(1)

Хаусдорфова мярка

От всички "фрактални размерност", Хаусдорффовата размерност е най-стара и вероятно най-важната. Тя е дефинирана за всяко множество, но често е трудна за пресмятане. Хаусдорффовата мярка се основава на покриването на множество с "малки" множества.

Дефиниция: Нека $F \subset \mathbb{R}^n$ и $s \geq 0$. $(F \neq \emptyset)$.
δ-покритие на F наричаме изброима и крайна фамилия от множества $\{U_i\}$ с диаметър не повече от δ: $0 < |U_i| \leq \delta$.
(Ако F е компакт, то $\exists$ краен брой множества, които го покриват.)
За всяко $\delta > 0$ дефинираме:

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ е } \delta\text{-покритие на } F \right\},$$

т.е. гледаме покритията (всички) и искаме да минимизираме $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ т.е. сумата от всички диаметри на степен s.

Тогава: $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$ - Хаусдорфова s-мярка на F.

Тази граница $\exists\ \forall F$, но често е 0 или ∞.

Свойства:

1) $\mathcal{H}^s(\emptyset)=0$

2) Ако $E\subset F$, то $\mathcal{H}^s(E)\le\mathcal{H}^s(F)$

3) Ако $\{F_i\}$ - изброима фамилия от множества, то:

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(F_i)$$, където

равенството се достига за F_i → непресичащи се множества на Борел.

Хаусдорфова n-мярка на F показва n-размерния обем (n-мерна мярка на Лебег), или по-точно:

$\mathcal{H}^n(F)=c_n^{-1}\operatorname{vol}^n(F)$, където $\underbrace{\ }_{\operatorname{vol}^n(F) \text{ е n-мерния обем на } F\text{, а}}$ c_n е обемът на n-размерно кълбо с размерност 1, т.е.

$c_n=\pi^{n/2}/2^n(n/2)!$ за n-четно и

$c_n=\pi^{(n-1)/2}((n-1)/(2))!/n!$ за n-нечетно.

$\mathcal{H}^0(F)$ - брой точки в F.

$\mathcal{H}^1(F)$ - дължината на гладката крива F.

$\mathcal{H}^2(F)=\frac{4}{\pi}\cdot\operatorname{area}(F)$, ако F е гладка повърхност.

$\mathcal{H}^m(F)=c_m^{-1}\cdot\operatorname{vol}^m(F)$ - ако F е m-мерна повърхнина. (гладко m-мерно подмногообразие)

(Хаусдорфовата мярка важи и при Хьолдерови и Липшицови ф-ии).

H 3

Твърдение 3.1

Нека $F \subset \mathbb{R}^n$ и $f: F \to \mathbb{R}^m$ е такова, че

$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^{\alpha}$, $x, y \in F$, $\alpha, c > 0$, const.

Тогава за всяко s, е в сила:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$, ако

f е Липшицова т.е. $\alpha = 1$ то $\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$

Свойство: Скалиране

Нека $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\lambda > 0$, $F \subset \mathbb{R}^n$

$\mathcal{H}^s(f(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$

Или

Нека $F \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\lambda > 0$. Тогава $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$,

$\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$.

Ако $|f(x) - f(y)| = |x-y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, то

$\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$ или $\mathcal{H}^s(F+z) = \mathcal{H}^s(F)$ за $F+z = \{x+z : x \in F\}$.

Хаусдорфова размерност (Хаусдорф-Безикович размерност) №4

Нека $F \subset \mathbb{R}^n$ и $\delta < 1$, за $t > s$ и $\{U_i\}$ - δ-покритие на F е в сила:

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

и също: $\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(F)$

При $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ и тогава $\mathcal{H}^t(F) = 0$ за $t > s$. По този начин виждаме, че $\exists$ критична стойност за s, при която $\mathcal{H}^s(F)$ скача от ∞ към 0. Тази критична стойност се нарича Хаусдорфова (димензия или) размерност на F и я означаваме $\dim_H F$. Тя е дефинирана за всяко $F \subset \mathbb{R}^n$.

Или по-формално:

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Тогава $\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{ако } 0 \leq s < \dim_H F \\ 0 & \text{ако } s > \dim_H F \end{cases}$

Множество на Борел, за което е в сила $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ се нарича s-множество.

Прост пример: Нека за $F \neq 0$ и $F \subseteq \mathbb{R}^n$ е в сила: $\mathcal{H}^1(F) = \text{length}(F) = \infty$.

$\mathcal{H}^2(F) = \frac{4}{\pi} \cdot \text{area}(F) = 4$

$\mathcal{H}^3(F) = \frac{6}{\pi} \text{vol}(F) = 0$

$\Rightarrow \dim_H F = 2$ и $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ за $s < 2$

и $\mathcal{H}^s(F) = 0$ за $s > 2$.

Свойства:

H5

1) Монотонност

Ако $E \subset F$, то $\dim_H E \leq \dim_H F$ (следва от $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ $\forall s$.

2) Възможни стойности:

Ако $F \subset \mathbb{R}^n$, то $0 \leq \dim_H F \leq n$

(Ако F - ограничено и $s > n$, то $\mathcal{H}^s(F) = 0 \Rightarrow \dim_H F \leq n.$)

3) Ако $F_1, F_2, \dots$ е (изброима) редица от множества, то

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}.$$

4) Изброими множества: Ако F е изброимо, то $\dim_H F = 0$.

Ако $\forall F_i$ съдържа 1 точка:

$\mathcal{H}^0(F_i) = 1$ и $\dim_H F_i = 0 \Rightarrow \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$

броя точки в F_i

$\{F_i\}$ формират изброимото множество F.

5) Отворени множества: Ако $F \subset \mathbb{R}^n$ е отворено, то $\dim_H F = n$

Твърдение 3.3

Нека $F \subset \mathbb{R}^n$ и $f: F \to \mathbb{R}^m$ е Хьолдерова:

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^{\alpha}, \quad x, y \in F$$

Тогава $\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$.

Ако f е Липшицова т.е. $\alpha = 1 \Rightarrow \dim_H f(F) \leq \dim_H F$.

Още свойства

6) Нека f е еднаквост, подобност или афинна трансформация в $\mathbb{R}^n$. Тогава $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

↑ геометрична инвариантност

116

7) Гладки множества:

Ако F е гладко m-мерно подмногообразие, то $\dim_H F = m$.

8) Проекции:

proj $\Rightarrow$ ортогонална проекция от $\mathbb{R}^2$ в/у права:

$\dim_H \mathrm{proj} F \leq \min\{1, \dim_H F\}$.

Твърдение: Връзка между Хаусдорфова размерност и бокс размерност:

$\forall F \subset \mathbb{R}^n$ и $F \neq \emptyset$ е в сила: $\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$

(док. на стр. 50)

Хаусдорфовата размерност, долната и горната бокс размерност не се променят при би-липшицови трансформации.

$\Rightarrow$ Ако 2 множества имат различна размерност, не $\exists$ би-липшицова връзка м/у тях. (стр. 50)

Във фракталната геометрия, 2 множества могат да се разглеждат като еквивалентни ако $\exists$ би-липшицова връзка м/у тях.

Твърдение 3.5

$\forall$ множество с размерност < 1 е толкова "разпокъсано", че е задължително да бъде : .. ... тотално несвързано, т.е. няма 2 точки, които да се намират в едно и също компонента на свързаност.

Друга дефиниция на Хаусдорфовата размерност: (Н7)

За $F \subset \mathbb{R}^n$, нека:

$$\mathcal{H}^s_\infty(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ е изброимо покритие на } F \right\}$$

Тогава Хаусдорфовата размерност се дава от:

$$\dim_H F = \inf \{ s \geq 0 : \mathcal{H}^s_\infty(F) = 0 \}$$ (стр. 51)

Ако $F = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, където F_i е геометрически подобно на F, но с множител r_i, тогава при условие, че F_i не се препокриват "много", то $s = \dim_H F$, където за s е изп. $\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1$

Примери за изчисляване на $\dim_H F$ → стр. 52-53

Друга еквивалент на деф. на Хаусдорфова размерност:

Вместо за покриване да използваме произволни множества U_i с диаметър $0 < |U_i| \leq \delta$, можем да използва кълба B

$$B^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_i |B_i|^s : \{B_i\} \text{ е } \delta\text{-покритие на } F \text{ чрез кълба} \right\}$$

и така $B^s(F) = \lim_{\delta \to 0} B^s_\delta(F)$. Отново имаме критична стойност, в която се прескача от ∞ на 0.

Ясно е, че $\mathcal{H}^s_\delta \leq B^s_\delta(F)$.

Ако $\{U_i\}$ е δ-покритие на F, то $\{B_i\}$ е 2δ-покритие на F като B_i съдържа U_i.

Така: $\sum_i |B_i|^s \leq \sum (2|U_i|)^s = 2^s \sum |U_i|^s$

$\Rightarrow \mathcal{B}^s_{2\delta}(F) \leq 2^s \mathcal{H}^s_\delta(F)$

(H 8)

за $\delta \to 0$ следва $\mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{B}^s(F) \leq 2^s \mathcal{H}^s(F)$, от което следва, че и $\mathcal{H}^s$ и $\mathcal{B}^s$ "скачат" от ∞ към 0 за една и съща стойност, т.е. размерността, която дават е една и съща.

Също получаваме еднаква размерност, независимо дали използваме отворени или затворени множества.

net measures & Binary intervals $\Rightarrow$ стр. 54.

$\mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{M}^s(F) \leq 2^{s+1} \mathcal{H}^s(F)$

9

packing dimensions ⇒ стр. 54, 55

Лема 3.8

Нека F е непразно ограничено и $F \subset \mathbb{R}^n$.

Тогава $\dim_p F \leq \overline{\dim}_B F$

Твърдение 3.9.

Ако $F \subset \mathbb{R}^n$, то $\dim_p F = \overline{\dim}_{MB} F$

В сила е: $\dim_H F \leq \underline{\dim}_{MB} F \leq \overline{\dim}_{MB} F = \dim_p F \leq \overline{\dim}_B F$

Следствие 3.10 Нека $F \subset \mathbb{R}^n$ е компакт и

$\overline{\dim}_B (F \cap V) = \overline{\dim}_B F$ $\forall$ множ. V, пресичащо F.

Тогава $\dim_p F = \overline{\dim}_B F$

По-фините деф. на размерността: стр. 57