СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

SOFIA UNIVERSITY
St. KLIMENT OHRIDSKI
FACULTY OF
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Проект

по Фрактали

на тема

Множество на Манделброт

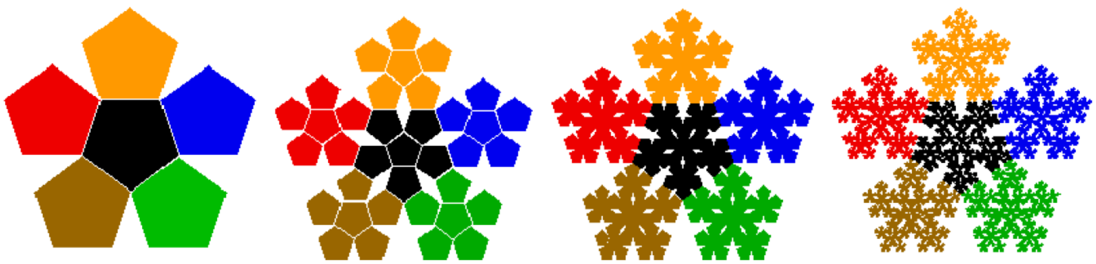
Изготвил: Калоян Николов
Специалност: Софтуерно инженерство
Курс: Втори

Съдържание:

Фрактали

Терминът „фрактал“ произлиза от латинското наименование fractus – „счупен“. Въведен е от математика Беноа Манделброт през 1975 г. В своя труд „Фракталната геометрия на природата“ той определя фракталите като „груба или фрагментирана геометрична форма, която може да бъде разделена на части, всяка от които е (поне приблизително) копие на цялото, но в намален размер.

Първият фрактал е описан в трактата „Мозайки, формирани от петоъгълници“ част от произведението „Ръководство на живописеца“ (1525 г.) от Албрехт Дюрер. Това е т.н. петоъгълник на Албрехт Дюрер – пет петоъгълника се подреждат около идентичен петоъгълник. Тази група от шест петоъгълника има формата на петоъгълник, на който са отстрани пет триъгълни клинове. Така, с последователно изрязване на клинове се осъществява всяка следваща итерация.



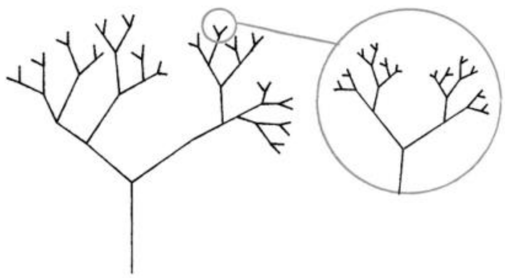
В миналото не са могли да съставят истински изображения на фрактали, защото са необходими огромно количество изчисления, които не е било възможно да се извършат ръчно.

С възхода на компютърната техника става възможно да се видят фракталите в целият им блясък и многообразие. Първият, който използва компютър за тази цел е математикът от компанията на IBM Беноа Манделброт. Изучавайки малко познатата творба на английския учен Люис Ричардсън, издадена след смъртта на автора, Манделброт се сблъсква с феномена на бреговата ивица. В статията „Каква е дължината на бреговата ивица на Великобритания?“ той подробно изследва този въпрос, за който малко хора са се замисляли. Той стига до неочаквани заключения – дължината на бреговата ивица е безкрайност. Колкото по-точно се опитваме да я измерим, толкова по-голяма е нейната стойност. Така ученият достига до извода, че фракталното измерение на даден обект служи като негова количествена характеристика, относно пространството, което запълва.

След изброените факти, може да се твърди, че под „фрактал“ се разбира геометричен модел, който има едно или повече от следните свойства:

- има сложна структура при каквото и да е увеличение;
- е точно или приблизително самоподобен;
- има дробна (фрактална) размерност, която е по-голяма от топологичната;
- може да се построи от прост итерационен цикъл или рекурсия. Този начин на създаване определя свойствата на фракталите самоподобие и дробна размерност.

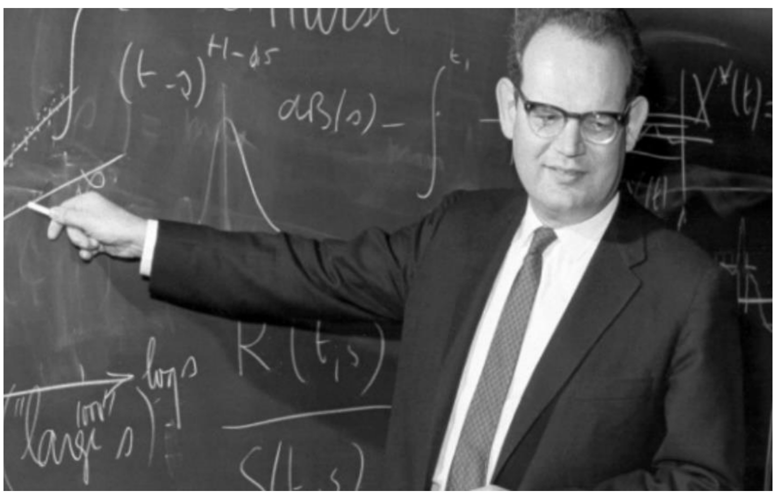
Има множество примери за фрактални структури и в природата. Например можем да разгледаме структурата на разклоняването на обикновено дърво:



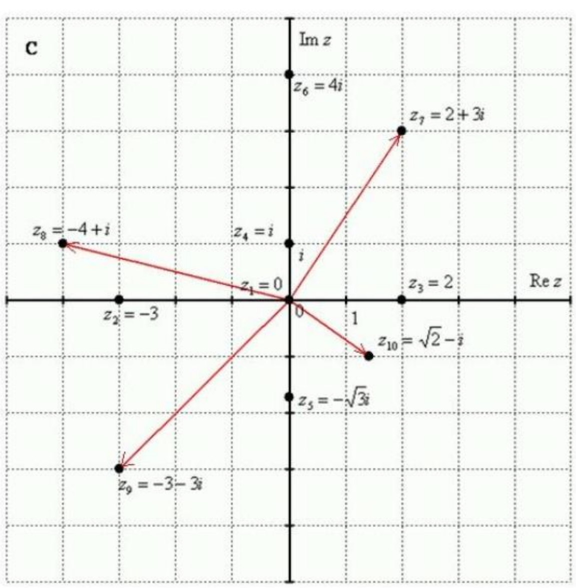
Дървото на фигурата има едно стъбло с два клона, свързани в края му. Всеки един от клоните на дървото има също два клона в края си, а те от своя страна имат други два клона и така нататък и така нататък. Ако откъснем един клон от дървото и го изследваме самостоятелно ще забележим, че то следва структурата на цялото дърво. Това е известно като самоподобност. Това означава, както твърди Манделброт, че всяка част е „копие на целия размер в намален размер“.

Множество на Манделброт

Един от най-интересните и същевременно най-сложни фрактали е множеството на Манделброт. Фракталът става известен към края на 70-те години, но едва с навлизането на компютърните технологии е подходящо визуализиран. Това става през 1980 г. в изследователския център на IBM от Беноа Манделброт.



Множеството на Манделброт съдържа комплексните числа **c** , за които функцията $f_c(z) = z^2 + c$ не е разходяща при n итерации за n, клонящо към безкрайност, и започващи с $z = 0$, т.е. искаме редицата $f_c(0)$, $f_c(f_c(0)), \dots$ да остава ограничена по абсолютна стойност за всяко n.



За да се разбере какво представлява множеството на Манделброт, трябва да разгледаме начина на представяне на комплекните числа върху комплекната равнина. Двете координатни оси отговарят съответно на реалната и на имагинерната част на числата. На всяко комплексно число съответства точка от тази равнината и обратно.

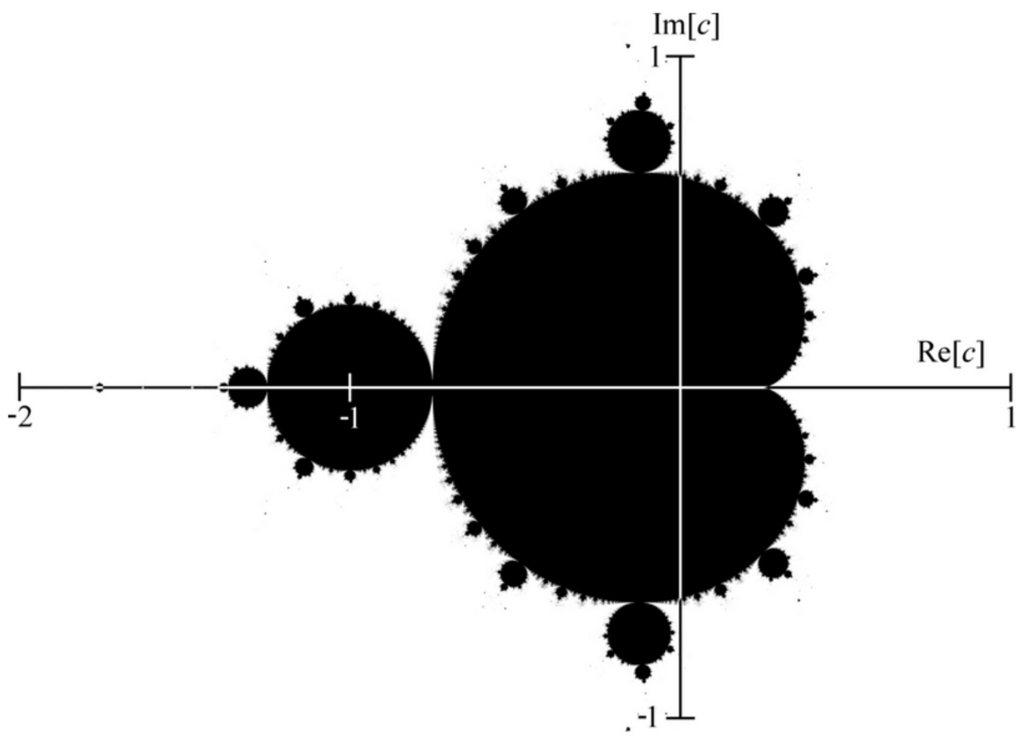
Нека вземем произволно комплекно число **с**. Можем да започнем да изпълнянаме следната функция отново и отново: „подвидгаме на квадрат и добавяме *c*“. Така получаваме следната редица от комплекни числа:

$c,\ c^2 + c,\ (c^2 + c)^2 + c,\ ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c,\ \ldots$

Като използваме означението $f_C(z)=z^2+c$ и $z = 0$, можем да запишем получената редица по следния начин:

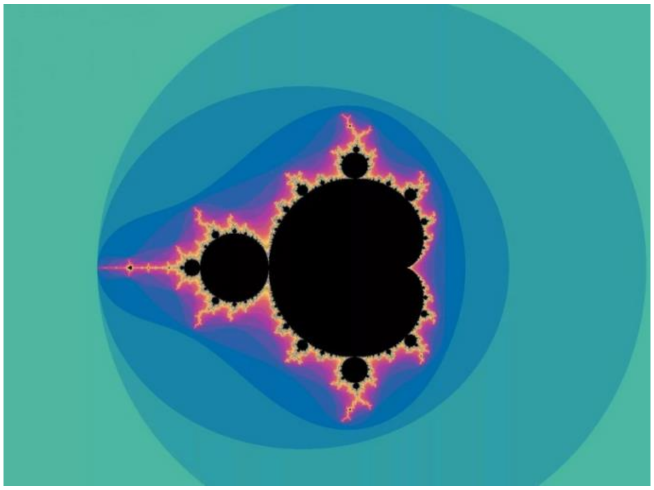
$f_c(0),\ f_c(f_c(0)),\ f_c(f_c(0)),\ f_c(f_c(f_c(0))),\ \ldots$

Така за всяко комплексно число **с** получаваме редица числа. Обикновено се оцветяват в черно тези точки от комплекната равнина, които съответстват на числа, за които редицата: $f_c(0),\ f_c(f_c(0)),\ f_c(f_c(0)),\ f_c(f_c(f_c(0))),\ \ldots$ е ограничена. По този начин получаваме множеството на Манделброт.

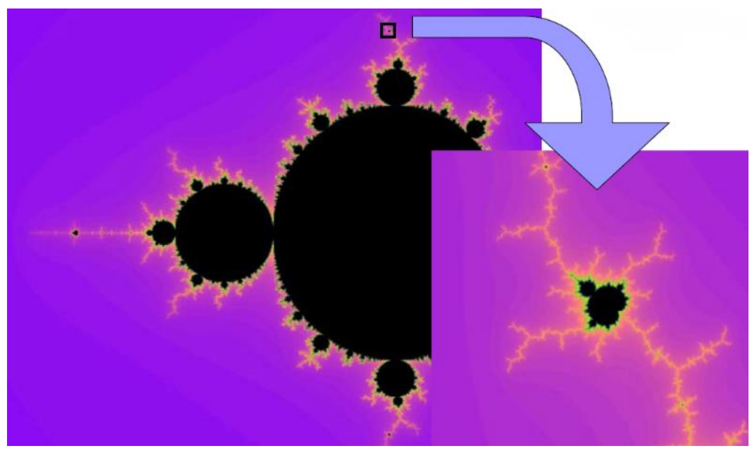


Множеството на Манделброт е компактно множество, тъй като е затворено и ограничено от окръжност с радиус 2 и център (0;0). Доказано е, че ако за дадено число **с**, някой член N на съответстващата редицата е по-голям от 2, то редицата не е ограничена и съответното число **с** не принадлежи на множеството на Манделброт. Изображенията на множеството на Манделброт могат да се създадат чрез последователна проверка на съответните комплекните числа **с** дали редицата $f_c(0),\ f_c(f_c(0)),\ldots$ е разходяща в безкрайността. Съгласно горното твърдение, за да покажем това е достатъчно да открием член N на редицата, който е по-голям от 2.

Понякога, за красота, в зависимост от поредния номер на числото $N > 2$ от редицата се определя цветът на точката, представяща числото **с**. По този начин се получават изображения от вида:



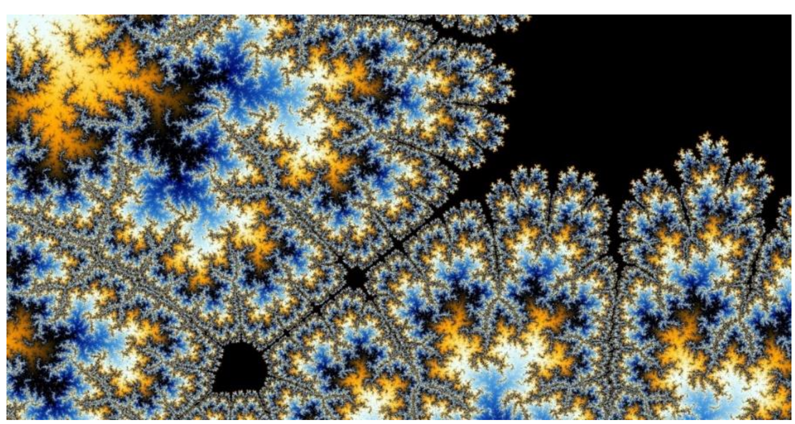
Множеството на Манделброт е свързано. Неговата сложност си проличава от неговата граница – тя няма сама по себе си площ, а Хаусдорфовата ѝ размерност е 2.
При генериране на изображения на множеството на Манделброт се разкрива сложната граница на този фрактал. Наблюдават се прогресивно все по по-фини рекурсивни детайли при увеличаване на изображението. В зависимиост от изследваната област, детайлите имат различен стил. Можем да видим умалени варианти и на цялото множество на Манделброт. Увеличаването на изображенията на множеството на Манделброт показва, че те са безкрайни и процесът може да продължи вечно.



Може да се каже, че свойството самоподобие е валидно за цялото множество на Манделброт, а не само за отделни негови части. Въпреки това е важно да се направи уточнението, че този фрактал не е самоподобен, а квазисамоподобен. Това е по-слаба форма на самоподобие, при която фракталът изглежда подобен, но не и напълно идентичен в различните мащаби, в които се наблюдава. Като цяло, фракталите, дефинирани от рекурсивни функции често са квазисамоподобни, а не точно самоподобни. В случая на множеството на Манделброт причината за това е, че „малките“ му копия, които се наблюдават при приближение се различават, поради тънките нишки, които ги свързват с главното тяло на множеството.

Друг интересен факт е, че сечението на множеството на Манделброт с реалната права е интервалът [-2, 0.25].

Към настоящия момент точната площ на множеството на Манделброт не е изчислена. През 2012 г. тя е определена приблизително на 1,506 591 884 9 ± $2{,}8\times10^{-9}$.



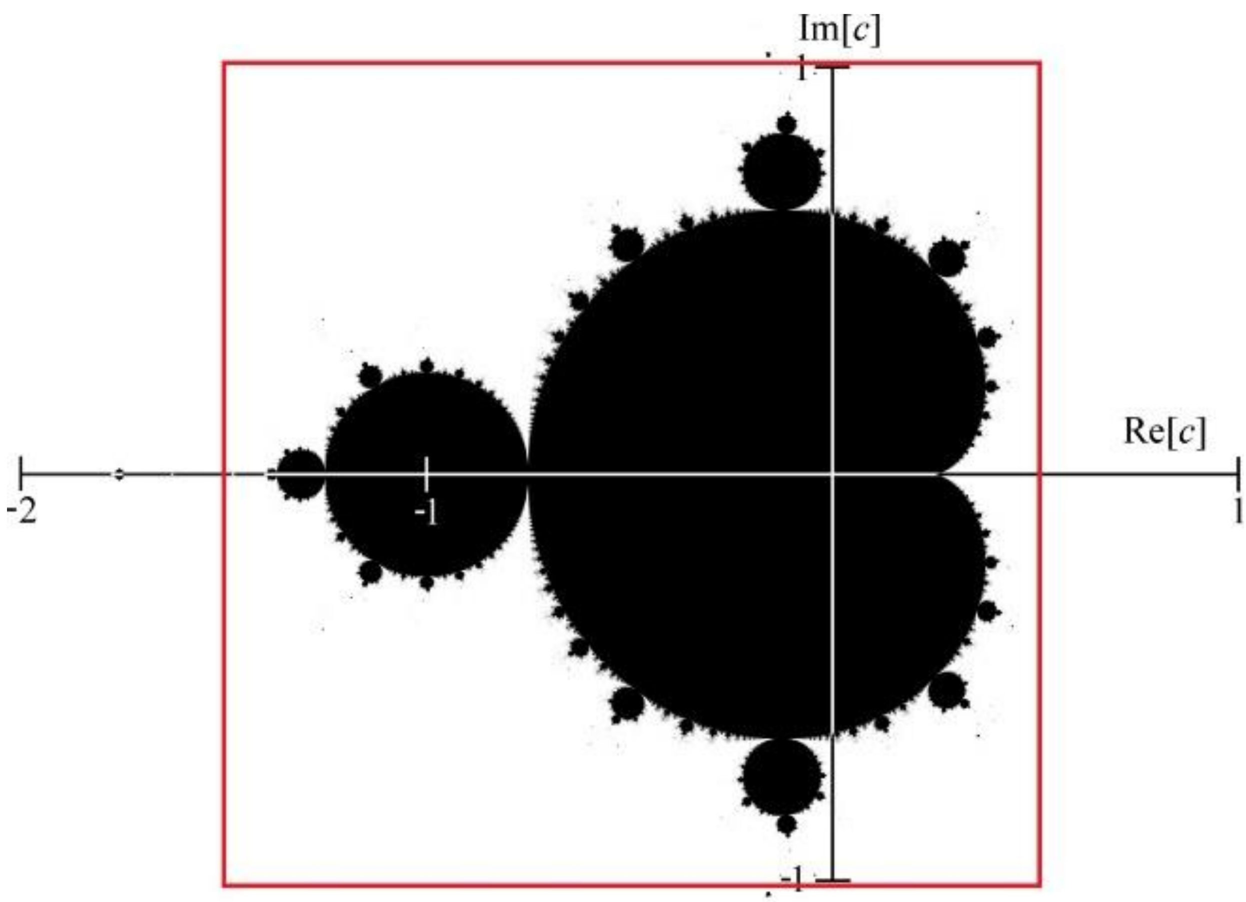
Въпреки наличието на значителна информация относно множеството на Манделброт, то и до днес не е напълно проучено.

Източници

Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, Third Edition. Kenneth Falconer
Фрактални структури, Манев, Асен
https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set
https://pozitivmag.ru/bg/obuv/poryadki-struktury-formy-i-fraktalnye-l-karpenter-iskusstvo-sozdannoe/
https://viman.ru/bg/vvedenie-vo-fraktaly-fraktaly-vokrug-nas.html

Описание на програмата за визуализиране на множеството на Манделброт

Включената в проекта програма е написана на езика **c++**, посредством **Microsoft Visual Studio**. Тя изобразява множеството на Манделброт върху комплекната равнина. Изобразяват се точките, съответстващи на числата с реална част между -1,5 и 0,5 и с имагинерна част между -1 и 1. На следващата фигура можем да видим схематично каква част от комплексната равнина се изобразява:



Сега ще онагледим по какъв начин разбираме дали една точка се намира в множеството на Манделброт. Използваме формулата: $z_{n+1} = z_n^2 + c$
Като в програмата използваме, че ако в някакъв момент е изпълнено $z_{n+1} > 2$, то знаем, че точката или по-точно числото, не попада в множеството.

Да вземем за пример числото 1. Така пресмятаме:
$0^2+1 = 1$, $1^2+1=2$, $2^2+1=5$ и т.н. От това следва че реалното число 1 не е от множеството.

Като втори пример можем да разгледаме -1. Пресмятаме:
$0^2-1=-1$, $(-1)^2-1=0$, $0^2-1=-1$ и т.н. Следователно никога няма да получим стойност, по-голяма от 2. Следователно тази точка е от множеството.

Разбира се, изчисленията са аналогични и за комплекните числа. Нека като последен пример разгледаме числото (-1; 1) или -1 + i. Пресмятаме:
$0^2 + (-1+i) = -1 + i$, абсолютната стойност на -1+i e sqrt(2) < 2.
$(-1+i)^2+ (-1+i) = -1 – i$, абсолютната стойност отноново е sqrt(2) < 2.
$(-1-i)^2+(-1+i)=-1+3i$, абсолютната стойност е sqrt(10) > 2.
Следователност числото -1+i е извън множеството на Манделброт.

Начин на използване на програмата

Данните, които потребителят трябва да въведе могат да се разделят на 3 основни части:

Потребителят трябва да въведе последователно брой редове, колони и итерации. За да бъде полученото изображение максимално точно е добре броят на колоните да бъде 2 пъти по-голям от броят на редовете, а итерациите да бъдат поне 200. На следващата схема избираме броят на редовете да е 40, на колоните 80 – стандартната големина на конзолата. Като брой итерации се посочва 200.

```
Please enter number of rows (for best result: 40 ): 40
Please enter number of columns (for best result: 80 ): 80
Please enter max number of iterations (for best result: min 200 ): 200
```

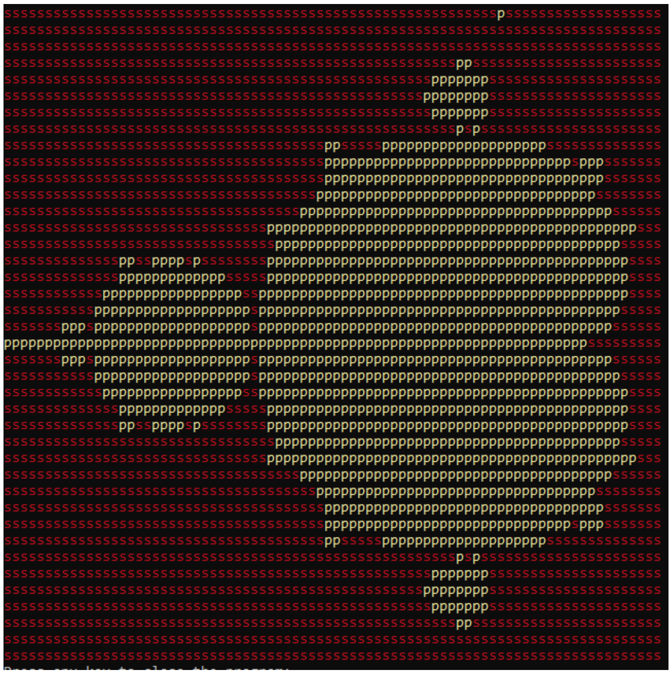
След това потребителят трябва да избере дали да зададе символите, които ще се използват за изобразяване или ще използва тези по подразбиране. Ако въведе „c“ или „C“, т.е. желае да зададе други символи, той трябва последователно да посочи символите за точките (или числата) в и извън множеството на Манделброт.

```
Would you prefer custom or default characters?
Enter C (or c) for custom and you will be able to choose specific characters
or enter any other key for default characters: c

Please enter character for points inside the set: p
Please enter character for points outside the set: s
```

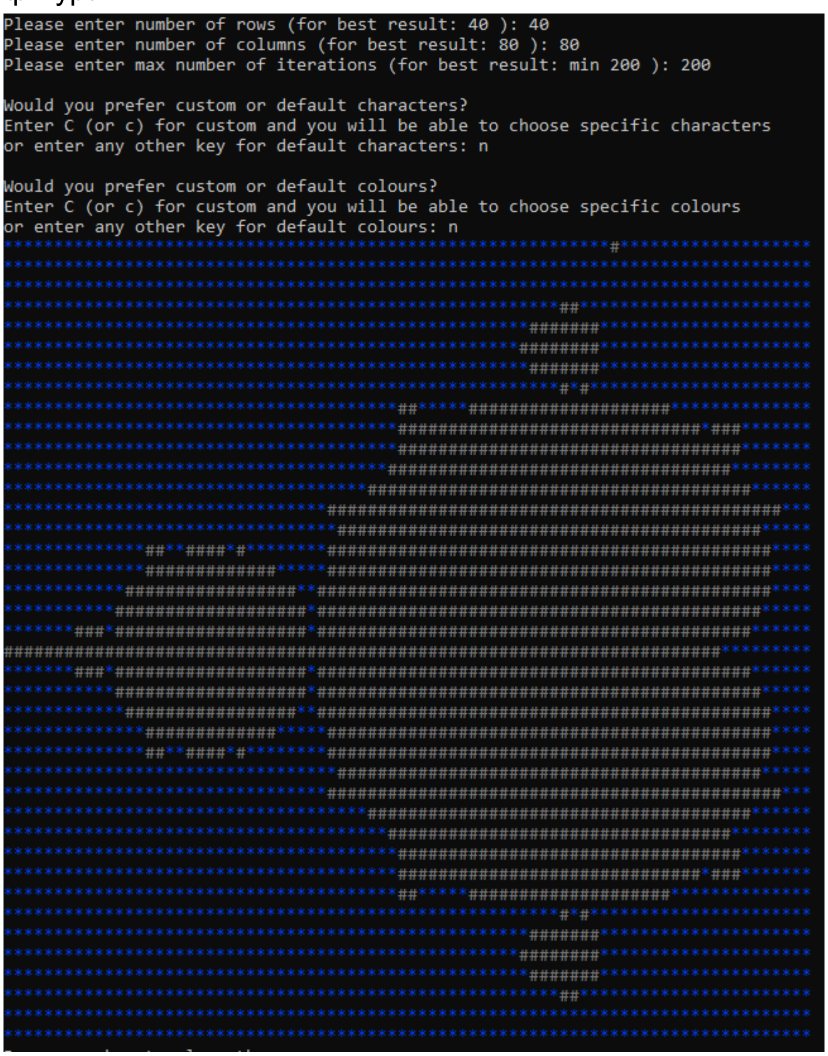
След това потребителят трябва да избере дали да зададе цветовете на изображението или да се използват тези по подразбиране. Ако въведе „c“ или „C“ т.е. желае да посочи нови цветове, той трябва последователно да въведе цвят за вътрешността на множеството както и за извън него. Ако не се посочи цвят от наличните, се приема, че потребителят е въвел син цвят.

```
Would you prefer custom or default colours?
Enter C (or c) for custom and you will be able to choose specific colours
or enter any other key for default colours: c

Available colurs: blue, green, lightblue, red, purple,
orange, white, gray, yellow, brightwhite

Please enter colour for points inside the set: yellow
Please enter colour for points outside the set: red
```

При така зададените параметри получаваме следната фигура:

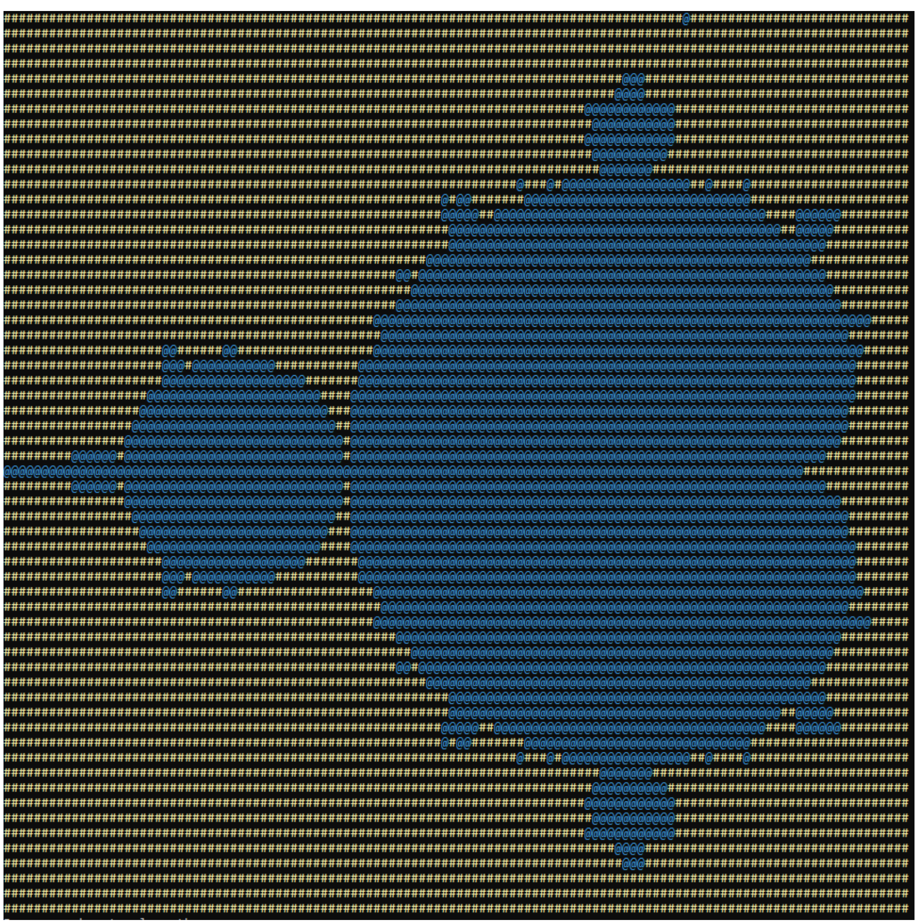


Ако потребителят използва символите и цветовете по подразбиране се получава следната фигура:



Ако потребителят въведе за брой на колоните число по-голямо от 80, програмата изписва предупреждадение, че е възможно да не се визуалзира правилно изображението, тъй като дължината на реда ще бъде по-голяма от стандартния размер на конзолата. На следващият пример показваме изображение с 60 реда, 120 символа, 5000 итерации, вътрешен символ @, външен - #. Цвят за вътрешността: lightblue, за извън множеството: yellow.

```
Please enter number of rows (for best result: 40 ): 60
Please enter number of columns (for best result: 80 ): 120

WARNING: you entered more columns than the standard size of the console (80)!
There migth be problems with visialization depending on the screen!

Do you want to continue anyway or to enter another value for number of columns:
Write "new" for new value or any other key to continue: n

Please enter max number of iterations (for best result: min 200 ): 5000

Would you prefer custom or default characters?
Enter C (or c) for custom and you will be able to choose specific characters
or enter any other key for default characters: c

Please enter character for points inside the set: @
Please enter character for points outside the set: #

Would you prefer custom or default colours?
Enter C (or c) for custom and you will be able to choose specific colours
or enter any other key for default colours: c

Available colurs: blue, green, lightblue, red, purple,
orange, white, gray, yellow, brightwhite

Please enter colour for points inside the set: lightblue
Please enter colour for points outside the set: yellow
```



При въвеждането на други параметри можем да получим: