Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2019/20

Тема № СИ20-П-12

26.06.2020 Изготвил: Калоян Николов

София Група 3

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задание) на проекта

Тема СИ20-П-12. Дадена е системата

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = x - x^3 \\ \dot{y} = -y. \end{array} \right.$$

1. Намерете нейните равновесни точки. Напишете линейното приближение на системата в околност на една от намерените равновесни точки.

2. Начертайте фазов портрет на написанта линейна система в подточка (1). Към всяка една от изобразените фазови криви (без равновесната точка) начертайте по един тангенциален вектор. Маркирайте със символа звезда положението на равновесие.

2. Решение на задачата

2.1. Теоретична част

Дадена е системата:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Равновесните точки на системата са решенията на следната система:

$$\begin{cases} x - x^3 = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(1-x^2) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$x(1-x^2) = 0$$

$x_1 = 0$ $\quad 1 - x^2 = 0$

$(1-x)(1+x) = 0$

$x_2 = 1 \quad x_3 = -1$

Следователно равновесните точки на дадената система са:

$(0;0)$, $(1;0)$ и $(-1;0)$

Линейното (първо) приближение на дадената система в околност на равновесната точка (a,b) е система:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}, \text{ където } J(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{pmatrix}$$

и $f(x,y) = x - x^3$, $\quad g(x,y) = -y$

Следователно:

$$\left.\begin{array}{ll} f'_x = 1-3x^2 & f'_y = 0 \\ g'_x = 0 & g'_y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow J(x,y) = \begin{pmatrix} 1-3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. В околност на равновесна точка $(1;0)$

$$J(1;0) = \begin{pmatrix} 1-3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Следователно линейното приближение на дадената система в околност на тази равновесна точка е:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{l} \dot{x} = -2(x-1) \\ \dot{y} = -y \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x} = -2x+2 \\ \dot{y} = -y \end{array} \right.$$

Аналогично можем да намерим и линейното приближение на системата в околност на останалите равновесни точки

2. В околност на равновесна точка $(0;0)$

$$J(0;0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{array} \right.$$

3. В околност на равновесна точка $(-1;0)$

$$J(-1;0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\ y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l}\dot{x}=-2x-2\\ \dot{y}=-y\end{array}\right.$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

```
function Tema12

    function z=ff(t,y)
        % за точка (1;0)
        z=[-2*y(1)+2; -y(2)];
        % за точка (0;0)
        %z=[y(1); -y(2)];
        % за точка (-1;0)
        %z=[-2*y(1)-2; -y(2)];
    end

tmax=5;
clf;
clc;

hold on;
grid on;
daspect([1 1 1])

% можем да изобразим повече фазови криви като намалим стъпката
x=-3:0.5:3;
y=-3:0.5:3;

[X,Y]=meshgrid(x,y);

%чертаем равновесните точки на системата
plot(1, 0, 'k*')
%plot(0, 0, 'k*')
%plot(-1, 0, 'k*')

%чертаем фазов портрет
for i=1:length(x)
       for j=1:length(y)
            [T,Z]=ode45(@ff, [0, tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);
            [T1,Z1]=ode45(@ff, [0, -tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);

            plot(Z(:,1), Z(:,2), Z1(:, 1), Z1(:, 2))
            axis([-4, 4, -4, 4])
       end
end

% тангенциални вектори:
% за точка (1;0)
DX=-2*X+2;
DY=-Y;
% за точка (0;0)
%DX=X;
```

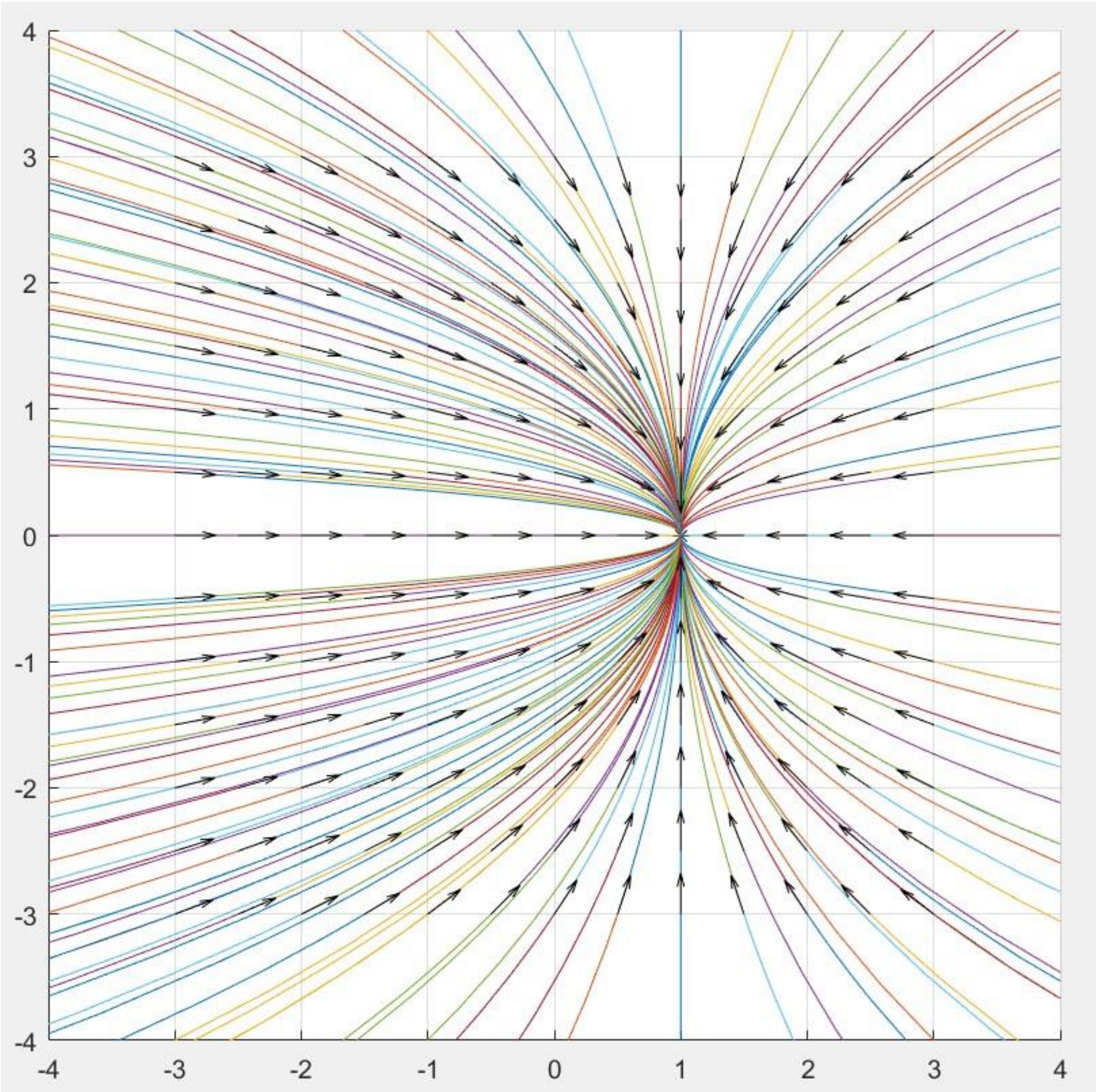
```
%DY=-Y;
% за точка (-1;0)
%DX=-2*X - 2;
%DY=-Y;

%чертаем ненормирани тангенциални вектори
%quiver(X, Y, DX, DY, 1.5, 'k');

%нормираме тангенциалните вектори
D=sqrt(DX.^2+DY.^2);
%чертаем тангенциалните вектори
quiver(X,Y,DX./D,DY./D,0.5,'k')
end
```

Няма резултати, които се извеждат в командния прозорец.

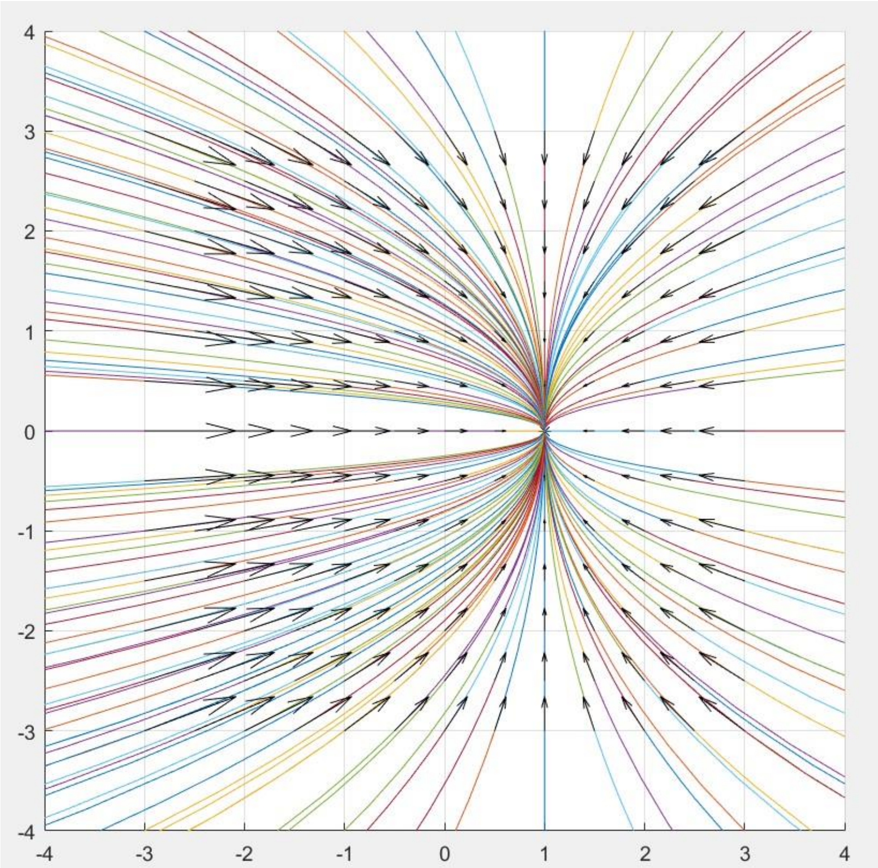
2.3. Графики (включително от анимация)

За точка (1;0) :

Фазов портрет и нормирани тангенциални вектори

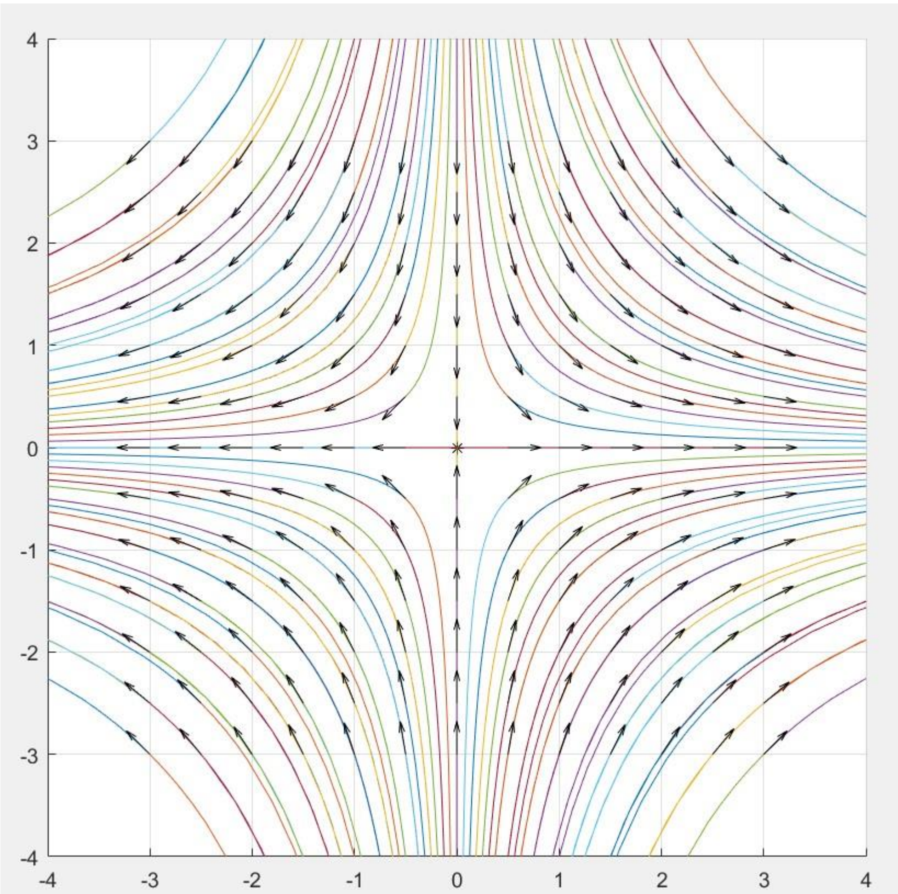


Фазов портрет и ненормирани тангенциални вектори

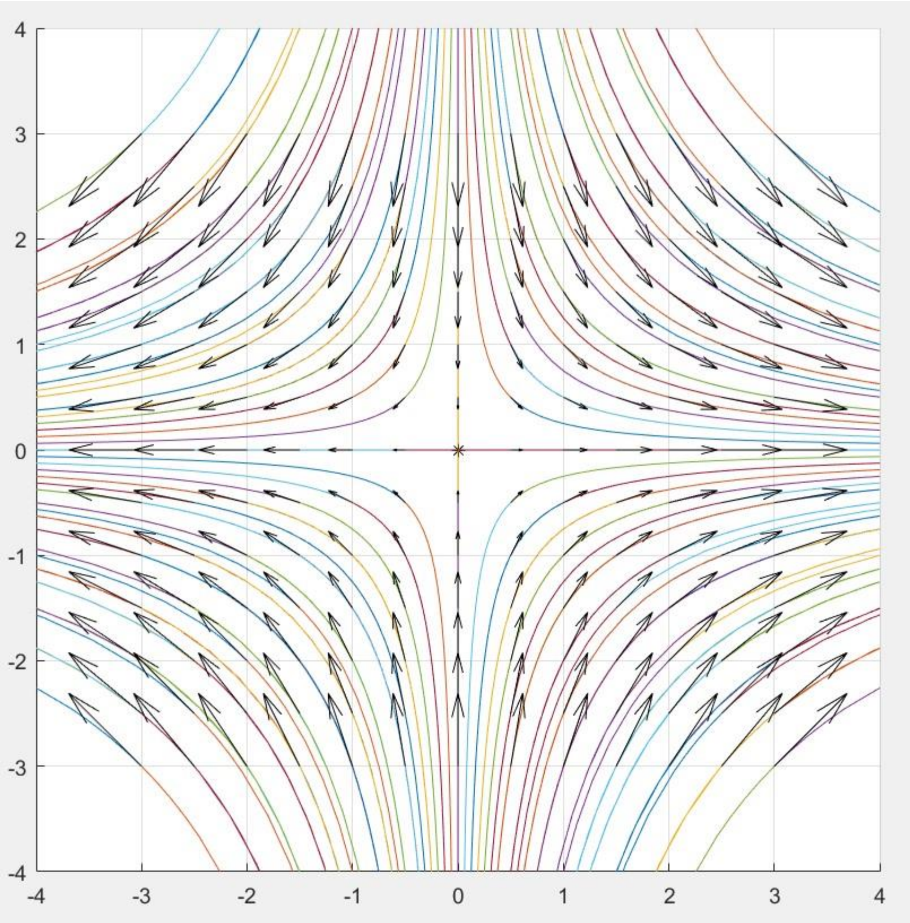


За точка (0;0) :

Фазов портрет и нормирани тангенциални вектори

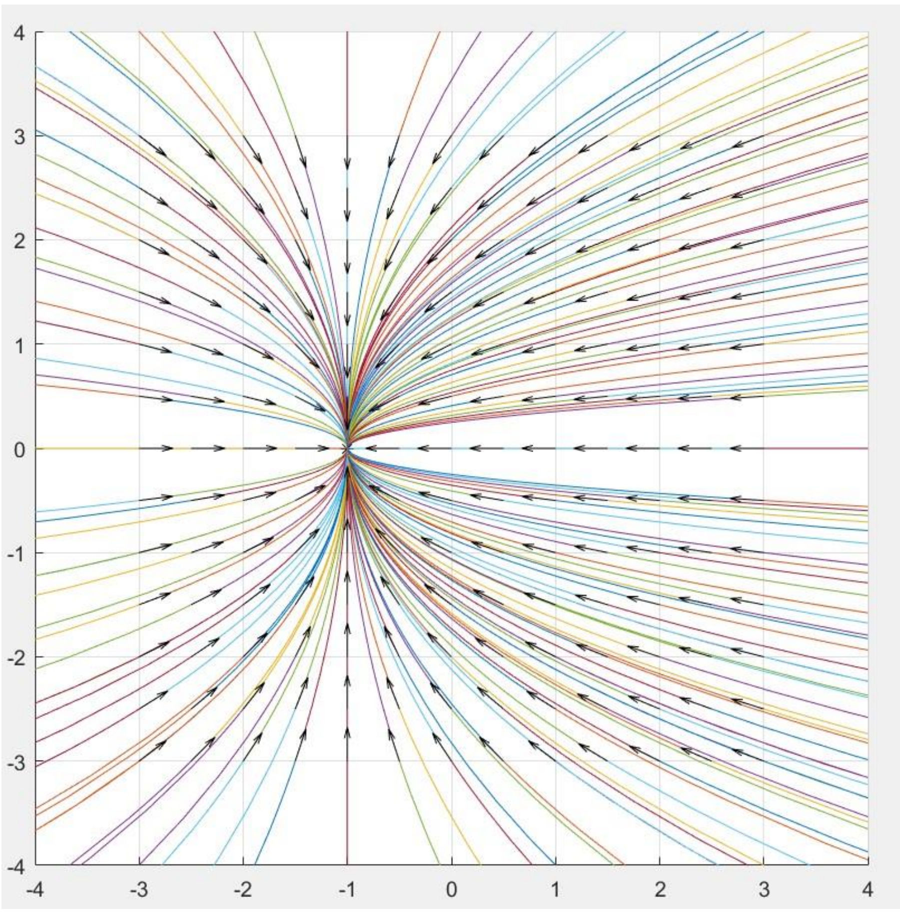


Фазов портрет и ненормирани тангенциални вектори

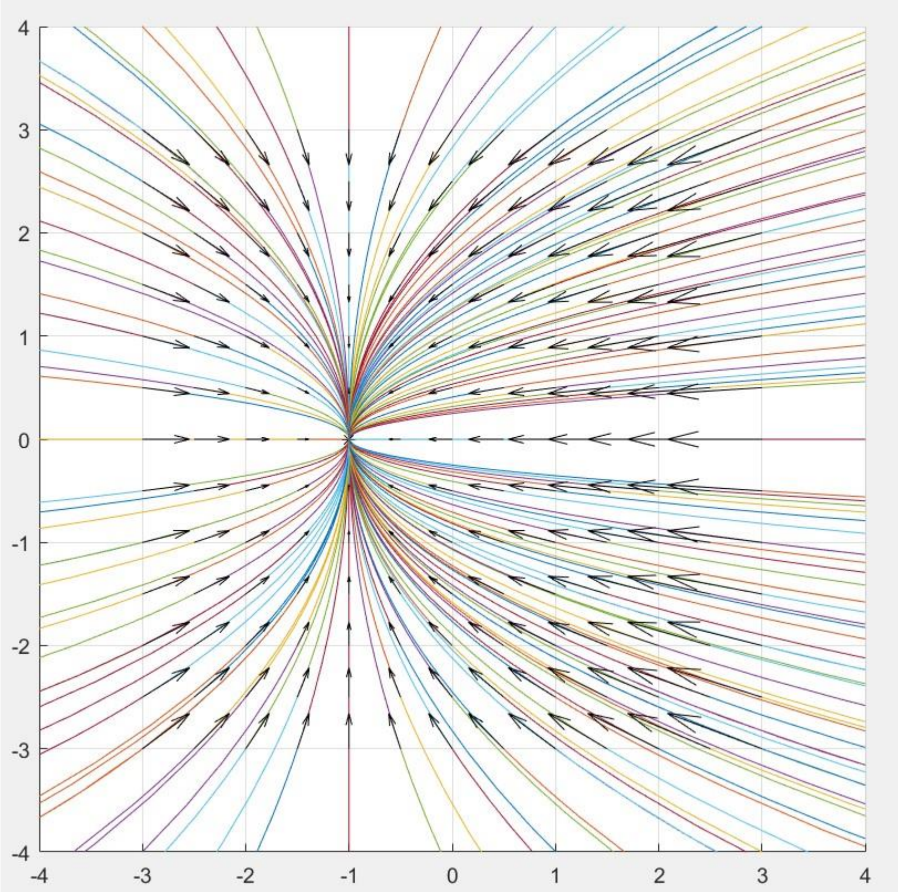


За точка (-1;0) :

Фазов портрет и нормирани тангенциални вектори



Фазов портрет и ненормирани тангенциални вектори



2.4. Коментари към получените с MatLab резултати

От полученият чертеж, можем да забележим, че фазовите криви към равновестите точки (-1;0) и (1;0) са параболи.

Също се забелязва, че равновесните точки (-1;0) и (1;0) са асимптотично устойчиви – и двете точки са пример за устойчив възел. Точката (0;0) е неустойчива и се нарича седло. Това можем да покажем и със следните изчисления:

1. За равновесни точки (-1;0) и (1;0):

$$J(-1;0) = J(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Следователно трябва да пресметнем:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (-2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$(2+\lambda)(1+\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 < 0 \;;\; \lambda_2 = -1 < 0$$

Следователно (-1;0) и (1;0) са асимптотично устойчиви положения на равновесие. Както (-1;0), така и (1;0) е устойчив възел.

2. За равновесна точка (0;0)

$$J(0;0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(1+\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 > 0 \;;\; \lambda_2 = -1 < 0$$

Следователно (0;0) е неустойчиво положение на равновесие и се нарича седло.