$

根据标准的 Benders 分解方法, 原问题 (1a)-(1d) 被划分为一个上层主问题 (对应于 DSO 的决策) 和

一组下层子问题 (对应于个体 MCs 的决策). 主问题表示为:

$$\min_{\mathbf{x}, \theta} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \sum_i \theta_i \quad (2a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{d} \quad (2b)$$

$$\theta_i \geq 0, \forall i \quad (2c)$$

$$\text{Generated Cutting Planes (if any)} \quad (2d)$$

其中  $\theta_i$  为非负连续变量, 用 DSO 近似表示微电网  $i$  的运行成本. 在每次迭代中, DSO 求解主问题, 并将一个试探解  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta}_i)$  传递给每个 MC ( $\forall i$ ). 反过来, 每个 MC 依次求解两个 Benders 子问题, 以检验试探解的可行性和最优性, 然后通过 Benders 割反馈给 DSO. 可行性子问题为 ( $\forall i$ ):

$$\min_{y_i, z_i, s_i} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{s}_i \quad (3a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{C}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{s}_i \geq \mathbf{e}_i - \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{x}} \quad (3b)$$

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i}, \mathbf{s}_i \geq \mathbf{0} \quad (3c)$$

其中  $\mathbf{1}$  是一个元素为 1 的向量;  $\mathbf{0}$  是一个元素为 0 的向量;  $s_i$  是非负松弛变量的向量. 当且仅当 (3a)-(3c) 的最优值为 0 时, 试探解  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta}_i)$  是可行的, 再继续求解最优性子问题 (4a)-(4c); 否则, 将一个可行割返回到主问题, .

$$\min_{y_i, z_i} \quad \mathbf{b}_i^T \mathbf{y}_i + \mathbf{c}_i^T \mathbf{z}_i \quad (4a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{C}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{z}_i \geq \mathbf{e}_i - \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{x}} \quad (4b)$$

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i} \quad (4c)$$

在求解 (4a)-(4c) 后, MC  $i$  检查得到的解  $(\hat{\mathbf{y}}_i, \hat{\mathbf{z}}_i)$ , 检查 DSO 近似的微电网运行成本  $\hat{\theta}_i$  是否达到  $\mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{y}}_i + \mathbf{c}_i^T \hat{\mathbf{z}}_i$ . 如果没有, 则将一个最优割返回到主问题 (2a)-(2d), 以重新估计微电网运行成本; 否则, MC  $i$  接受试探解  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta}_i)$ , 并且, 如果后续迭代中电力交换计划不变, 则与 DSO 达成协议. 当且仅当所有的 MC 都与 DSO 达成协议时, 迭代终止.

可以将两个子问题合并统一表示为如下形式:

$$\min_{y_i, z_i, s_i} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{s}_i + \xi_i + \zeta_i \quad (5a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{b}_i^T \mathbf{y}_i + \mathbf{c}_i^T \mathbf{z}_i + \xi_i \geq \hat{\theta}_i \quad (5b)$$

$$-\mathbf{b}_i^T \mathbf{y}_i - \mathbf{c}_i^T \mathbf{z}_i + \zeta_i \geq -\hat{\theta}_i \quad (5c)$$

$$\mathbf{C}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{s}_i \geq \mathbf{e}_i - \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{x}} \quad (5d)$$

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i}, \mathbf{s}_i \geq \mathbf{0}, \xi_i, \zeta_i \geq 0 \quad (5e)$$

其中,  $\xi_i, \zeta_i$  为额外的非负松弛变量. 当且仅当所有松弛变量  $\mathbf{s}_i, \xi_i, \zeta_i$  在最优解处都为 0, MC  $i$  接受试探解  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta}_i)$ .

主问题 (2a)-(2d) 和统一子问题 (5a)-(5e) 可以分别表示成如下紧凑的形式:

$$\min_{\mathbf{x}'} \quad \mathbf{a}'^T \mathbf{x}' \quad (6a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}') \geq \mathbf{d}' \quad (6b)$$

$$\text{Generated Cutting Planes (if any)} \quad (6c)$$

其中  $x'$  为  $x$  中元素与  $\theta_i$  ( $\forall i$ ) 的聚合,  $\mathbf{H}$  为定义在  $\mathbf{x}'$  上的约束.

$$\min_{\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{s}'_i} \mathbf{1}^T \mathbf{s}'_i \quad (7a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{C}'_i \mathbf{y}_i + \mathbf{D}'_i \mathbf{z}_i + \mathbf{s}'_i \geq \mathbf{e}'_i - \mathbf{B}'_i \hat{\mathbf{x}}' \quad (7b)$$

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i}, \mathbf{s}'_i \geq \mathbf{0} \quad (7c)$$

其中  $\mathbf{s}'_i$  为  $\xi_i, \zeta_i$  与  $\mathbf{s}_i$  中所有元素的聚合.

## 1.2 Benders Cuts for Mixed-Integer Linear Subproblems

通过上述过程可知, 统一子问题 (7a)-(7c) 是一个混合整数规划问题, 常用的基于对偶化的 Benders 割生成方法无法实现原优化问题 (1a)-(1d) 可行域的外线性化 (outer linearization).

引入辅助 01 变量向量  $\tilde{\mathbf{z}}_i$ , 限制  $\mathbf{z}_i$  等于  $\tilde{\mathbf{z}}_i$ , 通过这样的变化, 可以将  $\mathbf{z}_i$  中的所有元素转化为连续变量. 即, 将 (7a)-(7c) 等价转化为如下形式:

$$\min_{\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \tilde{\mathbf{z}}_i, \mathbf{s}'_i} \mathbf{1}^T \mathbf{s}'_i \quad (8a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{C}'_i \mathbf{y}_i + \mathbf{D}'_i \mathbf{z}_i + \mathbf{s}'_i \geq \mathbf{e}'_i - \mathbf{B}'_i \hat{\mathbf{x}}' \quad (\boldsymbol{\mu}_i) \quad (8b)$$

$$\mathbf{z}_i = \tilde{\mathbf{z}}_i \quad (\boldsymbol{\nu}_i) \quad (8c)$$

$$\mathbf{s}'_i \geq \mathbf{0} \quad (8d)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_i \in \{0, 1\}^{K_i} \quad (8e)$$

