Дискретни структури

план на упражненията

КН 1.1, зимен семестър 2023/2024

Калоян Цветков
kaloyants25@gmail.com

ФМИ, СУ
2.0

Ресурси (теория и задачи) по Дискретни структури

- теория
- задачи
- теория + задачи

- сайт на Скелета (задачи от минали години)
- записки на Мария Соскова
- записки на Ангел Димитриев
- лични записки (по упражненията)

Съдържание

1 Въведение **4**
- 1.1 Съждения . . . 4
- 1.2 Логически операции . . . 4
- 1.3 Квантори . . . 6
  - 1.3.1 За всеобщност - $\forall$ . . . 6
  - 1.3.2 За екзистенциалност - $\exists$ . . . 6
- 1.4 Множества и операции над тях . . . 7
  - 1.4.1 Множества . . . 7
  - 1.4.2 Дефиниране на множества . . . 7
  - 1.4.3 Операции над множества . . . 7
  - 1.4.4 мултимножество . . . 10
  - 1.4.5 разбиване . . . 10
  - 1.4.6 покритие . . . 10
  - 1.4.7 разкрояване . . . 10

2 Индукция **11**
- 2.1 Стандартна индукция . . . 11
- 2.2 Силна индукция . . . 11

3 Релации **12**
- 3.1 Наредена двойка . . . 12
- 3.2 Декартово произведение . . . 12
- 3.3 Релация . . . 12
- 3.4 Домейн и кодомейн . . . 12
- 3.5 Свойства . . . 12
  - 3.5.1 рефлексивност . . . 12
  - 3.5.2 антирефлексивност . . . 12
  - 3.5.3 симетричност . . . 13
  - 3.5.4 антисиметричност . . . 13
  - 3.5.5 силна антисиметричност . . . 13
  - 3.5.6 транзитивност . . . 13
- 3.6 Интерпретации . . . 13
  - 3.6.1 Матрица . . . 13
  - 3.6.2 Граф (диаграма на Хасе) . . . 13
- 3.7 Релации на еквивалентност . . . 14
  - 3.7.1 Примери с модулна аритметика . . . 14
  - 3.7.2 Модифициране на рел. на екв. . . . 14
  - 3.7.3 Брой рел. на екв. . . . 14
- 3.8 Наредби . . . 15

3.8.1 (Нестрога) частична наредба 15
3.8.2 Строга частична наредба 15
3.8.3 Линейна наредба 15
3.9 Специални елементи 15
3.9.1 Минимален 15
3.9.2 Най-малък 15
3.9.3 Максимален 15
3.9.4 Най-голям 16
3.9.5 Пример: 16
3.10 Затваряне на релации 16
3.10.1 Операции с релации 16
3.10.2 рефлексивно 16
3.10.3 симетрично 16
3.10.4 транзитивно 17

4 Функции/Изброимост **18**
4.1 Свойства 18
4.2 Образ на множество 18
4.3 Композиция 19
4.4 Обратна функция 19

1 Въведение

1.1 Съждения

Изреченията, съдържащи информация, която може да се оцени като вярна и невярна, наричаме **съждения**.
Частта от съждението, която приписва признак, е **предикат**.
Предикатът може да бъде пресметнат като верен или грешен при прилагането му върху **субект**.
Пример:

"Този химикал е син."е вярно/грешно съждение, получено от пресмятането на предиката "X е син."върху субекта "този химикал".

"Съществува просто число с $100,000,000$ цифри"е съждение, но не знаем как да оценим като вярно или грешно все още.

(Най-голямото открито просто число има около $23,000,000$ цифри)[1]

1.2 Логически операции

Дефиниции чрез вектор/таблица от стойности и на интуитивно ниво.

отрицание

$\neg$

p	$\neg p$
0	1
1	0

дизюнкция

$\vee$

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

конюнкция

$\wedge$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

[1] Към датата 27 октомври 2023 г.!

изключващо или

$\oplus$

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

импликация (ако ..., то ...)

$\rightarrow$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

биимпликация (еквивалентност)

$\longleftrightarrow$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Свойства:

комутативност

$$p \wedge q = q \wedge p \qquad p \vee q = q \vee p \qquad p \oplus q = q \oplus p$$

асоциативност

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee B) \vee C \qquad p \wedge B) \wedge C) = (p \wedge B) \wedge C$$

дистрибутивност

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (q \vee r) \qquad p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

закон за контапозицията
закони на Де Морган

Нека p, q, r, s и t са следните съждения:
p: Ще разходя кучето преди обяд.
q: Сутринта ще спортувам.
r: Следобяд ще спортувам.

s: Днес времето е хубаво.
t: Днес влажността на въздуха е ниска.
Напишете логически изрази, съответстващи са следните изречения.
1. Няма да разходя кучето преди обяд.
2. Ще разходя кучето преди обяд и следобяд ще спортувам.
3. Днес ще спортувам или сутринта, или следобяд.
4. Днес ще спортувам сутринта или следобяд.
5. Ако днес времето е хубаво, следобяд ще спортувам.
6. Необходимо условие, за да спортувам днес следобяд е, времето да е хубаво.
7. Достатъчно условие, за да спортувам днес е времето да е хубаво и влажността да е ниска.

1.3 Квантори

1.3.1 За всеобщност - $\forall$

$\forall x \in A : P(x)$ - предикатът P се оценява като истина за всеки/за произволен елемент от множеството A.

1.3.2 За екзистенциалност - $\exists$

$\exists x \in A : P(x)$ - предикатът P се оценява като истина за някой (поне 1) от всички елементи на множеството A.

Кванторите са дуални: отрицанието на единия поражда другия.
$\neg \exists x \in A : P(x) \longleftrightarrow \forall x \in A : \neg P(x)$
$\neg \forall x \in A : P(x) \longleftrightarrow \exists x \in A : \neg P(x)$

Задача 1.1. $R(x)$ - *"x е в стая <номер на стая>";*
$C(x)$ - *"x следва КН";*
$F(x, y)$ - *"x е приятел на y";*
Да се изразят твърденията чрез квантори и предикатите R, C, F.
"Някой следва КН."
$\exists x : C(x)$;
"Всеки е приятел на себе си."
$\forall x : F(x, x)$;
"Приятелството и неприятелството са взаимни."
$\forall x : \forall y : F(x, y) \rightarrow F(y, x)$; *(защо* $\longleftrightarrow$ *не е необходимо)*
"Всеки има приятел."
$\forall x : \exists y : F(x, y)$;
"Всички в стая <номер на стая> следват КН."
$\forall x : R(x) \rightarrow C(x)$;
"Всеки в тази стая има приятел от КН, който не е в стаята."
$\forall x : R(x) \rightarrow (\exists y : F(x, y) \wedge C(y) \wedge \neg R(y))$;

"Хората в стаята, които не следват КН, имат приятел в стаята."
$\forall x : R(x) \land \neg C(x) \to \exists y : R(y) \land F(x, y)$

"Да нямаш приятели е достатъчно условие да не следваш КН."
$\forall x : (\forall y : \neg F(x, y)) \to \neg C(x)$. *(контрапозиция?)*

"Двама души са приятели тогава и само тогава, когато имат общ приятел от КН."
$\forall x : \forall y : F(x, y) \longleftrightarrow \exists z : F(x, z) \land F(y, z) \land C(x)$

1.4 Множества и операции над тях

1.4.1 Множества

Множество - няма дефиниция; интуитивно: колекция от неща; всички математически обекти са изградени от множества.

1.4.2 Дефиниране на множества

- чрез изброяване
- чрез предикат
- празно множество: $(\exists \emptyset :) \, \forall x : x \notin \emptyset$.

Дефиниции за равенство на множества, подмножество, строго подмножество.

$$A = B \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x : x \in A \longleftrightarrow x \in B$$

$$A \subseteq B \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x : x \in A \to x \in B$$

$$A \subset B \overset{def}{\longleftrightarrow} A \subseteq B \land A \neq B$$

$$\forall A : \emptyset \subseteq A \land \emptyset \subset A$$

Примери за равни множества (повторението и редът на елементите не е от значение) и подмножества.

$$\{1, 2, \emptyset\} = \{\emptyset, 1, 2\} = \{\emptyset, \emptyset, 1, 2, 1, 1\}$$

$$\{x, 1, y\} \subseteq \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

$$\{x, 1, y\} \subset \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

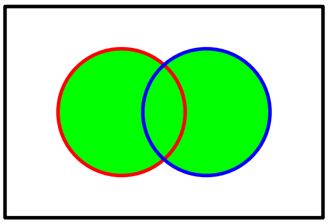
$$\{x, 1, y, z, 5, 2\} \subseteq \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

1.4.3 Операции над множества

таблици (за произволен елемент "смятаме"резултат спрямо предикатите $x \in A$ и $x \in B$) Аналогии с логическите операции.

