Box-counting dimension
Box размерност
Или Minkowski-Bouligand dimension

Грубо казано, размерността показва колко пространство заема дадено множество. Обикновено искаме да проверим какви са измерванията за $\delta \to 0$.

Box Размерност

Нека $F \subset \mathbb{R}^n$

$\forall \delta > 0$ намираме минималния брой множества, ~~които~~ с диаметър не по-голям от δ, които могат да покрият F.

Нека означим този брой с $N_\delta(F)$ като разбира се $N_\delta(F)$ се увеличава когато δ, се приближава към 0.

Ако $N_\delta(F) \approx c\delta^{-s}$ за $c, s > 0$, const. то казваме, че F има Box размерност. $\underline{\underline{s}}$

За да изразим s: ~~просто~~ логаритмуваме:

$\log N_\delta(F) \approx \log c - s \log \delta$, така получаваме

$$s = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

2

формална дефиниция:

Нека $U \neq \emptyset$ и $U \subset \mathbb{R}^n$,
диаметърът на U е $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$, т.е. най-голямото възможно разстояние м/у 2 точки от множ. U.

Нека $\{U_i\}$ е изброимо или крайна фамилия от множества, за всяко от които (евентуално) $0 < |U_i| \leq \delta$ и $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.
Това казвоме, че $\{U_i\}$ е δ-покритие на F.
(Ако F е компакт, то $\exists$ краен брой множ., които дават δ-покритие на F)
Нека $F \neq \emptyset$, $F \subset \mathbb{R}^n$ и F е ограничено.

Нека $N_\delta(F)$ е минималното число, за което е в сила, че $\{U_i\}$ е δ-покритие на F. Така дефинираме долна и горна box размерност, съответно:

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

като е в сила $\underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$, като в случай на равенство дефинираме box размерността на F:

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$, където се приема, че

δ е достатъчно малко, за да е изп. $-\log \delta > 0$

или с по прости думи:

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log(\text{мин. брой множ., които покриват } F)}{-\log(\text{макс. диаметър на тези множ.})}$$

Също $N_\delta(F) \approx c\delta^{-s}$ ни казва:
$s = \dim_B F$ за малки δ или по-точно:

$N_\delta(F)\delta^s \to \infty$ за $s < \dim_B F$
$N_\delta(F)\delta^s \to 0$ за $s > \dim_B F$.

Съществуват и няколко еквивалентни дефиниции на Box размерност.

$N_\delta(F)$ може да се дефинира като:
1) мин. брой множ. с диаметър не по-голям от δ, които покриват F.
2) мин. брой затворени кълба с радиус δ, които покриват F.
3) мин. брой кубове със страна δ, които покриват F.
4) броят на кубовете от δ-мрежата (мрежа от кубове, където всеки куб е със страна δ), които пресичат F.
5) най-големият брой непресичащи се кълба с радиус δ, чийто център е в F,

box размерност на Канторовото множество: $\frac{\log 2}{\log 3}$

-||- на триъгълникът на Серпински: $\frac{\log 3}{\log 2}$

Множ. F, съставено от $\underline{m}$ свои малки копия при мащаб r има размерност $\dim_B F = \frac{\log m}{-\log r}$

мярката Лебег

Ако $F \subset \mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{\delta \to 0} \left(\mathcal{L}^n(F_\delta)/\delta^{n-s}\right) = c$ за $s > 0$, $0 < c < \infty$, F е s-размерно → стр. 33

Твърдение 2.4. Нека $F \subset \mathbb{R}^n$, тогава

$$\underline{\dim}_B F = n - \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$ → мярка на Лебег

$$\overline{\dim}_B F = n - \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

Монотонност

Свойства: Ако $E \subset F$, то $\underline{\dim}_B E \leq \underline{\dim}_B F$ и $\overline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B F$, което следва от деф. на размерност и това че $N_\delta(E) \leq N_\delta(F)$ $\forall \delta$

Множ. от ст-сти: Нека $F \neq \emptyset$ и F е ограничено, $F \subset \mathbb{R}^n$. Тогава $0 \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq n$

finite stability: $\overline{\dim}_B (E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$
Не важи за $\underline{\dim}_B (E \cup F)$ или ако имаме безкрайно обединение от множества

Отворени множ: Ако $F \subset \mathbb{R}^n$ е отворено, то $\dim_B F = n$

Крайни множ. Ако $F \neq \emptyset$ и F - крайно, то $\dim_B F = 0$, защото F обхваща само m разл. точки

Гладки множ.: Ако F е непрекъснато и диференцируемо (т.е. smooth) и ограничено submanifold (подмногообразие), то $\dim_H F = m$.
(Гладките криви имат размерност 1, гладките повърхности: 2.)

Твърдение: 2.5

а) Ако $F \subset \mathbb{R}^n$ и $f: F \to \mathbb{R}^m$ е липшицова трансформация, т.е.

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|,\ \text{то}$$

$$\underline{\dim}_B f(F) \leq \underline{\dim}_B F \text{ и } \overline{\dim}_B f(F) \leq \overline{\dim}_B F$$

б) Ако $F \subset \mathbb{R}^n$ и $f: F \to \mathbb{R}^m$ е би-липшицова трансформация, т.е. $c_1|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$ за $x, y \in F$ и $0 < c_1 \leq c_1 < \infty$, то

$$\underline{\dim}_B f(F) = \underline{\dim}_B F \text{ и } \overline{\dim}_B f(F) = \overline{\dim}_B F$$