其中,  $\boldsymbol{\mu}_i$  和  $\boldsymbol{\nu}_i$  分别为 (8b) 和 (8c) 的对偶变量的向量. 然后, 将 (8a)-(8e) 重写为以下形式:

$$\min_{\tilde{\mathbf{z}}_i \in \{0, 1\}^{K_i}} \left\{ \min_{(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{s}'_i) \in P_i} \mathbf{1}^T \mathbf{s}'_i \right\} \quad (9a)$$

其中,  $P_i = \{\text{Constraints (8b) - (8d)}\}$ , 由于转换掉了  $\mathbf{z}_i$  的整数约束, 所以 (9a) 是一个线性规划问题. 因此, 对内层问题进行对偶化并变换为如下形式:

$$\min_{\tilde{\mathbf{z}}_i \in \{0, 1\}^{K_i}} \left\{ \max_{(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\nu}_i) \in \mathcal{Q}_i} \left\{ (\mathbf{e}'_i - \mathbf{B}'_i \hat{\mathbf{x}}')^T \boldsymbol{\mu}_i + \tilde{\mathbf{z}}_i^T \boldsymbol{\nu}_i \right\} \right\} \quad (9b)$$

其中,  $\mathcal{Q}_i = \{\mathbf{C}_i \boldsymbol{\mu}_i = 0, \mathbf{D}_i^T \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\nu}_i = 0, 0 \leq \boldsymbol{\mu}_i \leq 1\}$ , 根据极小极大不等式, 可以得到以下关系:

$$\begin{aligned} & \min_{\tilde{\mathbf{z}}_i \in \{0, 1\}^{K_i}} \left\{ \max_{(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\nu}_i) \in \mathcal{Q}_i} \left\{ (\mathbf{e}'_i - \mathbf{B}'_i \hat{\mathbf{x}}')^T \boldsymbol{\mu}_i + \tilde{\mathbf{z}}_i^T \boldsymbol{\nu}_i \right\} \right\} \\ & \geq \max_{(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\nu}_i) \in \mathcal{Q}_i} \left\{ \min_{\tilde{\mathbf{z}}_i \in \{0, 1\}^{K_i}} \left\{ (\mathbf{e}'_i - \mathbf{B}'_i \hat{\mathbf{x}}')^T \boldsymbol{\mu}_i + \tilde{\mathbf{z}}_i^T \boldsymbol{\nu}_i \right\} \right\} \end{aligned} \quad (9c)$$

由于  $\tilde{\mathbf{z}}_i$  是 01 变量, 所以可以通过枚举  $\tilde{\mathbf{z}}_i$  的 0 和 1 可能的组合, 来确定  $\tilde{\mathbf{z}}_i^T \boldsymbol{\nu}_i$  的最优值. 即:

$$\min_{\tilde{\mathbf{z}}_i \in \{0, 1\}^{K_i}} \tilde{\mathbf{z}}_i^T \boldsymbol{\nu}_i = \max_{\boldsymbol{\omega}_i \in \mathcal{O}_i} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\omega}_i \quad (9d)$$

其中,  $\mathcal{O}_i = \{\boldsymbol{\omega}_i \leq 0, \boldsymbol{\omega}_i \leq \boldsymbol{\nu}_i\}$ . 于是可以得到 (9c) 右侧的等价表示:

$$\begin{aligned} & \max_{(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\nu}_i) \in \mathcal{Q}_i} \left\{ (\mathbf{e}'_i - \mathbf{B}'_i \hat{\mathbf{x}}')^T \boldsymbol{\mu}_i + \min_{\tilde{\mathbf{z}}_i \in \{0, 1\}^{K_i}} \tilde{\mathbf{z}}_i^T \boldsymbol{\nu}_i \right\} \\ & = \max_{(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\nu}_i) \in \mathcal{Q}_i} \left\{ (\mathbf{e}'_i - \mathbf{B}'_i \hat{\mathbf{x}}')^T \boldsymbol{\mu}_i + \max_{\boldsymbol{\omega}_i \in \mathcal{O}_i} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\omega}_i \right\} \end{aligned} \quad (9e)$$

其中, 右侧就变成了一个线性规划问题. 可以该问题将重写为如下形式 (记为统一的对偶子问题):

$$F_{D,i}^* = \max_{(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\nu}_i, \boldsymbol{\omega}_i) \in \mathcal{Q}_i \cap \mathcal{O}_i} \left\{ (\mathbf{e}'_i - \mathbf{B}'_i \hat{\mathbf{x}}')^T \boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{1}^T \boldsymbol{\omega}_i \right\} \quad (10a)$$

其中,  $F_{D,i}^*$  为与  $\hat{\mathbf{x}}'$  有关的最优值, 并且  $\boldsymbol{\mu}_i$  和  $\boldsymbol{\omega}_i$  有最优解  $(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i, \hat{\boldsymbol{\omega}}_i)$ .

因此, MC  $i$  求解 (10a) 以检查 DSO 在每次迭代中传递过来的试探解  $\hat{\mathbf{x}}$ , 如果  $F_{D,i}^* > 0$ , 则 MC  $i$  返回如下的割 (记为统一 Benders 割):

$$(\mathbf{e}'_i - \mathbf{B}'_i \mathbf{x}')^T \hat{\boldsymbol{\mu}}_i + \mathbf{1}^T \hat{\boldsymbol{\omega}}_i \leq 0 \quad (10b)$$

### 1.3 Feasibility Restoration Cuts for Mitigating Duality Gap

由于 01 变量  $\mathbf{z}_i$  的存在, 可能会使得  $F_{D,i}^*$  与统一原始子问题 (7a)-(7c) 之间产生对偶间隙. (7a)-(7c) 的目标函数值为正对应 DSO 传递的试探解  $\hat{\mathbf{x}}'$  是不可行的, 这种情况下应当将该试探解割掉. 考虑以下两种情况:

1.  $F_{D,i}^*$  为正, 说明  $\hat{\mathbf{x}}'$  违反了 (10b), 当后续迭代 (10b) 加入到主问题后, 该试探解将被割掉.
2.  $F_{D,i}^*$  非正, 说明  $\hat{\mathbf{x}}'$  没有违反 (10b), 此时 (10b) 就无法割掉该试探解, 且后续迭代中主问题的最优解就会被卡在  $\hat{\mathbf{x}}'$  处. 也就是说, 统一 Benders 割还不够紧.

为了解决第二种情况, 必要时 MC  $i$  在求解统一对偶子问题后, 还要求解如下可行性恢复子问题:

$$F_{F,i}^* = \min_{\mathbf{x}', \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i} \Delta_i(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}') \quad (11a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{B}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{C}_i \mathbf{y}'_i + \mathbf{D}'_i \mathbf{z}_i \geq \mathbf{e}'_i \quad (11b)$$

$$\mathbf{z}_i \in \{0, 1\}^{K_i} \quad (11c)$$

其中  $\Delta_i(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}')$  表示试探解  $\hat{\mathbf{x}}'$  与满足 (11b)-(11c) 的任意解之间可行性违反程度的度量, 如下所示:

$$\Delta_i(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}') = \sum_h \frac{|x'_h - \hat{x}'_h|}{\vartheta_h} \quad (11d)$$

其中  $x'_h$  和  $\hat{x}'_h$  分别为  $\mathbf{x}'$  和  $\hat{\mathbf{x}}'$  中的元素,  $h$  为元素的索引,  $\vartheta_h$  为与  $\hat{x}'_h$  相关的归一化因子, 如下所示:

$$\vartheta_h = \begin{cases} |\hat{x}'_h|, & \text{if } |\hat{x}'_h| > 0 \\ \tau, & \text{if } |\hat{x}'_h| = 0 \end{cases}, \forall h \quad (11e)$$

其中  $\tau$  是一个足够小的正数. 引入一个辅助连续变量  $\sigma_h$  来表示  $|x'_h - \hat{x}'_h|$ , 并将 (11d) 重写为如下形式:

$$\Delta_i(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}') = \sum_h \frac{\sigma_h}{\vartheta_h} \quad (11f)$$

并受到如下约束的限制:

$$\sigma_h \geq x'_h - \hat{x}'_h, \sigma_h \geq \hat{x}'_h - x'_h, \forall h \quad (11g)$$

$$\sigma_h \leq \hat{x}'_h - x'_h + M\delta_h, \sigma_h \leq x'_h - \hat{x}'_h + M(1 - \delta_h), \forall h \quad (11h)$$

为了使 (11d) 中的绝对值表达式更容易处理, 引入  $\delta_h$  和  $M$ , 其中  $\delta_h$  是辅助 01 变量,  $M$  是一个足够大的正数.

在求解可行性恢复子问题 (11a)-(11c) 后, 在后续迭代中, 将如下割平面 (记为可行性恢复割) 和统一 Benders 割一并加入的主问题中:

$$\Delta_i(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}') \geq F_{F,i}^* \quad (11i)$$

## 1.4 Iteration Process

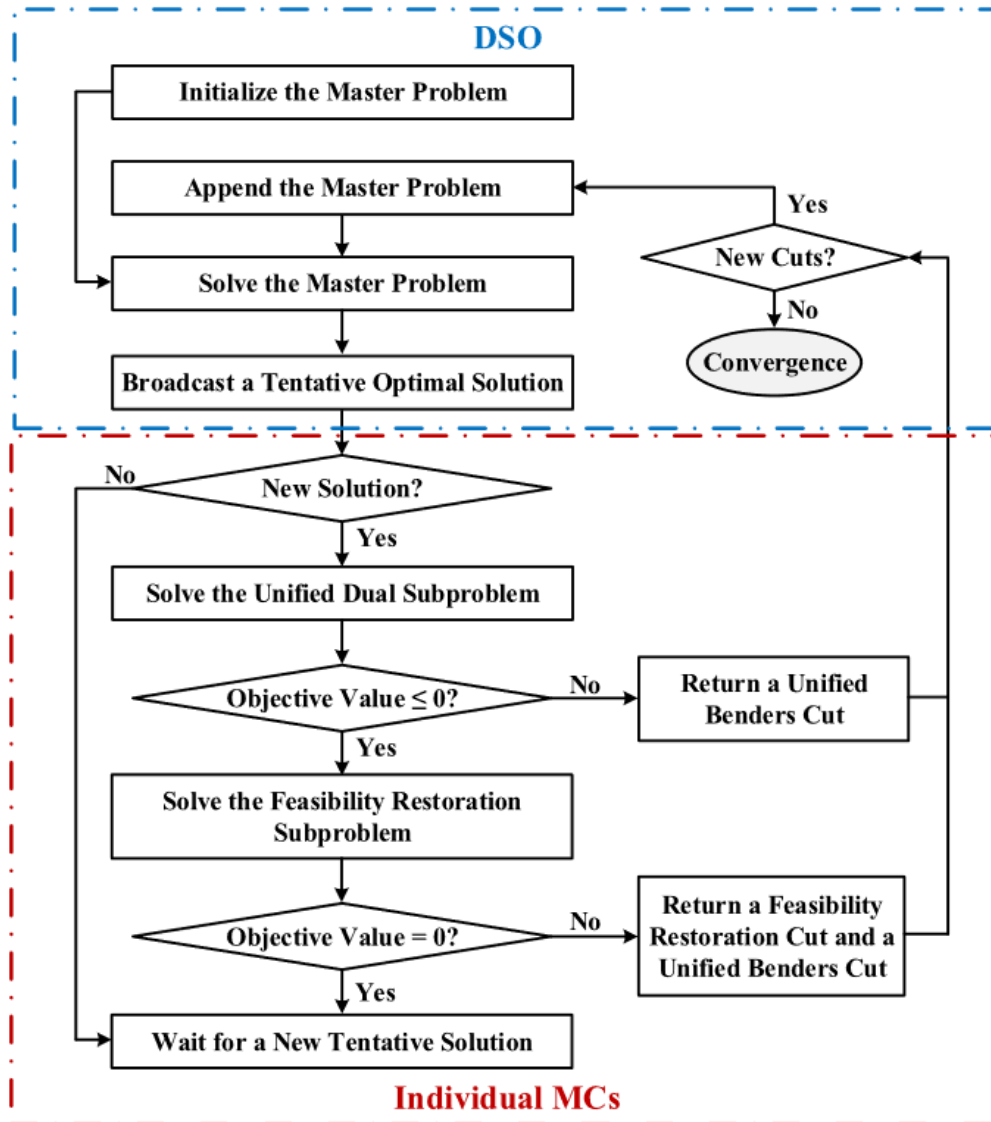


图 2: 迭代过程示意图

# 1 文档所给的双层问题及对部分非线性约束的线性化

## 1.1 上层模型

### 1.1.1 上层目标函数

以多能互补系统等年值下的系统总投资最小为优化目标:

$$\min (C_{cap} + C_{o\&m} + C_{dep}) \quad (1)$$

式中,  $C_{cap}$  为系统等年值下的总投资成本,  $C_{o\&m}$  为系统年运维成本,  $C_{dep}$  为系统折旧成本.

