Групи и пръстени с фрактална размерност (П1)

Подмножество F на $\mathbb{R}$ е подгрупа на реалните числа за операцията събиране ако:

1) $0 \in F$
2) $x + y \in F$ ако $x \in F$ и $y \in F$ и
3) $-x \in F$ ако $x \in F$.

Множеството F е подпръстен на $\mathbb{R}$ по отношение на събиране и умножение, ако е в сила и:

4) $xy \in F$ ако $x \in F$ и $y \in F$.

Пример: F цели числа, F рационални числа, F числа от множеството: $\{r + s\sqrt{2} : r, s \in \mathbb{Z}\}$ са подпръстени (и следователно подгрупи) на $\mathbb{R}$. Тези множества са изброими $\Rightarrow$ Хаусдорфовата им размерност е 0.

Не е задължително подгрупите и подпръстените на $\mathbb{R}$ да имат Хаусдорфова размерност 0.

Пример 12.4 фиксираме $s: 0 < s < 1$. Нека $n_0, n_1, n_2, \ldots$ е бързо растяща редица от цели числа: например $n_{k+1} \geq \max\{n_k^k, 4n_k^{1/s}\}$ за всяко k. За $r = 1, 2, \ldots$, нека:

$$F_r = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x - p/n_k| \leq r n_k^{-1/s} \text{ за някое цяло число } p \text{ и за всяко } k. \right\}$$

и още нека $F = \bigcup_{r=1}^{\infty} F_r$. Тогава $\dim_H F = s$ и F е подгрупа на $\mathbb{R}$ по отношение на събирането.

док-во на стр. 201.

Подпръстените са по-трудни за окачествяване. Геометричен подход се основава на оценка на размерността на множеството от разстояния, получени от равнинно множество.

Нека $E \subset \mathbb{R}^2$, дефинираме множеството от разстояния на E като: $D(E) = \{|x-y| : x, y \in E\} \subset \mathbb{R}\}$

от полза е / имаме интерес да намерим долната граница на Хаусдорфовата размерност на $D(E)$.

<u>Теорема 12.5</u> Нека $E \subset \mathbb{R}^2$ е множество на Борел. Тогава:

$$\dim_H D(E) \geq \min\left\{1, \dim_H E - \frac{1}{2}\right\}.$$

<u>Теорема 12.6</u> Нека F е подпръстен на $\mathbb{R}$ за събиране и умножение. Ако F е множество на Борел то:

$\dim_H F = 0$ <u>или</u> $F = \mathbb{R}$.

док-на стр. 203.

Има и друга фрактална група, с голямо значение за теорията на безкрайните групи: Нека T е безкрайно кореново двоично дърво, т.е. графът има за върхове: всички крайни редици $\{(i_1, \ldots, i_k) : i_j = 1, 2 \text{ и } k \geq 0\}$ а ребрата свързват всеки връх: $(i_1, \ldots, i_k)$ с родителя му: $(i_1, \ldots, i_{k-1})$ и децата му: $(i_1, \ldots, i_k, 1)$ и $(i_1, \ldots, i_k, 2)$. Коренът на дървото е празната редица $\emptyset$. Нека $Aut(T)$ е групата на всички автоморфизми на T, т.е. групата от биекции м/у върхове на T, при което коренът е фиксиран, а едни върхове се изобразяват върху други

$\dim_H Aut(T) = 1$.

(13)

Можем да дефинираме и подгрупи на $Aut(T)$, които да са "самоподобни". Групата G на Grigorchuk е първата безкрайна група, която показва "среден растеж". Може да се покаже, че $\dim_H G = \frac{5}{8}$.

още твърдения в: Exercises, стр. 204 и 205, като:

- всяко множ-на Борел с крайна площ (>), може да се покрие от фамилия от прави линии с обща площ $\geq$.
- Нека $f: R \to R$ е изпъкнала. Множ. от точки, където f не е диференцируема трябва да е крайно или изброимо.
- $\exists$ изпъкнала ф-я $f: R^2 \to R$ такава, че множ. от точки където не е диференцируема е с Хаусдорфова размерност 1. (и $\exists$ изпъкнала ф-я —//— с Хаусдорфова размерност 2.)
- Всяка подгрупа на $\mathbb{R}$ за събиране има Бокс размерност 0 или 1.
- За $0 < s < 2$, $\exists$ подгрупа на $\mathbb{R}^2$ за векторно събиране, която е с Хаусдорфова размерност s.
- A е множ-на Борел и $A \subset [0; \pi)$, Нека $F \subset$ {равнина, съдържаща права с ъгъл θ} $\forall \theta \in A$. Тогава $\dim_H F \geq 1 + \dim_H A$.
- $\exists$ подмнож. на равнината с площ 0, което съдържа различна права през всяка точка от x-оста