Дискретни структури

план на упражненията

КН 1.1, зимен семестър 2023/2024

Калоян Цветков
kaloyants25@gmail.com

ФМИ, СУ

2.1

Ресурси (теория и задачи) по Дискретни структури

- теория
- задачи
- теория + задачи

- сайт на Скелета (задачи от минали години)
- записки на Мария Соскова
- записки на Ангел Димитриев
- лични записки (по упражненията)

Съдържание

1 Въведение

1.1 Съждения

Изреченията, съдържащи информация, която може да се оцени като вярна и невярна, наричаме **съждения**.
Частта от съждението, която приписва признак, е **предикат**.
Предикатът може да бъде пресметнат като верен или грешен при прилагането му върху **субект**.
Пример:
"Този химикал е син."е вярно/грешно съждение, получено от пресмятането на предиката "X е син."върху субекта "този химикал".

"Съществува просто число с $100,000,000$ цифри"е съждение, но не знаем как да оценим като вярно или грешно все още.
(Най-голямото открито просто число има около $23,000,000$ цифри)[1]

1.2 Логически операции

Дефиниции чрез вектор/таблица от стойности и на интуитивно ниво.

отрицание

$\neg$

p	$\neg p$
0	1
1	0

дизюнкция

$\vee$

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

конюнкция

$\wedge$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

[1] Към датата 26 ноември 2023 г.!

изключващо или

$\oplus$

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

импликация (ако ..., то ...)

$\rightarrow$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

биимпликация (еквивалентност)

$\longleftrightarrow$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Свойства:

комутативност

$$p \wedge q = q \wedge p \qquad p \vee q = q \vee p \qquad p \oplus q = q \oplus p$$

асоциативност

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee B) \vee C \qquad p \wedge B) \wedge C) = (p \wedge B) \wedge C$$

дистрибутивност

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (q \vee r) \qquad p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

закон за контапозицията
закони на Де Морган

Нека p, q, r, s и t са следните съждения:
p: Ще разходя кучето преди обяд.
q: Сутринта ще спортувам.
r: Следобяд ще спортувам.

s: Днес времето е хубаво.
t: Днес влажността на въздуха е ниска.
Напишете логически изрази, съответстващи са следните изречения.
1. Няма да разходя кучето преди обяд.
2. Ще разходя кучето преди обяд и следобяд ще спортувам.
3. Днес ще спортувам или сутринта, или следобяд.
4. Днес ще спортувам сутринта или следобяд.
5. Ако днес времето е хубаво, следобяд ще спортувам.
6. Необходимо условие, за да спортувам днес следобяд е, времето да е хубаво.
7. Достатъчно условие, за да спортувам днес е времето да е хубаво и влажността да е ниска.

1.3 Квантори

1.3.1 За всеобщност - $\forall$

$\forall x \in A : P(x)$ - предикатът P се оценява като истина за всеки/за произволен елемент от множеството A.

1.3.2 За екзистенциалност - $\exists$

$\exists x \in A : P(x)$ - предикатът P се оценява като истина за някой (поне 1) от всички елементи на множеството A.

Кванторите са дуални: отрицанието на единия поражда другия.
$\neg \exists x \in A : P(x) \longleftrightarrow \forall x \in A : \neg P(x)$
$\neg \forall x \in A : P(x) \longleftrightarrow \exists x \in A : \neg P(x)$

Задача 1.1. $R(x)$ - *"x е в стая <номер на стая>";*
$C(x)$ - *"x следва КН";*
$F(x, y)$ - *"x е приятел на y";*
Да се изразят твърденията чрез квантори и предикатите R, C, F.
"Някой следва КН."
$\exists x : C(x)$;
"Всеки е приятел на себе си."
$\forall x : F(x, x)$;
"Приятелството и неприятелството са взаимни."
$\forall x : \forall y : F(x, y) \to F(y, x)$; *(защо $\longleftrightarrow$ не е необходимо)*
"Всеки има приятел."
$\forall x : \exists y : F(x, y)$;
"Всички в стая <номер на стая> следват КН."
$\forall x : R(x) \to C(x)$;
"Всеки в тази стая има приятел от КН, който не е в стаята."
$\forall x : R(x) \to (\exists y : F(x, y) \land C(y) \land \neg R(y))$;

"Хората в стаята, които не следват КН, имат приятел в стаята."
$\forall x : R(x) \land \neg C(x) \to \exists y : R(y) \land F(x, y)$

"Да нямаш приятели е достатъчно условие да не следваш КН."
$\forall x : (\forall y : \neg F(x, y)) \to \neg C(x)$. *(контрапозиция?)*

"Двама души са приятели тогава и само тогава, когато имат общ приятел от КН."
$\forall x : \forall y : F(x, y) \longleftrightarrow \exists z : F(x, z) \land F(y, z) \land C(x)$

1.4 Множества и операции над тях

1.4.1 Множества

Множество - няма дефиниция; интуитивно: колекция от неща; всички математически обекти са изградени от множества.

1.4.2 Дефиниране на множества

- чрез изброяване
- чрез предикат
- празно множество: $(\exists\emptyset :)\, \forall x : x \notin \emptyset$.

Дефиниции за равенство на множества, подмножество, строго подмножество.

$$A = B \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x : x \in A \longleftrightarrow x \in B$$

$$A \subseteq B \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x : x \in A \to x \in B$$

$$A \subset B \overset{def}{\longleftrightarrow} A \subseteq B \land A \neq B$$

$$\forall A : \emptyset \subseteq A \land \emptyset \subset A$$

Примери за равни множества (повторението и редът на елементите не е от значение) и подмножества.

$$\{1, 2, \emptyset\} = \{\emptyset, 1, 2\} = \{\emptyset, \emptyset, 1, 2, 1, 1\}$$

$$\{x, 1, y\} \subseteq \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

$$\{x, 1, y\} \subset \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

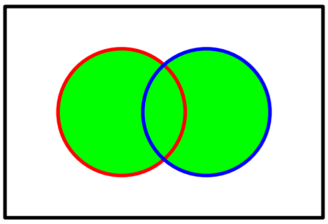
$$\{x, 1, y, z, 5, 2\} \subseteq \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

1.4.3 Операции над множества

таблици (за произволен елемент "смятаме"резултат спрямо предикатите $x \in A$ и $x \in B$) Аналогии с логическите операции.

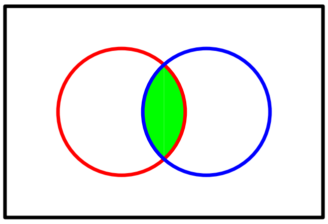
обединение

$$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



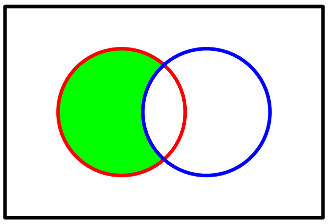
сечение

$$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



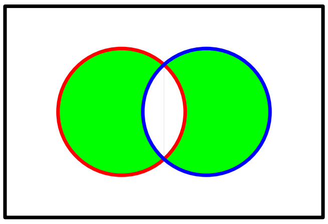
разлика

$$A \backslash B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



симетрична разлика

$$A \Delta B := \{x | x \in A \oplus x \in B\}$$



Доказателтво ,че:

- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	$A \Delta B$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

$$\implies \forall x : x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \leftrightarrow x \in A\Delta B \implies (A \cup B) \setminus (B \cap A) = A\Delta B$$

- $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

A	B	$A\backslash B$	$B\backslash A$	$(A\backslash B) \cup (A\backslash B)$	$A\Delta B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

$$\implies \forall x : x \in (A\backslash B) \cup (A\backslash B) \leftrightarrow x \in A\Delta B \implies (A\backslash B) \cup (A\backslash B) = A\Delta B$$

Допълнение на множество

Универсално множество - съдържа всички разглеждани множества; определя се от контекста.

$$\overline{A} := U\backslash A; \qquad \overline{\overline{A}} = A.$$

Свойства:

- комутативност

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A \qquad A\Delta B = B\Delta A$$

- асоциативност

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$\text{Обединение на няколко множества: } \bigcup_{i \in I} A_i := \{x | \exists i \in I : x \in A_i\}$$

$$\text{Сечение на няколко множества: } \bigcap_{i \in I} A_i := \{x | \forall i \in I : x \in A_i\}$$

- дистрибутивност

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

празно множество

$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A\backslash\emptyset = A$$

закони на Де Морган

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

степенно множество

$$\mathcal{P}(A) = 2^A := \{x | x \subseteq A\}$$

Примери за степенни множества.

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}\{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{1,2\}, 7\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\{\{1,2\}\}, \{7\}, \{\emptyset, \{1,2\}\}, \{\emptyset, 7\}, \{\{1,2\}, 7\}, \{\emptyset, \{1,2\}, 7\}\}$$

Задача 1.2. *Вярно ли е, че*

$$A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C) \text{ (не)}$$
$$(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C) \text{ (да)}$$

1.4.4 мултимножество

Множество, в което броя на повторенията на елементите е от значение.

$$\{1,3,3,2,1\} = \{1,2,3\} \text{ разглеждани като множества}$$

$$\{1,3,3,2,1\} \neq \{1,2,3\} \text{ разглеждани като мултимножества}$$

1.4.5 разбиване

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е разбиване на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i = A$$
$$\forall i, j \in I : i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

$\{S\}$ разбиване ли е на S? (да$\longleftrightarrow S \neq \emptyset$)

1.4.6 покритие

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е покритие на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

1.4.7 разкрояване

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е разкрояване на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A$$
$$\forall i, j \in I : i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

2 Индукция

Плочки домино:

Бутнали сме първата плочка и знаем, че ако падне n-тата ще падне и $n+1$-вата. Тогава ще паднат всички плочки.

2.1 Стандартна индукция

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \rightarrow P(n+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

Принцип на индукцията

- Проверяваме верността на твърдението за $n = 0$ $\quad (P(0))$;
- Допускаме, че твърдението е вярно за някое n $\quad (P(n))$;
- Доказваме, че твърдението е вярно и за $n+1$ $\quad (P(n) \rightarrow P(n+1))$.
- Тогава $\forall n \geq 0 : P(n)$.

Задача 2.1. *Да се докаже, че* $|2^A| = 2^{|A|}$.

Упътване:. $|A| = n+1 \geq 1 \implies |A \setminus \{a\}| = n \geq 0 \implies |2^{A \setminus \{a\}}| = 2^n$
$\implies$ *Подмножествата на A не съдържащи a са* 2^n*. Подмножествата на A са тези, несъдържащи a, и същите, обединени с* $\{a\} \implies$

$$\mathcal{P}(A) = \{x | x \subseteq A \wedge a \notin x\} \cup \{x | x \subseteq A \wedge a \in x\}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{x | x \subseteq A \wedge a \notin x\}| + |\{x | x \subseteq A \wedge a \in x\}| \text{ \textit{(since they have no intersection)}}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A \setminus \{a\})| + |\{x | x \in \mathcal{P}(A \setminus \{a\}) \wedge a \in x\}|$$

те са $2.2^n = 2^{n+1}$.

Обобщен принцип на индукцията

$$P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0 : (P(n) \rightarrow P(n+1))) \rightarrow \forall n \geq n_0 : P(n)$$

- Проверяваме верността на твърдението за $n = n_0$ $\quad (P(n_0))$;
- Допускаме, че твърдението е вярно за някое n $\quad (P(n))$;
- Доказваме, че твърдението е вярно и за $n+1$ $\quad (P(n) \rightarrow P(n+1))$.
- Тогава $\forall n \geq n_0 : P(n)$.

2.2 Силна индукция

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : ((\forall k \leq n : P(k)) \rightarrow P(n+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

3 Релации

3.1 Наредена двойка

$$(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \{a, \{a,b\}\}$$
$$(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

3.2 Декартово произведение

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b)\,|a \in A \wedge b \in B\}$$

Пример:

$\{1,3,5\} \times \{2,4\} = \{(1,2)\,,(1,4)\,,(3,2)\,,(3,4)\,,(5,2)\,,(5,4)\}$

$\emptyset \times \{0,2\} = \emptyset$

няма комутативност: $A \times B \neq B \times A$

Мощност на декартово произведение: $|A \times B| = |A|.|B|$
(доказателство с индукция по $|A|$)

3.3 Релация

релация е всяко подмножество на декартово произведение

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ - n-местна релация
при $n = 2$: бинарна релация $R \subseteq A \times A$ - бинарна релация над A
Пример за 3-местна релация:
$(a,b,c) \in R \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} a,b,c$ са страни на триъгълник.
Ако $|A| = n$, то колко са бинарните релации над A (2^n)

3.4 Домейн и кодомейн

$$dom\,(R) = \{a|\exists b \in A : (a,b) \in R\} \text{ - домейн}$$
$$range\,(R) = \{b|\exists a \in A : (a,b) \in R\} \text{ - кодомейн, range}$$

3.5 Свойства

$R \subseteq A \times A$

3.5.1 рефлексивност

$\forall a \in A : (a,a) \in R$

3.5.2 антирефлексивност

$\forall a \in A : (a,a) \notin R$

3.5.3 симетричност

$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \to (b, a) \in R$

3.5.4 антисиметричност

$\forall a, b \in A : a \neq b \to ((a, b) \in R \to (b, a) \notin R)$
(възможно е да има и несравними елементи)
$\longleftrightarrow$
$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \land (b, a) \in R \to a = b$

3.5.5 силна антисиметричност

$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \oplus (b, a) \in R$

3.5.6 транзитивност

$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \land (b, c) \in R \to (a, c) \in R$

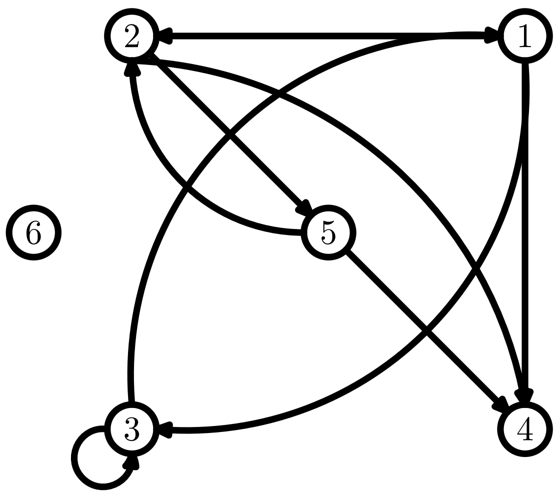
3.6 Интерпретации

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (2, 4), (3, 3), (2, 5), (5, 4)\ (5, 2)\}$$

3.6.1 Матрица

	1	2	3	4	5	6
1		x	x	x		
2				x	x	
3	x		x			
4						
5		x		x		
6						

3.6.2 Граф (диаграма на Хасе)



Интерпретация на свойствата с матрица и граф.

Задача 3.1. *Какви свойства притежават релациите:*

- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, R = \{(a, b) \,|a - b \in \mathbb{Z}\}$
- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \{(a, b) \,|a + b \geq 5\}$
- $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}, R = \{(a, b) \,|a \cap b \neq \emptyset\}$
- $R \subseteq \{0, 1, 2\}^2, R = \{(a, b) \,|a + b \geq 5\}$

3.7 Релации на еквивалентност

R е релация на еквивалентност $\stackrel{def}{\longleftrightarrow}$ R е рефлексивна, симетрична и транзитивна. Примери: равенство на числа, еднаквост и подобие на триъгълници.

$$[x]_R \stackrel{\text{def}}{=} \{y| \, (x, y) \in R\}$$

Теорема: (лекции и изпит)

$$R \subseteq A \times A$$

$$F_R := \{[x]_R \,|x \in A\} \text{ е разбиване на } A$$

3.7.1 Примери с модулна аритметика

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$aRb \leftrightarrow 4 \mid a - b$
Да се докаже, че R е релация на еквивалентност. $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$xRy \leftrightarrow 2 \mid 2x - 5y$
Да се докаже, че R е релация на еквивалентност.

3.7.2 Модифициране на рел. на екв.

Нека R_1, R_2 са релации на еквивалентност над A. Релации на еквивалентност ли са релациите:

- $R_1 \cup R_2$ (не)
- $R_1 \cap R_2$ (да)
- $R_1 \Delta R_2$ (не)

3.7.3 Брой рел. на екв.

Колко са релациите на еквивалентност над $A = \{1, 2, 3, 4\}$?
(брой разбивания на 4-елементно множество)

3.8 Наредби

3.8.1 (Нестрога) частична наредба

R е частична наредба, когато е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
Примери: $\geq, \leq, \subseteq$.

3.8.2 Строга частична наредба

R е строга частична наредба, когато е антирефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
Примери: $>, <, \subset$.

3.8.3 Линейна наредба

R е линейна (пълна) наредба, когато е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна.

Въпрос 3.1. *Колко елемента има линейна наредба над n-елементно множество?* $\left(\frac{n^2+n}{2}\right)$

3.9 Специални елементи

$$R \subseteq A \times A$$

3.9.1 Минимален

$$a \text{ е минимален } \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (b, a) \notin R$$

след обръщане на кванторите - "няма по-малък от него".

3.9.2 Най-малък

$$a \text{ е най-малък } \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (a, b) \in R$$

"по-малък от всички други"

3.9.3 Максимален

$$a \text{ е максимален } \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (a, b) \notin R$$

след обръщане на кванторите - "няма по-голям от него".

Въпрос 3.2. *Възможно ли е да има* $0, 1, > 1$ *минимален/максимален елемент в частична наредба?* *(0 - не (ако R е частична наредба, то R има минимален и максимален елемент (теорема)), 1 - да, 2 - да)*

А в линейна? (0 - не (линейната наредба е и частична), 1 - да, 2 - не)

3.9.4 Най-голям

$$a \text{ е най-голям } \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (b, a) \in R$$

"по-голям от всички други"

Въпрос 3.3. *Възможно ли е да има повече от* 1 *най-малък/най-голям елемент в наредба? (не)*

3.9.5 Пример:

Да се посочат минимални, максимални, най-големи и най-малки елементи

	1	2	3	4	5	6	7	8
1			x	x				x
2	x	x	x	x	x	x	x	x
3							x	
4				x			x	
5								
6					x			x
7						x		x
8								

(При наличие на най-малък/най-голям, наличието на друг минимален/максимален е изключено.)

3.10 Затваряне на релации

3.10.1 Операции с релации

- Обратна релация: $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$
- Допълнение на релация: $\overline{R} = \{(a, b) \mid (a, b) \notin R\}$
- Композиция на релации: $S \circ R = \{(a, c) \mid \exists b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$

$$R \subseteq A \times A$$

3.10.2 рефлексивно

$$refl(R) = R \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

3.10.3 симетрично

$$sym(R) = R \cup R^{-1}$$

3.10.4 транзитивно

$$R^1 = R; R^n = R \circ R^{n-1} \text{ при } n > 1$$
$$trans(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$$

Да се намери рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на
$R = \{(0,1), (0,2), (3,4), (3,5), (4,5), (6,7)\}$
(Получаваме релация на еквивалентност с класове $\mathcal{F}_R = \{\{0,1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7\}\}$)

Задача 3.2. *Да се докаже, че релацията | - "дели"е частична наредба над* $\mathbb{N}$. *Да се посочат (или да се докаже, че такива няма) най-голям, най-малък, минимален и максимален елемент.*

Задача 3.3 (свеждане до умножение на матрици)**.** *Нека* $|A| = n$.
Нека $S = \{x | xA\}$.
Нека $R \subseteq S \times S$.
$R_1 R R_2 \overset{def}{\longleftrightarrow} R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. *Релация на еквивалентност ли е R? Докажете.*

Задача 3.4. *Нека* $R \subseteq A \times A$ *е рефлексивна и транзитивна релация.*
Нека $\sim \subseteq A \times A : a \sim b \leftrightarrow aRb \wedge bRa$.
Докажете, че $\sim$ *е релация на еквивалентност.*
$F{:=}\{[x]_\sim | x \in A\}$
$\langle \subseteq F \times F : [a]_\sim \langle [b]_\sim \leftrightarrow \exists x \in [a]_\sim \exists y \in [b]_\sim : xRy$
Да се докаже, че $\langle$ *е частична наредба.*

4 Функции/Изброимост

$$f \text{ е (тотална) функция } \overset{def}{\longleftrightarrow} f \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A : \exists! b \in B : (a, b) \in f \text{ (точно 1 образ)}$$

$$f(x) = y \longleftrightarrow (x, y) \in f$$

$$f \text{ е частична функция } \overset{def}{\longleftrightarrow}$$

$$f \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A : \forall b_1 \in B : \forall b_2 \in B : (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \implies b_1 = b_2$$

(най-много 1 образ)

$$f \text{ е функция и } f \subseteq A \times B \text{ - записваме } f : A \longrightarrow B$$

Въпрос 4.1. *Кои са релациите на еквивалентност $R \subseteq A \times A$, които са функции?*

Упътване:. *Допускаме, че R има клас на еквивалентност с поне 2 елемента $a \neq b \implies aRb \wedge aRa \implies a = b \implies$ противоречие $\implies$ само идентитетът е релация на еквивалентност и функция едновременно.*

4.1 Свойства

$$f : A \longrightarrow B$$

- инекция: $\forall a_1 \in A : \forall a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
  f е инекция$\longrightarrow |A| \leq |B|$ (необходимо условие за инекция)
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x \backslash 2^x$ са инекции
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 \backslash sin(x) \backslash x^2 - 3x + 2$ не са инекции
- сюрекция: $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$
  f е сюрекция$\longrightarrow |A| \geq |B|$
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x$
  $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 1)\, ; f(x) = \frac{1}{x}$ са сюрекции
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 \backslash sin(x) \backslash x^2 - 3x + 2$ не са сюрекции
- биекция - инекция и сюрекция (необходимо условие за сюрекция)
  $\forall b \in B : \exists! a \in A : f(a) = b$
  f е биекция$\longrightarrow |A| = |B|$ (необходимо условие за биекция)
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^{2n+1}$ е биекции $\forall n \in \mathbb{N}$

Ако има инекция $A \longrightarrow B$, то има сюрекция $B \longrightarrow A$.

4.2 Образ на множество

Нека $f : A \longrightarrow B$ и $X \subseteq A$
$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$

4.3 Композиция

Нека $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$
$g \circ f : A \longrightarrow C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

4.4 Обратна функция

Нека $f : A \longrightarrow B$ е биекция (при инекция обратната функция е частична).
$f^{-1} : B \longrightarrow A$, $f^{-1}(y) = x \overset{def}{\longleftrightarrow} f(x) = y$

4.5 Крайно и безкрайно множество

A е крайно $\overset{def}{\longleftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : \exists f : I_n \longrightarrow A : f$ е биекция.
A е безкрайно $\overset{def}{\longleftrightarrow} A$ не е крайно. (с квантори?)

4.6 Изброимо множество

A е изброимо $\overset{def}{\longleftrightarrow} \exists f : \mathbb{N} \longrightarrow A : f$ е биекция.
изброимост на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
(диагонален метод на Кантор)

4.7 Теорема на Кантор

$\forall A : \neg \exists f : A \longrightarrow 2^A : f$ е биекция.
неизброимост на $2^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}$

4.8 Примери за биекции

4.8.1 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

- "обхождане на безкрайна таблица"

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$i(\text{ред}), j(\text{стълб}) \in \mathbb{N} : f(i, j) = \frac{(i + j)(i + j + 1)}{2} + j$$

- алгебрично

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\forall i, j \in \mathbb{N} : f(i, j) = 2^i(2j + 1) - 1$$

4.8.2 $\mathbb{R} \sim (0,1)$

- тригонометрично

$$f : \mathbb{R} \to (0,1)$$
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$$

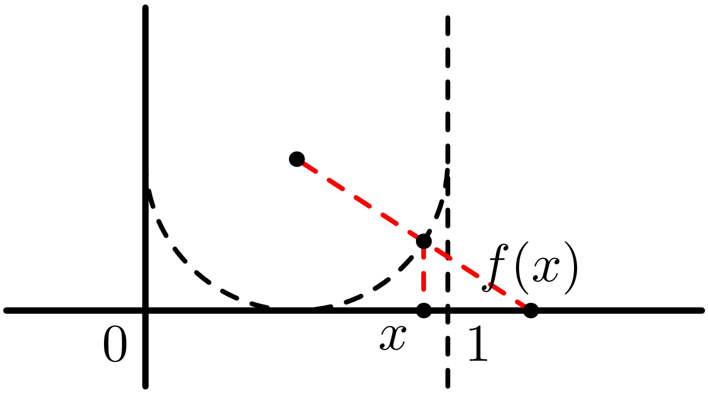
- експонента

$$f : \mathbb{R} \to (0,1)$$
$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x}$$

- геометрично

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{\frac{2x-1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + 1}{2}$$

Геометрична интерпретация:



4.8.3 $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Минава например през $(0,1)^2 \sim (0,1)$

$$f : (0,1)^2 \to (0,1)$$

$$f(0.a_0a_1a_2..., 0.b_0b_1b_2...) = 0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2...$$

Композиция на биекции води до $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

4.9 Затвореност на изброимите множество относно някои операции

- $\times$ Декартово произведение на изброими е изброимо
- $\cup$ Обединение на изброими е изброимо, нещо повече: обединение на изброим брой изброими множества е изброимо

Задача 4.1. *Композиция на инекции е инекция.*

Доказателство. Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ са инекции.
Допускаме, че $a \neq b \in A$.
$\implies f(a) \neq f(b) \in B \implies g(f(a)) \neq g(f(b)) \implies g \circ f$ е инекция. □

Задача 4.2. *Композиция на сюрекции е сюрекция.*

Доказателство. Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ са сюрекции.
Нека $z \in C \implies \exists y \in B : g(y) = z \implies \exists x \in A : f(x) = y. \implies g(f(x)) = g(y) = z \implies g \circ f$ е сюрекция. □

Задача 4.3. *Изследвайте за инективност/сюрективност функциите:*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{,ако } x \text{ е четно} \\ x-1 & \text{,ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (2x - y, -x + 2y) \ \textit{(домашна)}$$

$$f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \backslash \{1\} : f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Задача 4.4 (Конструиране на биекция)**.** *Да се построи биекция $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, че $\forall n \in \mathbb{N} : n \mid \sum_{i=1}^{n} f(i)$.*

Задача 4.5 (Биекциите се различават поне в две двойки)**.** *Нека $f : A \longrightarrow A$ и $g : A \longrightarrow A$ са биекции и $\exists x_1 \in A : f(a_1) \neq g(a_1)$. Да се докаже, че $\exists x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \land f(x_2) \neq g(x_2)$.*

Задача 4.6. *Да се докаже, че множеството на булевите вектори (крайни редици от $0, 1$) е изброимо.*
Да се докаже, че множеството на думите над азбуката $\{a, b\}$ е изброимо. (същата задача?)

Задача 4.7. *Да се докаже, че множеството на крайните редици от естествени числа са изброимо много.*
$\big($*да се направи сравнение между* $2^{\mathbb{N}}$ *и* $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^i\big)$

Задача 4.8. *Да се докаже, че A и B са изброими множества, то $A \cup B$ е изброимо.*

Доказателство. БОО разглеждаме случая $A \cap B = \emptyset$. Другият случай $A \cap B \neq \emptyset$ се свежда до обединението $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$, които са непресичащи се. Тогава за $B \backslash A$ има 2 случая:

$B \backslash A$ е крайно. Нека $|B \backslash A| = \{c_0, c_1, ..., c_{k-1}\}$. Тогава

$$h : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B : h(n) = \begin{cases} c_n & \text{,ако } n < k \\ g\,(n-k) & \text{,ако } n \geq k \end{cases}$$

$B \backslash A$ е безкрайно. Имаме, че $B \backslash A \subseteq B \implies |B \backslash A| \leq \mathbb{N}$ и е безкрайно $\implies |B \backslash A| = \mathbb{N} \iff B \backslash A$ е изброимо и използваме аргумента за непресичащи се множества.

$\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ - биекция и $\exists g : \mathbb{N} \longrightarrow B$ - биекция.
Разглеждаме $h : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B : h(n)$

$$h : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B : h(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{,ако } n \text{ е четно} \\ g\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{,ако } n \text{ е нечетно} \end{cases}$$

h е биекция? $\square$

5 Комбинаторика

5.1 Теория и примери

Принципи на събирането и умножението
(Не се използват в теретичния си вид; описват бройката на събитията в зависимост от зависимостта между тях.)

1. на събирането
   Нека $R = \{S_i | i \in I\}$ е разбиване на .
   Тогава $|A| = \sum_{i \in I} |S_i|$.
2. на умножението
   Нека $|X| = n, |Y| = m$. Тогава $|X \times Y| = |X|.|Y| = nm$.

Основни комбинаторни конфигурации (колко варианта има (рекурсивно разсъждение?)):

1. с наредба и без повторение
   броят на наредените k-орки без повторение от n-елементно множество
   начините да изберем и подредим k души от n в редица
   $$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
   при $k = n : V_n^n = P_n = n!$ - пермутация
2. с наредба и с повторение
   броят на функциите $I_k \longrightarrow I_n$
   по колко начина можем да си купим k-неща измежду асортимент от n.
   $$n^k$$
3. без наредба и без повторение
   $\frac{\text{вариация}}{\text{пермутация}}$
   $$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =: \binom{n}{k} \text{ - биномен коефициент}$$
   Да се докаже, че $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. (алгебрично)
   Смята броя на k-елементните подмножества на n-елементно множество (да се докаже с индукция с използване на основното свойство).
   Идея за рекурсивна дефиниция на биномния коефициент чрез свойството.
   Триъгълник на Паскал.
   Да се докаже, че $|2^A| = 2^{|A|}$ (комбинаторно с използване на горното твърдение).

4. без наредба и с повторение
   броят на начините да приберем k еднакви топчета в n чекмеджета
   броят на решенията на $x_1 + x_2 + ... + x_k = n; \forall i \in I_k : x_i \geq 0$

$$S_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

   броят на k-елементните мултимножества на n-елементно множество.

5.2 Свойства на биномния коефициент

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i+1} = 2^{n-1}$$

Задача 5.1. *Колко са:*

- *Колко са булевите вектори с дължина n, които започват с 10 и завършват с 1?*
- *Колко са булевите вектори, които започват и завършват с различна цифра?*
- *Колко са булевите вектори, които съдържат поне 3 единици и поне 2 нули?*
- *Колко са четирицифрените числа k, за които е изпълнено, че ако k е нечетно, то k съдържа 0*

Задача 5.2. *Дадена е стандартна колода от 52 карти. По колко начина можем да изберем от тях 13, така че сред тях да има:*

- *точно $1J$*
- *поне $1A$*
- *не по-малко от $2Q$*
- *точно 3 седмици*
- *най-много $2\diamondsuit$*
- *точно $2A$ и точно $2\spadesuit$*
- *точно $2A$ и не повече от $2\heartsuit$.*

Задача 5.3. *Колко са булевите вектори с n нули и k единици, в които няма съседни единици?*

5.2.1 Нютонов бином

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Два варианта за доказателство (индукция по n или комбинаторно разсъждение за коефициента пред всеки едночлен отдясно)

Задача 5.4. *Колко различни думи могат да се получат, като се разместят буквите в думата:*

- *"релация"*
- *"конституционен"*

Задача 5.5. *Колко правоъгълника със страни ≥ 2 има в шахматна дъска 8×8?*

Задача 5.6. *По колко начина могат да седнат:*

- *n човека на пейка;*
- *n мъже и n жени на една пейка, като всяка жена седи до мъже, а всеки мъж седи до жени;*
- *n човека на кръгла маса;*
- *n мъже и n жени на кръгла маса, като всяка жена седи до мъже, а всеки мъж седи до жени;*

Задача 5.7. *Колко решения в естествени числа имат уравненията:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 \geq 3 \wedge x_3 \geq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7 \wedge x_3 < 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$$

Задача 5.8. *По колко начина може да се размеси колода от 52 карти, така че в нея да има поне 2 последователни карти A?*

Задача 5.9. *Колко идентификатора с дължина n могат да се съставят в езика Ada? (идентификаторите започват с буква и продължават с буква, цифра или _, като _ не могат да са съседни или в края на идентификатора)*

5.3 принцип на Дирихле

формално

Нека $|A| = n$ и $|B| = k$. Тогава

$$n > k \longrightarrow \forall f : A \longrightarrow B : f \text{ не е инекция}$$

В контрапозиция води до споменатото НУ за инекция (мин. или по-миналия път).
Представен чрез топки в чекмеджета:
n топки трябва да разположим в m чекмеджета. Тогава:

- има чекмедже с поне $\frac{n}{m}$ топки;
- има чекмедже с най-много $\frac{n}{m}$ топки.

При $n = m + 1$: следва, че има чекмедже с поне 2 топки.

Задача 5.10. *Да се докаже, че измежду* 12 *различни двуцифрени числа има* 2*, чиято разлика е двуцифрено число с еднакви цифри.*

Задача 5.11. *На избори гласуват* 100 *души за* 3 *кандидата. Колко най-малко гласове ще стигнат на победителя да спечели?*

Задача 5.12. *На банкет има* 3 *маси и* 4 *вида питие, по* 10 *бутилки от всеки вид. Да се докаже, че има маса, на която има поне по* 4 *бутилки от* 2 *различни вида питие.*

Задача 5.13. *Матрица* 2022×2022 *да се попълни с числата* $0, \pm 1$*, така че всички сборове по редове, стълбове и диагонали да са различни*

Задача 5.14. *Точки с цели координати в равнината са оцветени с* 8 *различни цвата. Да се докаже, че има* 2 *едноцветни точки на растояния по-малко от* 3.

Задача 5.15. 50 *точки са разположени във вътрешността на квадрат със страна* 35*. Да се докаже, че поне* 2 *точки са на рзстояние по-малко от* 8.

5.4 Принцип за включване и изключване

$$\text{за две множества: } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\text{обобщен принцип: } |\bigcup_{i \in I_k} A_i| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_i \leq k} |\bigcap_{p \in I_i} A_{j_p}| =$$

$$= |A_1| + \ldots + |A_k| - (|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_{k-1} \cap A_k|) + \ldots + (-1)^{k-1} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$$

Доказателства:

- Комбинаторно: използваме $(1 + x)^n = \ldots = 0$ при $x = -1$;
- С индукция по n.

Задача 5.16. *В група студенти всеки знае поне един от езиците Java, C++, Python. Java знаят 15 души, C++ знаят 13, а Python - 10. C++ и Java знаят 5 човека, C++ и Python - 5, Java и Python - 3. Трима души знаят и трите езика. Колко души има в групата?*
$(28 = 15 + 13 + 10 - 5 - 5 - 3 + 3)$

Задача 5.17. *Нека* $|A| = n$ *и* $|B| = m$*. Колко са различните сюрекции* $A \to B$*?*

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$

Задача 5.18.

Нека $|A| = n$ *и* $|B| = m$*. Колко са различните частични функции* $A \to B$*?*

$$(1+m)^n \text{ чрез принципа или чрез нов елемент на } B$$

Задача 5.19. *Колко са пермутациите на* $\{1, 2, ..., n\}$*, такива, че* $\forall i \in I_n : i$ *не е на позиция i?*

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (n-i)!$$

Задача 5.20.

Дадена е стандартна колода от 52 *карти. По колко начина можем да изберем от тях* 13*, така че сред тях да има:*

- *точно* 1 *боя, от която няма карти*
- *не повече от* 2 *бои, в които имаме точно* 1 *карта.*

Задача 5.21. *Колко цели числа между* 1 *и* 10000 *съдържат цифрата* 7*?*

Задача 5.22. *Колко думи с дължина* 5 *над азбуката* $\{a, b, c, d, e\}$ *имат поне* 2 *последователни а-та?*

Задача 5.23. *Колко решения в цели числа има уравнението:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7 \wedge x_3 < 6 \wedge x_4 < 5$$

Задача 5.24. *Докажете чрез комбинаторни разсъждения следните твърдения:*

1. *Ако* $|A| = n$*, то* $|2^A| = 2^n$
2. $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

3.

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\},$$

където $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *е броят на разбиванията на* n*-елементно множество на* k *непразни множества.*

Задача 5.25. *Нека* $|A| = n, |B| = m$*. Колко са функциите* $f : A \longrightarrow B$*, които са:*

- *тотални*
- *частични*
- *инекции*
- *сюректии*

to be continued...