

# Дискретни структури

план на упражненията

КН 1.1, зимен семестър 2022/2023

Калоян Цветков  
kaloyants25@gmail.com

ФМИ, СУ  
1.0.3

## Ресурси (теория и задачи) по Дискретни структури



- теория



- задачи



- теория + задачи

- сайт на Скелета (задачи от минали години)
- записки на Мария Соскова
- записки на Ангел Димитриев
- лични записки (по упражненията)

# Съдържание

<b>1</b>	<b>Въведение</b>	<b>6</b>
1.1	Съждения . . . . .	6
1.2	Логически операции . . . . .	6
1.3	Квантори . . . . .	8
1.3.1	За всеобщност - $\forall$ . . . . .	8
1.3.2	За екзистенциалност - $\exists$ . . . . .	8
1.3.3	Задача: . . . . .	8
1.4	Множества и операции над тях . . . . .	9
1.4.1	Множества . . . . .	9
1.4.2	Дефиниране на множества . . . . .	9
1.4.3	Операции над множества . . . . .	9
1.4.4	Задачи . . . . .	12
1.4.5	мултимножество . . . . .	12
1.4.6	разбиване . . . . .	12
1.4.7	покритие . . . . .	12
1.4.8	разкрояване . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Индукция</b>	<b>13</b>
2.1	Стандартна индукция . . . . .	13
2.1.1	Задачи . . . . .	13
2.2	Силна индукция . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Релации</b>	<b>15</b>
3.1	Наредена двойка . . . . .	15
3.2	Декартово произведение . . . . .	15
3.3	Релация . . . . .	15
3.4	Домейн и кодомейн . . . . .	15
3.5	Свойства . . . . .	15
3.5.1	рефлексивност . . . . .	15
3.5.2	антирефлексивност . . . . .	15
3.5.3	симетричност . . . . .	16
3.5.4	антисиметричност . . . . .	16
3.5.5	силна антисиметричност . . . . .	16
3.5.6	транзитивност . . . . .	16
3.6	Интерпретации . . . . .	16
3.6.1	Матрица . . . . .	16
3.6.2	Граф (диаграма на Хасе) . . . . .	16
3.6.3	Задача . . . . .	17
3.7	Релации на еквивалентност . . . . .	17

3.7.1	Примери с модулна аритметика . . . . .	17
3.7.2	Модифициране на рел. на екв. . . . .	17
3.7.3	Брой рел. на екв. . . . .	18
3.8	Наредби . . . . .	18
3.8.1	(Нестрога) частична наредба . . . . .	18
3.8.2	Строга частична наредба . . . . .	18
3.8.3	Линейна наредба . . . . .	18
3.9	Специални елементи . . . . .	18
3.9.1	Минимален . . . . .	18
3.9.2	Най-малък . . . . .	18
3.9.3	Максимален . . . . .	19
3.9.4	Най-голям . . . . .	19
3.9.5	Пример: . . . . .	19
3.10	Затваряне на релации . . . . .	19
3.10.1	Операции с релации . . . . .	19
3.10.2	рефлексивно . . . . .	20
3.10.3	симетрично . . . . .	20
3.10.4	транзитивно . . . . .	20
3.11	Задачи: . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Функции/Изброимост</b>	<b>21</b>
4.1	Свойства . . . . .	21
4.2	Образ на множество . . . . .	21
4.3	Композиция . . . . .	22
4.4	Обратна функция . . . . .	22
4.5	Крайно и безкрайно множество . . . . .	22
4.6	Задачи . . . . .	22
4.6.1	Композиция на инекции/сюрекции е инекция/сюрекция . . . . .	22
4.6.2	Изследвайте за инективност/сюрективност функцията . . . . .	22
4.6.3	Конструирание на биекция . . . . .	23
4.6.4	Биекциите се различават поне в две двойки . . . . .	23
4.7	Изброимо множество . . . . .	23
4.8	Теорема на Кантор . . . . .	23
4.9	Примери за биекции . . . . .	23
4.10	Изброимо множество . . . . .	23
4.11	Теорема на Кантор . . . . .	23
4.12	Примери за биекции . . . . .	24
4.12.1	$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . . . . .	24
4.12.2	$\mathbb{R} \sim (0, 1)$ . . . . .	24
4.13	Задачи за биекции . . . . .	25
4.13.1	Обединение на изброими множества е изброимо . . . . .	25

<b>5</b>	<b>Комбинаторика</b>	<b>26</b>
5.1	Теория и примери . . . . .	26
5.2	Задачи . . . . .	27
5.3	Принцип на Дирихле . . . . .	28
5.3.1	Задачи . . . . .	29
5.4	Нютонов бином . . . . .	29
5.5	Принцип за включване и изключване . . . . .	29
5.5.1	Задачи . . . . .	30
5.6	Комбинаторни доказателства . . . . .	31
5.7	Брое на функции . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Рекурсия</b>	<b>32</b>
6.1	The rabbit problem . . . . .	32
6.2	Рекурентни уравнения . . . . .	32
6.3	Хомогенни линейни рекурентни уравнения . . . . .	32
6.3.1	Алгоритъм за решаване: . . . . .	32
6.3.2	Задачи . . . . .	33
6.4	Нехомогенни линейни рекурентни уравнения . . . . .	33
6.4.1	Задачи . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Графи</b>	<b>35</b>
7.1	Дефиниции . . . . .	35
7.2	Задачи . . . . .	36
7.3	Обхождане на графи . . . . .	38
7.3.1	BFS (в широчина) (опашка (FIFO)) . . . . .	38
7.3.2	DFS (в широчина) (стек (LIFO)) . . . . .	38
7.4	граф на Петерсен . . . . .	39
<b>8</b>	<b>Дървета</b>	<b>40</b>
8.1	Дефиниция за дърво . . . . .	40
8.2	Задачи . . . . .	40
<b>9</b>	<b>Покриващи дървета</b>	<b>41</b>
9.1	MST . . . . .	41
9.1.1	Дефиниция . . . . .	41
9.1.2	Алгоритми . . . . .	41
9.1.3	Prim . . . . .	41
9.1.4	Kruskal . . . . .	42
9.1.5	Dijkstra . . . . .	42

<b>10</b>	<b>Хиперкуб</b>	<b>44</b>
10.1	Дефиниция . . . . .	44
10.2	Задачи . . . . .	44
<b>11</b>	<b>Булеви функции</b>	<b>46</b>
11.1	Задачи . . . . .	46
11.2	СДНФ . . . . .	46
11.2.1	Теорема на Бул . . . . .	46
11.3	МДНФ . . . . .	46
11.3.1	Алгоритъм за намиране . . . . .	46
11.3.2	Покритие на аргументите с образ 1 . . . . .	46
11.4	Полином на Жегалкин . . . . .	48
11.4.1	определяне . . . . .	48
11.4.2	Теорема на Жегалкин . . . . .	48
11.5	Критерий на Пост-Яблонски . . . . .	48
11.6	Шеферови функции . . . . .	48
11.6.1	Шеферова функция . . . . .	48
11.7	Задачи . . . . .	48
11.7.1	критерий . . . . .	49

# 1 Въведение

## 1.1 Съждения

Изреченията, съдържащи информация, която може да се оцени като вярна и невярна, наричаме **съждения**.

Частта от съждението, която приписва признак, е **предикат**.

Предикатът може да бъде пресметнат като верен или грешен при прилагането му върху **субект**.

Пример:

"Този химикал е син." е вярно/грешно съждение, получено от пресмятането на предиката "X е син." върху субекта "този химикал".

"Съществува просто число с 100,000,000 цифри" е съждение, но не знаем как да оценим като вярно или грешно все още.

(Най-голямото открито просто число има около 23,000,000 цифри)<sup>1</sup>

## 1.2 Логически операции

Дефиниции чрез вектор/таблица от стойности и на интуитивно ниво.

**отрицание**

$\neg$

$p$	$\neg p$
0	1
1	0

**дизюнкция**

$\vee$

$p$	$q$	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**конюнкция**

$\wedge$

$p$	$q$	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

<sup>1</sup>Към датата 22 януари 2023 г.!

**изключващо или** $\oplus$ 

$p$	$q$	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**импликация (ако ..., то ...)** $\rightarrow$ 

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

**биимпликация (еквивалентност)** $\longleftrightarrow$ 

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Свойства:**

КОМУТАТИВНОСТ

$$p \wedge q = q \wedge p \quad p \vee q = q \vee p \quad p \oplus q = q \oplus p$$

АСОЦИАТИВНОСТ

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r \quad p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$$

ДИСТРИБУТИВНОСТ

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

ЗАКОН ЗА КОНТАПОЗИЦИЯТА

ЗАКОНИ НА ДЕ МОРГАН

Нека  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$  и  $t$  са следните съждения: $p$ : Ще разходя кучето преди обяд. $q$ : Сутринта ще спортувам. $r$ : Следобяд ще спортувам.



$s$ : Днес времето е хубаво.

$t$ : Днес влажността на въздуха е ниска.

Напишете логически изрази, съответстващи са следните изречения.

1. Няма да разходя кучето преди обяд.
2. Ще разходя кучето преди обяд и следобяд ще спортувам.
3. Днес ще спортувам или сутринта, или следобяд.
4. Днес ще спортувам сутринта или следобяд.
5. Ако днес времето е хубаво, следобяд ще спортувам.
6. Необходимо условие, за да спортувам днес следобяд е, времето да е хубаво.
7. Достатъчно условие, за да спортувам днес е времето да е хубаво и влажността да е ниска.

### 1.3 Квантори

#### 1.3.1 За всеобщност - $\forall$

$\forall x \in A : P(x)$  - предикатът  $P$  се оценява като истина за всеки/за произволен елемент от множеството  $A$ .

#### 1.3.2 За екзистенциалност - $\exists$

$\exists x \in A : P(x)$  - предикатът  $P$  се оценява като истина за някой (поне 1) от всички елементи на множеството  $A$ .

Кванторите са дуални: отрицанието на единия поражда другия.

$$\neg \exists x \in A : P(x) \longleftrightarrow \forall x \in A : \neg P(x)$$

$$\neg \forall x \in A : P(x) \longleftrightarrow \exists x \in A : \neg P(x)$$

#### 1.3.3 Задача:

$R(x)$  - " $x$  е в стая <номер на стая>";

$C(x)$  - " $x$  следва КН";

$F(x, y)$  - " $x$  е приятел на  $y$ ";

Да се изразят твърденията чрез квантори и предикатите  $R, C, F$ .

"Някой следва КН."

$\exists x : C(x)$ ;

"Всеки е приятел на себе си."

$\forall x : F(x, x)$ ;

"Приятелството и неприятелството са взаимни."

$\forall x : \forall y : F(x, y) \rightarrow F(y, x)$ ; (защо  $\longleftrightarrow$  не е необходимо)

"Всеки има приятел."

