Нека $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Разстоянието м/у x и y означаваме:

$$|x-y| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$$ (може да се означи и като $d(x,y)$)

Вярна са:

1) неравенство на триъгълника:

$|x+y| \le |x|+|y|$

2) обратно неравенство на триъгълника

$\big||x| - |y|\big| \le |x-y|$

3) и метрично неравенство на триъгълника:

$|x-y| \le |x-z| + |z-y|$.

Свойства:

$d(x,y) = |x-y| \geq 0$

$d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$

$d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

Затворено кълбо с център x и радиус r е:

$B(x,y] = \{y : |y-x| \le r\}$.

Отворено кълбо с център x и радиус r е:

$B^0(x,y) = \{y : |y-x| < r\}$

Координатният куб (квадрат в $\mathbb{R}^2$, куб в $\mathbb{R}^3$, ...) със страна $2r$ и център $x = (x_1, \dots, x_n)$ е множеството:

$\{y = (y_1, \dots, y_n) : |y_i - x_i| \le r, \forall i = 1, \dots, n\}$

Нека $A \neq \emptyset$ и $A \subset \mathbb{R}^n$.

Диаметър на A наричаме $|A| = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$

Казваме, че A е ограничено, ако $\exists$ достатъчно голямо кълбо, което го съдържа. (и с радиус $r < \infty$).

Интуитивно, A е затворено ако съдържа границата си и отворено, ако не съдържа нито една от граничните си точки. По-точно, $A \subset \mathbb{R}^n$ е отворено ако $\forall x \in A$, $\exists B(x,r)$, $r>0$, което кълбо B се съдържа в A.

A е затворено, ако когато $\{x_k\}$ е редица, сходяща към т. $x \in \mathbb{R}^n$, то $x \in A$.
т.е. A съдържа всички свои точки на сгъстяване

$\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ са и затворени и отворени.

Едно множество е отворено т.т.к. допълнението му е отворено.
Обединението на отворени (затворени) множества е отворено (затворено), както и сечението на произволен брой отворени (затворени) множества

Множество A се нарича околност на x ако $\exists$ малко кълбо $B(x,r)$ с $r>0$ и което се съдържа от A.

Сечението на всички затворени множества, съдържащи A наричаме покритие (closure) на A и означаваме $\overline{A}$.

Компактно множество A е ограничено и затворено. Още - всяка фамилия множества, покриваща A има своя подредица която покрива A и е крайна. Всяко сечение на компактни множества е компакт

$A \subset \mathbb{R}^n$ е свързано ако не съществуват отворени множества U и V, такива че $A \subseteq U \cup V$, а $A \cap U \neq \emptyset$ и $A \cap V \neq \emptyset$ са непресичащи се.

Свързана компонента на x наричаме най-голямото свързано подмнож. на A, съдържащо x.

A е тотално несвързано ако свързаната компонента на всяка точка съдържа само себе си. Това е така ако $\forall x, y \in A$, $\exists U, V$ - непресичащи се отворени множ. и $x \in U$, $y \in V$ и $A \subset U \cup V$.

У3

Множества на Борел са най-малката фамилия от подмнож. на $\mathbb{R}^n$, със следните свойства:

1) всяко отворено и затворено множ. е множ. на Борел.

2) обединението на крайна или изброима фамилия от множ.-а на Борел е множ-во на Борел. Също и сечението им е множ. на Борел.

функцията $S:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е изометрия ако запазва разстоянията т.е. $|S(x)-S(y)| = |x-y| \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$.

функцията $f: X \to Y$ е Хьолдерова ф-я с експонента α ако:

$|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|^\alpha \quad x,y \in X \quad$ за $c \geq 0$. и $\alpha > 0$ и $\alpha < 1$ — за $\alpha=0$ и $\alpha=1$ не е диференцируема.

f е Липшицова ако $\alpha = 1$ т.е.

$|f(x)-f(y)| \leq c|x-y| \quad x,y \in X.$

f е би-липшицова ако:

$c_1|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq c_2|x-y| \quad , x,y \in X$ и $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$,

като в този случай $f^{-1}: f(x) \to X$ и $f: X \to Y$ са липшицови.

Хьолдеровите ф-ии са непрекъснати. (ф-я $f: X \to Y$ е непрекъсната в т. a ако $f(x) \to f(a)$ за $x \to a$). $f(x)$ е непрекъсната в т. x, ако $\forall \varepsilon > 0$ е изп. $|x-y| \leq \delta$ и $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

Ако $|f'(x)|$ е ограничена в интервал, то f е Липшицова в този интервал.

Долна граница на f е: $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = \lim(\inf\{f(x): 0<x<r\})$

Горна граница на f е: $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x) \leq \lim(\sup\{f(x): 0<x<r\})$

$\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$ и в случай на равенство $\exists \lim_{x\to 0} f(x)$.

μ е мярка за $\mathbb{R}^n$ ако μ приема неотриц. число (или ∞) 34
за всяко подмножество на $\mathbb{R}^n$, така че:

а) $\mu(\emptyset)=0$

б) $\mu(A) \leq \mu(B)$ ако $A \subset B$

в) $A_1, A_2, \ldots$ - изброима или крайна редица от множества.

Тогава: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ като равенството се достига
ако A_i са непресичащи се множества на Борел.

Мярка на Лебег в $\mathbb{R}$

За отворени и затворени интервали е вярно:

$\mathcal{L}^1(a,b) = \mathcal{L}^1[a,b] = b-a$.

Ако $A = \bigcup_i [a_i, b_i]$ е крайно или изброимо обединение на непресичащи се интервали, то $\mathcal{L}^1(A) = \sum (b_i - a_i)$ е дължината на A (сума от дължините на всички интервали)

Тогава деф. на мярка на Лебег за произволно множество A е:
$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i; b_i] \right\}$, т.е. разглеждаме всички възможни покрития на A от изброима фамилия от интервали и търсим най-малка обща дължина

За $\mathbb{R}$, мярката на Лебег се разглежда като дължина и често означаваме $length(A) = \mathcal{L}^1(A)$.

Мярка на Лебег в $\mathbb{R}^n$

Нека $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i\}$ е coordinate parallelepiped в $\mathbb{R}^n$. Неговият n-мерен обем е:

$$vol^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Мярката на Лебег може да се разглежда като разширение на n-мерния обем.

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} vol^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}$$

Често означаваме: $area(A) = \mathcal{L}^2(A)$, $vol(A) = \mathcal{L}^3(A)$,
$vol^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$

Разпространение на мярка → стр. 14

Рестрикция → стр. 14.

Хаусдорфовата мярка е генерализация на мярката на Лебег за нецелочислени размерности.

μ може да се разглежда като мярка → стр. 15

Egoroff's theorem

Нека $D \subset \mathbb{R}^n$ и D - множество на Borel и μ е мярка като $\mu(D) < \infty$.
Нека $f: D \to \mathbb{R}$ така че $f_k(x) \to f(x)$ $\forall x \in D$.
Теоремата гласи, че $\forall \delta > 0$, $\exists$ множ. на Борел E, $E \subset D$ такова, че $\mu(D \setminus E) < \delta$ и такова, че $\{f_k\}$ е равномерно сходяща спрямо f за E, т.е. $\sup_{x \in E} |f_k(x) - f(x)| \to 0$ за $k \to \infty$.
Често E може да бъде компакт.

1 точка x_0 е вътрешна за дадено множество, ако $\exists$ отворено кълбо $B(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, което се съдържа в множеството.

1 точка x_0 е външна за дадено множество, ако $\exists$ отворено кълбо $B(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, което не пресича множеството.

1 точка x_0 е контурна за дадено множество, ако не е нито вътрешна, нито външна спрямо множеството т.е. когато $\forall$ кълбо $B(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ съдържа и точки, които са от множеството и точки, които не са.

76