系统等年值下的总投资成本计算方式如下:

$$C_{cap} = \sum_{k=1}^4 C_{cap,k} \cdot \frac{r(1+r)^m}{(1+r)^m - 1} \quad (2)$$

式中,  $r$  为折现率,  $m$  为设备的使用年限,  $C_{cap,k}$  分别为风电、光伏、储能电池逆变器、储能电池装置、光热、储热装置投资成本.

$$\begin{cases} C_{cap,1} = C_W \cdot \lambda_W \\ C_{cap,2} = C_V \cdot \lambda_V \\ C_{cap,3} = C_B \cdot \lambda_{B_1} + E_B \cdot \lambda_{B_2} \\ C_{cap,4} = C_S \cdot \lambda_{S_1} + E_S \cdot \lambda_{S_2} \end{cases} \quad (3)$$

式中, 所有的  $C, E$  均为优化变量.

系统运维成本和折旧成本计算方式如下:

$$\begin{cases} C_{o\&m} = C_{cap} \cdot \gamma_o \\ C_{dep} = \frac{C_{cap}(1 - \gamma_r)}{m} \end{cases} \quad (4)$$

### 1.1.2 上层约束条件

#### 1. 界约束

$$\begin{cases} 0 \leq C_W \leq C_W^{\max} \\ 0 \leq C_V \leq C_V^{\max} \\ 0 \leq C_B \leq C_B^{\max} \\ 0 \leq E_B \leq E_B^{\max} \\ 0 \leq C_S \leq C_S^{\max} \\ 0 \leq E_S \leq E_S^{\max} \end{cases} \quad (5)$$

#### 2. 储能时长约束

$$\begin{cases} E_B = N_B \cdot C_B \\ N_B \geq \underline{N}_B \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $N_B$  表示储能电站的储能时长, 为整数优化变量.

## 1.2 下层模型

### 1.2.1 下层目标函数

以等年值下的系统收益最大为优化目标:

$$\max I \quad (7)$$

系统年综合收益为售电收益, 计算方式如下:

$$\begin{cases} I = I_E \\ I_E = \lambda_E \cdot \sum_{t=1}^T p_L(t) \cdot \Delta t \end{cases} \quad (8)$$

### 1.2.2 下层约束条件

下层模型考虑的约束条件包括系统安全性约束和清洁性约束, 以及各类装置的运行约束, 现选取部分约束条件进行分析.

1. 外送通道容量约束:

$$p_L(t) = p_W(t) + p_V(t) + p_B(t) + p_S(t), \forall t \quad (9)$$

$$p_L^{\min} \leq p_L(t) \leq p_L^{\max}, \forall t \quad (10)$$

2. 风电/光伏运行约束:

(a) 发电功率范围约束:

$$\begin{cases} 0 \leq p_W(t) \leq \delta_W(t) \cdot C_W \\ 0 \leq p_V(t) \leq \delta_V(t) \cdot C_V \end{cases}, \forall t \quad (11)$$

(b) 利用率约束:

$$\sum_{t \in \Theta} (p_W(t) + p_V(t)) \geq (1 - \varepsilon) \cdot \sum_{t \in \Theta} (\delta_W(t) C_W + \delta_V(t) C_V) \quad (12)$$

3. 储能电站运行约束:

(a) 充电功率范围约束 (可线性化):

$$p_B(t) = p_B^{dc}(t) - p_B^{ch}(t) \quad (13)$$

$$\begin{cases} 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq u_B^{dc}(t) \cdot C_B \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq u_B^{ch}(t) \cdot C_B \end{cases}, \forall t \quad (14)$$

式 (14) 线性化后的约束条件为:

$$\begin{cases} 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq u_B^{dc}(t) \cdot C_B^{max} \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq u_B^{ch}(t) \cdot C_B^{max} \\ 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq C_B \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq C_B \end{cases}, \forall t \quad (15)$$

(b) 充放电状态约束:

$$u_B^{dc}(t) + u_B^{ch}(t) \leq 1, \forall t \quad (16)$$

(c) 荷电状态约束:

$$e_B(t+1) = e_B(t) + \gamma_B^{ch} p_B^{ch}(t) - p_B^{dc}(t) / \gamma_B^{dc}, \forall t \quad (17)$$

(d) 储能容量范围约束:

$$0 \leq e_B(t) \leq E_B, \forall t \quad (18)$$

4. 光热电站及储热系统运行约束:

(a) 集热器热量平衡约束:

$$h_s^{in}(t) = h_s^{cr}(t) + h_s^{ch}(t), \forall t \quad (19)$$

(b) 储热/放热功率范围约束:

$$\begin{cases} 0 \leq h_s^{ch}(t) \leq \bar{h}_s^{ch} \\ 0 \leq h_s^{dc}(t) \leq \bar{h}_s^{dc} \end{cases}, \forall t \quad (20)$$

(c) 热-电功率转化约束:

$$p_s(t) = \eta_s \cdot h_s(t), \forall t \quad (21)$$

(d) 发电功率范围约束 (可线性化):

$$u_S(t) \cdot \delta_S^{\min} \cdot C_S \leq p_S(t) \leq u_S(t) \cdot \delta_S^{\max} \cdot C_S, \forall t \quad (22)$$

式 (22) 线性化后的约束条件为:

$$\begin{cases} u_S(t) \cdot \delta_S^{\min} \cdot C_S^{\min} \leq p_S(t) \leq u_S(t) \cdot \delta_S^{\max} \cdot C_S^{\max} \\ \delta_S^{\min} \cdot C_S - M \cdot (1 - u_S(t)) \leq p_S(t) \leq \delta_S^{\max} \cdot C_S \end{cases}, \forall t \quad (23)$$

(e) 发电热量平衡约束:

$$h_S^{dc}(t) = h_S(t) + v_S(t) \cdot h_S^g, \forall t \quad (24)$$

(f) 运行状态逻辑约束:

$$\begin{cases} u_S(t) - u_S(t-1) - \nu_S(t) \leq 0 \\ u_S(t) - \nu_S(t) \geq 0 \end{cases}, \forall t \quad (25)$$

(g) 储热装置容量范围约束:

$$0 \leq e_S(t) \leq E_S, \forall t \quad (26)$$



(h) 储热装置热量平衡约束:

$$e_S(t+1) = e_S(t) + \gamma_S^{ch} h_S^{ch}(t) - h_S^{dc}(t)/\gamma_S^{dc} - h_S^l(t), \forall t \quad (27)$$

(i) 储热装置外送能力范围约束:

$$0 \leq h_S^l(t) \leq \bar{h}_S^l, \forall t \quad (28)$$

5. 储能装置与风电/光伏弃电状态的耦合运行策略和约束:

(a) 风电/光伏弃电状态约束 (可线性化):

$$(1 - x(t)) \cdot (\bar{p}_W(t) + \bar{p}_V(t)) \leq p_W(t) + p_V(t) \leq (2 - x(t)) \cdot (\bar{p}_W(t) + \bar{p}_V(t)) - m, \forall t \in \Theta \quad (29)$$

式 (29) 线性化后的约束条件为:

$$\begin{cases} (\bar{p}_W(t) + \bar{p}_V(t)) - x(t) \cdot M \leq p_W(t) + p_V(t) \leq 2 \cdot (\bar{p}_W(t) + \bar{p}_V(t)) - m \\ 0 \leq p_W(t) + p_V(t) \leq (\bar{p}_W(t) + \bar{p}_V(t)) - m + (1 - x(t)) \cdot M \end{cases}, \forall t \in \Theta \quad (30)$$

(b) 储能电站的运行策略约束 (可线性化):

$$\begin{cases} 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq (1 - x(t)) \cdot C_B \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq x(t) \cdot C_B \end{cases}, \forall t \in \Theta \quad (31)$$

式 (31) 线性化后的约束条件为:

$$\begin{cases} 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq (1 - x(t)) \cdot C_B^{max} \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq x(t) \cdot C_B^{max} \\ 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq C_B \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq C_B \end{cases}, \forall t \in \Theta \quad (32)$$

## 2 对所给双层问题的讨论

### 2.1 双层规划的一般形式

双层规划问题的一般形式如下, 即一个优化问题被另一个优化问题所约束:

$$\min_{x \in X} f_1(x, y^*) \quad (33)$$

$$\text{s.t. } g_1(x, y^*) \leq 0 \quad (34)$$

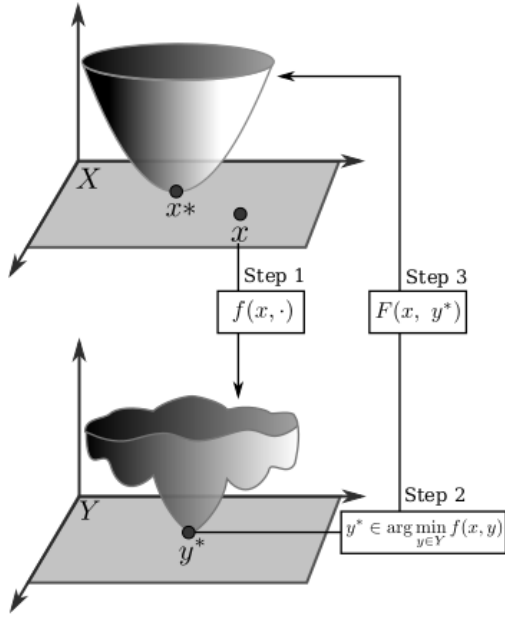
$$h_1(x, y^*) = 0 \quad (35)$$

$$y^* \in \arg \min_{y \in Y} \{f_2(x, y) \quad (36)$$

$$\text{s.t. } g_2(x, y) \leq 0 \quad (37)$$

$$h_2(x, y) = 0 \quad (38)$$

一般来说下层的决策会影响上层的决策结果。以下为双层规划的一般解法示意图:



1. Choose an upper level vector of parameters  $\vec{x}$ .
2. Solve the lower level problem, i.e., find
$$\vec{y} \in \Psi(\vec{x}) = \arg \min \{f(\vec{x}, \vec{z}) : \vec{z} \in Y\}$$
3. Evaluate the feasible solution  $F(\vec{x}, \vec{y}^*)$ .

图 3: 双层规划示意图

## 2.2 文档所给双层问题的矩阵表示

1. 上层问题:

$$\min_{x \in X} g^T x \quad (39)$$

$$\text{s.t. } G(x) \geq d \quad (40)$$

2. 下层问题:

$$\min_{y \in F(x)} h^T y \quad (41)$$

$$\text{s.t. } Bx + Cy \geq e \quad (42)$$

其中,  $F(x)$  为下层可行域.

对于这个双层问题, 根据双层规划的一般解法, 可以假设上层问题传入下层问题的  $x = \hat{x}$ , 不妨设  $\hat{x}$  传入下层问题后下层问题是可行的。

$\hat{x}$  传入下层问题后可得如下形式的下层问题:

$$\min_{y \in F(\hat{x})} h^T y \quad (43)$$

$$\text{s.t. } B\hat{x} + Cy \geq e \quad (44)$$

假设此问题的最优解为  $y^*$ , 将  $y^*$  传回上层问题, 结合  $\hat{x}$ , 就获取到了一个上层问题的可行解  $(\hat{x}, y^*)$ , 通过这种方式就可以获取到上层问题的所有可行解, 从而可以求解上层问题。

但(39)所表示的上层问题的目标函数中并没有  $y$ , 因此上层问题的最优值与  $y$  没有关系, 所以这个双层问题可能并不能完成本来的目的。

故而考虑, 将下层问题的目标函数加入到上层问题的目标函数中, 从而得到如下形式新的双层问题:

1. 上层问题:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{g}^T \mathbf{x} + \mathbf{h}^T \mathbf{y} \quad (45)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{d} \quad (46)$$

其中,  $\mathbf{y}$  取值范围为下层问题的最优解集.

2. 下层问题:

$$\min_{\mathbf{y} \in F(\mathbf{x})} \mathbf{h}^T \mathbf{y} \quad (47)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y} \geq \mathbf{e} \quad (48)$$

其中,  $F(\mathbf{x})$  为下层可行域.

## 2.3 单层问题

以下为所给文档中给出的单层问题:

### 4.1 模型概述

式(1)至式(28)共同组成了多能互补发电系统电/热/氢储能容量优化模型, 优化变量包括电-热容量、系统各元件在各时段的运行状态等。由于运行阶段 0-1 变量比较多, 可先不考虑式(23)、(27)-(28), 但约束(14)中仍有 0-1 变量。

将下层目标函数写为:

$$\min(-I) \quad (29)$$

则多能互补发电系统电/热/氢储能容量优化双层模型可以概述为:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}} \mathbf{g}^T \mathbf{x} + \mathbf{h}^T \mathbf{y} \\ & \text{s.t.} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{E}\mathbf{z} \geq \mathbf{e} \\ & \mathbf{z} \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (30)$$

式中:  $\mathbf{x}$  表示配置决策变量, 包括风电场装机容量  $C_w$ 、光伏电站装机容量  $C_v$ 、储能电站装机容量  $C_b$ 、储能电站电池容量  $E_b$ 、光热电站装机容量  $C_s$ 、储热装置容量  $E_s$ 。 $\mathbf{y}$  表示运行决策变量, 包括风电场发电功率  $p_w(t)$ 、光伏电站发电功率  $p_v(t)$ 、储能电站发电功率  $p_b(t)$ 、储能电站蓄电  $e_b(t)$ 、光热电站发电功率  $p_s(t)$ 、储热装置容量  $E_s(t)$ 。 $\mathbf{z}$  表示运行 0-1 变量, 包括储能充电状态变量  $u_b^c(t)$ 、放电状态变量  $u_b^d(t)$ 、光热电站运行状态变量  $u_s(t)$ 、光热电站启机状态  $v_s(t)$ 、风电/光伏弃电状态  $x(t)$ 。目标函数中  $\mathbf{g}^T \mathbf{x}$  对应式(1),  $\mathbf{h}^T \mathbf{y}$  对应式(29)、约束  $\{\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$  对应配置相关约束, 对应约束(5)、(6)。约束  $\{\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{E}\mathbf{z} \geq \mathbf{e}\}$  对应运行相关约束, 包括配置和运行耦合相关约束、含 0-1 变量的运行相关约束等, 对应约束(9)-(26)。

图 4: 单层问题

为了表述简洁这里将下层问题中的变量统一使用  $\mathbf{y}$  表示, 不特意区分 01 变量和连续变量.

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \mathbf{g}^T \mathbf{x} + \mathbf{h}^T \mathbf{y} \quad (49)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{d} \quad (50)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y} \geq \mathbf{e} \quad (51)$$

其中,  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in F(\mathbf{x})\}$ .

## 2.4 证明新的双层问题与单层问题的最优值相同

要证:

$$\min_{x \in X} \min_{y \in F(x)} (g^T x + h^T y) = \min_{x, y \in F(x, y)} (g^T x + h^T y) \quad (52)$$

(52)可以表示为:

$$\min_{x \in X} \min_{y \in F(x)} f(x, y) = \min_{x, y \in F(x, y)} f(x, y), \quad F(x, y) = \{(x, y) | x \in X, y \in F(x)\} \quad (53)$$

1. 假设  $(x^*, y^*)$  为  $LHS$  的最优解, 同时  $(x^*, y^*)$  也是  $RHS$  的可行解, 则有:

$$LHS \leq RHS \quad (54)$$

2. 假设  $(x^*, y^*)$  为  $RHS$  的最优解, 那么  $\min_{y \in F(x^*)} f(x^*, y)$  有最优解  $(x^*, \tilde{y})$ , 且有:

$$f(x^*, \tilde{y}) \geq f(x^*, y^*) \quad (55)$$

所以:

$$LHS \geq RHS \quad (56)$$

综上, 由(54)和(56)可得:

$$LHS = RHS \quad (57)$$

## 3 文章中的 Benders 分解存在的问题

文章中只有可行性恢复子问题, 保证了可行性, 但没有保证最优性。

## 4 对模型中 $E_B = N_B \cdot C_B$ 约束的处理

初步可以使用枚举的方法进行测试, 通过求解多个 MILP 问题实现, 即分别令  $N_B = \underline{N}_B, \underline{N}_B + 1, \dots$ , 求解对应的 MILP 问题, 并统计各个问题的目标函数值, 选取最优的目标函数值对应的  $N_B$  值作为最终的  $N_B$  值。

## 5 结论

1. 目前双层模型的本质是单层模型, 单层模型的最优解即为双层模型的最优解。
2. Benders 分解适用于单层模型的问题, 且模型分解后的子问题中不应含有整数变量。

1. 第一种形式:

$$\min_{x \in X} f(x) + g(y) \quad (58)$$

$$\text{s.t. } h(x) \leq 0 \quad (59)$$

$$y \in \arg \max_{y \in Y} \{u(x, y) \quad (60)$$

$$\text{s.t. } k(x, y) \leq 0 \quad (61)$$

$$e(y) + c(x) \leq 0\} \quad (62)$$

2. 第二种形式:

上层问题:

$$\min_{x \in X} f(x) + g(y) \quad (63)$$

$$\text{s.t. } h(x) \leq 0 \quad (64)$$

$$y \in S(x) \quad (65)$$

其中,  $S(x)$  是下面以  $x$  为参数的下层优化问题的最优解集。

$$\max_{y \in Y} u(x, y) \quad (66)$$

$$\text{s.t. } k(x, y) \leq 0 \quad (67)$$

$$e(y) + c(x) \leq 0. \quad (68)$$

# 1 新双层模型

## 1.1 上层模型

### 1.1.1 上层目标函数

以多能互补系统等年值下的系统总投资最小为优化目标:

$$\min R = I - (C_{cap} + C_{o\&m} + C_{dep}) \quad (1)$$

式中,  $R$  表示多能互补发电系统的年净收益,  $I$  表示系统的年综合收益,  $C_{cap}$  为系统等年值下的总投资成本,  $C_{o\&m}$  为系统年运维成本,  $C_{dep}$  为系统折旧成本.

由于全年 8760h 时段数量太多, 可以只考虑每个月 1 个典型日场景, 全年收益是每个月的天数乘以给定的典型日场景的收益.

系统年综合收益为售电收益, 计算方式如下:

$$\begin{cases} I = I_E \\ I_E = \lambda_E \cdot \sum_{t=1}^T p_L(t) \cdot \Delta t \end{cases} \quad (2)$$

系统等年值下的总投资成本计算方式如下:

$$C_{cap} = \sum_{k=1}^4 C_{cap,k} \cdot \frac{r(1+r)^m}{(1+r)^m - 1} \quad (3)$$

式中,  $r$  为折现率,  $m$  为设备的使用年限,  $C_{cap,k}$  分别为风电、光伏、储能电池逆变器、储能电池装置、光热、储热装置投资成本.

$$\begin{cases} C_{cap,1} = C_W \cdot \lambda_W \\ C_{cap,2} = C_V \cdot \lambda_V \\ C_{cap,3} = C_B \cdot \lambda_{B_1} + E_B \cdot \lambda_{B_2} \\ C_{cap,4} = C_S \cdot \lambda_{S_1} + E_S \cdot \lambda_{S_2} \end{cases} \quad (4)$$

式中, 所有的  $C, E$  均为优化变量.

系统运维成本和折旧成本计算方式如下:

$$\begin{cases} C_{o\&m} = C_{cap} \cdot \gamma_o \\ C_{dep} = \frac{C_{cap}(1 - \gamma_r)}{m} \end{cases} \quad (5)$$

### 1.1.2 上层约束条件

#### 1. 界约束

$$\begin{cases} 0 \leq C_W \leq C_W^{\max} \\ 0 \leq C_V \leq C_V^{\max} \\ 0 \leq C_B \leq C_B^{\max} \\ 0 \leq E_B \leq E_B^{\max} \\ 0 \leq C_S \leq C_S^{\max} \\ 0 \leq E_S \leq E_S^{\max} \end{cases} \quad (6)$$

## 2. 储能时长约束

$$\begin{cases} E_B = N_B \cdot C_B \\ N_B \geq \underline{N}_B \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $N_B$  表示储能电站的储能时长, 为整数优化变量.

## 1.2 下层模型

### 1.2.1 下层目标函数

以系统供电缺额最小为优化目标:

$$\min \sum_t p_D(t) \quad (8)$$

式中,  $p_D(t)$  表示时刻  $t$  的系统供电缺额.

### 1.2.2 下层约束条件

下层模型考虑的约束条件包括系统安全性约束和清洁性约束, 以及各类装置的运行约束, 现选取部分约束条件进行分析.

#### 1. 无故障时外送通道容量约束:

$$p_L(t) = p_W(t) + p_V(t) + p_B(t) + p_S(t), \forall t \in \Theta \quad (9)$$

$$p_L(t) + p_D(t) \geq p_{LM}(t), \forall t \in \Theta \quad (10)$$

$$p_D(t) \geq 0, \forall t \in \Theta \quad (11)$$

式中,  $\Theta$  表示所有时段集合,  $p_{LM}(t)$  表示送出功率下限, 为给定曲线.

#### 2. 风电/光伏运行约束:

##### (a) 发电功率范围约束:

$$\begin{cases} 0 \leq p_W(t) \leq \delta_W(t) \cdot C_W \\ 0 \leq p_V(t) \leq \delta_V(t) \cdot C_V \end{cases}, \forall t \quad (12)$$

##### (b) 利用率约束:

$$\sum_{t \in \Theta} (p_W(t) + p_V(t)) \geq (1 - \varepsilon) \cdot \sum_{t \in \Theta} (\delta_W(t) C_W + \delta_V(t) C_V) \quad (13)$$

#### 3. 储能电站运行约束:

##### (a) 充电功率范围约束 (可线性化):

$$p_B(t) = p_B^{dc}(t) - p_B^{ch}(t) \quad (14)$$

$$\begin{cases} 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq u_B^{dc}(t) \cdot C_B \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq u_B^{ch}(t) \cdot C_B \end{cases}, \forall t \quad (15)$$

式 (15) 线性化后的约束条件为:

$$\begin{cases} 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq u_B^{dc}(t) \cdot C_B^{max} \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq u_B^{ch}(t) \cdot C_B^{max} \\ 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq C_B \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq C_B \end{cases}, \forall t \quad (16)$$

(b) 充放电状态约束:

$$u_B^{dc}(t) + u_B^{ch}(t) \leq 1, \forall t \quad (17)$$

(c) 荷电状态约束:

$$e_B(t+1) = e_B(t) + \gamma_B^{ch} p_B^{ch}(t) - p_B^{dc}(t) / \gamma_B^{dc}, \forall t \quad (18)$$

(d) 储能容量范围约束:

$$0 \leq e_B(t) \leq E_B, \forall t \quad (19)$$

4. 光热电站及储热系统运行约束:

(a) 集热器热量平衡约束:

$$h_s^{in}(t) = h_s^{cr}(t) + h_s^{ch}(t), \forall t \quad (20)$$

(b) 储热/放热功率范围约束:

$$\begin{cases} 0 \leq h_S^{ch}(t) \leq \bar{h}_S^{ch} \\ 0 \leq h_S^{dc}(t) \leq \bar{h}_S^{dc} \end{cases}, \forall t \quad (21)$$

(c) 热-电功率转化约束:

$$p_s(t) = \eta_s \cdot h_s(t), \forall t \quad (22)$$

(d) 发电功率范围约束 (可线性化):

$$u_S(t) \cdot \delta_S^{\min} \cdot C_S \leq p_S(t) \leq u_S(t) \cdot \delta_S^{\max} \cdot C_S, \forall t \quad (23)$$

式 (23) 线性化后的约束条件为:

$$\begin{cases} u_S(t) \cdot \delta_S^{\min} \cdot C_S^{min} \leq p_S(t) \leq u_S(t) \cdot \delta_S^{\max} \cdot C_S^{max} \\ \delta_S^{\min} \cdot C_S - M \cdot (1 - u_S(t)) \leq p_S(t) \leq \delta_S^{\max} \cdot C_S \end{cases}, \forall t \quad (24)$$

(e) 发电热量平衡约束:

$$h_S^{dc}(t) = h_S(t) + v_S(t) \cdot h_S^g, \forall t \quad (25)$$

(f) 运行状态逻辑约束:

$$\begin{cases} u_S(t) - u_S(t-1) - \nu_S(t) \leq 0 \\ u_S(t) - \nu_S(t) \geq 0 \end{cases}, \forall t \quad (26)$$



(g) 储热装置容量范围约束:

$$0 \leq e_S(t) \leq E_S, \forall t \quad (27)$$

(h) 储热装置热量平衡约束:

$$e_S(t+1) = e_S(t) + \gamma_S^{ch} h_S^{ch}(t) - h_S^{dc}(t)/\gamma_S^{dc} - h_S^l(t), \forall t \quad (28)$$

