Пример: 2.2. Нека F е Канторовото множество. Тогава $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \dfrac{\log 2}{\log 3}$ $\dim_B F$ пр1

Изчисление:

Нека вземем $3^{-k} < \delta < 3^{-k+1}$. Тогава $2^k$ интервала от ниво $k$, всеки от които с дължина $3^{-k}$ образуват $\delta$-покритие на $F$. Така най-малкият брой множества, нужен за $\delta$-покритието на $F$ е $N_\delta(F) \leq 2^k$.

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{-k+1}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k.\log 2}{(k-1)\log 3} =$$

$$\frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,6309$$

От друга страна, всеки интервал с дължина $\delta$: $3^{-k-1} \leq \delta \leq 3^{-k}$ пресича най-много 1 интервал от ниво-$k$, който е с дължина $3^{-k}$, който участва в F. (пространството м/у интервалите от ниво $k$ е поне $3^{-k}$). $\exists$ $2^k$ такива интервали, всички съдържащи точки от F. Така поне $2^k$ интервала с дължина $\delta$ са нужни за покриването на F: $N_\delta(F) \geq 2^k$, така:

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{-k-1}} = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k.\log 2}{(k+1)\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Тъй като получаваме равни стойности за горна и долна Бокс размерност, то можем да кажем, че

Бокс Размерността на Канторовото множество е:

$$\dim_B F = \underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309.$$

(Както често се прави, тук първо намерихме горната и долната граници по отделно.)

Пр

Пример: 2.3.

Нека F е триъгълник на Серпински със страна с дължина 1.

Тогава $\dim_B F = \dim_B F = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58496.$

Изчисление: Забелязваме, че на $k$-та стъпка, F е конструиран от $3^k$ равностранни триъгълника, всеки от които със страна и диаметър $2^{-k}$. Следователно нека $2^{-k} < \delta < 2^{-k+1}$, а тези $3^k$ триъгълници образуват $\delta$-покритие на F т.е. $N_\delta(F) \leq 3^k$. Така получаваме:

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\log 3^k}{-\log 2^{-k+1}} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

От друга страна, всяко множество с диаметър $\delta$, където $2^{-k-1} \leq \delta < 2^{-k}$, може да пресече най-много 3 от триъгълниците (от $E_k$) (тъй като това множество с диам. $\delta$, не може да пресече 2 триъгълника, на разстояние повече от $2^{-k}$ един от друг). $\exists$ $3^k$ триъгълника (в $E_k$), всички те съдържат точки от F. Така $N_\delta(F) \geq 3^{k-1} \Rightarrow$

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \lim_{\delta \to 0} \frac{\log 3^{k-1}}{-\log 2^{-k-1}} = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{(k-1)\log 3}{(k+1)\log 2} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Така получаваме, че бокс размерността на триъгълника на Серпински е: $\dim_B F = \underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58496.$

# Хаусдорфова размерност — изчисляване

Обикновено се прави оценка на горната и долната граница, които искаме да съвпадат. Обикновено правим геометрични наблюдения, последвани от изчисления.

Пример 3.6 Нека F е Канторов прах: Cantor Dust, от квадрат с дължина на страната 1. На всяка стъпка от конструкцията, наличния (наличните) квадрати се разделят на 16, всеки от които е със страна $\frac{1}{4}$ от страната на минаваля квадрат. Тогава $1 \leq \mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2} \Rightarrow \dim_H F = 1$.

Изчисление: Забелязваме, че на k-та стъпка от конструирането на множеството, имаме $4^k$ квадрата, всеки с диаметър $4^{-k}\sqrt{2}$.

Това ~~за $\mathcal{H}$~~ можем да направим оценката:

$\mathcal{H}^1_\delta(F) \leq 4^k \cdot 4^{-k}\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow$ За произволно малко δ получаваме

$\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$.

За долна граница нека означим с proj ортогоналната проекция в/у оста x. Това е Липшицова ф-я:

$|\mathrm{proj}\, x - \mathrm{proj}\, y| \leq |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. По построение на F, тази проекция е интервала $[0;1] \Rightarrow$

$1 = \mathrm{length}[0;1] = \mathcal{H}^1[0;1] = \mathcal{H}^1(\mathrm{proj}(F)) \leq \mathcal{H}^1(F)$.

Можем да използваме евристично изчисление:

$\mathcal{H}^s(F) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^s \cdot \mathcal{H}^s(F)$, тогава допускайки, че $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, то делим и получаваме: $1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^s$ или $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^s \Rightarrow s = 1$.

Пример 37. Нека $F$ е канторовото множество: middle third Cantor set. Тогава $\dim_H F = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}6309$.

$\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$, където $s = \frac{\log 2}{\log 3}$

Евристични изчисления. Множ. на Кантор $F$ се разделя на лява част $F_L = F \cap [0; \frac{1}{3}]$ и дясна част $F_R = F \cap [\frac{2}{3}; 1]$. И двете части са подобни на $F$, но с мащаб $\frac{1}{3}$, $F = F_L \cup F_R$, където $F_L$ и $F_R$ са непресичащи се. Така $\mathcal{H}^s$ е в сила:

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F)$$

и предполагайки, че $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, можем да разделим на него:

$$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s \iff 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s \iff 2^{-1} = 3^{-s} \iff -\log 2 = -s \log 3$$

$$s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Стриктно/строго изчисление: Множеството от интервали, изграждащи множеството е $E_k$ (на съответния етап или стъпка $E_k$). Така $E_k$ се състои $2^k$ интервала, всеки с дължина $3^{-k}$. Така интервалите от $E_k$ образуват $3^{-k}$-покритие на $F$. Това ни дава: $\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(F) \leq 2^k \cdot 3^{-ks} = 1$, ако $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ и $k \to \infty$, то $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

За да докажем, че $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$, показваме, че $\underline{\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}}$ $\forall$ покритие $\{U_i\}$ на $F$. За да го покажем, използваме, че $F$ е компакт и $\{U_i\}$ е крайна фамилия от затворени подинтервали на $[0;1]$. $\forall U_i$ нека $k \in \mathbb{Z}$, такова, че

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}.$$

Тогава $U_i$ може да пресича най-много 1 интервал от ниво $k$, тъй като те са на разстояние поне $3^{-k}$. Нека $j \geq k$, тогава по конструкция $U_i$ пресича най-много $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$ интервала от ниво $j$.

Нека $j$ е достатъчно голямо за да $3^{-(j+1)} \le |U_i| \; \forall U_i$. Пр. 5

Тогава тъй като $\{U_i\}$ пресича всички $2^j$ интервали с дължини $3^{-j}$, то броейки интервалите получаваме $2^j \le \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$, от където следва и: $\sum |U_i|^s \ge \frac{1}{2} = 3^{-s}$.

Пример: Размерност на Триъгълник на Серпински:

$$H^s(F) = H^s(F_{ляв}) + H^s(F_{десен}) + H^s(F_{горен}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s \cdot H^s(F)$$

Ако $0 < H^s(F) < \infty \Rightarrow$ делим

$$1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s$$

$$3^{-1} = 2^{-s}$$

$$-\ln 3 = -s \ln 2 \Rightarrow s = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1{,}585$$

На всяка итерация броя на налите копия на $\Delta$-ка се увеличават по 3, а дължината на страната им се намалява на половина.

$\Rightarrow \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1{,}585$, което следва от решаването $2^d = 3$.