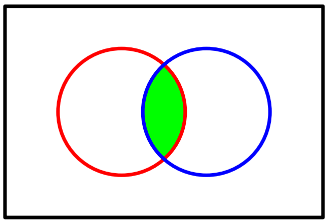
обединение

$$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



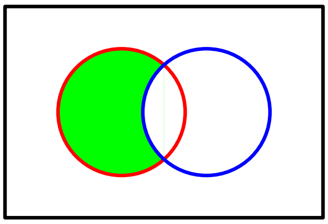
сечение

$$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



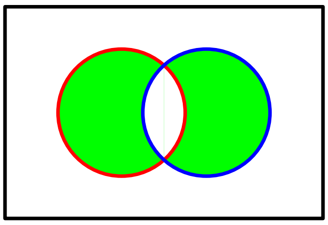
разлика

$$A \backslash B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



симетрична разлика

$$A \Delta B := \{x | x \in A \oplus x \in B\}$$



Доказателтво ,че:

- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	$A \Delta B$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

$$\implies \forall x : x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \leftrightarrow x \in A\Delta B \implies (A \cup B) \setminus (B \cap A) = A\Delta B$$

- $A\Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

A	B	$A\backslash B$	$B\backslash A$	$(A\backslash B) \cup (A\backslash B)$	$A\Delta B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

$$\implies \forall x : x \in (A\backslash B) \cup (A\backslash B) \leftrightarrow x \in A\Delta B \implies (A\backslash B) \cup (A\backslash B) = A\Delta B$$

Допълнение на множество

Универсално множество - съдържа всички разглеждани множества; определя се от контекста.

$$\overline{A} := U\backslash A; \qquad \overline{\overline{A}} = A.$$

Свойства:

- комутативност

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A \qquad A\Delta B = B\Delta A$$

- асоциативност

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$\text{Обединение на няколко множества: } \bigcup_{i \in I} A_i := \{x | \exists i \in I : x \in A_i\}$$

$$\text{Сечение на няколко множества: } \bigcap_{i \in I} A_i := \{x | \forall i \in I : x \in A_i\}$$

- дистрибутивност

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

празно множество

$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A\backslash\emptyset = A$$

закони на Де Морган

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

степенно множество

$$\mathcal{P}(A) = 2^A := \{x | x \subseteq A\}$$

Примери за степенни множества.

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}\{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{1,2\}, 7\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\{\{1,2\}\}, \{7\}, \{\emptyset, \{1,2\}\}, \{\emptyset, 7\}, \{\{1,2\}, 7\}, \{\emptyset, \{1,2\}, 7\}\}$$

Задача 1.2. *Вярно ли е, че*

$$A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C) \text{ (не)}$$
$$(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C) \text{ (да)}$$

1.4.4 мултимножество

Множество, в което броя на повторенията на елементите е от значение.

$$\{1,3,3,2,1\} = \{1,2,3\} \text{ разглеждани като множества}$$
$$\{1,3,3,2,1\} \neq \{1,2,3\} \text{ разглеждани като мултимножества}$$

1.4.5 разбиване

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е разбиване на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i = A$$
$$\forall i, j \in I : i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset$$

$\{S\}$ разбиване ли е на S? (да$\longleftrightarrow S \neq \emptyset$)

1.4.6 покритие

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е покритие на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

1.4.7 разкрояване

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е разкрояване на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A$$
$$\forall i, j \in I : i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset$$

2 Индукция

Плочки домино:

Бутнали сме първата плочка и знаем, че ако падне n-тата ще падне и $n+1$-вата. Тогава ще паднат всички плочки.

2.1 Стандартна индукция

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \to P(n+1))) \to \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

Принцип на индукцията

- Проверяваме верността на твърдението за $n = 0$ $\quad (P(0))$;
- Допускаме, че твърдението е вярно за някое n $\quad (P(n))$;
- Доказваме, че твърдението е вярно и за $n+1$ $\quad (P(n) \to P(n+1))$.
- Тогава $\forall n \geq 0 : P(n)$.