(i) 储热装置外送能力范围约束:

$$0 \leq h_S^l(t) \leq \bar{h}_S^l, \forall t \quad (29)$$

5. 储能装置与风电/光伏弃电状态的耦合运行策略和约束:

(a) 风电/光伏弃电状态约束 (可线性化):

$$(1 - x(t)) \cdot (\bar{p}_W(t) + \bar{p}_V(t)) \leq p_W(t) + p_V(t) \leq (2 - x(t)) \cdot (\bar{p}_W(t) + \bar{p}_V(t)) - m, \forall t \in \Theta \quad (30)$$

式 (30) 线性化后的约束条件为:

$$\begin{cases} (\bar{p}_W(t) + \bar{p}_V(t)) - x(t) \cdot M \leq p_W(t) + p_V(t) \leq 2 \cdot (\bar{p}_W(t) + \bar{p}_V(t)) - m \\ 0 \leq p_W(t) + p_V(t) \leq (\bar{p}_W(t) + \bar{p}_V(t)) - m + (1 - x(t)) \cdot M \end{cases}, \forall t \in \Theta \quad (31)$$

(b) 储能电站的运行策略约束 (可线性化):

$$\begin{cases} 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq (1 - x(t)) \cdot C_B \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq x(t) \cdot C_B \end{cases}, \forall t \in \Theta \quad (32)$$

式 (32) 线性化后的约束条件为:

$$\begin{cases} 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq (1 - x(t)) \cdot C_B^{max} \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq x(t) \cdot C_B^{max} \\ 0 \leq p_B^{dc}(t) \leq C_B \\ 0 \leq p_B^{ch}(t) \leq C_B \end{cases}, \forall t \in \Theta \quad (33)$$

## 2 对所给双层问题的讨论

### 2.1 一般形式

$$\min_{x \in X} f_1(x, y) \quad (34)$$

$$\text{s.t. } g_1(x) \leq 0 \quad (35)$$

$$h_1(x) = 0 \quad (36)$$

$$y \in \arg \max_{y \in Y} \{f_2(y)\} \quad (37)$$

$$\text{s.t. } g_2(x, y) \leq 0 \quad (38)$$

$$h_2(x, y) = 0 \quad (39)$$

其中,  $x$  为上层决策变量, 含有整数变量;  $y$  为下层决策变量, 含有 0-1 变量;  $f_1(x, y)$  为上层目标函数,  $f_2(y)$  为下层目标函数,  $g_1(x), h_1(x)$  为上层约束条件, 含有非线性项如下所示;  $g_2(x, y), h_2(x, y)$  为下层约束条件, 都为线性约束.

储能时长约束

$$\begin{cases} E_B = N_B \cdot C_B \\ N_B \geq \underline{N}_B \end{cases}$$

式中,  $N_B$  表示储能电站的储能时长, 为整数优化变量.

## 2.2 非线性项处理

对于上层问题中的非线性项可以采用枚举的方法, 通过求解多个 MILP 问题实现, 即分别令  $N_B = \underline{N}_B, \underline{N}_B + 1, \dots$ , 求解对应的 MILP 问题, 并统计各个问题的目标函数值, 选取最优的目标函数值对应的  $N_B$  值作为最终的  $N_B$  值.

枚举后的上层约束条件也都为线性约束, 所得到的新的双层问题就是一个混合整数线性的双层规划问题, 上层问题不含整数变量, 下层问题含有 0-1 变量.

## 2.3 调研结果

目前求解器可以求解的问题类型有:

1. 上下层都为凸 (LP-LP、LP-QP、LP-SOCP...)
2. 上下层都为整数线性规划 (ILP-ILP)

一种针对 MIBLP 问题的求解方法, 先将问题转化为如下形式:

$$\begin{aligned} \min_{x, y} \quad & c_x^T x + c_y^T y \\ & G_x x + G_y y \leq q \\ & Ax + By \leq b \\ & l \leq y \leq u \\ & x_j \text{ integer}, \forall j \in J_x \\ & y_j \text{ integer}, \forall j \in J_y \\ & d^T y \leq \Phi(x) \end{aligned}$$

其中  $\Phi(x)$  为以下值函数:

$$\Phi(x^*) := \min_{y \in \mathbb{R}^{n_2}} \{d^T y : By \leq b - Ax^*, \quad l \leq y \leq u, \quad y_j \text{ integer } \forall j \in J_y\}.$$

去掉约束  $d^T y \leq \Phi(x)$  得到 High Point Relaxation(HPR).

求解算法如下:

---

**Algorithm 2:** A basic branch-and-bound scheme for MIBLP

---

**Input** : A MIBLP instance satisfying proper assumptions;  
**Output**: An optimal MIBLP solution.

- 1 Apply a standard LP-based B&B to HPR, branching as customary on integer-constrained variables  $x_j$  and  $y_j$  that are fractional at the optimal LP solution; incumbent update is instead inhibited as it requires the bilevel-specific check described below;
- 2 **for** each unfathomed B&B node where standard branching cannot be performed **do**
- 3     Let  $(x^*, y^*)$  be the integer HPR solution at the current node;
- 4     Compute  $\Phi(x^*)$  by solving the follower MILP for  $x = x^*$ ;
- 5     **if**  $d^T y^* \leq \Phi(x^*)$  **then**
- 6         The current solution  $(x^*, y^*)$  is bilevel feasible: update the incumbent and fathom the current node
- 7     **else**
- 8         **if** not all variables  $x_j$  with  $j \in J_F$  are fixed by branching **then**
- 9             Branch on any  $x_j$  ( $j \in J_F$ ) not fixed by branching yet, even if  $x_j^*$  is integer, so as to reduce its domain in both child nodes
- 10         **else**
- 11             let  $(\hat{x}, \hat{y})$  be an optimal solution of the HPR at the current node amended by the additional restriction  $d^T y \leq \Phi(x^*)$ ;
- 12             Possibly update the incumbent with  $(\hat{x}, \hat{y})$ , and fathom the current node
- 13         **end**
- 14     **end**
- 15 **end**

---

Here  $J_F$  is the set of the leader x-variables appearing in the follower problem, all of which are assumed to be integer constrained (we also exclude HPR unboundedness)