Домашна работа № 1

по „Диференциални уравнения и приложения“

Специалност „Софтуерно инженерство“, летен семестър на 2019/2020 уч. година

Име: Калоян Николов

Група: 3 Дата: 03.04.2020 г.

Условие :

Задача СИ20-ДР-12.

а) Решете уравнението

$$x^3(x-2)y' + 2x^2(x-2)y = 1.$$

б) Напишете MATLAB код, които решава числено задачата на Коши за това уравнение с начално условие $y(-3) = 1$ в подходящ интервал и изчертава графиката на намереното приближение на решението ѝ. Приложете резултата от изпълнението на кода.

Срок за предаване 05.042020 г.

Разработка :

а) Аналитично решение:

$$x^3(x-2)y' + 2x^2(x-2)y = 1$$

$$x^3(x-2)y' = -2x^2(x-2)y + 1$$

$$y' = \frac{-2x^2\cancel{(x-2)}}{x^3\cancel{(x-2)}}y + \frac{1}{x^3(x-2)}, \quad x \neq 0$$

$$y' = -\frac{2y}{x} + \frac{1}{x^3(x-2)}$$

Това е линейно уравнение с коефициенти:

$$a(x) = \frac{-2}{x}; \quad b(x) = \frac{1}{x^3(x-2)}$$

Ще намерим решението чрез формулата:

$$(1) \quad y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(C + \int b(x).e^{-\int a(x)dx}dx\right)$$

Следователно трябва да пресметнем интегралите:

$$\int a(x)dx = \int -\frac{2}{x}dx = -2\ln|x| = \ln\frac{1}{x^2}$$

$$\int b(x).e^{-\int a(x)dx}dx = \int \frac{1}{x^3.(x-2)}.e^{-\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}dx =$$

$$= \int \frac{1}{x^3.(x-2)}.e^{\ln x^2}dx = \int \frac{1}{x^3.(x-2)}.x^2\,dx = \int \frac{dx}{x(x-2)}$$

Ще използваме метода на неопределените коефициенти:

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

$$(x-2)A + x.B = 1$$

$$x.A - 2A + xB = 1$$

$(A+B)x - 2A = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{2} \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Така получаваме:

$$\int \frac{dx}{x(x-2)} = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-2} dx =$$

$$= \frac{-1}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x-2)}{x-2} =$$

$$= \frac{-1}{2} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-2| = \frac{1}{2}\left(\ln|x-2| - \ln|x|\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| = \ln\sqrt{\left|\frac{x-2}{x}\right|}$$

Заместваме в (1) и получаваме:

$$y(x) = e^{\ln\frac{1}{x^2}}\left(C + \ln\sqrt{\left|\frac{x-2}{x}\right|}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(C + \ln\sqrt{\left|\frac{x-2}{x}\right|}\right)$$

Отговор:

$$y(x) = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \ln\sqrt{\left|\frac{x-2}{x}\right|}, \quad x \neq 0$$

б) Matlab код:

```
function Homework_1

    function z=ff(x,y)
        z=-2*y/x+1/(x^3*(x-2));
    end

clc
clf

grid on
hold on

x0=-3;
y0=1;
[X,Y]=ode45(@ff,[x0,-0.2],y0);
plot(X,Y,'b')

xlabel('x')
ylabel('y(x)')

end
```

в) Резултат от изпълнението на кода: