Изпъкнали функции

Тук показваме че размерността често се използва, за да ограничава размера на множеството от точки, където "лошо" поведение може да се наблюдава.

Деф.
Непрекъснатата функция f е изпъкнала, ако

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \underbrace{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)} \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^2 \text{ и } 0\leq\lambda\leq 1.$$

тъй като $\lambda\geq 0$ и $1-\lambda\geq 0$ и $\lambda+1-\lambda=1$, то това е изпъкнала линейна комбинация.

Геометрично, ако $S=\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}^2\}$ е повърхнината в $\mathbb{R}^3$, представяща графиката на f, то f е изпъкнала, ако отсечката м/у които и да е 2 точки от f е под S.

Възможно е изпъкналата ф-я f да има точки, където не е диференцируема, но те не трябва да са "прекалено много". Ако f не е диференцируема в x_0, то тогава $\exists$ повече от 1 допирателна равнина към $(x,f(x))$.

Теорема 12.3
Нека $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ е изпъкнала функция. Тогава множеството от точки, където f не е диференцируема се съдържа в крайно или изброимо обединение на ректифицируеми криви. Така Хаусдорфовата размерност е най-много 1.

Уточнение: Хаусдорфовата размерност се използва, за да измери количествено неравностите на повърхнини. Например, изпъкнала повърхнина може да съдържа отсечки, но може да се покаже, че множеството от посоки на тези отсечки е с размерност най-много 1.

<u>Доказателство</u>: нека б.о.о. $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$. Нека S е повърхнината от графиката на f.

Нека $g: \mathbb{R}^2 \to S$ ни дава най-близката точка на всяко $x \in \mathbb{R}^2$ от S. ($\forall x \in \mathbb{R}^2$, $g(x)$ е тази точка от S, за която разстоянието $|g(x)-x|$ е минимално.) Изпъкналостта на f ни гарантира, че тази точка $g(x)$ е единствена.

Ако $x, y \in \mathbb{R}^2$, то ъглите на (евентуално наклонения) четириъгълник $x, g(x), g(y), y$ при $g(x)$ и $g(y)$ са поне $\frac{\pi}{2}$. В противен случай, отрезът $(g(x), g(y))$ ще съдържа точка под или над S, която ще е по-близо до x или y. От това следва, че g намаля разстоянието м/у 2-те точки, които приема като аргументи:

$$|g(x)-g(y)| \leq |x-y| \quad , x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Ако f не е диференцируема в x_0, то $\exists$ повече от 1 допирателна равнина в $(x, f(x))$. Така $g^{-1}(x, f(x))$ (т.е. подмнож. от $\mathbb{R}^2$, които се изпращат в тази точка от g) е сечението на $\mathbb{R}^2$ с нормалите на допирателните равнини от S в $(x, f(x))$ и по този начин е права.

Нека $\{L_1, L_2, \dots\}$ е изброимо множество от прави в $\mathbb{R}^2$, чиито краища са точки с рационални координати.

Ако f не е диференцируема в x, то $g^{-1}(x, f(x))$ съдържа отрязък, който трябва да пресича поне една от точка L_i.

Тока ако дефинираме:

$F = \{(x, f(x)) : f$ не е диференцируема в $x\}$, то

$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} g(L_i)$. Следователно $g(L_i)$ е или точка или ректифицируема крива с $\mathcal{H}^1(g(L_i)) \leq \mathrm{length}(L_i) < \infty$.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} g(L_i)$ е изброимо обединение на ректифицируеми криви, съдържащи F, което има Хаусдорфова размерност най-много 1.

Множ. от точки x, където f не е диференцируема е ортогоналната проекция на F в/у координатната равнина $\mathbb{R}^2$. Така Хаусдорфовата размерност е най-много 1, тъй като ортогоналните проекции не увеличават размерността.