

Дизайн и анализ на алгоритми

план на упражненията

КН 2.1, летен семестър 2023/2024

Калоян Цветков
kaloyants25@gmail.com

ФМИ, СУ

1.0

Съдържание

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Въведение | 3 |
| 1.1 | Алгоритъм | 3 |
| 1.2 | Изчислителен модел | 4 |
| 1.2.1 | Въвеждане на RAM модела | 4 |
| 1.2.2 | Представяне на данни в паметта | 6 |
| 1.2.3 | Операции за константно време в RAM модела | 6 |
| 1.2.4 | Псевдокод | 6 |
| 1.3 | Първи пример | 7 |
| 1.4 | Коректност на алгоритъм | 8 |
| 1.4.1 | Итеративен подход | 8 |
| 1.4.2 | Рекурсивен подход | 8 |
| 1.5 | Времева сложност | 8 |
| 1.6 | Асимптотика | 8 |
| 1.6.1 | Основни свойства | 9 |
| 2 | Линейни обхождания на масив | 10 |
| 2.1 | Сложност по памет | 10 |

Списък с определения, задачи и важни твърдения

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Определение – Размер на входа | 4 |
| 1.2 | Определение – Машина с произволен достъп или RAM | 4 |
| 1.3 | Определение – Елементарна операция в RAM | 4 |
| 1.4 | Определение – Цена на елементарна операция в RAM | 5 |
| 1.1 | Задача – GCD | 7 |
| 1.5 | Определение – Асимптотично сравнение - \preceq | 8 |
| 1.6 | Определение – <i>Big O</i> | 8 |
| 1.7 | Определение – <i>Big Ω</i> | 8 |
| 1.8 | Определение – <i>Big Θ</i> | 9 |
| 1.2 | Задача – HOLE | 9 |
| 2.1 | Задача – MAXIMUM SUBARRAY | 10 |
| 2.2 | Задача – DISTANT PAIR | 11 |
| 2.3 | Задача – SIEVE | 12 |
| 2.7 | Твърдение – техника за работа със сума от монотонна непрекъсната функция . . | 13 |
| 2.4 | Задача – MAX BOUNDED SUBARRAY | 14 |
| 2.5 | Задача – Алгоритъм на <i>Boyer – Moore</i> | 14 |

1 Въведение

1.1 Алгоритъм

Също както за *множество*, така и за *алгоритъм* няма общоприета формална дефиниция. В този курс *алгоритъм* ще интерпретираме така:

- Алгоритъм е крайна редица от операции, която решава дадена задача.
Разглеждаме го като реализация на тотална функция $A : Input \mapsto Output$, където *Input* и *Output* са крайни редици от числа и масиви.

Потенциални въпроси:

- "Защо редицата от операциите е крайна?"
Можем да отслабим изискването за крайност и ще получим т.н. *изчислителен метод*. В рамките на курса ще разглеждаме единствено редици с краен брой операции.
- "Какво представлява една *операция*?"
Зависи от *изчислителния модел*. В курса предимно ще се използва RAM моделът. В съответната секция ще бъдат описани позволените в RAM модела *операции*.
- "Какво представлява една *задача* и как тя се решава?"
Става въпрос за *изчислителна задача* - понятие, което има дефиниция. Характеризира се със своите *екземпляри*, на всеки от които съответстват неотрицателен брой *решения*.
Формално, за изчислителна задача може да се счита всяка релация над \mathbb{N}^* . Можем да мислим за *Input* и *Output* като описания на *екземпляри* и *решението* съответно (или едно от всички възможни *решения*).
- "Защо *Input* и *Output* са крайни редици и защо в тях участват само числа и масиви?"
Тук отново може да бъде отслабено изискването за крайност, но в рамките на курса няма да разглеждаме задачи с неограничено големи *Input* и *Output*.
Използваме числа и масиви за описание на *Input* и *Output*, понеже с тях могат да се представят математическите обекти, за които ще решаваме задачи.
- "Какво разбираме под 'числа и масиви'?"
Числата могат да са от \mathbb{N}, \mathbb{Z} и \mathbb{Q} . При \mathbb{R} възниква въпросът за представянето, чрез апроксимация с крайна точност (тази тема може да бъде засегната по-късно).
Масивите са крайни редици от числа или от други масиви. Множество на масивите - \mathbb{M} .
За $\mathbf{I} = \{I_i\}_{i=1}^n, n \in \mathbb{N}^+$ - редица от числа, $\mathbf{I} \in \mathbb{M}$.
За $\mathbf{M} = \{M_i\}_{i=1}^n, n \in \mathbb{N}^+$, за която $M_i \in \mathbb{M}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{M}$.

Разговорно ще наричаме *Input* вход на алгоритъма и *Output* изход на алгоритъма. Както входът, така и изходът притежават характеристика *размер* $\in \mathbb{N}^+$, определен от съдържанието на този вход.

Размерът на число $n \in \mathbb{N}$ се дава с $S_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^+$:

$$S_{\mathbb{N}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако } n = 0 \\ \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

Естествено може да бъде продължена дефиницията за \mathbb{Z}, \mathbb{Q} .

Размерът на масив $\mathbf{M} = \{M_i\}_{i=1}^m, m \in \mathbb{N}^+$ се дава с $S_{\mathbb{M}} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}^+$ и $S : \mathbb{N} \cup \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}^+$:

$$S_{\mathbb{M}}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^m S(M_i)$$

$$S(a) = \begin{cases} S_{\mathbb{N}}(a) & \text{ако } a \in \mathbb{N} \\ S_{\mathbb{M}}(a) & \text{иначе} \end{cases}$$

Размерът на редица от числа и масиви $\{E_i\}_{i=1}^n, n \in \mathbb{N}^+$ е сумата от размерите на елементите ѝ.

Определение 1.1 (Размер на входа). *Размер на входа $Input$ наричаме размерът на крайната редица от числа и масиви, които $Input$ представлява.*

1.2 Изчислителен модел

1.2.1 Въвеждане на RAM модела

Машина с произволен достъп или RAM (от английски: Random Access Machine). Това е еквивалентен модел на машините на Тюринг като изразителна способност, но е по-близък до общата представа за модерен компютър.

Определение 1.2 (Машина с произволен достъп или RAM). *Машините с произволен достъп спадат към клас машини с непоследователен достъп до паметта (Random Access Memory или RAM памет). Всяка машина с произволен достъп се състои от памет и програма.*

Паметта на машината е разделена на две части:

- Краен брой регистри $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, n \in \mathbb{N}^+$.
- Основна памет, която се състои от безкрайно много клетки номерирани $0, 1, 2, \dots$

| Регистри | Памет |
|---------------------|------------------------|
| регистър γ_0 | 0 <input type="text"/> |
| регистър γ_1 | 1 <input type="text"/> |
| регистър γ_2 | 2 <input type="text"/> |
| ... | 3 <input type="text"/> |
| регистър γ_n | ... |

С $\gamma_k \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, n\}$ ще означаваме стойността, която е в регистъра γ_k .

С $\rho(i) \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}$ ще означаваме стойността, която е в i -тата клетка на паметта.

Стойностите в регистрите и в паметта могат да имат произволно голям размер (тип данни *integer*).

Програма на машина с произволен достъп е крайна редица от номерирани елементарни инструкции.

Определение 1.3 (Елементарна операция в RAM). За определеност нека означим с α един от регистрите. Без ограничение на общността избираме γ_0 . Регистъра α ще наричаме акумулатор. В него се акумулира резултатът от аритметичните операции. Останалите регистри $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ще наричаме индексни регистри. Нека $i, j, k \in \mathbb{N}$. По-долу ще използваме:

- *reg*, за да означим произволен регистър от $\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n$.
- *op*, за да означим операнд от вида $i, \rho(i)$ или *reg*.
- *top*, за да означим модифициран операнд от вида $\rho(i + \gamma_j)$. Стойността на $\rho(i + \gamma_j)$ е в клетката на паметта на позиция $(i + \text{стойността на } \gamma_j)$.

Елементарните операции разделяме на следните категории:

1. Операции за достъп до паметта (четене и писане):

- $reg \leftarrow op$
- $\alpha \leftarrow mop$
- $op \leftarrow reg$
- $mop \leftarrow \alpha$

2. Операции за преход (*jump*):

- $goto\ k$
- $\underline{if\ reg\ \pi\ 0\ then\ goto\ k}$, за $\pi \in \{=, \neq, <, \leq, >, \geq\}$

3. Аритметични операции:

- $\alpha \leftarrow \alpha\ \pi\ mop$, за $\pi \in \{+, -, \times, div, mod\}$

4. Операции с индексните регистри:

- $\gamma_j \leftarrow \gamma_j \pm i$, $1 \leq j \leq n, i \in \mathbb{N}$

Горната дефиниция на RAM позволява да се съхраняват и обработват произволно големи числа, но това не е реалистично предположение. Поради това внимателно ще дефинираме *цената* за изпълнение на елементарните операции.

Цената за изпълнение на елементарна операция се състои от **достъпа до паметта** и **същинската цена за изпълнение**.

Има два основни подхода за определяне на *цената*: UCM (Unit Cost Measure) и LCM (Logarithmic Cost Measure). При UCM се абстрахираме от *размера* на операндите. Това е подходящ подход, при условие че *размерът* на числата, които са в паметта по време на изпълнение на програмата е ограничен отгоре. При LCM взимаме под внимание *размера* на операндите. Използваме дефинираната нагоре функция за *размера* S .

Определение 1.4 (Цена на елементарна операция в RAM). *Определя се според:*

- Цена за достъп до паметта според операнд:

| Операнд | UCM | LCM |
|------------------------|-----|----------------------|
| i | 0 | 0 |
| reg | 0 | 0 |
| $\rho(i)$ | 1 | $S(i)$ |
| $\rho O(i + \gamma_j)$ | 1 | $S(i) + S(\gamma_j)$ |

- Същинска цена за изпълнение:

| Операция | UCM | LCM |
|--|-----|--------------------------|
| $reg \leftarrow op$ | 1 | $1 + S(op)$ |
| $\alpha \leftarrow mop$ | 1 | $1 + S(mop)$ |
| $op \leftarrow reg$ | 1 | $1 + S(reg)$ |
| $mop \leftarrow \alpha$ | 1 | $1 + S(\alpha)$ |
| $goto\ k$ | 1 | $1 + S(k)$ |
| $\underline{if\ reg\ \pi\ 0\ then\ goto\ k}$ | 1 | $1 + S(k)$ |
| $\alpha \leftarrow \alpha\ \pi\ mop$ | 1 | $1 + S(\alpha) + S(mop)$ |
| $\gamma_j \leftarrow \gamma_j \pm i$ | 1 | $1 + S(\gamma_j) + S(i)$ |

1.2.2 Представяне на данни в паметта

Представянето на числа в RAM модела става чрез запис в определена k -ична бройна система. Числото k е със семантиката на броя различни единици информация, които машината различава. (при машините на Тюринг k е размерът на азбуката, чиито символи пишем върху лентата).

Важна характеристика в RAM модела е т.н. размер на машинната дума: броя единици информация, които една клетка от паметта съдържа. На този етап се вижда значението на числото k . Нека размерът на машинната дума бележим с d . Тогава:

- При $k = 1$ най-голямото число, което може да се запише в една клетка, е d . Записване на числото n в паметта изисква $\lceil n/d \rceil$ клетки.
- При $k > 1$ най-голямото число, което може да се запише в една клетка, е k^d . Записване на числото n в паметта изисква $\lceil n/k^d \rceil$ клетки.

Както се вижда, разликата е експоненциална. Ние ще работим с машини, в които представянето на числата е в $k > 1$ -ична бройна система.

1.2.3 Операции за константно време в RAM модела

Следните операции върху числа могат да се изпълнят за константно време в RAM модела, при условие, че операндите се побират в една машинна дума:

- $a + b, -a, a * b, a/b$ ($b \neq 0$)
- $a^b, \lfloor \log_b a \rfloor, a!$ (в случаите, когато $a!$ се побира в машинната дума)
- $a \div b$ (целочислено), $a \bmod b$
- $a = b, a < b$ (може да считаме, че това са операции, чиито резултат е 0 или 1)
- $a \vee b, \neg a, a >> b, a << b$

Разбира се, това не са всички операции. Има доста такива, които могат да се изразят като суперпозиция на изложените (например $a \leq b = a < b \vee a = b$).

1.2.4 Псевдокод

Използването на RAM програми за описване на алгоритмите в курса ще бъде доста тромаво. Затова ще представим, чрез RAM модела някои познати програмни конструкции като if then else, for, while, псевдонимите за *променливи*. Кодът, който ще пишем и анализираме ще използва тези конструкции (и други, дефинирани, когато е уместно).

Ще пишем *псевдокод* - улеснен запис на програма в RAM модела.

- Относно псевдонимите за променливи. В известните от досегашните курсове програмни езици като C++ или Java е въведено понятието за *променлива*. В RAM модела *променливите* представляват клетките от паметта и регистрите. Вместо да ги достъпваме с $\rho(i)$ или γ_j ще използваме подходящи имена (псевдоними).
- Относно if condition then option1 else option2.
- Относно for $i = start$ to end with step do body done.
- Относно while condition do body done.

1.3 Първи пример

Ще разгледаме добре известния алгоритъм на *Евклид* за намиране на най-голям общ делител на две неотрицателни естествени числа.

Задача 1.1 (GCD).

Вход: $A, B \in \mathbb{N}$.

Изход: $\text{НОД}(A, B)$.

EUCLIDGCD(A, B : non-negative integers)

```

@1  while  $A > 0 \wedge B > 0$  do
@2    if  $A > B$  then
@3       $A \leftarrow A \bmod B$ 
@4    else
@5       $B \leftarrow B \bmod A$ 
@6    end if
@7  end while
@8  return  $\max\{A, B\}$ 

```

Твърдение 1.1. При вход естествени числа A и B , $\text{EUCLIDGCD}(A, B)$ връща тяхното най-малко общо кратно.

Лема 1.2. Ако $d = \text{НОД}(A, B)$ и A_n и B_n са състоянията съответно на A и B при n -тото достигане на ред @1 на EUCLIDGCD , то $\text{НОД}(A_n, B_n) = d$.

Колко са операциите, които алгоритъмът извършва върху следните входове:

- $A = 0, B = 3$
- $A = 64, B = 32$
- $A = 13, B = 21$
- $A = f_n, B = f_{n+1}$ (f_n е n -тото число на Фибоначи)

EUCLIDGCDREC(A, B : non-negative integers)

```

@1  if  $A = 0 \vee B = 0$  then
@2    return  $\max\{A, B\}$ 
@3  end if
@4  if  $A > B$  then
@5    return  $\text{EuclidGCDRec}(A \bmod B, B)$ 
@6  end if
@7  return  $\text{EuclidGCDRec}(A, B \bmod A)$ 

```

Твърдение 1.3. При вход естествени числа A и B , $\text{EUCLIDGCDREC}(A, B)$ връща тяхното най-малко общо кратно.

Лема 1.4. За произволно естествено n , при вход A, B , такива, че $A + B = n$ е изпълнено, че $\text{EUCLIDGCDREC}(A, B)$ връща най-малкото общо кратно на A и B .

Рекурсивната версия **EUCLIDGCDREC** позволява съчно намиране на числата от тъждеството на Безу:

$$\begin{aligned}
 A' &= A - Bq, & B' &= B \\
 u'A' + v'B' &= (A, B) \\
 u'(A - Bq) + v'B_n &= (A, B)
 \end{aligned}$$

$$u'A + (v' - u'q)B = (A, B)$$

$$\boxed{u = u' \quad v = v' - u'q}$$

1.4 Коректност на алгоритъм

Искаме алгоритмите, които пишем да гарантират, че върнатата стойност за съответния *екземпляр* на изчислителната задача, да е сред множеството от възможни *решения*.

За целта доказваме свойството *коректност* за алгоритмите си.

1.4.1 Итеративен подход

Основава се на *изобретяването* на инварианти: твърдения за състоянието на променливите и масивите, което остава вярно през целия ход на алгоритъма.

1.4.2 Рекурсивен подход

При доказването на *коректност* на алгоритми, които използват рекурсия се използва метода на математическата индукция по *свойство* на входа.

1.5 Времева сложност

Времева сложност на алгоритъм \mathcal{A} при вход $Input$ наричаме броя елементарни операции, които \mathcal{A} извършва върху $Input$, за да завърши.

Времева сложност в най-лошия случай на \mathcal{A} е функция $Time_{\mathcal{A}}(n)$, приемаща големина на входа n и връщаща максималния брой операции, които \mathcal{A} може да извърши върху вход с големина n .

Ще покажем, че действително входът, при който $EuclidGCD$ извършва най-много операции, е пряко обвързан с числата на Фибоначи.

Лема 1.5. Ако при вход A и B $EuclidGCD$ достига ред $\Theta 1$ точно k пъти, то $\min\{A, B\} \geq f_{k-1}$.

Твърдение 1.6. Времевата сложност на $EuclidGCD$ при вход $(A > 0, B > 0)$ е не повече от $6 \log_{\varphi}(\min\{A, B\}) + 14$.

(разликата спрямо упражнението е, че там е пропусната операцията присвояване на стойност)

1.6 Асимптотика

Имаме горна граница за времевата сложност на $EuclidGCD$ в най-лошия случай. Такъв аргумент обаче би бил тромав за следене при по-сложни алгоритми. За целта въвеждаме следната класификация на функциите $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$:

Определение 1.5 (Асимптотично сравнение - \preceq).

$$f \preceq g \stackrel{def}{\iff} \exists N \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall n (n > N \rightarrow f(n) \leq cg(n))$$

За нас стремеж ще бъде алгоритмите, които пишем да имат "възможно най-малка" относно \preceq сложност в най-лошия случай.

Определение 1.6 (*Big O*). Класът на асимптотично не по-големите функции от f е множеството

$$\mathcal{O}(f) = \{g \mid g \preceq f\}$$

Определение 1.7 (*Big Ω*). Класът на асимптотично не по-малките функции от f е множеството

$$\Omega(f) = \{g \mid f \preceq g\}$$

Определение 1.8 (*Big Θ*). Класът на асимптотично равните функции на f е множеството

$$\Theta(f) = \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f)$$

Под записа $f = X(g)$, където $X \in \{\mathcal{O}, \Omega, \Theta\}$, ще имаме предвид $f \in X(g)$.

1.6.1 Основни свойства

1. За всяко $c \in \mathbb{R}^+$ е в сила, че $cf = \Theta(f)$
2. Ако $f = \mathcal{O}(g)$ и $g = \mathcal{O}(h)$, то $f = \mathcal{O}(h)$
3. Ако $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ и $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\max\{g_1, g_2\})$
4. Ако $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ и $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$
5. Ако съществува границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$, то:
 - (а) $L < \infty$ т.с.т.к. $f \in \mathcal{O}(g)$
 - (б) $0 < L < \infty$ т.с.т.к. $f \in \Theta(g)$
 - (в) ако $L = \infty$, то $f \in \Omega(g)$ (Обратното не винаги е вярно!)
6. За произволни $a > 1$ и $k \geq 0$ е в сила, че $n^k = \mathcal{O}(a^n)$
7. За произволни $a > 1$ и $k > 0$ е в сила, че $\log_a n = \mathcal{O}(n^k)$
8. Ако $f = \Theta(g)$, то $\log_a f = \Theta(\log_a g)$

Релацията \preceq е преднаредба; не всеки две функции са сравними (пример са $\sin(n)$ и $\cos(n)$).

Твърдение 1.7. Времевата сложност в най-лошия случай на `EuclidGCD` при вход (A, B) е $\mathcal{O}(\log(\min\{A, B\}))$.

Задача 1.2 (HOLE). Даден е масив с n различни числа от 1 до $n + 1$. Да се намери първото положително липсващо число в масива.

Вход: $A[1..n]$, $A[i] \leq n + 1$, $1 \leq i \leq n$. - масив от пол. естествени числа.

Изход: $\min\{i \mid i \in \mathbb{N} \ \& \ i \notin A\}$.

2 Линејни обхождания на масив

2.1 Сложност по памет

Сума на размерите на заделените променливи и масиви по време на работа на алгоритъма \mathcal{A} върху даден вход.

Заделянето на масив с размер n в псевдокод ще означаваме с:

SOMEALG(Input)

```

@1  ...
@2  A[1...n] ← malloc(n): ARRAY OF <TYPE>
@3  ...

```

Такова заделяне на памет извършва $\Theta(S(A[1...n]))$ елементарни операции.

Задача 2.1 (MAXIMUM SUBARRAY).

Търсим инфикс на масив с максимална сума. За целта разглеждаме т.н. алгоритъм на Kadane.

Вход: $A[1...n]$ - масив от рационални числа.

Изход: $\max \left\{ \sum_{k=i}^j A[k] \mid 1 \leq i \leq j \leq n \right\}$ - максимална сума на непразен инфикс на A .

KADANE($A[1...n]$: array of rationals)

```

@1  maxInfix ←  $-\infty$ 
@2  maxSuffix ← 0
@3  for i = 1 to n do
@4    maxSuffix ← maxSuffix + A[i]
@5    maxInfix ← max {maxSuffix, maxInfix}
@6    maxSuffix ← max {0, maxSuffix}
@7  end for
@8  return maxInfix

```

Твърдение 2.1. При подаден на вход масив от рационални числа $A[1...n]$, Kadane връща максималната сума на непразен последователен подмасив на A .

В доказателството на **Твърдение 2.1** ще използваме следната **Инварианта**:

Ако при k -тото достигане на ред @3 състоянията на $maxSuffix$ и $maxInfix$ са съответно $maxSuffix_k$ и $maxInfix_k$, то

$$maxInfix_k = \max \left\{ \sum_{t=i}^j A[t] \mid 1 \leq i \leq j \leq k-1 \right\} \text{ и}$$

$$maxSuffix_k = \max \left\{ \sum_{t=i}^k A[t] \mid 1 \leq i \leq k \right\}$$

Твърдение 2.2. Времевата сложност на KADANE в най-лошия случай е $\Theta(n)$.

Друго възможно линейно решение използва т.н. *префиксни суми* и се опира на следните наблюдения:

1. Всяка инфиксна сума е разлика на 2 префиксни:

$$\sum_{k=i}^j A[k] = \sum_{k=1}^j A[k] - \sum_{k=1}^{i-1} A[k]$$

2. Тогава най-голямата инфиксна сума се намира лесно чрез:

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq n} \left\{ \sum_{t=i}^j A[t] \right\} = \max_{1 \leq i \leq j \leq n} \left\{ \sum_{t=1}^j A[t] - \sum_{t=1}^{i-1} A[t] \right\} = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{t=1}^j A[t] - \min_{1 \leq i \leq j} \sum_{t=1}^{i-1} A[t] \right\}$$

Задача 2.2 (DISTANT PAIR).

Дадени са n точки в равнината. Да се намери най-голямото манхатънско разстояние между 2 точки.

Точка ще представяме чрез записа:

```
Point = {
    x : rational
    y : rational
}
```

Манхатънското разстояние между записи от тип *Point* $P1$ и $P2$ ще бележим с $d_M(P1, P2) = |P1.x - P2.x| + |P1.y - P2.y|$

Вход: $P[1..n]$ - масив от *Points*.

Изход: $\max \{d_M(P[i], P[j]) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$.

DISTANT($P[1..n]$: array of Points)

```

01  maxSum ← -∞
02  minSum ← +∞
03  maxDiff ← -∞
04  minDiff ← +∞
05  for i = 1 to n do
06    maxSum ← max {P[i].x + P[i].y, maxSum}
07    minSum ← min {P[i].x + P[i].y, minSum}
08    maxDiff ← max {P[i].x - P[i].y, maxDiff}
09    minDiff ← min {P[i].x - P[i].y, minDiff}
10  end for
11  return max {maxSum - minSum, maxDiff - minDiff}
```

Лема 2.3.

$$\max_{1 \leq i, j \leq n} \{d_M(P[i], P[j])\} = \max \left\{ \max_{1 \leq i, j \leq n} \{(P[i].x + P[i].y) - (P[j].x + P[j].y)\}, \right. \\ \left. \max_{1 \leq i, j \leq n} \{(P[i].x - P[i].y) - (P[j].x - P[j].y)\} \right\}$$

Твърдение 2.4. При вход масив $P[1..n]$, масив от записи *Point*, DISTANT връща най-голямото манхатънско разстояние между някои две от точките за време $\Theta(n)$.

Задача 2.3 (SIEVE). Да се намерят простите числа $\leq n$ (решето на Ератостен)

Вход: n - положително естествено число

Изход: $P[1...k] = \{p \mid p \leq n \text{ \& } p \text{ - просто}\}$.

SIEVE(n : positive integer)

```

01  A[1...n] ← malloc(n): ARRAY OF BOOLEANS
02  for i = 2 to n do
03    A[i] ← true
04  end for
05  A[1] ← false
06  for i = 2 to n do
07    if A[i] = true then
08      Eliminate(i, A[2...n])
09    end if
10  end for
11  P[1...k] ← ArgTrue(A[1...n])
12  return P[1...k]

```

ELIMINATE(p : prime, A[1...n] : booleans)

```

01  j ← 2 * p
02  while j ≤ n do
03    A[j] ← false
04    j ← j + p
05  end while

```

COUNTTRUE(A[1...n] : array of booleans)

```

01  k ← 0
02  for i = 1 to n do
03    if A[i] = true then
04      k ← k + 1
05    end if
06  end for
07  return k

```

ARGTRUE(A[1...n] : array of booleans)

```

01  k ← CountTrue(A[2...n])
02  P[1...k] ← malloc(k): ARRAY OF INTEGERS
03  k ← 1
04  for i = 2 to n do
05    if A[i] = true then
06      P[k] ← i
07      k ← k + 1
08    end if
09  end for
10  return P[1...k]

```

Твърдение 2.5. При вход просто число p и масив от булеви стойности $A[1...n]$, ELIMINATE модифицира $A[1...n]$ до $A'[1...n]$, където за $1 \leq i \leq n$:

$$A'[i] = \begin{cases} false & , \text{ ако } p|i \\ A[i] & , \text{ иначе} \end{cases}$$

Още нещо, ELIMINATE завършва за време $\Theta\left(\frac{n}{p}\right)$.

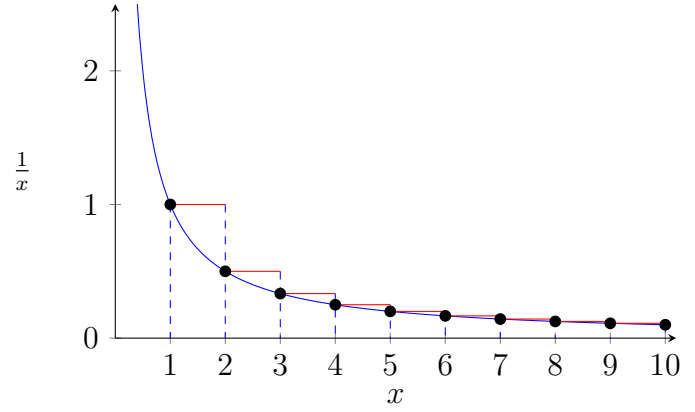
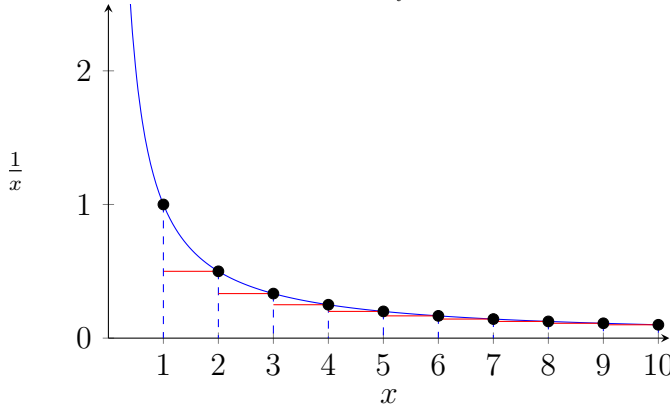
Твърдение 2.6. При вход положително цяло число n , SIEVE връща масив, съдържащ простите числа $p \leq n$. Още нещо, SIEVE завършва за $\mathcal{O}(n \log n)$ време.

За доказателството на **Твърдение 2.6**:

1. Инварианта: При всяко достигане на 07 на SIEVE, за всяко $1 \leq l \leq i$ е в сила, че $A[l] = true$ т.с.т.к. l е просто.
Вярността на тази инварианта съществено ползва **Твърдение 2.5**.
2. COUNTTRUE и ARGTRUE работят за време $\Theta(n)$ и връщат съответно броя и масив от простите числа $p \leq n$
3. SIEVE работи в най-лошия случай за време

$$\mathcal{O}(n) + \sum_{i=2, i \text{ - просто}}^n Time_{Eliminate}(p, A[1...n]) + \Theta(n) + \Theta(n) = \dots = \mathcal{O}(n \log n)$$

Идея за доказване на $\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = \Theta(\log n)$:



Твърдение 2.7 (техника за работа със сума от монотонна непрекъсната функция). Нека $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ монотонна непрекъсната функция и нека

$$S = \sum_{i=1}^n f(i)$$

$$I = \int_1^n f(x) dx$$

Тогава:

- ако f е растяща, то $I + f(1) \leq S \leq I + f(n)$.
- ако f е намаляваща, то $I + f(n) \leq S \leq I + f(1)$.

(ne^{n^2} е пример за неподходяща употреба)

($\mathcal{O}(n \log(\log n))$) е по-добра оценка)

Използваме наготово, че $\pi(k) = |\{p \mid p \leq k \text{ \& } p \text{ е просто}\}| = \frac{k}{\log(k)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(k)}\right)\right)$,

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} &= \sum_{k=1}^n \frac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\pi(k)}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k+1} \\ &= \frac{\pi(n)}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} = \mathcal{O}(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k^2(k+1)} \\ &= \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k^2} + \mathcal{O}(1) = \sum_{k=3}^{n-1} \left[\frac{1}{k \log(k)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k \log(k)^2}\right) \right] + \mathcal{O}(1) \\ &= \log(\log(n)) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

Инициализацията на @7 задава ненужно малка стойност за j . Оптимално е тя да бъде $i * i$, защото съставните числа по-малки от $i * i$ имат прост делител $< i$, тоест вече са отпаднали като кандидати за прости числа ($A[k] = false$). Това е мотивация за "подобрен" алгоритъм (асимптотично нещата не се променят):

ELIMINATE2(p : prime, $A[1..n]$: booleans)

```
@1  j ← p * p
@2  while j ≤ n do
@3    A[j] ← false
@4    j ← j + p
```

05 end while

Задача 2.4 (MAX BOUNDED SUBARRAY).

По даден масив A и рационално число S , търсим максималната сума на подмасив, което не надвишава S .

Да се предложи алгоритъм с времева сложност $\Theta(n)$, който решава следния проблем:

Вход: $A[1 \dots n]$ - масив от рационални числа, S - рационално число.

Изход: $\max \left\{ \sum_{k=i}^j A[k] \mid 1 \leq i, j \leq n \ \& \ \sum_{k=i}^j A[k] \leq S \right\}$.

Задача 2.5 (Алгоритъм на Boyer – Moore).

Изборните резултати са представени с масив от вотове $V[1 \dots n]$, като $V[i]$ е подаден вот за кандидат i (броят на кандидатите не ни е известен). Изборите се печелят от кандидат, когато гласовете за него са над 50%, т.е. поне $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Да се предложи алгоритъм с времева сложност $\Theta(n)$, който решава следния проблем:

Вход: $V[1 \dots n]$ - масив от вотове (положителни естествени числа).

Изход: i - победител в изборите, ако има такъв, в противен случай - 0.

Следва продължение...