



Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

ТЕМА ЗА ПРОЕКТ

към курс „Функционално програмиране“
за специалности Информатика, Компютърни науки (1 поток)
и избираема дисциплина
зимен семестър 2022/2023 г.

Извод на типове

Synopsis: Имплементирайте система за извеждане на типове в ламбда смятането.

Ламбда смятането (lambda calculus) е формална система в математическата логика, която описва изчисленията само на базата на абстракция (построяване) на функции и апликация (прилагане) на функции върху променливи и/или други функции чрез замяна на свързани променливи. Термовете (изразите) в ламбда смятането се построяват по следните правила:

- ако x е променлива, то x е терм. Приемаме, че разполагаме с изброимо безкраен списък с променливи.
- ако M и N са термове, то (MN) е терм, получен от прилагането на терма M над N . Прилагането е ляво асоциативна операция и когато пишем MNP , ще подразбираме $((MN)P)$.
- ако M е терм, а x е променлива, то $\lambda x.M$ е терм, получен като построяване на функция с аргумент x и тяло M . За удобство вместо $\lambda x.\lambda y....$ можем да пишем $\lambda xy....$

Примери за ламбда термове: $\lambda x.x$, $\lambda x.y$, $\lambda xy.x$, $\lambda fx.f(fx)$, $\lambda xyz.xz(yz)$

Едно от свойствата, които даден терм може да има, е тип. Типовете се построяват по следните правила:

- ако α е типова променлива, то α е тип
- ако σ и τ са типове, то $\sigma \rightarrow \tau$ е тип на функция, приемаща аргумент от тип σ и връщаща резултат от тип τ . Операцията \rightarrow е дясноасоциативна и когато пишем $\rho \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$, ще подразбираме $(\rho \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau))$.

Примери за типове: $\alpha \rightarrow \alpha$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$, $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$

Важно свойство на типовете, които разглеждаме е, че те са *крайни*, правещи невъзможно съществуването на безкраен тип от рода на $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \dots$. За целите на този проект можем да считаме, че няма и безкрайни ламбда термове.

Ще обозначаваме твърдението “термът M има тип τ ” с $M:\tau$. За да определим типа на даден терм, първо е необходимо да направим някакви допускания за типовете на променливите, които участват в него. При различни допускания за променливите е възможно да се получи различен тип на терма. Затова ще разглеждаме твърдения от вида “при допускания Γ термът M има тип τ ”, където Γ е множество от допускания от вида $M:\tau$. Така можем да определим типа на произволен термов чрез следните правила

- ако $M:\sigma \rightarrow \tau$ и $N:\sigma$ при едни и същи допускания Γ , то $(MN):\tau$ при същите допускания Γ
- ако $M:\tau$ при допускания Γ , сред които присъства и $x:\sigma$, то $(\lambda x.M):\sigma \rightarrow \tau$ при допускания Γ с премахнато вече използваното допускане $x:\sigma$.

Примери: $xy:\tau$ при допускания $x:\sigma \rightarrow \tau$ и $y:\sigma$, $\lambda x.xy:(\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \tau$ при допускане $y:\sigma$, $\lambda xy.xy:\sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \tau$ без използването на допускания.

Целта на този проект е по даден ламбда терм, например $\lambda xy.x(xy)$ или $\lambda xyz.xz(yz)$, да се изведе неговия тип (ако има такъв) чрез типов извод. Извеждането на тип се получава по следната стратегия:

- за да намерим типа τ на терм от вида (MN) , трябва първо да намерим такъв тип σ , такъв че $M:\sigma \rightarrow \tau$ и $N:\sigma$
- за да намерим типа на терм от вида $(\lambda x.M)$, можем да допуснем, че $x:\sigma$ за някой неизползван до момент тип σ и след това да потърсим типа на тялото M с добавеното ново допускане, че $x:\sigma$. Ако в процеса на търсене определим, че $M:\tau$, то ще знаем, че $(\lambda x.M):\sigma \rightarrow \tau$.
- в дъното на рекурсивното търсене ще ни се наложи да потърсим типа на променлива x ; този тип можем да определим като погледнем в натрупаните допускания за предположение от вида $x:\sigma$.

Пример: За да намерим типа на терма $\lambda xy.x(xy)$:

- допускаме, че $y:\sigma$
- за да намерим типа на терма $\lambda x.xy$:
 - допускаме, че $x:\rho$
 - за да намерим типа на терма xy :
 - търсим типа на терма y
 - но по допускане имаме $y:\sigma$
 - търсим типа на терма x от вида $\sigma \rightarrow \tau$
 - но по допускане имаме $x:\rho$

- полагаме $\rho := \sigma \rightarrow \tau$
- така получаваме $x : \sigma \rightarrow \tau$
 - така получаваме $xy : \tau$
 - така получаваме $\lambda x. xy : \rho \rightarrow \tau$
 - но $\rho = \sigma \rightarrow \tau$
 - затова получаваме $\lambda x. xy : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \tau$
- така получаваме, че $\lambda xy. xy : \sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \tau$

Примерно описание на идеята за типов извод и основните дефиниции в ламбда смятане можете да намерите [тук](#).