In [17]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
%matplotlib inline
plt.rcParams['figure.figsize'] = (15, 10)
```

In [34]:

```
N = 100
sample = np.random.normal(size=100)
```

In [3]:

```
gamma = 0.95
```

In [40]:

```
def plot_int(low_lim, high_lim, title= None, ylim=None):

    low = [low_lim(sample[0:i+1]) for i in range(len(sample))]
    high = [high_lim(sample[0:i+1]) for i in range(len(sample))]

    plt.grid(True)
    plt.plot(np.arange(len(sample))+1, low, color='black')
    plt.plot(np.arange(len(sample))+1, high, color='black')
    plt.fill_between(np.arange(len(sample))+1, low, high, facecolor='green')
    if title:
        plt.title(title, fontsize=25)
    if ylim:
        plt.ylim(ylim)
    plt.xlabel('sample size', fontsize=20)
    plt.ylabel('parameter', fontsize=20)
    plt.show()
```

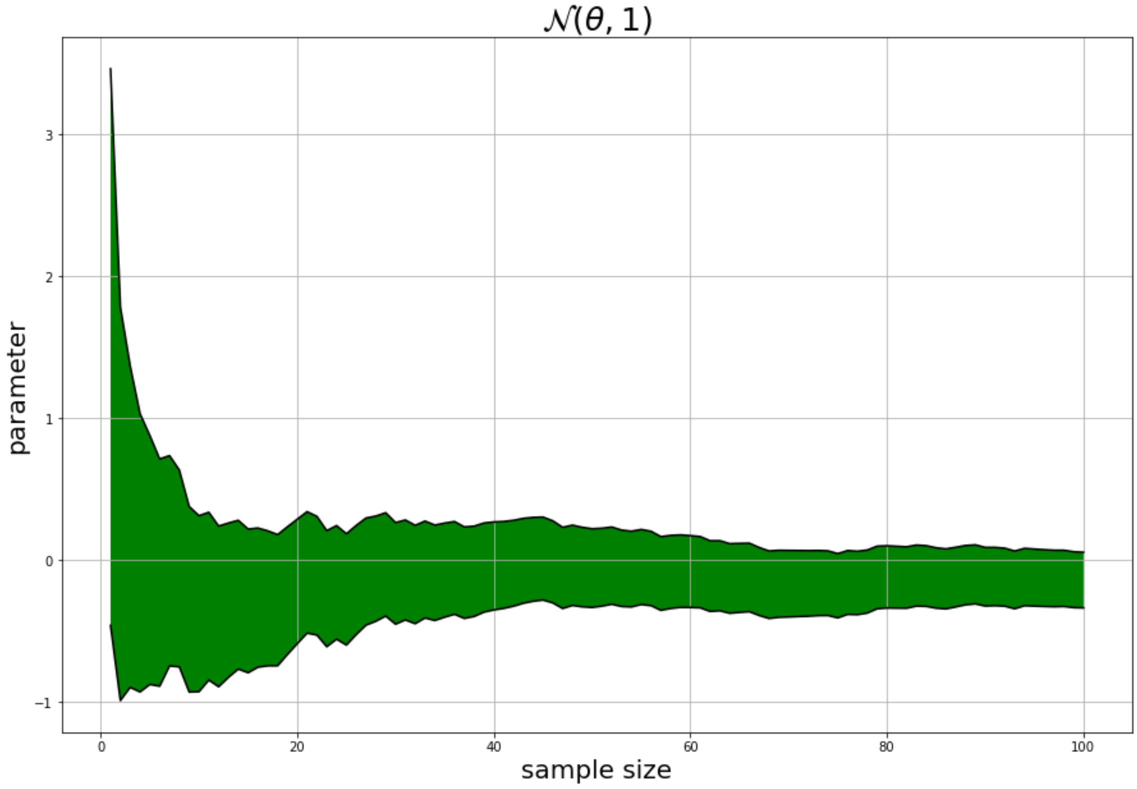
Доверительный интервал уровня γ для $\mathcal{N}(\theta, 1)$:

- $(\bar{X} - Z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{1}{\sqrt{N}}, \bar{X} + Z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{1}{\sqrt{N}})$

где $Z_{(\frac{1+\gamma}{2})}$ - квантиль распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ уровня $\frac{1+\gamma}{2}$

In [24]:

```
from scipy.stats import norm
Z = norm.ppf((1 + gamma)/2)
plot_int((lambda sample: np.mean(sample) - Z * len(sample)**(-0.5)),
         (lambda sample: np.mean(sample) + Z * len(sample)**(-0.5)),
         title=u'$\mathcal{N}(\\theta,1)$')
```



Доверительный интервал уровня γ для $\mathcal{N}(0,\theta)$:

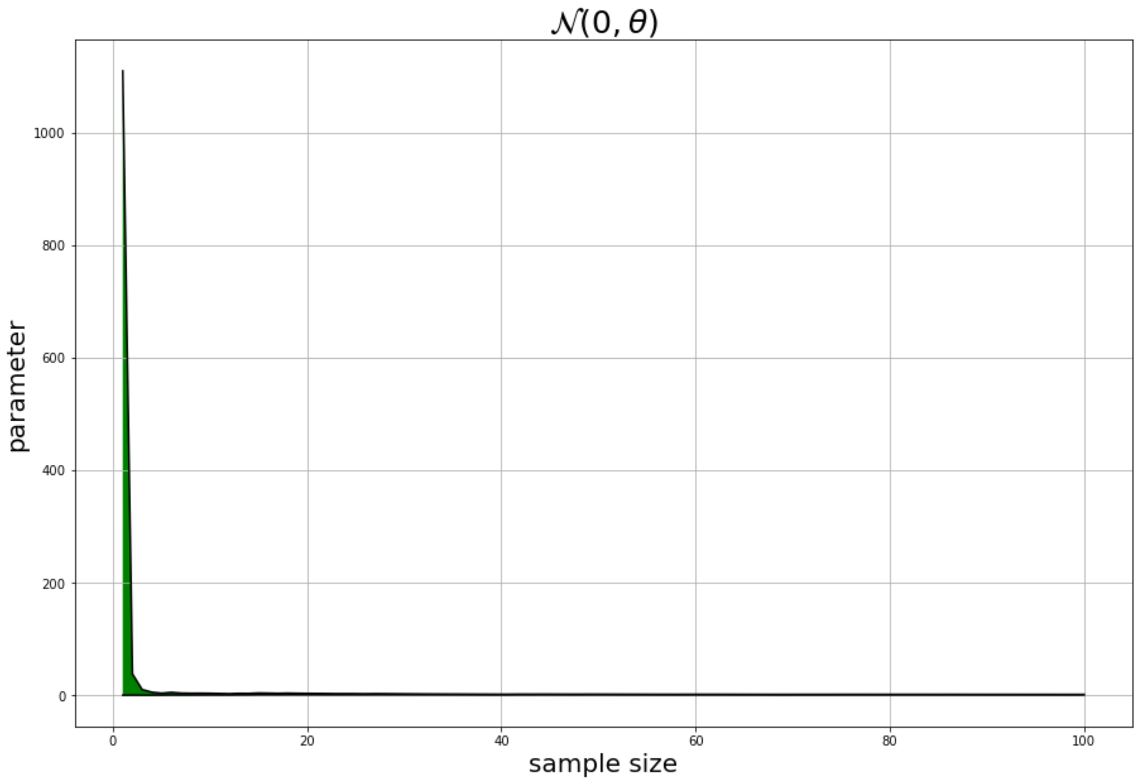
- $(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\nu_{\frac{1+\alpha}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\nu_{\frac{1-\alpha}{2}}})$, где ν квантиль распределения χ_n^2

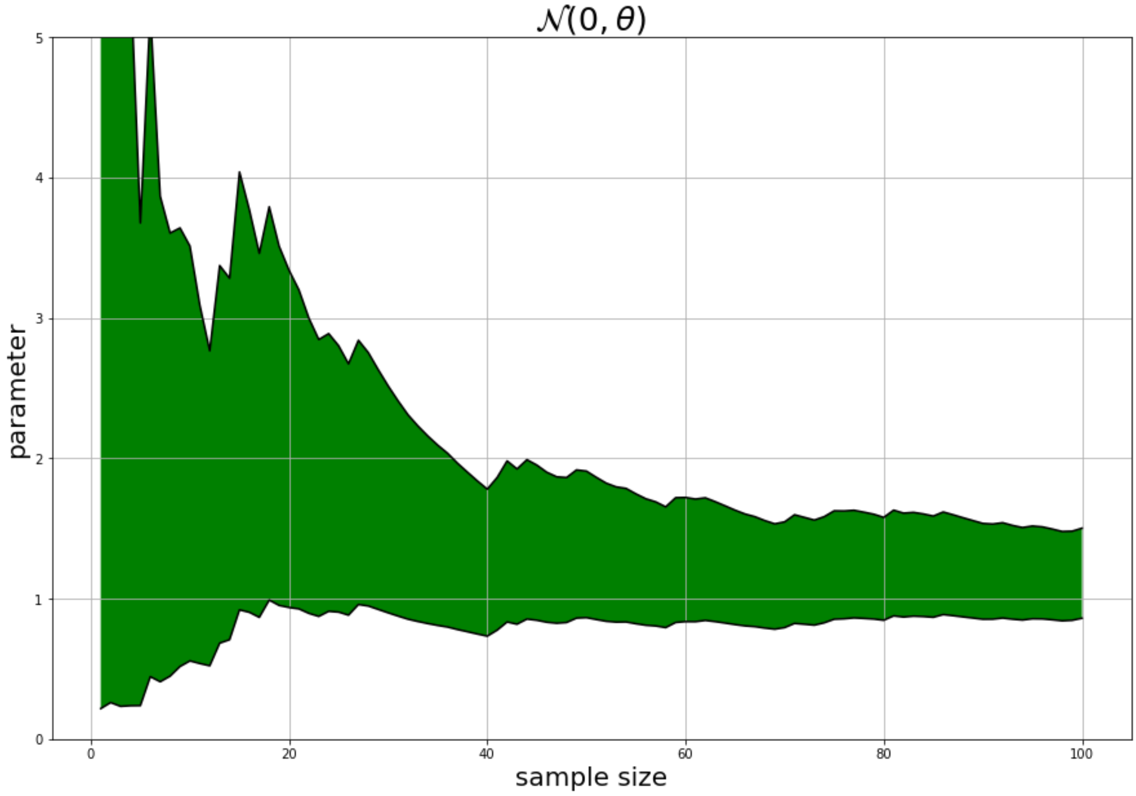
In [47]:

```
from scipy.stats import chi2

plot_int(lambda sample: np.sum(sample**2)/chi2.ppf(df=len(sample), q=(1 +
gamma)/2),
            lambda sample: np.sum(sample**2)/chi2.ppf(df=len(sample), q=(1 - gam
ma)/2),
            title=u'$\mathcal{N}(0,\\theta)$')

plot_int(lambda sample: np.sum(sample**2)/chi2.ppf(df=len(sample), q=(1 +
gamma)/2),
            lambda sample: np.sum(sample**2)/chi2.ppf(df=len(sample), q=(1 - gam
ma)/2),
            title=u'$\mathcal{N}(0,\\theta)$', ylim = (0, 5))
```





Доверительный интервал уровня γ для $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$:

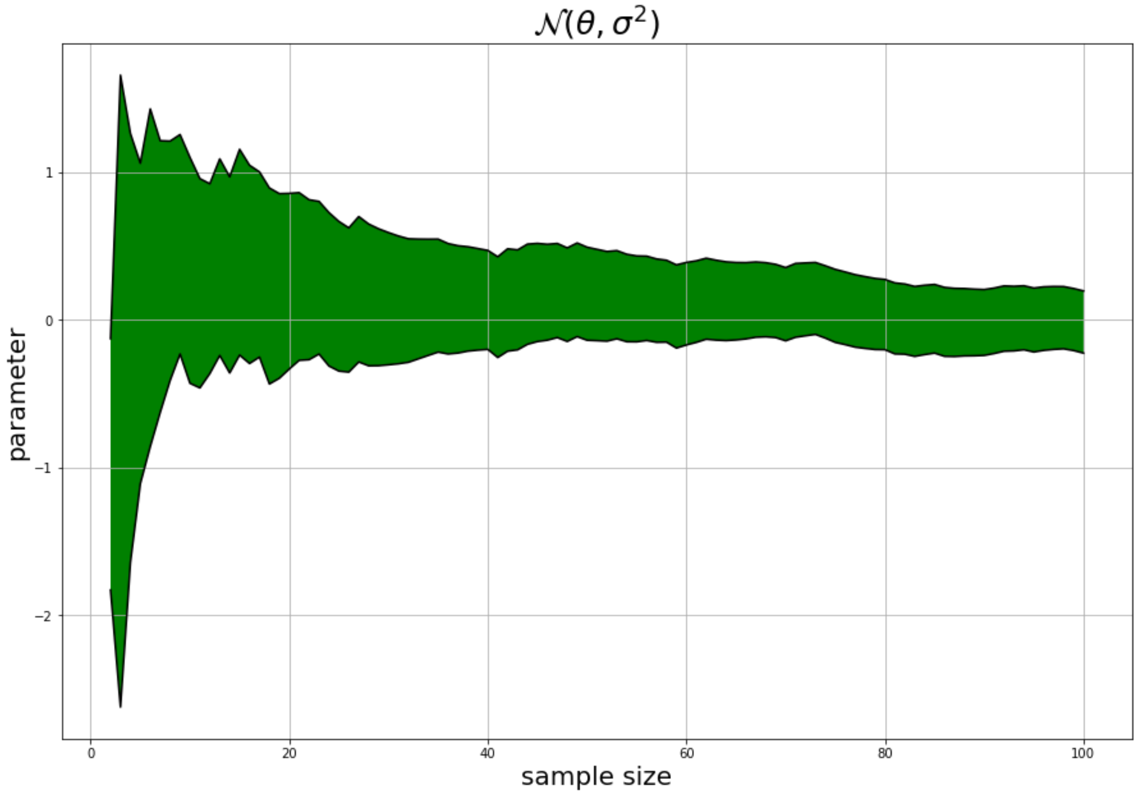
- $(\bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\tilde{s}}{\sqrt{N}}, \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\tilde{s}}{\sqrt{N}})$

где $t_{(\frac{1+\gamma}{2})}$ - квантиль распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы уровня $\frac{1+\gamma}{2}$,
$\tilde{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$ - стандартное отклонение

In [43]:

```
from scipy.stats import t
plot_int(lambda sample: np.mean(sample) - (np.var(sample) / (len(sample)-1)) **
0.5 * t.ppf((1 + gamma) / 2, df=len(sample)-1),
         lambda sample: np.mean(sample) + (np.var(sample) / (len(sample)-1)) **
0.5 * t.ppf((1 + gamma) / 2, df=len(sample)-1),
         title=u'$\mathcal{N}(\\theta,\sigma^2)$')
```

```
/home/pavel/anaconda2/lib/python2.7/site-packages/ipykernel/__main_
_.py:2: RuntimeWarning: invalid value encountered in double_scalars
  from ipykernel import kernelapp as app
/home/pavel/anaconda2/lib/python2.7/site-packages/ipykernel/__main_
_.py:3: RuntimeWarning: invalid value encountered in double_scalars
  app.launch_new_instance()
```



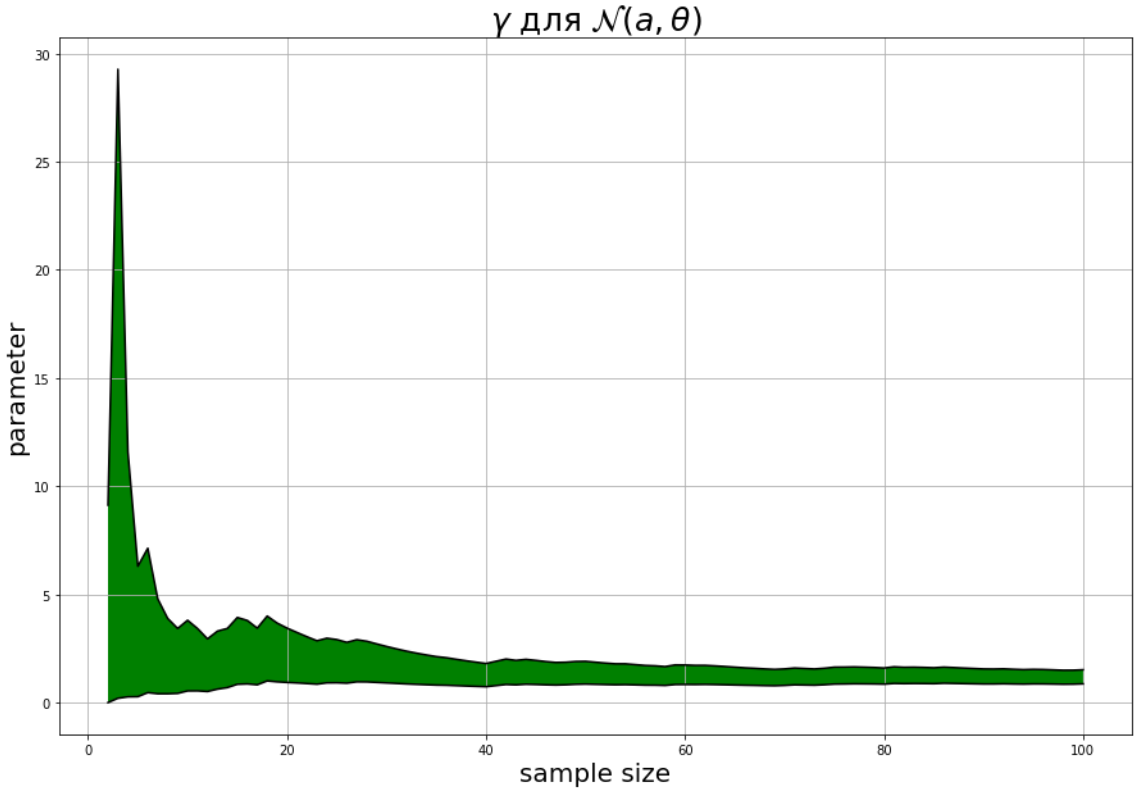
Доверительный интервал уровня γ для $\mathcal{N}(a, \theta)$:

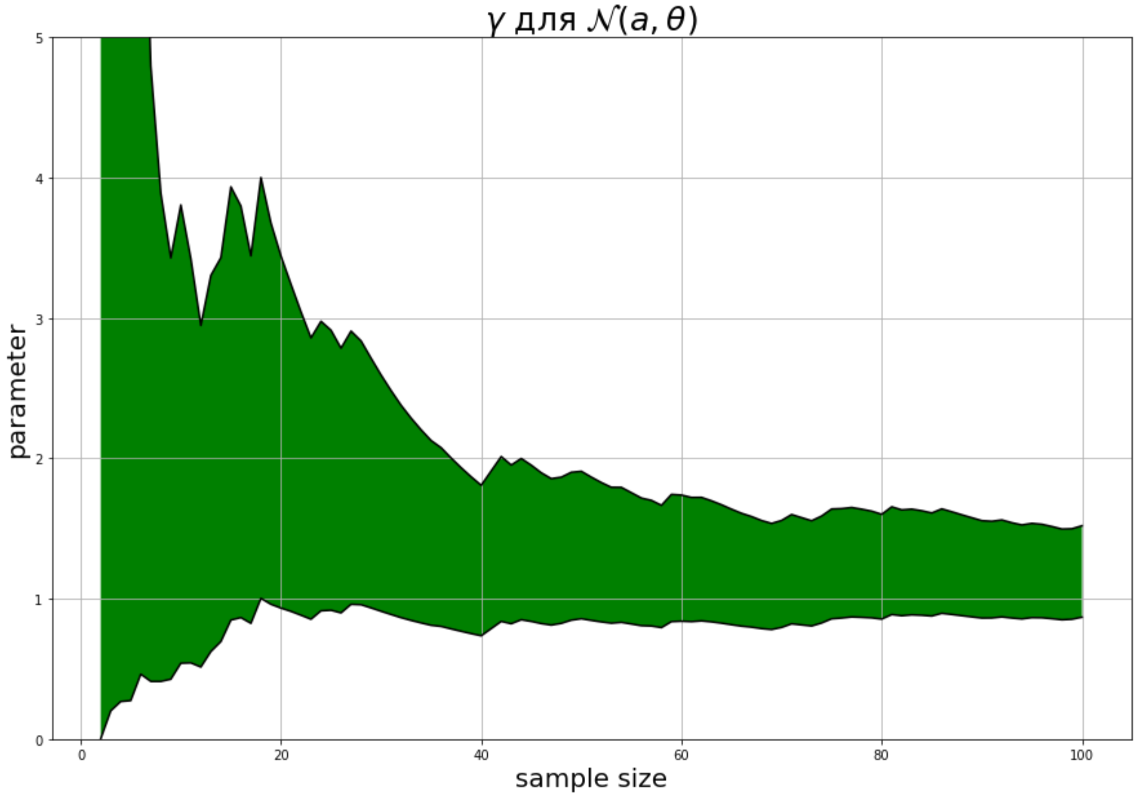
- $\left(\frac{(n-1)\tilde{s}^2}{\mu_{\frac{1+\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)\tilde{s}^2}{\mu_{\frac{1-\alpha}{2}}}\right)$, где ν квантиль распределения χ^2_{n-1}, $\tilde{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$ - стандартное отклонение

In [46]:

```
plot_int(lambda sample: len(sample)*np.var(sample)/chi2.ppf(df=len(sample)-1, q=
(1 + gamma)/2),
         lambda sample: len(sample)*np.var(sample)/chi2.ppf(df=len(sample)-1, q=
(1 - gamma)/2),
         title=u'$\gamma$ для $\mathcal{N}(a, \\theta)$')

plot_int(lambda sample: len(sample)*np.var(sample)/chi2.ppf(df=len(sample)-1, q=
(1 + gamma)/2),
         lambda sample: len(sample)*np.var(sample)/chi2.ppf(df=len(sample)-1, q=
(1 - gamma)/2),
         title=u'$\gamma$ для $\mathcal{N}(a, \\theta)$', ylim=(0, 5))
```





Выводы:

1) Знание второго параметра дает небольшой выигрыш в ширине доверительного интервала.
2) Чем больше выборка, тем доверительный интервал уже, но начиная с какого-то размера (40-60) существенно сужаться он престает.
3) Для оценки дисперсии (второго параметра) особенно важно сделать выборку достаточно большой (хотя бы 20-40).

In [ ]:

```

```