$\forall x : \exists y : F(x, y)$ ;

"Всички в стая <номер на стая> следват КН."

$$\forall x : R(x) \rightarrow C(x);$$

"Всеки в тази стая има приятел от КН, който не е в стаята."

$$\forall x : R(x) \rightarrow (\exists y : F(x, y) \wedge C(y) \wedge \neg R(y));$$

"Хората в стаята, които не следват КН, имат приятел в стаята."

$$\forall x : R(x) \wedge \neg C(x) \rightarrow \exists y : R(y) \wedge F(x, y)$$

"Да нямаш приятели е достатъчно условие да не следваш КН."

$$\forall x : (\forall y : \neg F(x, y)) \rightarrow \neg C(x). \text{ (контрапозиция?)}$$

"Двама души са приятели тогава и само тогава, когато имат общ приятел от КН."

$$\forall x : \forall y : F(x, y) \longleftrightarrow \exists z : F(x, z) \wedge F(y, z) \wedge C(x)$$

## 1.4 Множества и операции над тях

### 1.4.1 Множества

Множество - няма дефиниция; интуитивно: колекция от неща; всички математически обекти са изградени от множества.

### 1.4.2 Дефиниране на множества

чрез изброяване

чрез предикат

празно множество:  $(\exists \emptyset : ) \forall x : x \notin \emptyset$ .

Дефиниции за равенство на множества, подмножество, строго подмножество.

$$A = B \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall x : x \in A \longleftrightarrow x \in B$$

$$A \subseteq B \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall x : x \in A \rightarrow x \in B$$

$$A \subset B \stackrel{def}{\longleftrightarrow} A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$\forall A : \emptyset \subseteq A \wedge \emptyset \subset A$$

Примери за равни множества (повторението и редът на елементите не е от значение) и подмножества.

$$\{1, 2, \emptyset\} = \{\emptyset, 1, 2\} = \{\emptyset, \emptyset, 1, 2, 1, 1\}$$

$$\{x, 1, y\} \subseteq \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

$$\{x, 1, y\} \subset \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

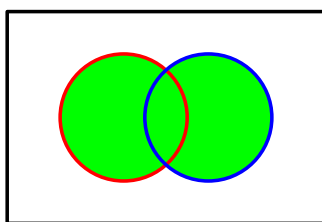
$$\{x, 1, y, z, 5, 2\} \subseteq \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

### 1.4.3 Операции над множества

таблицы (за произволен елемент "смятаме" резултат спрямо предикатите  $x \in A$  и  $x \in B$ ) Аналогии с логическите операции.

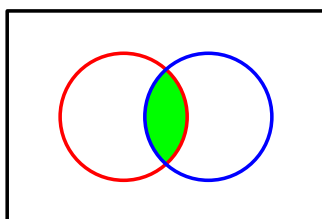
обединение

$$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



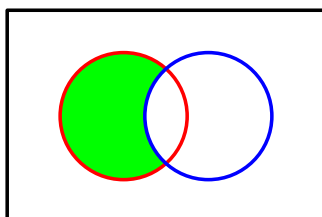
сечение

$$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



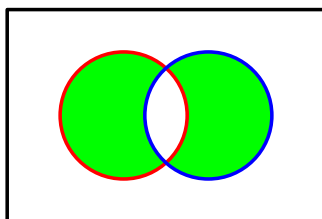
разлика

$$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



симетрична разлика

$$A \Delta B := \{x | x \in A \oplus x \in B\}$$



Доказателство , че:

- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$A$	$B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	$A \Delta B$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

$$\implies \forall x : x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \Delta B \implies (A \cup B) \setminus (B \cap A) = A \Delta B$$

$$\bullet A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$A$	$B$	$A \setminus B$	$B \setminus A$	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	$A \Delta B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

$$\implies \forall x : x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \leftrightarrow x \in A \Delta B \implies (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B$$

#### Допълнение на множество

Универсално множество - съдържа всички разглеждани множества; определя се от контекста.

$$\overline{A} := U \setminus A; \quad \overline{\overline{A}} = A.$$

#### Свойства:

- КОМУТАТИВНОСТ

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A \quad A \Delta B = B \Delta A$$

- АСОЦИАТИВНОСТ

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$\text{Обединение на няколко множества: } \bigcup_{i \in I} A_i := \{x | \exists i \in I : x \in A_i\}$$

$$\text{Сечение на няколко множества: } \bigcap_{i \in I} A_i := \{x | \forall i \in I : x \in A_i\}$$

- ДИСТРИБУТИВНОСТ

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

празно множество

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \setminus \emptyset = A$$

закони на Де Морган

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

**степенно множество**

$$\mathcal{P}(A) = 2^A := \{x | x \subseteq A\}$$

Примери за степенни множества.

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{1, 2\}, 7\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1, 2\}\}, \{7\}, \{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, 7\}, \{\{1, 2\}, 7\}, \{\emptyset, \{1, 2\}, 7\}\}$$

**1.4.4 Задачи**

Вярно ли е, че

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C) \text{ (не)}$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \text{ (да)}$$

**1.4.5 мултимножество**

Множество, в което броя на повторенията на елементите е от значение.

$$\{1, 3, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\} \text{ разглеждани като множества}$$

$$\{1, 3, 3, 2, 1\} \neq \{1, 2, 3\} \text{ разглеждани като мултимножества}$$

**1.4.6 разбиване**

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е разбиване на } A \xleftrightarrow{\text{def}}$$

$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A$$

$$\forall i, j \in I : i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

$\{S\}$  разбиване ли е на  $S$ ? (да  $\longleftrightarrow S \neq \emptyset$ )

**1.4.7 покритие**

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е покритие на } A \xleftrightarrow{\text{def}}$$

$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

**1.4.8 разкрояване**

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е разкрояване на } A \xleftrightarrow{\text{def}}$$

$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A$$

$$\forall i, j \in I : i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

## 2 Индукция

Плочки домино:

Бутнали сме първата плочка и знаем, че ако падне  $n$ -тата ще падне и  $n + 1$ -вата. Тогава ще паднат всички плочки.

### 2.1 Стандартна индукция

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \rightarrow P(n + 1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

Принцип на индукцията

- Проверяваме верността на твърдението за  $n = 0$  ( $P(0)$ );
- Допускаме, че твърдението е вярно за някое  $n$  ( $P(n)$ );
- Доказваме, че твърдението е вярно и за  $n + 1$  ( $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ ).
- Тогава  $\forall n \geq 0 : P(n)$ .

#### 2.1.1 Задачи

Да се докаже, че  $|2^A| = 2^{|A|}$ .

**Solution:**

$$|A| = n + 1 \geq 1 \implies |A \setminus \{a\}| = n \geq 0 \implies |2^{A \setminus \{a\}}| = 2^n$$

$\implies$  All subsets of  $A$  not containing  $a$  are  $2^n$ . All subsets of  $A$  are those not containing  $a$  and them unioned with  $\{a\} \implies$

$$\mathcal{P}(A) = \{x | x \subseteq A \wedge a \notin x\} \cup \{x | x \subseteq A \wedge a \in x\}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{x | x \subseteq A \wedge a \notin x\}| + |\{x | x \subseteq A \wedge a \in x\}| \text{ (since they have no intersection)}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A \setminus \{a\})| + |\{x | x \in \mathcal{P}(A \setminus \{a\}) \wedge a \in x\}|$$

they are  $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ .

Обобщен принцип на индукцията

$$P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0 : (P(n) \rightarrow P(n + 1))) \rightarrow \forall n \geq n_0 : P(n)$$

- Проверяваме верността на твърдението за  $n = n_0$  ( $P(n_0)$ );
- Допускаме, че твърдението е вярно за някое  $n$  ( $P(n)$ );
- Доказваме, че твърдението е вярно и за  $n + 1$  ( $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ ).
- Тогава  $\forall n \geq n_0 : P(n)$ .

**2.2 Силна индукция**

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : ((\forall k \leq n : P(k)) \rightarrow P(n+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

### 3 Релации

#### 3.1 Наредена двойка

$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{a, \{a, b\}\}$$

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

#### 3.2 Декартово произведение

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Пример:

$$\{1, 3, 5\} \times \{2, 4\} = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$$

$$\emptyset \times \{0, 2\} = \emptyset$$

няма комутативност:  $A \times B \neq B \times A$

Мощност на декартово произведение:  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$   
(доказателство с индукция по  $|A|$ )

#### 3.3 Релация

релация е всяко подмножество на декартово произведение

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  -  $n$ -местна релация

при  $n = 2$ : бинарна релация  $R \subseteq A \times A$  - бинарна релация над  $A$

Пример за 3-местна релация:

$(a, b, c) \in R \stackrel{\text{def}}{\iff} a, b, c$  са страни на триъгълник.

Ако  $|A| = n$ , то колко са бинарните релации над  $A$  ( $2^n$ )

#### 3.4 Домейн и кодомейн

$\text{dom}(R) = \{a \mid \exists b \in A : (a, b) \in R\}$  - домейн

$\text{range}(R) = \{b \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\}$  - кодомейн, range

#### 3.5 Свойства

$$R \subseteq A \times A$$

##### 3.5.1 рефлексивност

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

##### 3.5.2 антирефлексивност

$$\forall a \in A : (a, a) \notin R$$



**3.5.3 симетричност**

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$$

**3.5.4 антисиметричност**

$$\forall a, b \in A : a \neq b \rightarrow ((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R)$$

(възможно е да има и несравними елементи)

$$\longleftrightarrow$$

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a = b$$

**3.5.5 силна антисиметричност**

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \oplus (b, a) \in R$$

**3.5.6 транзитивност**

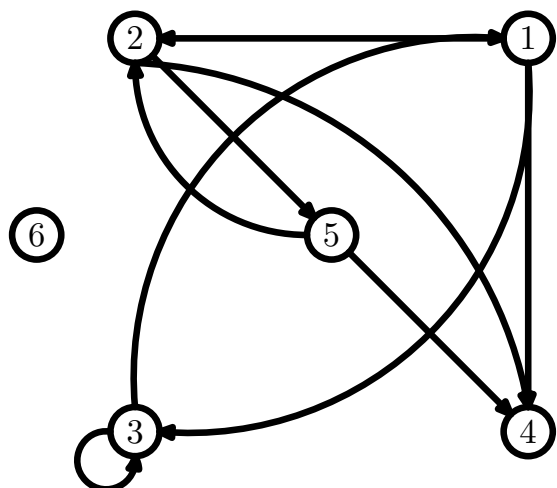
$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$$

**3.6 Интерпретации**

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (2, 4), (3, 3), (2, 5), (5, 4), (5, 2)\}$$

**3.6.1 Матрица**

	1	2	3	4	5	6
1		x	x	x		
2				x	x	
3	x		x			
4						
5		x		x		
6						

**3.6.2 Граф (диаграма на Хасе)**

Интерпретация на свойствата с матрица и граф.

### 3.6.3 Задача

Какви свойства притежават релациите:

- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, R = \{(a, b) \mid a - b \in \mathbb{Z}\}$
- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \{(a, b) \mid a + b \geq 5\}$
- $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}, R = \{(a, b) \mid a \cap b \neq \emptyset\}$
- $R \subseteq \{0, 1, 2\}^2, R = \{(a, b) \mid a + b \geq 5\}$

### 3.7 Релации на еквивалентност

$R$  е релация на еквивалентност  $\stackrel{def}{\longleftrightarrow} R$  е рефлексивна, симетрична и транзитивна. Примери: равенство на числа, еднаквост и подобие на триъгълници.

$$[x]_R \stackrel{def}{=} \{y \mid (x, y) \in R\}$$

Теорема: (лекции и изпит)

$$R \subseteq A \times A$$

$$F_R := \{[x]_R \mid x \in A\} \text{ е разбиване на } A$$

#### 3.7.1 Примери с модулна аритметика

$$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$aRb \leftrightarrow 4 \mid a - b$$

Да се докаже, че  $R$  е релация на еквивалентност.  $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$xRy \leftrightarrow 2 \mid 2x - 5y$$

Да се докаже, че  $R$  е релация на еквивалентност.

#### 3.7.2 Модифициране на рел. на еkv.

Нека  $R_1, R_2$  са релации на еквивалентност над  $A$ . Релации на еквивалентност ли са релациите:

- $R_1 \cup R_2$  (не)
- $R_1 \cap R_2$  (да)
- $R_1 \Delta R_2$  (не)

**3.7.3 Брой рел. на екв.**

Колко са релациите на еквивалентност над  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ?  
(брой разбивания на 4-елементно множество)

**3.8 Наредби****3.8.1 (Нестрога) частична наредба**

$R$  е частична наредба, когато е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.  
Примери:  $\geq, \leq, \subseteq$ .

**3.8.2 Строга частична наредба**

$R$  е строга частична наредба, когато е антирефлексивна, антисиметрична и транзитивна.  
Примери:  $>, <, \subset$ .

**3.8.3 Линейна наредба**

$R$  е линейна (пълна) наредба, когато е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна.

Колко елемента има линейна наредба над  $n$ -елементно множество?  $\left(\frac{n^2 + n}{2}\right)$

**3.9 Специални елементи**

$$R \subseteq A \times A$$

**3.9.1 Минимален**

$$a \text{ е минимален } \stackrel{def}{\iff} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (b, a) \notin R$$

след обръщане на кванторите - "няма по-малък от него".

**3.9.2 Най-малък**

$$a \text{ е най-малък } \stackrel{def}{\iff} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (a, b) \in R$$

"по-малък от всички други"

Възможно ли е да има повече от 1 най-малък/най-голям елемент в наредба? (не)

**3.9.3 Максимален**

$$a \text{ е максимален } \stackrel{def}{\iff} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (a, b) \notin R$$

след обръщане на кванторите - "няма по-голям от него".

Възможно ли е да има 0, 1, > 1 минимален/максимален елемент в частична наредба?

(0 - не (ако  $R$  е частична наредба, то  $R$  има минимален и максимален елемент (теорема)), 1 - да, 2 - да)

А в линейна?

(0 - не (линейната наредба е и частична), 1 - да, 2 - не)

**3.9.4 Най-голям**

$$a \text{ е най-голям } \stackrel{def}{\iff} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (b, a) \in R$$

"по-голям от всички други"

Възможно ли е да има повече от 1 най-малък/най-голям елемент в наредба? (не)

**3.9.5 Пример:**

Да се посочат минимални, максимални, най-големи и най-малки елементи

	1	2	3	4	5	6	7	8
1			x	x				x
2	x	x	x	x	x	x	x	x
3							x	
4				x			x	
5								
6					x			x
7						x		x
8								

(При наличие на най-малък/най-голям, наличието на друг минимален/максимален е изключено.)

**3.10 Затваряне на релации****3.10.1 Операции с релации**

- Обратна релация:  $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$
- Допълнение на релация:  $\overline{R} = \{(a, b) \mid (a, b) \notin R\}$
- Композиция на релации:  $S \circ R = \{(a, c) \mid \exists b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$

$$R \subseteq A \times A$$

**3.10.2 рефлексивно**

$$refl(R) = R \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

**3.10.3 симетрично**

$$sym(R) = R \cup R^{-1}$$

**3.10.4 транзитивно**

$$R^1 = R; R^n = R \circ R^{n-1} \text{ при } n > 1$$

$$trans(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$$

Да се намери рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на  $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}$

**3.11 Задачи:****Делимост**

Да се докаже, че релацията  $\mid$  - "дели" е частична наредба над  $\mathbb{N}$ . Да се посочат най-голям, най-малък, минимален и максимален елемент или да се докаже, че такъв няма.

**Комутативност**

(свеждане до умножение на матрици)

Нека  $|A| = n$ .

Нека  $S = \{x \mid xA\}$ .

Нека  $R \subseteq S \times S$ .

$R_1 R R_2 \stackrel{def}{\longleftrightarrow} R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ . Релация на еквивалентност ли е  $R$ ? Докажете.

**Две релации**

Нека  $R \subseteq A \times A$  е рефлексивна и транзитивна релация.

Нека  $\sim \subseteq A \times A : a \sim b \leftrightarrow aRb \wedge bRa$ .

Докажете, че  $\sim$  е релация на еквивалентност.

$F := \{[x]_{\sim} \mid x \in A\}$

$\langle \subseteq F \times F : [a]_{\sim} \langle [b]_{\sim} \leftrightarrow \exists x \in [a]_{\sim} \exists y \in [b]_{\sim} : xRy$

Да се докаже, че  $\langle$  е частична наредба.

## 4 Функции/Изброимост

$f$  е (тотална) функция  $\xleftrightarrow{def} f \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A : \exists! b \in B : (a, b) \in f$  (точно 1 образ)

$$f(x) = y \longleftrightarrow (x, y) \in f$$

$f$  е частична функция  $\xleftrightarrow{def}$

$$f \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A : \forall b_1 \in B : \forall b_2 \in B : (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \implies b_1 = b_2$$

(най-много 1 образ)

$f$  е функция и  $f \subseteq A \times B$  - записваме  $f : A \longrightarrow B$

### Задача

Кои са релациите на еквивалентност  $R \subseteq A \times A$ , които са функции? (допускаме, че  $R$  има клас на еквивалентност с поне 2 елемента  $a \neq b \implies aRb \wedge aRa \implies a = b \implies$  противоречие  $\implies$  само идентитетът е релация на еквивалентност и функцията едновременно).

### 4.1 Свойства

$$f : A \longrightarrow B$$

- инекция:  $\forall a_1 \in A : \forall a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

$f$  е инекция  $\longrightarrow |A| \leq |B|$  (необходимо условие за инекция)

Примери:  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x \setminus 2^x$  са инекции

Примери:  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 \setminus \sin(x) \setminus x^2 - 3x + 2$  не са инекции

- сюрекция:  $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$

$f$  е сюрекция  $\longrightarrow |A| \geq |B|$

Примери:  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 1); f(x) = \frac{1}{x}$  са сюрекции

Примери:  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 \setminus \sin(x) \setminus x^2 - 3x + 2$  не са сюрекции

- биекция - инекция и сюрекция (необходимо условие за сюрекция)

$$\forall b \in B : \exists! a \in A : f(a) = b$$

$f$  е биекция  $\longrightarrow |A| = |B|$  (необходимо условие за биекция)

Примери:  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^{2n+1}$  е биекции  $\forall n \in \mathbb{N}$

Ако има инекция  $A \longrightarrow B$ , то има сюрекция  $B \longrightarrow A$ .

### 4.2 Образ на множество

Нека  $f : A \longrightarrow B$  и  $X \subseteq A$

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$$

### 4.3 Композиция

Нека  $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$

$g \circ f : A \longrightarrow C, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

композиция на инекции/сюрекции/биекции е отново инекция/сюрекция/биекция

### 4.4 Обратна функция

Нека  $f : A \longrightarrow B$  е биекция (при инекция обратната функция е частична).

$f^{-1} : B \longrightarrow A, f^{-1}(y) = x \stackrel{def}{\longleftrightarrow} f(x) = y$

### 4.5 Крайно и безкрайно множество

$A$  е крайно  $\stackrel{def}{\longleftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : \exists f : I_n \longrightarrow A : f$  е биекция.

$A$  е безкрайно  $\stackrel{def}{\longleftrightarrow} A$  не е крайно. (с квантори?)

### 4.6 Задачи

#### 4.6.1 Композиция на инекции/сюрекции е инекция/сюрекция

Нека  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow C$  са инекции.

Допускаме, че  $a \neq b \in A$ .

$\implies f(a) \neq f(b) \in B \implies g(f(a)) \neq g(f(b)) \implies g \circ f$  е инекция.

Нека  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow C$  са сюрекции.

Нека  $z \in C \implies \exists y \in B : g(y) = z \implies \exists x \in A : f(x) = y. \implies g(f(x)) = g(y) = z \implies g \circ f$  е сюрекция.

#### 4.6.2 Изследвайте за инективност/сюрективност функцията

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{, ако } x \text{ е четно} \\ x - 1 & \text{, ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = (2x - y, -x + 2y)$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} : f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

**4.6.3 Конструирание на биекция**

Да се построи биекция  $f : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}^+$ , че  $\forall n \in \mathbb{N} : n \mid \sum_{i=1}^n f(i)$ .

$$f(n+1) := \begin{cases} m & \text{if } m \notin \{f(1), f(2), \dots, f(n)\} \text{ (запазване на средното аритметично)} \\ m + n + 1 & \text{otherwise (увеличаване на средното аритметично с 1).} \end{cases}$$

**4.6.4 Биекциите се различават поне в две двойки**

Нека  $f : A \longrightarrow A$  и  $g : A \longrightarrow A$  са биекции и  $\exists x_1 \in A : f(x_1) \neq g(x_1)$ . Да се докаже, че  $\exists x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_2) \neq g(x_2)$ .

**4.7 Изброимо множество**

$A$  е изброимо  $\stackrel{def}{\iff} \exists f : \mathbb{N} \longrightarrow A : f$  е биекция.

изброимост на  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

(записки)

(диагонален метод на Кантор)

(безкрайният хотел на Хилберт)

**4.8 Теорема на Кантор**

$\forall A : \neg \exists f : A \longrightarrow 2^A : f$  е биекция.

неизброимост на  $2^{\mathbb{N}}$

има ли инекция  $A \longrightarrow 2^A$  (да се построи)

има ли сюрекция  $A \longrightarrow 2^A$  (не?)

**4.9 Примери за биекции**

изброимост на  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , декартово произведение на изброими, изброимо на произволна степен.

**4.10 Изброимо множество**

$A$  е изброимо  $\stackrel{def}{\iff} \exists f : \mathbb{N} \longrightarrow A : f$  е биекция.

изброимост на  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

(диагонален метод на Кантор)

**4.11 Теорема на Кантор**

$\forall A : \neg \exists f : A \longrightarrow 2^A : f$  е биекция.

неизброимост на  $2^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}$



## 4.12 Примери за биекции

4.12.1  $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 

- чрез 2 инекции

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
 \forall n \in \mathbb{N} : f(n) &= (n, 0) \\
 \implies |\mathbb{N}| &\leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \\
 g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\
 \forall m, n \in \mathbb{N} : g(m, n) &= 2^m 3^n \\
 \implies |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| &\leq |\mathbb{N}|
 \end{aligned}$$

- чрез "обхождане" на  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\
 \forall i(\text{ред}), j(\text{стълб}) \in \mathbb{N} : f(i, j) &= \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j
 \end{aligned}$$

- алгебрична биекция

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\
 \forall i, j \in \mathbb{N} : f(i, j) &= 2^i(2j+1) - 1
 \end{aligned}$$

4.12.2  $\mathbb{R} \sim (0, 1)$ 

- тригонометрична биекция

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R} &\rightarrow (0, 1) \\
 f(x) &= \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

- експоненциална функция

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R} &\rightarrow (0, 1) \\
 f(x) &= \frac{1}{1 + e^x}
 \end{aligned}$$

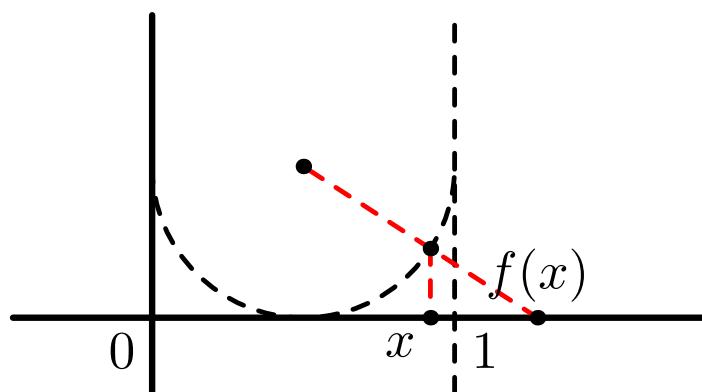
- рационална функция

$$\begin{aligned}
 f : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 f(x) &= \frac{ax + b}{x(x-1)} \\
 \text{where } a, b \in \mathbb{R}, ab < 0, |a| > |b|
 \end{aligned}$$

- геометрична биекция

$$\begin{aligned}
 f : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 f(x) &= \frac{\frac{2x-1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + 1}{2}
 \end{aligned}$$

Геометрична интерпретация:



неизброимост на  $2^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (защо?),  $\mathbb{C}$

#### 4.13 Задачи за биекции

1. Да се докаже, че множеството на булевите вектори (крайни редици от  $0, 1$ ) е изброимо.

Да се докаже, че множеството на думите над азбуката  $\{a, b\}$  е изброимо. (същата задача?)

2. Да се докаже, че множеството на крайните редици от естествени числа са изброимо много.

(да се направи сравнение между  $2^{\mathbb{N}}$  и  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^i$ )

##### 4.13.1 Обединение на изброими множества е изброимо

Да се докаже, че  $A$  и  $B$  са изброими множества, то  $A \cup B$  е изброимо.

## 5 Комбинаторика

### 5.1 Теория и примери

Принципи на събирането и умножението

Не се използват в теретичния си вид; описват броят начини събития да се случат в зависимост от зависимостта между тях.

#### 1. на събирането

Нека  $R = \{S_i | i \in I\}$  е разбиване на .

Тогава  $|A| = \sum_{i \in I} |S_i|$ .

#### 2. на умножението

Нека  $|X| = n, |Y| = m$ . Тогава  $|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = nm$ .

Основни комбинаторни конфигурации (колко варианта има с/без наредба и с/без повторение (принцип на умножението :) ):

#### 1. с наредба и без повторение

броят на наредените  $k$ -орки без повторение от  $n$ -елементно множество  
начините да изберем и подредим  $k$  души от  $n$  в редица

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

при  $k = n : V_n^n = P_n = n!$  - пермутация

#### 2. с наредба и с повторение

броят на функциите  $I_k \longrightarrow I_n$

по колко начина можем да си купим  $k$ -неща измежду асортимент от  $n$ .

$$n^k$$

#### 3. без наредба и без повторение

вариация  
пермутация

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k} - \text{биномен коефициент}$$

Да се докаже, че  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ .

Комбинаторно доказателство (чак след доказване на връзката с подмножествата) и алгебрично.

Идея за рекурсивна дефиниция на биномния коефициент чрез свойството.

Триъгълник на Паскал.

броят на  $k$ -елементните подмножества на  $n$ -елементно множество (да се докаже с индукция след доказване на основното свойство).

търждества с биномни коефициенти

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Да се докаже, че  $|2^A| = 2^{|A|}$  (комбинаторно с използване на горното твърдение).

4. без наредба и с повторение

броят на начините да приберем  $k$  еднакви топчета в  $n$  чекмеджета

броят на решенията на  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n; \forall i \in I_k : x_i \geq 0$

$$S_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

броят на  $k$ -елементните мултимножества на  $n$ -елементно множество.

## 5.2 Задачи

1. Колко са булевите вектори с дължина  $n$ , които започват с 10 и завършват с 1?
  2. Колко са булевите вектори, които започват и завършват с различна цифра?
  3. Колко са булевите вектори, които съдържат поне 3 единици и поне 2 нули?
  4. Колко са четирицифрените числа  $k$ , за които е изпълнено, че ако  $k$  е печетно, то  $k$  съдържа 0
  5. Дадена е стандартна колода от 52 карти. По колко начина можем да изберем от тях 13, така че сред тях да има:
    - точно 1J
    - поне 1A
    - не по-малко от 2Q
    - точно 3 седмици
    - точно 1 боя, от която няма карти
    - най-много 2♦
    - точно 2A и точно 2♠
    - точно 2A и не повече от 2♥
    - не повече от 2 бои, в които имаме точно 1 карта.
  6. Колко са булевите вектори с  $n$  нули и  $k$  единици, в които няма съседни единици?
- задачи

7. Колко различни думи могат да се получат, като се разместят буквите в думата:

- "релация"
- "конституционен"

(пермутации с повторения)

8. Колко правоъгълника със страни  $\geq 2$  има в шахматна дъска  $8 \times 8$ ?

$$\binom{8}{2}^2 = \frac{\binom{64}{2}}{4} - \frac{2 \cdot 8 \cdot \binom{8}{2}}{2} = 784$$

9. По колко начина могат да седнат:

- $n$  човека на пейка;
- $n$  мъже и  $n$  жени на една пейка, като всяка жена седи до мъже, а всеки мъж седи до жени;
- $n$  човека на кръгла маса;
- $n$  мъже и  $n$  жени на кръгла маса, като всяка жена седи до мъже, а всеки мъж седи до жени;

10. Колко решения в естествени числа имат уравненията:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 \geq 3 \wedge x_3 \geq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7 \wedge x_3 < 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$$

11. Колко идентификатора с дължина  $n$  могат да се съставят в езика Ada? (идентификаторите започват с буква и продължават с буква, цифра или  $\_$ , като  $\_$  не могат да са съседни или в края на идентификатора)

### 5.3 Принцип на Дирихле

формално

Нека  $|A| = n$  и  $|B| = k$ . Тогава

$$n > k \longrightarrow \forall f : A \longrightarrow B : f \text{ не е инекция}$$

контрапозиция води до споменатото НУ за инекция.

**практично**

Представен чрез топки в чекмеджета:

$n$  топки трябва да разположим в  $m$  чекмеджета. Тогава:

- има чекмедже с поне  $\frac{n}{m}$  топки;
- има чекмедже с най-много  $\frac{n}{m}$  топки.

При  $n = m + 1 \implies$  има чекмедже с поне 2 топки.

**5.3.1 Задачи**

- На избори гласуват 100 души за 3 кандидата. Колко най-малко гласове ще стигнат на победителя да спечели?
- На банкет има 3 маси и 4 вида питие, по 10 бутилки от всеки вид. Да се докаже, че има маса, на която има поне по 4 бутилки от 2 различни вида питие.
- Матрица  $2022 \times 2022$  да се попълни с числата  $0, \pm 1$ , така че всички сборове по редове, стълбове и диагонали да са различни.
- Точки с цели координати в равнината са оцветени с 8 различни цвата. Да се докаже, че има 2 едноцветни точки на разстояние по-малко от 3.
- 50 точки са разположени във вътрешността на квадрат със страна 35. Да се докаже, че поне 2 точки са на разстояние по-малко от 8.

**5.4 Нютонів бином**

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Доказателства:

- комбинаторно
- с индукция по  $n$

**5.5 Принцип за включване и изключване**

за две множества:  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

за три множества:  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$$\begin{aligned} \text{обобщен принцип: } \left| \bigcup_{i \in I_k} A_i \right| &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_i \leq k} \left| \bigcap_{p \in I_i} A_{j_p} \right| = \\ &= |A_1| + \dots + |A_k| - (|A_1 \cap A_2| + \dots + |A_{k-1} \cap A_k|) + \dots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| \end{aligned}$$

Доказателства:

- Комбинаторно: използваме  $(1+x)^n = \dots = 0$  при  $x = -1$ ;
- С индукция по  $n$ .

### 5.5.1 Задачи

1. В група студенти всеки знае поне един от езиките Java, C++, Python. Java знаят 15 души, C++ знаят 13, а Python - 10. C++ и Java знаят 5 човека, C++ и Python - 5, Java и Python - 3. Трима души знаят и трите езика. Колко души има в групата?  
( $28 = 15 + 13 + 10 - 5 - 5 - 3 + 3$ )
2. В група от 30 студенти Java знаят 15 души, C++ знаят 13, а Python - 10. C++ и Java знаят 5 човека, C++ и Python - 5, Java и Python - 3. Трима души знаят и трите езика. Колко души не знаят нито един език в групата?  
( $30 = x + 15 + 13 + 10 - 5 - 5 - 3 + 3$ )
3. Нека  $|A| = n$  и  $|B| = m$ . Колко са различните сюрекции  $A \rightarrow B$ ?

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (n-i)^n$$

4. Колко са пермутациите на  $\{1, 2, \dots, n\}$ , такива, че  $\forall i \in I_n : i$  не е на позиция  $i$ ?

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (n-i)!$$

$A_i$  - множеството от пермутациите, в които  $i$  е на позиция  $i$ ;  
Отговорът е  $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}|$ .

5. Колко цели числа между 1 и 10000 съдържат цифрата 7?  
 $A_i$  - множеството от числата, в които 7 е на позиция  $i$ ;  
Броим всички числа без тези, които съдържат 7 на някоя позиция.
6. Колко думи с дължина 5 над азбуката  $\{a, b, c, d, e\}$  имат поне 2 последователни  $a$ -та?  
(2 начина)

$$\begin{aligned} 5^5 - 4^5 - \binom{5}{1} 4^4 - \binom{4}{2} 4^3 - \binom{3}{3} 4^2 = \\ = 4 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 5 + 1 + 1 + 5 - 1 = 421 \end{aligned}$$

7. Колко решения в цели числа има уравнението:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7 \wedge x_3 < 6 \wedge x_4 < 5$$

## 5.6 Комбинаторни доказателства

1. Ако  $|A| = n$ , то  $|2^A| = 2^n$

2.

