Домашна работа № 2

по „Диференциални уравнения и приложения“

Специалност „Софтуерно инженерство“, летен семестър на 2019/2020 уч. година

Име: Калоян Николов

Група: 3 Дата: 02.05.2020 г.

Условие :

Домашна работа No. 2 по ДУПрил
спец. СИ, 2 курс, летен семестър, уч. год. 2019/20

Задача СИ20-ДР2-12.
а) Намерете фундаментална система от решения (ФСР) на уравнението

$$4y''' - 4y'' + y' = 0.$$

б) Пресметнете детерминантата на Вронски за функциите от ФСР и напишете общото решение на уравнението. в) в) Напишете MATLAB код, който решава символно задачата на Коши за това уравнение с начални условия $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = 0$ и начертайте графиката на полученото решение в подходящ интервал.

Срок за предаване 03.05.2020 г.

Разработка :

а) Аналитично решение:

а) Намерете фундаментална система от решения (ФСР) на уравнението:

$$4y''' - 4y'' + y' = 0$$

Това е хомогенно линейно уравнение с постоянни коефициенти.

Съпоставяме следния характеристичен полином:

$4\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda(4\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$

$\lambda(2\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_1 = 0 \qquad (2\lambda - 1)^2 = 0$

$2\lambda - 1 = 0$

$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}$

Корените на характеристичния полином са:

$\lambda_1 = 0 \rightarrow$ еднократен (прост) корен

$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \rightarrow$ двукратен корен

от $\lambda_1 = 0$ следва, че във ФСР участва:

$e^{0.x} = 1$

от $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}$ следва, че във ФСР участват:

$e^{\frac{1}{2}.x}$ и $x.e^{\frac{1}{2}.x}$

Така за фундаментална система от решения получаваме: $\left\{1, e^{\frac{x}{2}}, x.e^{\frac{x}{2}}\right\}$

б) В подточка а) не доказахме, че сме получили ФСР, а само приехме, че това е така. За да докажем, че наистина сме намерили фундаментална система от решения е необходимо да пресметнем детерминантата на Вронски за функциите от ФСР и да покажем, че тя е различна от 0.

Нека означим: $y_1 = 1$

$y_2 = e^{\frac{x}{2}}$

$y_3 = x.e^{\frac{x}{2}}$

Така детерминантата на Вронски има вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$y_1 = 1 \Rightarrow y_1' = 0, \; y_1'' = 0$

$y_2' = (e^{\frac{x}{2}})' = (\frac{x}{2})'.e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.e^{\frac{x}{2}}$

$y_2'' = (\frac{1}{2}.e^{\frac{x}{2}})' = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}.e^{\frac{x}{2}}$

$y_3' = (x.e^{\frac{x}{2}})' = x'.e^{\frac{x}{2}} + x.(e^{\frac{x}{2}})' = e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}.e^{\frac{x}{2}} =$

$= (1+\frac{x}{2}).e^{\frac{x}{2}}$

$y_3'' = (e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}.e^{\frac{x}{2}})' = \frac{1}{2}.e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}.e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}.\frac{1}{2}.e^{\frac{x}{2}} =$

$= e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}.e^{\frac{x}{2}} = (1+\frac{x}{4}).e^{\frac{x}{2}}$

Следователно: $W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{\frac{x}{2}} & x.e^{\frac{x}{2}} \\ 0 & \frac{1}{2}.e^{\frac{x}{2}} & \left(1+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} \\ 0 & \frac{1}{4}.e^{\frac{x}{2}} & \left(1+\frac{x}{4}\right)e^{\frac{x}{2}} \end{vmatrix} =$

$= 1.\frac{1}{2}.e^{\frac{x}{2}}.\left(1+\frac{x}{4}\right)e^{\frac{x}{2}} + 0.\frac{1}{4}.e^{\frac{x}{2}}.x.e^{\frac{x}{2}} +$

$+ 0.e^{\frac{x}{2}}.\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} - 0.\frac{1}{2}.e^{\frac{x}{2}}.x.e^{\frac{x}{2}} -$

$- 1.\frac{1}{4}.e^{\frac{x}{2}}.\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} - 0.e^{\frac{x}{2}}.\left(1+\frac{x}{4}\right).e^{\frac{x}{2}} =$

$= \frac{1}{2}.e^{\frac{x}{2}}.\left(1+\frac{x}{4}\right)e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}.e^{\frac{x}{2}}.\left(1+\frac{x}{2}\right).e^{\frac{x}{2}} =$

$= \frac{1}{2}.\left(1+\frac{x}{4}\right)e^{x} - \frac{1}{4}.\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{x} =$

$= \frac{1}{2}.e^{x} + \cancel{\frac{x}{8}.e^{x}} - \frac{1}{4}e^{x} - \cancel{\frac{x}{8}e^{x}} = \frac{1}{4}e^{x}$

$\Rightarrow W(x) = \frac{1}{4}e^{x} \neq 0 \ \forall x$

$\Rightarrow$ Наистина $\left\{1, e^{\frac{x}{2}}, x.e^{\frac{x}{2}}\right\}$ е фундаментална система от решения.

Общото решение на уравнението е:

$y(x) = c_1 + c_2.e^{\frac{x}{2}} + c_3.x.e^{\frac{x}{2}}$, където

c_1, c_2, c_3 са произволни константи.

б) Matlab код:

```
function Homework_2

clc
clf

x=-20:2:20;
Y=dsolve('4*D3y-4*D2y+Dy=0', 'y(1)=1', 'Dy(1)=0', 'D2y(1)=0', 'x')

y=ones(1, length(x));

hold on
grid on
axis([-20 20 0 2])

plot(x,y,'b')

xlabel('x')
ylabel('y(x)')

end
```

в) Резултат от изпълнението на кода:

Резултат от командния ред:

```
Y =

1
```

Графика на решението: