Множеството на Джулия

Ⓓ1

Множеството на Джулия ни показва как чрез итериране въу прости комплекснозначни функции можем да получим сложни множества.

В главата ще приемем, че $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ е полиномиална ф-я от вида: за $n \geq 2$: $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$. Като може да се отбележи, че развитата теория е в сила и ако $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ за p и q - полиномиални функции.

Също означаваме $f^k(z)$ k-тата итерация $f(f(\dots(f(z))\dots))$ за дадени ф-я $f(z)$ и $z \in \mathbb{C}$.

Първо дефинираме запълнено множество на Джулия за полиномиалната ф-я f:

$$K(f) = \{ z \in \mathbb{C} : \underbrace{f^k(z) \not\to \infty}_{\text{не клони към}} \}.$$

Множеството на Джулия е границата на запълненото множество на Джулия, т.е. $J(f) = \partial K(f)$.
Следователно казваме, че $z \in J(f)$ ако във всяка околност на z $\exists$ точки w и v, такива, че $f^k(w) \to \infty$ и $f^k(v) \not\to \infty$.

Допълнението на множеството на Джулия се нарича Множество на Фату или още стабилно множество. То е отворено множество.
J обикновено е фрактал.

Д2

Пр: Нека $f(z)=z^2$. Тогава $f^k(z)=z^{2^k}$.

При $k\to\infty$, $f^k(z)\to 0$ за $|z|<1$ и
$f^k(z)\to\infty$ за $|z|>1$, но
$f^k(z)=1$ за $|z|=1$, $\forall k$.

Запълненото множество на Джулия е кълбото, където $|z|\leq 1$ и Множ. на Джулия е неговата граница, т.е. окръжността, където $|z|=1$. J се явява границата м/у множ. от точки, където $f^k(z)\to 0$ и $f^k(z)\to\infty$.

В този прост пример J не е фрактал. Ако обаче направим малка промяна: $f(z)=z^2+c$, където c - const, малко комплексно число, то J вече е фрактална крива.

Ако $f(\omega)=\omega$, наричаме ω - неподвижна точка спрямо f.
Ако $f^p(\omega)=\omega$ за някое $p\geq 1 \in \mathbb{Z}$, наричаме ω - периодична точка спрямо f. Най-малкото такова p се нарича период на ω.

Наричаме $\omega, f(\omega), f^2(\omega), \dots, f^p(\omega)$ орбита с период p.

Нека ω е периодична точка с период p като:

$(f^p)'(\omega)=\lambda$, където примитивната обозначава комплексно диференциране.

За $0\leq|\lambda|<1$, наричаме точката ω attractive (привличаща), близките точки се привличат към орбитата на ω при итерации на f.

За $|\lambda|>1$, наричаме точката ω repelling (отблъскваща), точките, близки до орбитата се отдалечават при итерации на f.

За $\lambda=0$, наричаме ω super attractive (супер привличаща)

За $\lambda=1$, наричаме ω индиферентна.

Изследването на редиците $f^k(z)$ за различни първоначални стойности на z се нарича комплексна динамика. Позицията на z спрямо множ. на Джулия $J(f)$ е ключът за това поведение.

03

!Лема 14.1 Полезна за проверката дали дадена точка се намира в запълненото множ. на Джулия, т.е. дали $f^k(z) \to \infty$ за достатъчно голямо k:

Лема: Нека f е полиномиална ф-я : $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ за $n \geq 2$ и $a_n \neq 0$. Тогава $\exists r$, такова че ако $|z| \geq r$ то $|f(z)| \geq 2|z|$. Освен това, ако $|f^m(z)| \geq r$ за някое $m \geq 0$, то $f^k(z) \to \infty$ за $k \to \infty$. Следователно или $f^k(z) \to \infty$ или множеството $\{f^k(z) : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ е ограничено.

док. на стр. 237.

Твърдение 14.2

Нека $f(z)$ е полиномиална функция. Тогава пълното множество на Джулия $K(f)$ и множ. на Джулия $J(f)$ са непразни и компакти, като $J(f) \subset K(f)$. Освен $J(f)$ има празна вътрешност.

док. на стр. 237.

Твърдение 14.3

$J(f)$ се изобразява в/у себе си чрез f и f^{-1}, т.е. за множеството на Джулия е в сила $J = f(J) = f^{-1}(J)$.

Твърдение 14.4

$J(f^p) = J(f)$ за всяко положително цяло число p.

Нормални и ненормални фамилии

Нека $U \subset \mathbb{C}$ и U - отворено множество.
Нека $g_k : U \to \mathbb{C}$ $(k=1,2,\dots)$ е фамилия от комплексни аналитични ф-ии.

Казваме, че $\{g_k\}$ е нормална фамилия (on U) ако всяка редица от функции, избрани от $\{g_k\}$ има подредица, която е равномерно сходяща по всяко компактно подмножество на U към или ∞ или ограничена аналитична ф-я. (Тук под компактни подмножества на U можем да разбираме свързаните компоненти на U).

Фамилията $\{g_k\}$ е нормална в точка $\underline{w}$ от U, ако $\exists$ отворено подмнож. V на U, съдържащо w така, че: $\{g_k\}$ да е нормална фамилия за V. (Това е еквивалентно на това, да $\exists$ околност V на w, където всяка редица $\{g_k\}$ има подредица, равномерно сходяща към ∞ или ограничена аналитична ф-я.)

Теорема на Монтел

Нека $\{g_k\}$ е фамилия от комплексни аналитични ф-ии в отвореното множество U. Ако $\{g_k\}$ $\underline{\text{не}}$ е нормална фамилия, то $\forall w \in \mathbb{C}$ с изключение на най-много 1 точка, е изпълнено: $g_k(z) = w$ за някое $z \in U$ и някое k.

Твърдение 14.6 (Следва от Th Монтел)

$J(f) = \{z \in \mathbb{C}$: фамилията $\{f^k\}$ не е нормална в $z\}$.

док. на стр. 238.

→ това понякога се разглежда като деф. на множеството на Джулия.

Ако $f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ е рационална ф-я, то J трябва да е затворено, но не и ограничено. Наистина, може J да бъде цялата комплексна равнина: например
$f(z) = ((z-2)/z)^2$

Можем да разглеждаме $J(f)$ като покритието на отблъскващите периодични точки на f.

Лема 14.7

Нека f е полином и $w \in J(f)$. Нека U е околност на w. Тогава $\forall j = 1, 2, \dots$, множеството $\omega \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U)$ е цялото $\mathbb{C}$ с изключение на най-много 1 точка. (Тази точка не е в $J(f)$ и е независима от w и U.).

За f – полином от степен n, множеството $f^{-1}(z)$ съдържа n точки, това са решенията на $f(w) = z$ освен ако уравнението няма m-кратни корени. Така множеството $f^{-k}(z)$ е голямо, "обикновено" съдържа n^k точки.

Следствие 14.8

а) Следното е вярно $\forall z \in \mathbb{C}$ с най-много 1 изключение:

Ако U е отворено множество и пресича $J(f)$, то $f^{-k}(z)$ пресича U за безбройно много стойности на k.

Ако има точка z, за която това не е вярно, то $z \notin J(f)$

б) Ако $z \in J(f)$, то $J(f)$ е покритието на $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$.

Твърдение 14.9

$J(f)$ е перфектно множество (затворено и без изолирани точки).

$\Rightarrow J(f)$ е неизброимо.

Теорема 14.10

За f - полиномиална ф-я, множеството на Джулия $J(f)$ е покритието на отблъскващите периодични точки на f.

док. на стр. 241.

Ако $\underline{\underline{\omega}}$ е привличаща неподвижна точка, то дефинираме:

$A(\omega) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \to \omega \text{ при } k \to \infty\}$ - basin of attraction на ω

"$\underset{\text{басейн}}{\underline{\text{група}}}$" на привличане на ω.

т.е. множеството от точки, които ако ги изберем за начални условия, то с итерациите се приближаваме към точката $\underline{\underline{\omega}}$.

$\exists$ отворено множ. V, съдържащо ω и $V \subset A(\omega)$.

(Следователно): $A(\omega)$ също е отворено. (ако $f^k(z) \in V$ за някое k, то $z \in f^{-k}(V)$, което е отворено).

Аналог. се дефинира и $A(\infty)$.

$\mathcal{J}$ е границата на всеки basin of attraction (район на привличане). Въпреки че този "район" или множество може да има много свързани компоненти, неговата граница е цялото множество на Джулия, а не част от него.
Границата на множ. A означаваме с ∂A.

Следно <u>Лема 14.11</u> Нека w е привличаща неподвижна точка на f. Тогава $\partial A(w) = J(f)$. Това е в сила и за $w = \infty$.

Например за $f(z) = z^2$, $J(f)$ е границата както на $A(0)$, така и за $A(\infty)$.

<u>Обобщение</u>

Множеството на Джулия $J(f)$ на полиномиалната ф-я f е границата на множеството от точки $z \in \mathbb{C}$ такива че $f^k(z) \to \infty$.
$J(f)$ е непразно, неизброимо, компактно множество, което не съдържа изолирани точки и $J = f(J) = f^{-1}(J)$, като $J(f) = J(f^p)$ $\forall p \in \mathbb{Z}^+$. Ако $z \in J(f)$, то $J(f)$ е покритието на $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$. Множеството на Джулия е границата на района на привличане на всяка привличаща неподвижна точка f, вкл. и ∞. $J(f)$ е покритието на отблъскващите периодични точки на f.

! <u>Множеството на Манделброт</u> се дефинира като тези $c \in \mathbb{C}$, за които множ. на Джулия е свързано:

$$M = \{ c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ е свързано} \}.$$

За дадено $c \in \mathbb{C}$ е изп: $c \in M \iff f_c^k(0) \not\to \infty$

Ще наричаме гладка (т.е. диференцируема), затворена проста крива в комплексната равнина: цикъл. Частите, които са "във" цикъла ще наричаме "вътрешност" или interior. Тези, които са "извън" цикъла – "външност" или exterior.

Лема 14.13.

Нека C е цикъл в комплексната равнина.

а) Ако c е във вътрешността на C, то $f_c^{-1}(C)$ е цикъл. Освен това f_c изпраща вътрешността на $f_c^{-1}(C)$ във вътрешността на C и външността на $f_c^{-1}(C)$ във външността на C.

б) Ако c е извън C, то $f_c^{-1}(C)$ представлява 2 непресичащи се цикъла. Като $f_c^{-1}(C)$ изпраща вътрешността на 2-та цикъла във вътрешността на C, а "частта" извън тях – във външността на C.

→ док. може → стр. 245.

Фундаментална теорема на множ. на Манделброт:

За $c \in \mathbb{C}$, множеството на Джулия $J(f_c)$ е свързано ако редицата от итерации $\{f_c^k(0)\}_{k=1}^{\infty}$ е ограничена и е тотално несвързано иначе (ако редицата от итер. не е ограничена). Следователно

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ е свързано}\} = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^k(0)\}_{k=1}^{\infty} \text{ е ограничено}\} =$$
$$= \{c \in \mathbb{C} : f_c^k(0) \not\to \infty \text{ за } k \to \infty\}.$$

док. на стр. 246

Често за оцветяването на допълнението на множеството на Манделброт M се избира цвят, в зависимост кое е първото k, за което $|f_c^k(0)| \geq r$ за $r > 2$.

Множ. на Манделброт включва главна кардиоида, към която са прикрепени "пъпки" с кръгла форма. Всяка от тях има още "пъпки" и т.н.

$J(f_c)$ е тотално несвързано. (виж стр. 248).

<u>Th 14.15</u>

Ако $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2.475$, то $J(f_c)$ е тотално несвързано.

За $|c|$ – голямо е в сила:

$$\dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c) \approx \frac{2\log 2}{\log 4|c|}$$

<u>Th. 14.16</u>

Ако $|c| < \frac{1}{4}$, $J(f_c)$ е проста затворена крива.

→ док. 250–252 и 252: maximum modulus theorem.

......

$J(f_c)$ е фрактална крива за $|c| > 0$.

Ако c е от главната кардиоида на M, то $J(f_c)$ е обикновена затворена крива

За малки c имаме: $s = \dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c) = 1 + \frac{|c|^2}{4\log 2} + \text{terms in } |c|^3$

още: $0 < \mathcal{H}^s(J) < \infty$ и $\dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c)$.

....

Ако c е на границата на M, то f_c има индиферентна периодична точка $\underbrace{}_{\text{за която}}$ $|(f^p)'(w)| = 1$

Ако $f_c^k(0) = f_c^{k+q}(0)$ то c е в нишките или костите на M, и $J(f_c)$ може да е дендрит.

отг: снимка стр. 255.

Множеството на Манделброт е свързано, но неговата сложност проличава от това, че неговата граница няма площ, но е с Хаусдорфова размерност 2.

2 начина за чертане на множ. на Джулия: стр. 255.

Казваме, че F е квази-самоподобен кръг или квази-кръг ако са изпълнени следните условия:

1) F е проста затворена крива
2) $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, където $s = \dim_H F$.
3) $\exists$ const. $a, b, r > 0$ такива, че $\forall U \subset F$, където $|U| \le r$, то $\exists\ \varphi: U \to F$ такова, че:

$$a|x-y| \le |U|\,|\varphi(x) - \varphi(y)| \le b|x-y| \quad , x, y \in F.$$

Последното 3-то усл. ни казва, че произволни "малки" части от F са ~~почти~~ приблизително подобни на по-голяма част от F.

Theorem 14.17

Квази-кръговете E и F са би-Липшицов еквивалент т.т.к. $\dim_H E = \dim_H F$. $\to$ док. 256-257.

Следствие 14.18: Нека множ. на Джулия $J1$ и $J2$ на полиномиалните ф-ии $f1$ и $f2$ са прости затворени криви. Нека f_i е стриктно (строго) отблъскваща за J_i (т.е. $|f_i'(z)| > 1$ за $i = 1, 2$). Тогава $J1$ и $J2$ са би-липшицов еквивалент т.т.к. $\dim_H J1 = \dim_H J2$.

Твърдение $J(f) = \{z \in \mathbb{C}$: фамилията $\{f^k\}$ не е нормална в $z\}$

Доказателство: Ако $z \in J$, то във всяка околност V на z, $\exists\, \omega$, такова че $f^k(\omega) \to \infty$ а $f^k(z)$ - остава ограничена. Така $\nexists$ подредица на $\{f^k\}$, която е равномерно сходяща в V. Така $\{f^k\}$ не е нормална в z.

Нека $z \notin J$. Или $z \in \operatorname{int} K$, при което за отвореното множ. V: $z \in V \subset \operatorname{int} K$, имаме $f^k(\omega) \in K$ $\forall \omega \in V$ и $\forall k$. Така съгласно тн на Монтел $\{f^k\}$ е нормална в ω. В противен случай $z \in \mathbb{C} \setminus K$ и $|f^k(z)| > r$ за някое k, където r е такова че $|f^k(\omega)| > r$ $\forall \omega$ в някоя околност V на z. Така $f^k(\omega) \to \infty$ равномерно в V, така отново $\{f^k\}$ е нормална в ω.