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

3.

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\},$$

където  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  е броят на разбиванията на  $n$ -елементно множество на  $k$  непразни множества.

## 5.7 Броене на функции

Нека  $|A| = n$ ,  $|B| = m$ . Колко са функциите  $f : A \longrightarrow B$ , които са:

- тотални

$$m^n$$

- частични

$$(1+m)^n$$

- инекции

$$\text{вариация } V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \text{ (при } m < n \text{ няма такива (Дирихле))}$$

- сюрекции

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$



## 6 Рекурсия

### 6.1 The rabbit problem

Задачата се състои в намиране броя на зайците, които ще се получат от една двойка за определен брой месеци при следните условия:

- всяка двойка плодоносни зайци дава прираст два заека на месец;
- новите зайци стават плодоносни на едномесечна възраст;
- зайците не умират никога.

Редицата от двойките за всеки месец е всъщност редицата на Фибоначи.

### 6.2 Рекурентни уравнения

1. Да се намери рекурентна зависимост за начините, по които  $n$  различни предмета могат да се подредят в редица.
2. Да се намери рекурентна зависимост за броя на естествените числа, чийто запис в десетична бройна система има  $n$  цифри, от които нулите са четен брой.
3. Да се намери рекурентна зависимост за броя на естествените числа, чийто запис в десетична бройна система има  $n$  цифри и няма съседни нули.

### 6.3 Хомогенни линейни рекурентни уравнения

От ред  $k$  с постоянни коефициенти:

$$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + \dots + c_k s_{n-k} = 0$$

#### 6.3.1 Алгоритъм за решаване:

- образуваме характеристично уравнение

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_k x_{n-k} = 0$$

$$c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_k = 0$$

- записваме всичките му  $k$  корена в мултимножество

$$M = \{r_1, \dots, r_k\}$$

- ако всички корени са различни, то решението на уравнението е

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \dots + A_n r_k^n,$$

където числата  $A_i$  се определят от началните условия на рекурентното уравнение.

- ако има корен  $r_i$ , който се повтаря  $p$  пъти, то коефициентът пред  $r_i^n$  е

$$(A_{r_i,1} n^{p-1} + A_{r_i,2} n^{p-2} + \dots + A_{r_i,p} n^0)$$

## 6.3.2 Задачи

1. Да се реши рекурентното уравнение:

$$s_n = 7s_{n-1} - 10s_{n-2}, n > 1; s_0 = 0; s_1 = 3$$

2. Колко са думите с дължина  $n$  от азбуката  $\{a, b, c, d, e\}$ , в които няма последователни  $a$ -та?

## 6.4 Нехомогенни линейни рекурентни уравнения

От ред  $k$  с постоянни коефициенти:

$$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + \dots + c_k s_{n-k} = f(n),$$

където  $f$  е от вида:

$$f(n) = Q_1(n)b_1^n + Q_2(n)b_2^n + \dots + Q_m(n)b_m^n$$

Алгоритъм за решаване:

- образуваме характеристично уравнение

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_k x_{n-k} = 0$$

$$c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_k = 0$$

- записваме всичките му  $k$  корена, **както и  $b_1, \dots, b_m$ , съответно по  $(\deg(Q_1)+1), (\deg(Q_2)+1), \dots, (\deg(Q_m)+1)$  пъти** в мултимножество

$$M = \{r_1, \dots, r_k, b_1, \dots, b_1, b_2, \dots, b_2, \dots, b_m, \dots, b_m, \}$$

- ако всички елементи на  $M$  са различни, то решението на уравнението е

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \dots + A_p b_m^n,$$

където числата  $A_i$  се определят от началните условия на рекурентното уравнение.

- ако има елемент  $q$ , който се повтаря  $p$  пъти, то коефициентът пред  $q^n$  е

$$(A_{q,1}n^{p-1} + A_{q,2}n^{p-2} + \dots + A_{q,p}n^0)$$

## 6.4.1 Задачи

1. Задачата за ханойските кули се състои от  $n$  диска, различни по размер един от друг, и 3 стълба. В началото дисковете са подредени на левия стълб, като най-големият е най-отдолу, а най-малкият - отгоре. Целта е кулата да бъде преместена на десния стълб. Може да се мести само по един диск на ход и не може по-голям диск да бъде поставен върху по-малък. Всеки ход е съставен от взимането на горния диск от даден стълб и в поставянето му най-отгоре на друг стълб. С колко най-малко хода може да се реши задачата?

2. Да се реши рекурентното уравнение:

$$s_n - 3s_{n-1} = 2, n > 1; s_1 = 2$$

3. Да се реши рекурентното уравнение:

$$s_n - 2s_{n-1} = 5 \cdot 2^n, n > 0; s_0 = 7$$

4. Да се реши рекурентното уравнение:

$$a_{n+3} = -5a_{n+2} - 8a_{n+1} - 4a_n + 2(-1)^n + (-2)^{n+3}$$

5. Колко са булевите вектори с дължина  $n$ , които нямат съседни 0?

6. Да се намери формула за  $\sum_{i=0}^n i$ .

7. Да се намери формула за  $\sum_{i=0}^n i^3$ .

8. Да се докаже, че  $(3 + \sqrt{5})^{2022} + (3 - \sqrt{5})^{2022} \in \mathbb{Z}$ .

## 7 Графи

### 7.1 Дефиниции

- Граф наричаме наредена двойка  $G(V, E)$ , където  $V$  е множество на върховете (работим с краен брой), а  $E \subseteq V \times V$  - множество на ребрата;
- Ако  $E = \emptyset$  наричаме  $G$  празен граф;
- Ребро от вида  $(v, v) \in E$  наричаме примка;
- $G(V, E)$  е неориентиран граф  $\xleftrightarrow{def}$  е симетрична релация;
- Мултиграф наричаме наредена тройка  $G(V, E, f)$ , където  $V$  е множество на върховете (работим с краен брой),  $E$  е множество, а  $f : E \rightarrow V \times V$  - функция, описваща ребрата;
- (неориентирани графи) Степен на  $v \in V$  наричаме

$$d(v) \stackrel{\text{def}}{=} |\{(v, u) \mid u \in V \wedge (v, u) \in E\}|;$$

- (ориентирани графи) Полустепен на изхода на  $v \in V$  наричаме

$$d^+(v) \stackrel{\text{def}}{=} |\{(v, u) \mid u \in V \wedge (v, u) \in E\}|;$$

- (ориентирани графи) Полустепен на входа на  $v \in V$  наричаме

$$d^-(v) \stackrel{\text{def}}{=} |\{(u, v) \mid u \in V \wedge (u, v) \in E\}|;$$

- Графът  $G(V, E)$  е  $k$ -регулярен  $\xleftrightarrow{def} \forall v \in V : d(v) = k$ ;
- $G(V, E)$  е пълният граф с  $|V| =: n$  върха  $\xleftrightarrow{def} G$  е  $n - 1$  регулярен (игнорираме примките)  
(има ребро между всеки два различни върха);
- $G_1(V_1, E_1)$  е подграф на  $G(V, E)$   $\xleftrightarrow{def} V_1 \subseteq V \wedge E_1 \subseteq E$ ;
- $G'(V', E')$  е клика в  $G(V, E)$   $\xleftrightarrow{def} G'$  е подграф на  $G$   $\wedge G'$  е пълен граф;
- $G'(V', E')$  е антиклика в  $G(V, E)$   $\xleftrightarrow{def} G'$  е подграф на  $G$   $\wedge E' = \emptyset$ ;
- $G(V, E)$  е двуделен граф  $\xleftrightarrow{def} \exists V_1, V_2 \subseteq V : V_1 \cup V_2 = V \wedge V_1 \cap V_2 = \emptyset \wedge \forall (u, v) \in E : (u \in V_1 \leftrightarrow v \in V_2)$ ;
- $p$  е път в  $G(V, E)$   $\xleftrightarrow{def} p = (v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_{k-1} e_{k-1} v_k)$ , където  $v_i \in V$  и  $e_i = (v_i, v_{i+1})$ ;
- $p$  е прост път в  $G(V, E)$   $\xleftrightarrow{def} p = (v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_{k-1} e_{k-1} v_k)$  и  $\forall i, j : v_i \neq v_j$  (без повторение на върхове);

- $p$  е цикъл в  $G(V, E) \xleftrightarrow{def} p$  е път в  $G$  и  $v_1 = v_k$ ;
- $p$  е Хамилтонов цикъл  $\xleftrightarrow{def} p$  минава през всички върхове и  $\forall i, j : v_i = v_j \rightarrow i = 1 \wedge j = k$ ;
- $p$  е Ойлеров цикъл  $\xleftrightarrow{def} p$  минава точно веднъж през всяко ребро;
- $G$  е свързан граф  $\xleftrightarrow{def} \forall u, v \in V : \exists p = (u \dots v)$ ;  
(алтернативна дефиниция чрез релация  $\subseteq V \times V$  на достижимост)
- (за ориентирани графи)  $G$  е силно свързан граф  $\xleftrightarrow{def} \forall u, v \in V : \exists p = (u \dots v) \wedge \exists p = (v \dots u)$ ;
- Допълнение на  $G(V, E)$  наричаме графа  $\overline{G}(V, \overline{E})$ ;

## 7.2 Задачи

1. Да се докаже, че  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ .

**Решение:** Всяко ребро е преоброено отляво и отдясно по точно 2 пъти.

2. Да се докаже, че  $\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$ .

**Решение:** Всяко ребро е преоброено отляво и отдясно по точно 1 път.

3. Да се докаже, че върховете от нечетна степен в неориентиран граф са четен брой.

**Решение:** Допускаме, че графът  $G(V, E)$  съдържа нечетен брой върхове от нечетна степен. Тогава:

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) - \text{четно}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) - \text{нечетно}} d(v) \text{ е нечетно число} \\ \implies \text{противоречие}$$

4. The hand-shaking lemma

Нека  $G(V, E)$  е граф с поне два върха. Тогава  $\exists u, v \in V, u \neq v : d(u) = d(v)$ .

5. Нека  $G$  е неориентиран граф, всеки връх на който е от степен  $\geq 2$ . Да се докаже, че в  $G$  има цикъл.

**Решение:** Допускаме, че няма цикли. Нека  $p = x \dots y$  е най-дълъг път.

Ако  $x$  и  $y$  не са инцидентни, то  $\exists e = (x, u) \in E : u \notin p$ . Тогава  $up$  е по-дълъг от  $p \implies$  противоречие  $\implies$  в  $G$  е цикличен.

6. Нека  $G(V, E)$  е граф с  $n$  върха, всеки от които със степен  $d(n) \geq \frac{n-1}{2}$ . Да се докаже, че  $G$  е свързан.

**Решение:**

Допускаме, че  $G$  удовлетворява условията и  $G$  не е свързан.

