Тау-функции

ON THE BOX DIMENSION OF COMPLETED Graphs.

Ще разгледаме бокс размерността на допълнената графика на ограничени реалнозначни функции, деф. в множ. $\Omega[0,1]^m$ които имат определена последователност на средния си модул $\tau(f,\delta)_{L_1(\Omega)}$ за $\delta \to 0$. Безикович и Урсел доказват, че всяка ф-я $f \in Lip\,\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ има Хаусдорфова размерност на графиката си не повече от $2-\alpha$.

Нека $\Omega := [0,1]^m \subset \mathbb{R}^m \to m$-мерен нормиран вектор от просторанството с елементи: $x = (x_1, \dots, x_m)$.

деф. нормата: $\|x\| = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, m\}$ и също казваме $x \le y$ ако $x_i \le y_i$ $\forall i = 1, \dots, m$.

Означаваме с $M(\Omega)$ множеството от всички ограничени измерими реалнозначни функции в Ω.

с $H(\mathbb{R}^{m+1})$ означаваме множеството от всички компактни подмножества на $\mathbb{R}^{m+1}$.

Мултииндекс k ще наричаме наредената m-орка от неотрицателни цели числа:

$k := (k_1, k_2, \dots, k_m)$, за $j = 1, \dots, m$, $k_j \ge 0$ и $k_j \in \mathbb{Z}$.

$e = (1, \dots, 1)$, $\theta = (0, 0, \dots, 0)$.

Нека мултииндекс i е такъв, че $0 \le i_j \le n-1$ за $j = 1, \dots, m$ и

$\Omega_j := \{y \in \Omega : \frac{1}{n} i \le y \le \frac{1}{n}(i+e)\}$

T2

За $\delta > 0$, нека $B_{\delta/2}(x) := \{ y \in \mathbb{R}^{m+1} : \| y - x \| \le \delta/2 \}$ е затворено кълбо с диаметър δ и център $x \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Нека $N_\delta(F)$ е най-малкото число за брой затворени кълба с диаметър δ, достатъчен, за да покрие F т.е.

$$N_\delta(F) = \min \left\{ M ; \exists x_n \subset \mathbb{R}^{m+1} : F \subset \bigcup_{i=1}^{M} B_{\delta/2}(x_n) \text{ за } i = 1, 2, \dots, M \right\}$$

Бокс размерността $\dim_B F$ на $F \in H(\mathbb{R}^{m+1})$ се дефинира като:
$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \sup \left\{ \frac{\log N_\delta(F)}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \right\}$$, т.е.

всяко компактно множество от $H(\mathbb{R}^{m+1})$ има бокс размерност.

— — - - -

За $f \in M(\Omega)$ и $\Delta \subseteq \Omega$ дефинираме:

→ локален модул (на непрекъснатост) на f:
$$\omega(f, x; \delta)_\Delta = \sup \{ |f(y+t) - f(y)| : y, y+t \in B_{\delta/2}(x) \cap \Delta \}$$
за $\delta > 0$.

→ среден модул на непрекъснатост на f или τ-модул на непрекъснатост на f:
$$\tau(f, \delta)_{L_1(\Omega)} = \int_\Omega \omega(f, x; \delta)_\Omega \, dx = \| \omega(f, \cdot; \delta)_\Omega \|_{L_1(\Omega)}$$

Още ще използваме означенията:
$$S(\delta, f; x) = \sup \{ f(t) : t \in \Omega, |t - x| \le \delta \},$$
$$I(\delta, f; x) = \inf \{ f(t) : t \in \Omega, |t - x| \le \delta \}$$
и
$$S(f; x) = \lim_{\delta \to 0} S(\delta, f; x)$$
$$I(f; x) = \lim_{\delta \to 0} I(\delta, f; x)$$

S

I

Когато ф-ята е непрекъсната, то $S = I$, ако обаче не е непрекъсната, то $\exists$ интервал $[I, S]$

Вина е: $\tau(f,\delta)_{L_1(\Omega)} = \left\| S\left(\frac{\delta}{2}, f; \cdot\right) - I\left(\frac{\delta}{2}, f; \cdot\right) \right\|_{L_1(\Omega)}$

$\forall t \in \mathbb{R}^m$ означаваме: $\Omega_t = \{x \in \Omega : x+t \in \Omega\}$

Дефинираме интегрален модул на непрекъснатост на няколко променливи по следния начин:

$$\omega(f,\delta)_{L_1(\Omega_t)} := \sup\{\| f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_{L_1(\Omega)} : \| t \le \delta\},$$

Класически модул на непрекъснатост е:

$$\omega(f,\delta)_{L_1(\Omega)} := \sup\{| f(x+t) - f(x)| : t \le \delta\}$$

! Лесно се вижда, че

$$\omega(f,\delta)_{L_1(\Omega)} \le \tau(f,\delta)_{L_1(\Omega)} \le \omega(f,\delta)_{L_1(\Omega)}$$

......

Деф. 2. ~~Пълният граф~~ (или допълнената графика) $G(f)$ на f е:

$$G(f) := \{ y \in \mathbb{R}^{m+1} : (y_1, \dots, y_m) \in \Omega, \; y_{m+1} \in [I(f;x), S(f;x)] \}$$

$\forall f \in M(\Omega)$, $\exists\, G(f) \in H(\mathbb{R}^{m+1})$. Ако f е непрекъсната в $x \in \Omega$, то $S(f;x) = I(f;x) = f(x)$ и $G(f)$ съдържа точката $(x_1, \dots, x_m, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Ако f е непрекъсната в Ω, то нейната допълнена графика $G(f)$ съвпада с графиката на f.

T4

Главна теорема Нека $f \in M(\Omega)$ и

$\alpha := \sup\{\beta : \lim\limits_{h \to 0} h^{-\beta}\, \tau(f,h)_{L_1(\Omega)} < \infty\}$

Тогава $\dim_B(G(f)) = \max\{m, m+1-\alpha\}$.

Доказателство Нека $N_h(G(f_i))$ е минималният брой кубове с диаметър h, достатъчен да покрие $G(f_i)$, където f_i е рестрикцията на f в Ω_i.

$\forall i$ дефинираме $M_i = -[-h^{-1}\omega(f, \Omega_i)]$;

→ на стр. 17 и 18

Забележка 2: При $m=1$, Ако вариацията на f е ограничена, можем да заменим $\tau(f,\delta)_{L_1[0,1]}$ с вариация в главната теорема.