Задача 2.1. *Да се докаже, че* $|2^A| = 2^{|A|}$.

Упътване:. $|A| = n+1 \geq 1 \implies |A \setminus \{a\}| = n \geq 0 \implies |2^{A\setminus\{a\}}| = 2^n$
$\implies$ *Подмножествата на A не съдържащи a са* 2^n. *Подмножествата на A са тези, несъдържащи a, и същите, обединени с* $\{a\} \implies$

$$\mathcal{P}(A) = \{x | x \subseteq A \wedge a \notin x\} \cup \{x | x \subseteq A \wedge a \in x\}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{x | x \subseteq A \wedge a \notin x\}| + |\{x | x \subseteq A \wedge a \in x\}| \textit{ (since they have no intersection)}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A \setminus \{a\})| + |\{x | x \in \mathcal{P}(A \setminus \{a\}) \wedge a \in x\}|$$

те са $2.2^n = 2^{n+1}$.

Обобщен принцип на индукцията

$$P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0 : (P(n) \to P(n+1))) \to \forall n \geq n_0 : P(n)$$

- Проверяваме верността на твърдението за $n = n_0$ $\quad (P(n_0))$;
- Допускаме, че твърдението е вярно за някое n $\quad (P(n))$;
- Доказваме, че твърдението е вярно и за $n+1$ $\quad (P(n) \to P(n+1))$.
- Тогава $\forall n \geq n_0 : P(n)$.

2.2 Силна индукция

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : ((\forall k \leq n : P(k)) \to P(n+1))) \to \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

3 Релации

3.1 Наредена двойка

$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{a, \{a, b\}\}$$

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \land b = d$$

3.2 Декартово произведение

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \,| a \in A \land b \in B\}$$

Пример:

$\{1, 3, 5\} \times \{2, 4\} = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$

$\emptyset \times \{0, 2\} = \emptyset$

няма комутативност: $A \times B \neq B \times A$

Мощност на декартово произведение: $|A \times B| = |A|.|B|$
(доказателство с индукция по $|A|$)

3.3 Релация

релация е всяко подмножество на декартово произведение

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ - n-местна релация
при $n = 2$: бинарна релация $R \subseteq A \times A$ - бинарна релация над A
Пример за 3-местна релация:
$(a, b, c) \in R \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} a, b, c$ са страни на триъгълник.
Ако $|A| = n$, то колко са бинарните релации над A (2^n)

3.4 Домейн и кодомейн

$$dom\,(R) = \{a | \exists b \in A : (a, b) \in R\} \text{ - домейн}$$

$$range\,(R) = \{b | \exists a \in A : (a, b) \in R\} \text{ - кодомейн, range}$$

3.5 Свойства

$R \subseteq A \times A$

3.5.1 рефлексивност

$\forall a \in A : (a, a) \in R$

3.5.2 антирефлексивност

$\forall a \in A : (a, a) \notin R$

3.5.3 симетричност

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \to (b, a) \in R$$

3.5.4 антисиметричност

$$\forall a, b \in A : a \neq b \to ((a, b) \in R \to (b, a) \notin R)$$

(възможно е да има и несравними елементи)

$\longleftrightarrow$

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \land (b, a) \in R \to a = b$$

3.5.5 силна антисиметричност

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \oplus (b, a) \in R$$

3.5.6 транзитивност

$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \land (b, c) \in R \to (a, c) \in R$$

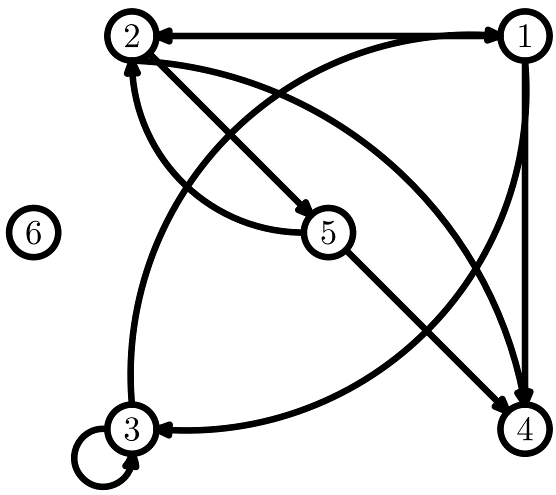
3.6 Интерпретации

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (2, 4), (3, 3), (2, 5), (5, 4)\ (5, 2)\}$$

3.6.1 Матрица

	1	2	3	4	5	6
1		x	x	x		
2				x	x	
3	x		x			
4						
5		x		x		
6						

3.6.2 Граф (диаграма на Хасе)



Интерпретация на свойствата с матрица и граф.

Задача 3.1. *Какви свойства притежават релациите:*

- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, R = \{(a,b)\,|a - b \in \mathbb{Z}\}$
- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \{(a,b)\,|a + b \geq 5\}$
- $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}, R = \{(a,b)\,|a \cap b \neq \emptyset\}$
- $R \subseteq \{0,1,2\}^2, R = \{(a,b)\,|a + b \geq 5\}$

3.7 Релации на еквивалентност

R е релация на еквивалентност $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ R е рефлексивна, симетрична и транзитивна.
Примери: равенство на числа, еднаквост и подобие на триъгълници.

$$[x]_R \overset{\text{def}}{=} \{y|\,(x,y) \in R\}$$

Теорема: (лекции и изпит)

$$R \subseteq A \times A$$

$$F_R := \{[x]_R\,|x \in A\} \text{ е разбиване на } A$$

3.7.1 Примери с модулна аритметика

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$aRb \leftrightarrow 4 \mid a - b$
Да се докаже, че R е релация на еквивалентност. $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$xRy \leftrightarrow 2 \mid 2x - 5y$
Да се докаже, че R е релация на еквивалентност.

3.7.2 Модифициране на рел. на екв.

Нека R_1, R_2 са релации на еквивалентност над A. Релации на еквивалентност ли са релациите:

- $R_1 \cup R_2$ (не)

- $R_1 \cap R_2$ (да)

- $R_1 \Delta R_2$ (не)

3.7.3 Брой рел. на екв.

Колко са релациите на еквивалентност над $A = \{1,2,3,4\}$?
(брой разбивания на 4-елементно множество)

3.8 Наредби

3.8.1 (Нестрога) частична наредба

R е частична наредба, когато е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
Примери: $\geq, \leq, \subseteq$.

3.8.2 Строга частична наредба

R е строга частична наредба, когато е антирефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
Примери: $>, <, \subset$.

3.8.3 Линейна наредба

R е линейна (пълна) наредба, когато е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна.

Въпрос 3.1. *Колко елемента има линейна наредба над n-елементно множество?* $\left(\frac{n^2+n}{2}\right)$

3.9 Специални елементи

$$R \subseteq A \times A$$

3.9.1 Минимален

$$a \text{ е минимален } \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (b, a) \notin R$$

след обръщане на кванторите - "няма по-малък от него".

3.9.2 Най-малък

$$a \text{ е най-малък } \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (a, b) \in R$$

"по-малък от всички други"

3.9.3 Максимален

$$a \text{ е максимален } \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (a, b) \notin R$$

след обръщане на кванторите - "няма по-голям от него".

Въпрос 3.2. *Възможно ли е да има* $0, 1, > 1$ *минимален/максимален елемент в частична наредба?* (0 - *не (ако* R *е частична наредба, то* R *има минимален и максимален елемент (теорема)),* 1 - *да,* 2 - *да)*

А в линейна? (0 - *не (линейната наредба е и частична),* 1 - *да,* 2 - *не)*

3.9.4 Най-голям

$$a \text{ е най-голям } \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (b, a) \in R$$

"по-голям от всички други"

Въпрос 3.3. *Възможно ли е да има повече от* 1 *най-малък/най-голям елемент в наредба? (не)*

3.9.5 Пример:

Да се посочат минимални, максимални, най-големи и най-малки елементи

	1	2	3	4	5	6	7	8
1			x	x				x
2	x	x	x	x	x	x	x	x
3							x	
4				x			x	
5								
6					x			x
7						x		x
8								

(При наличие на най-малък/най-голям, наличието на друг минимален/максимален е изключено.)

3.10 Затваряне на релации

3.10.1 Операции с релации

- Обратна релация: $R^{-1} = \{(b, a) \,|\, (a, b) \in R\}$
- Допълнение на релация: $\overline{R} = \{(a, b) \,|\, (a, b) \notin R\}$
- Композиция на релации: $S \circ R = \{(a, c) \,| \exists b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$

$$R \subseteq A \times A$$

3.10.2 рефлексивно

$$refl(R) = R \cup \{(a, a) \,| a \in A\}$$

3.10.3 симетрично

$$sym(R) = R \cup R^{-1}$$

3.10.4 транзитивно

$$R^1 = R; R^n = R \circ R^{n-1} \text{ при } n > 1$$
$$trans(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$$

Да се намери рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на
$R = \{(0,1), (0,2), (3,4), (3,5), (4,5), (6,7)\}$
(Получаваме релация на еквивалентност с класове $\mathcal{F}_R = \{\{0,1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7\}\}$)

Задача 3.2. *Да се докаже, че релацията | - "дели"е частична наредба над $\mathbb{N}$. Да се посочат (или да се докаже, че такива няма) най-голям, най-малък, минимален и максимален елемент.*

Задача 3.3 (свеждане до умножение на матрици)**.** *Нека $|A| = n$.*
Нека $S = \{x|xA\}$.
Нека $R \subseteq S \times S$.
$R_1 R R_2 \overset{def}{\longleftrightarrow} R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. *Релация на еквивалентност ли е R? Докажете.*

Задача 3.4. *Нека $R \subseteq A \times A$ е рефлексивна и транзитивна релация.*
Нека $\sim \subseteq A \times A : a \sim b \leftrightarrow aRb \wedge bRa$.
Докажете, че $\sim$ е релация на еквивалентност.
$F{:=}\{[x]_\sim | x \in A\}$
$\langle \subseteq F \times F : [a]_\sim \langle [b]_\sim \leftrightarrow \exists x \in [a]_\sim \exists y \in [b]_\sim : xRy$
Да се докаже, че $\langle$ е частична наредба.

4 Функции/Изброимост

$$f \text{ е (тотална) функция } \overset{def}{\longleftrightarrow} f \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A : \exists! b \in B : (a,b) \in f \text{ (точно 1 образ)}$$

$$f(x) = y \longleftrightarrow (x,y) \in f$$

$$f \text{ е частична функция } \overset{def}{\longleftrightarrow}$$

$$f \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A : \forall b_1 \in B : \forall b_2 \in B : (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \implies b_1 = b_2$$

$$\text{(най-много 1 образ)}$$

$$f \text{ е функция и } f \subseteq A \times B \text{ - записваме } f : A \longrightarrow B$$

Въпрос 4.1. *Кои са релациите на еквивалентност $R \subseteq A \times A$, които са функции?*

Упътване:. *Допускаме, че R има клас на еквивалентност с поне 2 елемента $a \neq b \implies aRb \wedge aRa \implies a = b \implies$ противоречие $\implies$ само идентитетът е релация на еквивалентност и функция едновременно.*

4.1 Свойства

$$f : A \longrightarrow B$$

- инекция: $\forall a_1 \in A : \forall a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
  f е инекция$\longrightarrow |A| \leq |B|$ (необходимо условие за инекция)
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x \backslash 2^x$ са инекции
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 \backslash sin(x) \backslash x^2 - 3x + 2$ не са инекции
- сюрекция: $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$
  f е сюрекция$\longrightarrow |A| \geq |B|$
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x$
  $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)\,; f(x) = \frac{1}{x}$ са сюрекции
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 \backslash sin(x) \backslash x^2 - 3x + 2$ не са сюрекции
- биекция - инекция и сюрекция (необходимо условие за сюрекция)
  $\forall b \in B : \exists! a \in A : f(a) = b$
  f е биекция$\longrightarrow |A| = |B|$ (необходимо условие за биекция)
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^{2n+1}$ е биекции $\forall n \in \mathbb{N}$

Ако има инекция $A \longrightarrow B$, то има сюрекция $B \longrightarrow A$.

4.2 Образ на множество

Нека $f : A \longrightarrow B$ и $X \subseteq A$
$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$

4.3 Композиция

Нека $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$
$g \circ f : A \longrightarrow C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

4.4 Обратна функция

Нека $f : A \longrightarrow B$ е биекция (при инекция обратната функция е частична).
$f^{-1} : B \longrightarrow A$, $f^{-1}(y) = x \overset{def}{\longleftrightarrow} f(x) = y$

to be continued...