Нека  $G_1(V_1, E_1)$  е свързана компонента в  $G$ . Тогава  $G_2(V_2, E_2) := G - G_1$  не е празен.

$$|V_1| + |V_2| = n \implies \min(|V_1|, |V_2|) \leq \frac{n}{2}$$

Случай 1:  $|V_1| \leq |V_2|$

$$|V_1| \leq \frac{n}{2} \implies \text{най-високата степен на връх в } G_1 \text{ е } |V_1| - 1 \leq \frac{n-2}{2} < \frac{n-1}{2} \\ \implies \text{противоречие;}$$

Аналогично за Случай 2.  $\implies G$  е свързан.

7. Да се докаже, че

$$G(V, E) \text{ е свързан} \implies |E| \geq |V| - 1$$

**Доказателство:**

С индукция по  $|V|$ :

- $|V| = 2 \implies |E| = 1 \implies$  вярно е за 2
- Допускаме, че твърдението е вярно за  $|V| = n$ .
- Нека  $|V| = n + 1$  Допускаме, че  $|E| < |V| - 1 = n$  Допускаме, че  $\forall v \in V : d(v) \geq 2$ . Тогава  $\sum_{v \in V} d(v) \geq 2n + 2 > 2n > 2|E| \implies$  противоречие.  
 $\implies \exists v \in V : d(v) = 1$  (свързаността на  $G$  не позволява степен 0)

$$\text{Знаем, че } G - v \text{ е свързан и } |V \setminus \{v\}| = n \xrightarrow{\text{(от хипотезата)}} |E| - 1 \geq |V \setminus \{v\}| - 1 = |V| - 2 \\ \implies |E| \geq |V| - 1$$

8. Да се докаже, че  $G$  не е свързан  $\implies \overline{G}$  е свързан.

**Решение:**

Разглеждаме произволните върхове  $u, v \in V$ .

- $u$  и  $v$  са в различни свързани компоненти  
 $\implies (u, v) \notin E \implies (u, v) \in \overline{E} \implies$  има път от  $u$  до  $v$  в  $\overline{G}$ ;
- $u$  и  $v$  са в една свързана компонента  
 Тогава  $\exists x \in V$ , такова че  $x$  е в друга свързана компонента  $\implies (u, x) \notin E \wedge (v, x) \notin E \implies (u, x) \in \overline{E} \wedge (v, x) \in \overline{E} \implies p = u x v$  е път от  $u$  до  $v$  в  $\overline{G}$ .  
 $\implies$  има път между всеки два върха в  $\overline{G} \implies \overline{G}$  е свързан.

9. Да се докаже, че ако в граф има точно 2 върха с нечетна степен, то има път между тях.

10. Да се докаже, че всеки 2 най-дълги пътя в свързан граф имат общ връх.
11. Нека  $G(V, E)$  е граф с поне 6 върха. Тогава в  $G$  има 3-клика или 3-антиклика.

**Решение:**

Разглеждаме графа  $G' = G + \overline{G} = K_{|V|}$ , в който ребрата от  $G$  са оцветени в синьо, а ребрата от  $\overline{G}$  са оцветени в червено. Нека  $v, x, y, z \in V$ . В графа  $G' : d(v) \geq 5 \implies$  има поне 3 едноцветни ребра. БОО нека това са ребрата към  $x, y, z$  и те са сини. Разглеждаме следните 2 случая:

- някое от ребрата  $(x, y), (y, z), (x, z)$  е синьо. Нека БОО  $(x, y)$  е синьо. Тогава  $v, x, y$  образуват клика в  $G$ ;
- никое от ребрата  $(x, y), (y, z), (x, z)$  не е синьо  $\implies$  те са червени. Тогава  $x, y, z$  образуват клика в  $\overline{G} \implies$  образуват антиклика в  $G$ .

12. Нека  $G(V, E)$  е несвързан граф. Колко най-много ребра има  $G$ ?

**Решение:**

Нека  $G(V, E)$  има 2 свързани компоненти съответно с  $k$  и  $n - k$  върхове. Тогава  $G$  има най-много

$$f(k) = \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{1}{2}(2k^2 - 2nk + n^2 - n)$$

функция на  $k$ , която достига максимум при  $k = 1$  (или  $k = n - 1$ ):

$$f(1) = f(n-1) = \binom{n-1}{2}$$

### 7.3 Обхождане на графи

#### 7.3.1 BFS (в широчина) (опашка (FIFO))

Записваме началния връх в опашката.

Доката опашката не е празна

-махаме първия връх от опашката

-ако не е обходен, добавяме в опашката всички върхове, инцидентни с него, и го добавяме в списъка с обходените.

#### 7.3.2 DFS (в широчина) (стек (LIFO))

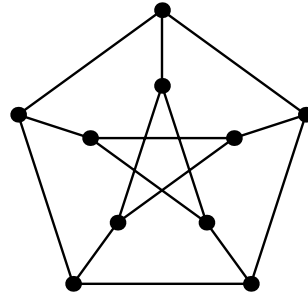
Записваме началния връх в стека.

Доката стекът не е празен

-махаме първия връх от стека

-ако не е обходен, добавяме в стека всички върхове, инцидентни с него, и го добавяме в списъка с обходените.

## 7.4 граф на Петерсен



1. няма цикли с дължина  $< 5$
2. не е планарен
3. не е Хамилтонов

**Доказателство:**

Допускаме, че графът на Петерсен има Хамилтонов цикъл с дължина 10.

Допускаме, че всеки връх е свързан със срещуположния му в цикъла

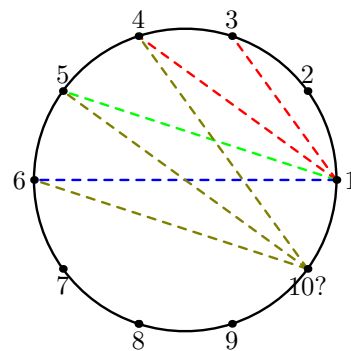
$\implies 1 - 6 - 5 - 10 - 1$  е цикъл с дължина 4  $\implies$  противоречие.

Нека БОО 1 не е свързан с 6  $\implies$  е свързан с 5 (иначе има цикъл с дължина  $\leq 5$ )

Сега 10 не може да бъде свързан с друг връх,

понеже ще се получи цикъл с дължина  $\leq 5$ .

$\implies$  противоречие.



4. има Хамилтонов път



## 8 Дървета

### 8.1 Дефиниция за дърво

$T(V, E)$  е дърво  $\stackrel{def}{\iff} T$  е свързан ацикличен граф

$T(V, E)$  е гора  $\stackrel{def}{\iff} T$  е ацикличен граф

### 8.2 Задачи

1. Да се докаже, че  $G(V, E)$  е дърво и  $|V| \geq 2 \implies \exists u, v \in V : d(u) = d(v) = 1$
2. Нека  $G(V, E)$  е свързан граф. Нека  $c$  е цикъл в  $G$  и нека  $e$  е ребро от  $c$ . Тогава  $G - e$  е свързан.
3. Даден е графът  $G(V, E)$ ,  $|V| =: n, n \geq 2$ .  
Да се докаже, че следните твърдения са еквивалентни:
  - (а)  $G$  е дърво;
  - (б)  $G$  е свързан с  $n - 1$  ребра;
  - (в)  $G$  е свързан, но при премахване на произволно ребро се получава несвързан граф;
  - (г) Всяка двойка върхове е свързана с точно 1 прост път
  - (д)  $G$  няма цикли, но при добавяне на ребро между произволни 2 върха се получава цикъл.
 (свързан граф от еквивалентности (рекурсия :))
4. Нека  $G(V, E)$ ,  $|V| = 2n$  е такъв, че  $n$  от върховете са от степен поне 3. Да се докаже, че в  $G$  има цикъл.
5. Нека  $T(V, E)$  е свързан граф. Да се докаже, че
 
$$G \text{ е дърво } \implies \forall v \in V : d(v) \geq 2 \rightarrow v \text{ е срязващ връх}$$
6. Да се докаже, че ако в граф с  $n$  върха има  $n - 1$  висящи върха, то графът е или дърво, или не е свързан.

## 9 Покриващи дървета

### 9.1 MST

Даден е графът  $G(V, E)$ .

$T(V, E')$  е покриващо дърво на  $G \xleftrightarrow{def} T$  е дърво и  $E' \subseteq E$ .

#### 9.1.1 Дефиниция

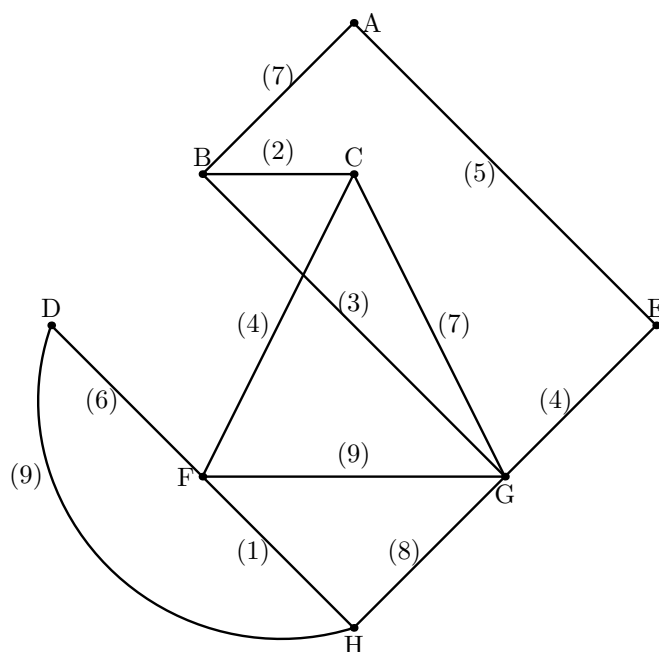
Нека е дадена теглова функция  $\omega : E \rightarrow \mathbb{N}$ .

$T(V, E')$  е минимално покриващо дърво (MST) на  $G \xleftrightarrow{def} T$  е покриващо дърво на  $G$  и за всяко покриващо дърво  $T' = (V, E_0)$  е изпълнено:

$$\sum_{e \in E'} c(e) \leq \sum_{e \in E_0} c(e)$$

#### 9.1.2 Алгоритми

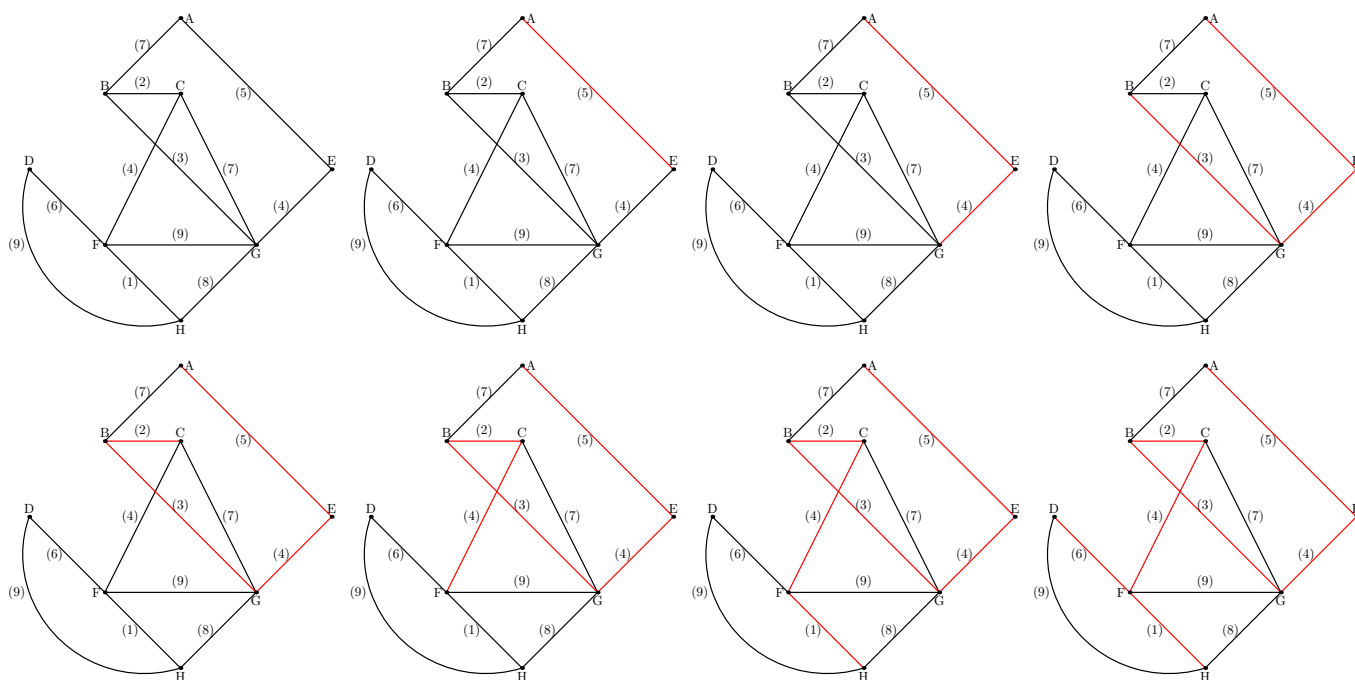
$G(V, E), \omega : E \rightarrow \mathbb{N} :$



#### 9.1.3 Prim

#### Визуализация на MST Prim algorithm

Добавяме най-лекото ребро с начало обходен връх и край необходим. Обявяваме необходимостта за обходен.

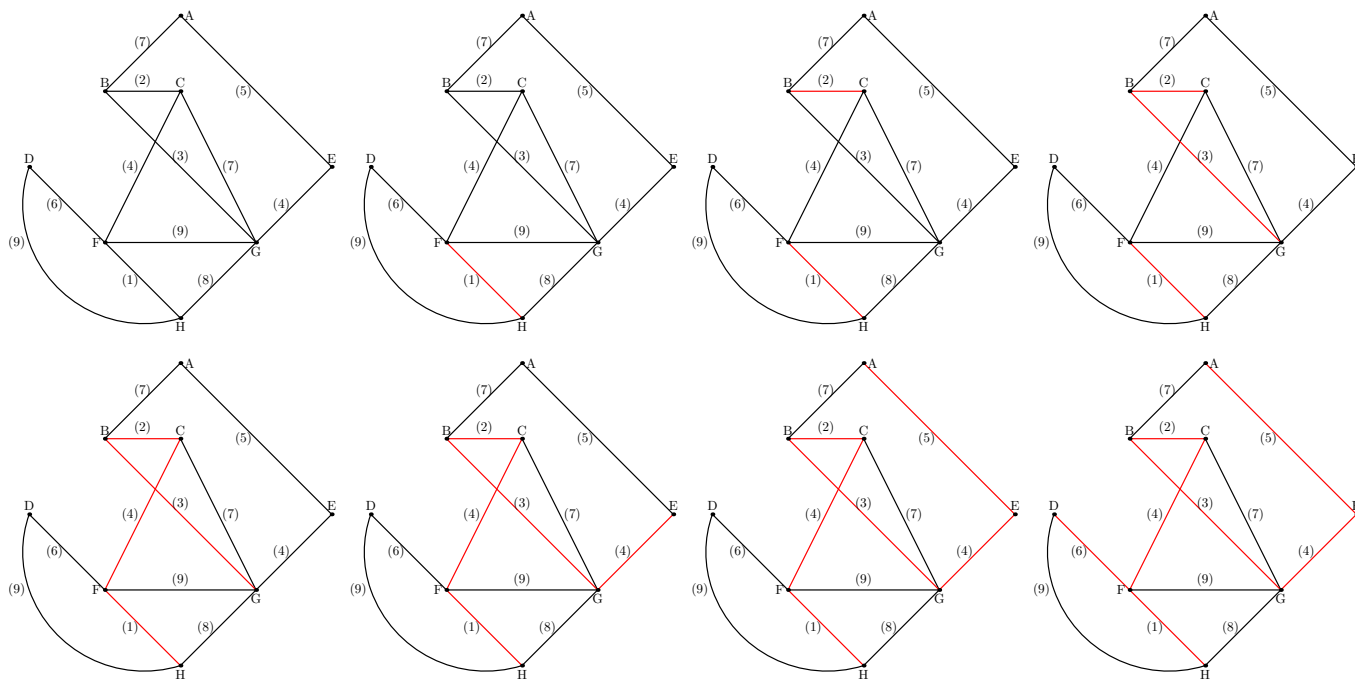


(върхът А е начален)

#### 9.1.4 Kruskal

#### Визуализация на MST Kruskal algorithm

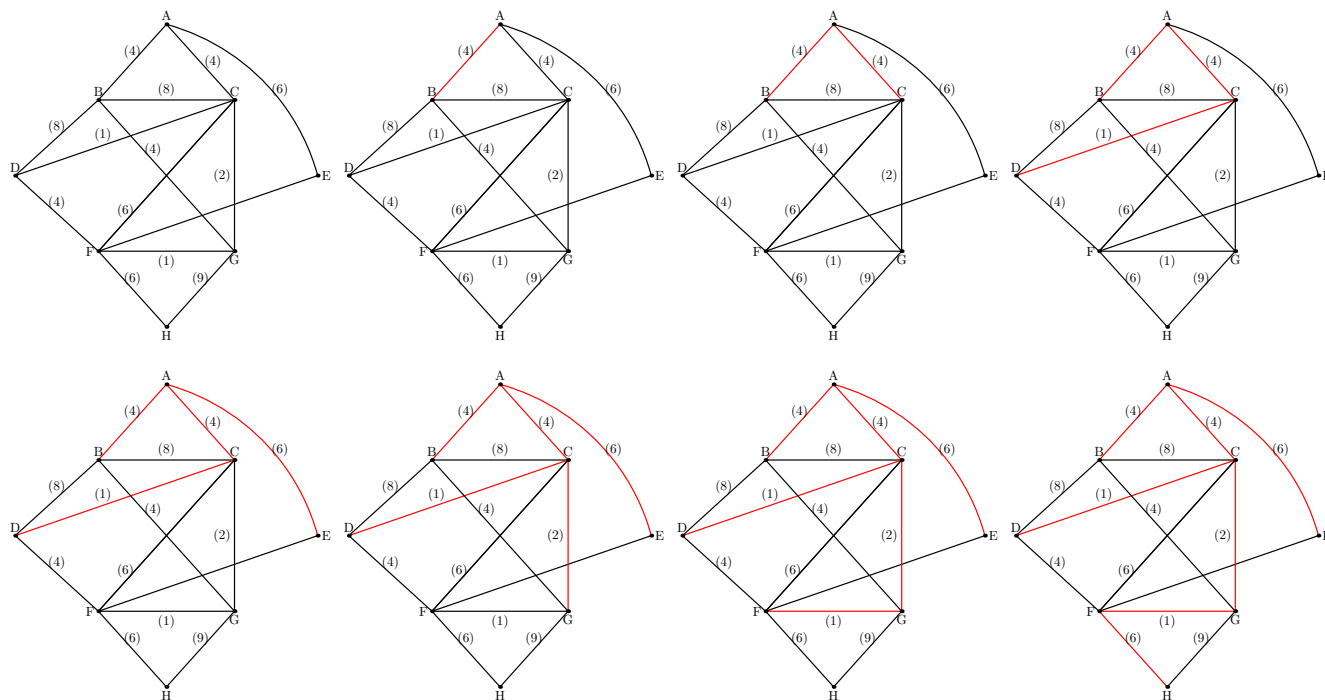
Сортираме ребрата според теглото им във възходящ ред и добавяме най-лекото ребро, необразуващо цикъл.



#### 9.1.5 Dijkstra

#### Визуализация на MST Dijkstra algorithm

Последователно строи най-късите пътища от началния връх до останалите.



(върхът А е начален)

1	A	0					
2	B	$\infty$	4				
3	C	$\infty$	4				
4	D	$\infty$	<del>12</del>	5			
5	E	$\infty$	6				
7	F	$\infty$	<del>10</del>	<del>9</del>	<del>8</del>	7	
6	G	$\infty$	<del>8</del>	6			
8	H	$\infty$	<del>15</del>	13			

## 10 Хиперкуб

### 10.1 Дефиниция

$n$ -мерният хиперкуб е графът

$$B_n(V, E)$$

$$V = \mathbb{J}_2^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{J}_2\}$$

$$E = \left\{ (\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) \mid \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| = 1 \right\}$$

наредба на върховете:  $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \iff \forall i : \alpha_i \leq \beta_i$

- $n$ -регулярен
- $|V| = 2^n$
- $|E| = \frac{\sum_{\tilde{\alpha}^n \in V} d(v)}{2} = \frac{2^n n}{2} = 2^{n-1} n$
- $B_n$  е двуделен

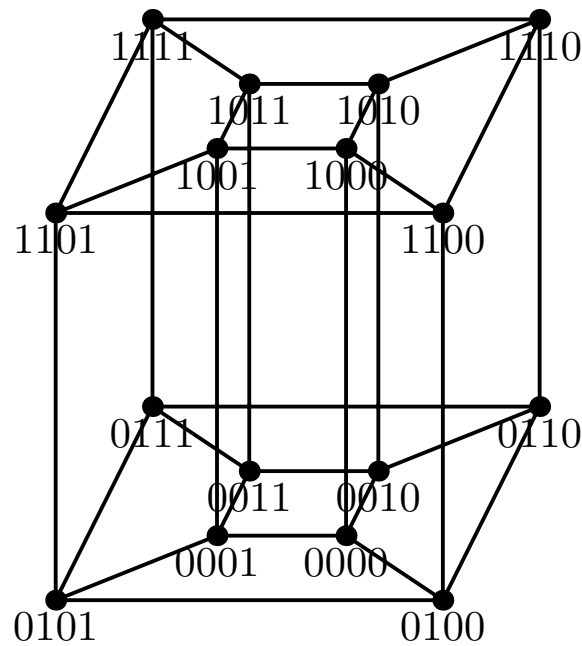
$$V_1 = \left\{ \alpha \mid \alpha \in \mathbb{J}_2^n \wedge \sum_{i=1}^n \alpha_i \equiv 0 \pmod{2} \right\} \quad V_2 = \left\{ \alpha \mid \alpha \in \mathbb{J}_2^n \wedge \sum_{i=1}^n \alpha_i \equiv 1 \pmod{2} \right\}$$

### 10.2 Задачи

1. Колко са различните максимални вериги в  $B_n$ ? (верига е последователност от върхове  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$ , такива че  $\forall i : \tilde{\alpha}_i \preceq \tilde{\alpha}_{i+1}$ )
2. Да се намери броя на върховете в максимална антиклика на  $B_n$ .  
( $2^{n-1}$ )
3. Да се докаже, че  $B_n$  е хамилтонов за  $n \geq 2$ .
4. Да се докаже, че  $B_n$  не е планарен за  $n \geq 4$ .

**Решение:**

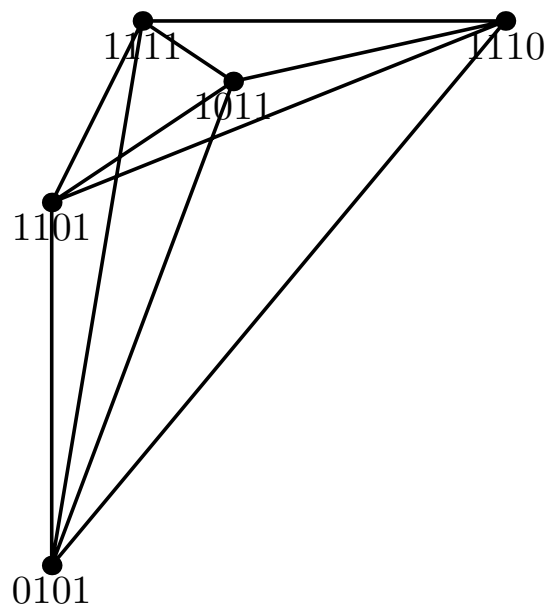
$$\forall n \geq 4 : B_4 \text{ е подграф на } B_n.$$



След прилагане на следните премахвания:

- (а) премахваме 1000;
- (б) премахваме 0100;
- (в) премахваме 1100 и добавяме (1110, 1101);
- (г) премахваме 0000;
- (д) премахваме 0001;
- (е) премахваме 1001 и добавяме (1101, 1011);
- (ж) премахваме 1010 и добавяме (1110, 1011);
- (з) премахваме 0101 и добавяме (0111, 1101);
- (и) премахваме 0110 и добавяме (0111, 1110);
- (к) премахваме 0011 и добавяме (0111, 1011);

Получаваме графът  $K_5$  :



## 11 Булеви функции

Работим с (тотални) функции  $f : \mathbb{J}_2^n \rightarrow \mathbb{J}_2$

$$\mathbb{F}_2^n = \{f | f : \mathbb{J}_2^n \rightarrow \mathbb{J}_2\}$$

### 11.1 Задачи

- Да се намери броя на булевите функции на  $n$  променливи, които зависят от всичките си аргументи.
- Да се намери броя на булевите функции на  $n$  променливи, за които:
  1. върху  $k$  вектора стойността на функцията е фиксирана, а върху останалите е произволна;
  2. върху точно  $k$  аргумента има стойност 0, а върху останалите е 1.
- Да се намери броя на булевите функции на  $n$  променливи, за които  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, \dots, x_n)$ .

### 11.2 СДНФ

#### 11.2.1 Теорема на Бул

Множеството  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  е пълно.

От  $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) \implies \{\neg, \vee\}$  е пълно. Аналогично и  $\{\neg, \wedge\}$  е пълно.

### 11.3 МДНФ

#### 11.3.1 Алгоритъм за намиране

1. Опростиране на конюнкти от СДНФ (различаващи се по една променлива)
2. Определяне на минималния брой необходими опростени конюнкти

#### 11.3.2 Покритие на аргументите с образ 1

Всеки конюнкт "покрива" (имплицира; истинността му гарантира истинността на функцията) определени вектори. Задачата за МДНФ се свежда до търсене на покритие<sup>1</sup> на всички вектори, за които стойността на функцията е 1.

1. дефинираме  $q_i$  - конюнктът с етикет  $i \in I$  (най-удобно с числови индекси) участва във формула;
2. образуваме конюнкция на дизюнкции на конюнктите, покриващи всеки ред:

$$\bigwedge_{\tilde{\alpha} \in \{\tilde{\beta} | f(\tilde{\beta})=1\}} \left( \bigvee_{i \in I \wedge \text{конюнкт } i \text{ покрива } \tilde{\alpha}} q_i \right)$$

<sup>1</sup> виж 1.4.7

3. след опростяване вземаме конюнктите с най-малка дължина.

Пример:  $f = (0110110001011001)$

$x$	$y$	$z$	$w$	$f$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Опростените конюнкти са  $xzw(1), \overline{x}zw(2), \overline{y}zw(3), y\overline{z}w(4), \overline{x}y\overline{z}(5), x\overline{y}w(6), \overline{x}y\overline{z}w(7)$ .

Кои покриват в този ред 0001, 0010, 0100, 0101, 1001, 1011, 1100, 1111:

$$\begin{aligned}
 & (q_2 \vee q_3) \wedge (q_7) \wedge (q_4 \vee q_5) \wedge (q_2 \vee q_5) \wedge (q_3 \vee q_6) \wedge (q_1 \vee q_6) \wedge (q_4) \wedge (q_1) = \\
 & = q_1q_4q_7 \vee ((q_2 \vee q_3) \wedge (q_4 \vee q_5) \wedge (q_3 \vee q_6) \wedge (q_1 \vee q_6) \wedge (q_2 \vee q_5)) = \\
 & = (q_1q_4q_7 \vee (q_2 \vee q_5)) \wedge ((q_2q_4 \vee q_2q_5 \vee q_3q_4 \vee q_3q_5) \wedge (q_3q_1 \vee q_3q_6 \vee q_6q_1 \vee q_6)) = \\
 & = (q_1q_2q_4q_7q_2q_4 \vee q_1q_2q_4q_7q_2q_5 \vee q_1q_2q_4q_7q_3q_4 \vee q_1q_2q_4q_7q_3q_5) \wedge (q_3q_1 \vee q_3q_6 \vee q_6q_1 \vee q_6) \wedge \\
 & \wedge (q_1q_5q_4q_7q_2q_4 \vee q_1q_2q_4q_7q_2q_5 \vee q_1q_2q_4q_7q_3q_4 \vee q_1q_2q_4q_7q_3q_5) \wedge (q_3q_1 \vee q_3q_6 \vee q_6q_1 \vee q_6) = \\
 & = \underline{q_1q_2q_3q_4q_7} \vee \dots \vee \underline{q_1q_2q_4q_6q_7} \vee \dots \vee \underline{q_1q_3q_4q_5q_7}
 \end{aligned}$$

$\implies$  МДНФ се определят от  $q_1q_2q_3q_4q_7$ ,  $q_1q_2q_4q_6q_7$  и  $q_1q_3q_4q_5q_7$

$\implies$  МДНФ са

$$xzw \vee \overline{x}zw \vee \overline{y}zw \vee y\overline{z}w \vee \overline{x}y\overline{z}w$$

$$xzw \vee \overline{x}zw \vee y\overline{z}w \vee x\overline{y}w \vee \overline{x}y\overline{z}w$$

$$xzw \vee \overline{y}zw \vee y\overline{z}w \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z}w$$



## 11.4 Полином на Жегалкин

Полином на Жегалкин наричаме формула от вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq n} a_i x_i \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j \oplus \dots \oplus a_{12\dots n} x_1 x_2 \dots x_n$$

### 11.4.1 определяне

1. начин:

заместване на  $\vee$  с  $\oplus$  и  $\neg x$  с  $1 \oplus x$  в СДНФ; опростяване до получване на ПЖ;

2. начин:

конструиране на система линейни уравнения по общия вид на ПЖ чрез заместване с всеки възможен аргумент.

### 11.4.2 Теорема на Жегалкин

Всяка булева функция може да се представи по единствен начин чрез полином на Жегалкин.

(еднакъв брой и сюрекция от полиномите към функциите (заради пълнотата на  $\{1, \oplus, \wedge\}$ ))

## 11.5 Критерий на Пост-Яблонски

Множеството  $F$  е пълно  $\iff F \not\subseteq T_0 \wedge F \not\subseteq T_1 \wedge F \not\subseteq M \wedge F \not\subseteq L \wedge F \not\subseteq S$

## 11.6 Шеферови функции

### 11.6.1 Шеферова функция

$f$  е Шеферова функция  $\stackrel{def}{\iff} \{f\}$  е пълно.

## 11.7 Задачи

- Да се намерят СДНФ, МДНФ и полином на Жегалкин на функциите:

–  $f = (1010)$

–  $f = (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow z) \oplus xz \oplus 1)$

–  $f = (01101010)$

–  $f = (11011011)$

- Пълно ли е множеството:

–  $\{1, \wedge, \oplus\}$

–  $\{x \rightarrow y, x \oplus y\}$

–  $\{f_1 = (10000001), f_2 = (0110), f_3 = (00110111)\}$

- $\{\bar{x}, 1, x(y \leftrightarrow z) \oplus \bar{x}(y \oplus z)\}$
- $\{xy \oplus z, x \oplus y \oplus 1, \bar{x}\}$

• Намерете броя на  $n$ -местните булеви функции, които са от:

- $L$
- $L \cap T_0$
- $L \cap T_1$
- $L \cap S$

### 11.7.1 критерий

$f$  е Шеферова функция  $\iff f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$ .

**Доказателство:**

$\Rightarrow$  Следва от критерия на Пост-Яблонски

$\Leftarrow$  Нека  $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$ .

$$\implies f(0, \dots, 0) = 1 \wedge f(1, \dots, 1) = 0 \implies f \notin M$$

Допускаме, че  $f \in L \implies f = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \dots \oplus a_nx_n$

$$f(0, \dots, 0) = 1 = a_0$$

$$f(1, \dots, 1) = 0 = a_0 \oplus a_1 \oplus \dots \oplus a_n$$

$$\bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 1 \oplus a_0 \oplus a_1(1 \oplus x_1) \oplus \dots \oplus a_n(1 \oplus x_n)$$

$$\bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 1 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n \oplus a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \dots \oplus a_nx_n$$

$$\bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0 \oplus a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \dots \oplus a_nx_n = f(x_1, \dots, x_n) \implies f \in S \implies \text{противоречие}$$

$$\implies f \notin L \implies f \text{ е Шеферова.}$$

Следствие:  $M \cup L \subseteq T_0 \cup T_1 \cup S$

to be continued...