Графика на функция

Понякога графиката на ф-ята $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,
$\mathrm{graph}\, f=\{(t,f(t)): a\le t\le b\}$, разглеждана като подмнож. на (t,x)-координатната равнина може да бъде фрактал.

Ако f е Липшицова ф-я или има непрекъсната производна, то графиката f има размерност 1. Същото важи и ако f е ограничена вариация т.е. $\sum_{i=0}^{m-1} |f(t_i)-f(t_{i+1})|$ е ограничено $\forall$ дисекции $0=t_0<t_1<\ldots<t_m=1$.

Въпреки това е възможно непрекъсната ф-я да бъде "достатъчно неправилна", за да има размерност >1.

Най-известният пример за това е:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{(s-2)k}\sin(\lambda^k t) \quad \text{за} \quad 1<s<2 \text{ и } \lambda>1.$$

Това е примерът на Вайерщрас за ф-я, която е непрекъсната, но няма точка, в която да е диференцируема.

Функцията на Вайерщрас има бокс размерност s и се смята, че има Хаусдорфова размерност s.

<u>Твърдение 11.1</u> Нека $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ е непрекъсната.
Нека $0<\delta<1$ и m е най-малкото цяло число, което е $\geq\frac{1}{\delta}$
$m=\min\{x\in\mathbb{Z}: x\geq\frac{1}{\delta}\}$. Тогава N_δ е броят квадрати от δ-мрежата, които пресичат графиката на f.
Тогава е в сила:

B2

$\delta^{-1}\sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta,(i+1)\delta] \leq N\delta \leq 2m + \delta^{-1}\sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta,(i+1)\delta]$ като

дясното неравенство е в сила и ако f не е непрекъсната.

използвахме, че за ф-я f в интервал $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ бележим макс. разлика м/у 2 стойности на f в интервала:

$$R_f[t_1, t_2] = \sup_{t_1 \leq t, u \leq t_2} |f(t) - f(u)|.$$

Горното твърдение може да се приложи на Хьолдерови ф-ии.

<u>Следствие</u> Нека $f: [0;1] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната ф-я.

а) Ако $|f(t) - f(u)| \leq c|t-u|^{2-s}$ $(0 \leq t, u \leq 1)$ и $c > 0$, $1 \leq s \leq 2$

тогава $\mathcal{H}^s(\operatorname{graph} f) < \infty$ и $\dim_H \operatorname{graph} f \leq \underline{\dim}_B \operatorname{graph} f \leq$

$\leq \overline{\dim}_B \operatorname{graph} f \leq s$.

Това остава вярно ако за $\delta > 0$ е изп. $|t-u| < \delta$.

б) Ако $c > 0$, $\delta_0 > 0$ и $1 \leq s \leq 2$ такива, че $\forall t \in [0;1]$ и $0 < \delta \leq \delta_0$, $\exists$ u такова че $|t-u| \leq \delta$ и $|f(t) - f(u)| \geq c\delta^{2-s}$

Тогава $s \leq \underline{\dim}_B \operatorname{graph} f$.

пример: функцията на Вайерщрас

за $\lambda > 1$ и $1 < s < 2$ дефинираме $f: [0;1] \to \mathbb{R}$ чрез

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t),$$

тогава за λ - достатъчно голямо, получаваме

$\dim_B \operatorname{graph} f = s$ $\rightarrow$ {изчислено на стр. 181}

B3

От този пример следва, че $\dim_H \operatorname{graph} f \leq s$ като се смята, че е $=$ поне за "повечето" λ.

Може да се покаже, че $\exists$ конст. c такава, че

$$s \geq \dim_H \operatorname{graph} f \geq s - \frac{c}{\log \lambda}$$ т.е. за големи λ няма как $\dim_H \operatorname{graph} f$ да е много по-малко от s.

функцията на Вайерщрас е представител на много по-голям клас от ф-ии, за които тези методи са в сила.

Самоподобни множества, дефинирани чрез итериране на функции са често фрактали. Чрез правилните афинни трансформации могат да бъдат и графики на функции.

Пример 11.4 Нека $F = \operatorname{graph} f$ е самоподобна крива (като описаната горе на стр. 184-185), тогава

$\dim_B F = 1 + \log(v_1 + \ldots + v_m)/\log m$.

(показано на стр. 185 и 187).

Самоподобните функции са полезни при фрактална интерполация. Например, може да искаме да намерим фрактална крива с определена размерност, минаваща през точки с координати $(i/m, x_i)$ за $i = 0, 1, \ldots, m$. С правилните трансформации можем да получим желаната самоподобна ф-я. (зеВР-affine). Това се използва за чертаене на хоризонти с планински върхове.

Автокорелация на фрактални криви: 189, 190 и 191 страница 134