Дизайн и анализ на алгоритми

план на упражненията

КН 2.1, летен семестър 2023/2024

Калоян Цветков
kaloyants25@gmail.com

ФМИ, СУ

1.1

Съдържание

Списък с определения, задачи, важни твърдения и допълнения

1 Въведение

1.1 Алгоритъм

Също както за *множество*, така и за *алгоритъм* няма общоприета формална дефиниция.
В този курс *алгоритъм* ще интерпретираме така:

- Алгоритъм е крайна редица от операции, която решава дадена задача.
  Разглеждаме го като реализация на тотална функция $A : Input \mapsto Output$,
  където *Input* и *Output* са крайни редици от числа и масиви.

Потенциални въпроси:

- "Защо редицата от операциите е крайна?"
  Можем да отслабим изискването за крайност и ще получим т.н. *изчислителен метод*.
  В рамките на курса ще разглеждаме единствено редици с краен брой операции.

- "Какво представлява една *операция*?"
  Зависи от *изчислителния модел*. В курса предимно ще се използва RAM моделът.
  В съответната секция ще бъдат описани позволените в RAM модела *операции*.

- "Какво представлява една *задача* и как тя се решава?"
  Става въпрос за *изчислителна задача* - понятие, което има дефиниция.
  Характеризира се със своите *екземпляри*, на всеки от които съответстват неотрицателен брой *решения*.
  Формално, за изчислителна задача може да се счита всяка релация над $\mathbb{N}^{\star}$.
  Можем да мислим за *Input* и *Output* като описания на *екземпляра* и *решението* съответно (или едно от всички възможни *решения*).

- "Защо *Input* и *Output* са крайни редици и защо в тях участват само числа и масиви?"
  Тук отново може да бъде отслабено изискването за крайност, но в рамките на курса няма да разглеждаме задачи с неограничено големи *Input* и *Output*.
  Използваме числа и масиви за описание на *Input* и *Output*, понеже с тях могат да се представят математическите обекти, за които ще решаваме задачи.

- "Какво разбираме под 'числа и масиви'?"
  Числата могат да са от $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$. При $\mathbb{R}$ възниква въпросът за представянето, чрез апроксимация с крайна точност (тази тема може да бъде засегната по-късно).
  Масивите са крайни редици от числа или от други масиви. Множество на масивите - $\mathbb{M}$.
  За $\mathbf{I} = \{I_i\}_{i=1}^{n}, n \in \mathbb{N}^{+}$ - редица от числа, $\mathbf{I} \in \mathbb{M}$.
  За $\mathbf{M} = \{M_i\}_{i=1}^{n}, n \in \mathbb{N}^{+}$, за която $M_i \in \mathbb{M}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{M}$.

Разговорно ще наричаме *Input* вход на алгоритъма и *Output* изход на алгоритъма. Както входът, така и изходът притежават характеристика *размер* $\in \mathbb{N}^{+}$, определен от съдържанието на този вход.

Размерът на число $n \in \mathbb{N}$ се дава с $S_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^{+}$:

$$S_{\mathbb{N}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако } n = 0 \\ \lfloor log_2(n) \rfloor + 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

Естествено може да бъде продължена дефиницията за $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.
Размерът на масив $\mathbf{M} = \{M_i\}_{i=1}^{m}, m \in \mathbb{N}^{+}$ се дава с $S_{\mathbb{M}} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}^{+}$ и $S : \mathbb{N} \cup \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}^{+}$:

$$S_{\mathbb{M}}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^{m} S(M_i)$$

$$S(a) = \begin{cases} S_{\mathbb{N}}(a) & \text{ако } a \in \mathbb{N} \\ S_{\mathbb{M}}(a) & \text{иначе} \end{cases}$$

Размерът на редица от числа и масиви $\{E_i\}_{i=1}^{n}, n \in \mathbb{N}^+$ е сумата от размерите на елементите ѝ.

Определение 1.1 (Размер на входа). *Размер на входа Input наричаме размерът на крайната редица от числа и масиви, които Input представлява.*

1.2 Изчислителен модел

1.2.1 Въвеждане на RAM модела

Машина с произволен достъп или RAM (от английски: Random Access Machine). Това е еквивалентен модел на машините на Тюринг като изразителна способност, но е по-близък до общата представа за модерен компютър.

Определение 1.2 (Машина с произволен достъп или RAM). *Машините с произволен достъп спадат към клас машини с непоследователен достъп до паметта (Random Access Memory или RAM памет). Всяка машина с произволен достъп се състои от памет и програма.*
Паметта на машината е разделена на две части:

- *Краен брой регистри $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}^+$.*
- *Основна памет, която се състои от безкрайно много клетки номерирани $0, 1, 2, \ldots$*

Регистри	*Памет*
регистър γ_0	*0*
регистър γ_1	*1*
регистър γ_2	*2*
$\ldots$	*3*
регистър γ_n	$\ldots$

С $\gamma_k \in \mathbb{Z}, k \in \{0.\ldots, n\}$ ще означаваме стойността, която е в регистъра γ_k.
С $\rho(i) \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}$ ще означаваме стойността, която е в i-тата клетка на паметта.
Стойностите в регистрите и в паметта могат да имат произволно голям размер (тип данни integer).
Програма на машина с произволен достъп е крайна редица от номерирани елементарни инструкции.

Определение 1.3 (Елементарна операция в RAM). *За определеност нека означим с α един от регистрите. Без ограничение на общността избираме γ_0. Регистъра α ще наричаме акумулатор. В него се акумулира резултатът от аритметичните операции. Останалите регистри $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ще наричаме индексни регистри. Нека $i, j, k \in \mathbb{N}$. По-долу ще използваме:*

- *reg, за да означим произволен регистър от $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$.*
- *op, за да означим операнд от вида i, $\rho(i)$ или reg.*
- *mop, за да означим модифициран операнд от вида $\rho(i + \gamma_j)$. Стойността на $\rho(i + \gamma_j)$ е в клетката на паметта на позиция (i + стойността на γ_j).*

Елементарните операции разделяме на следните категории:

1. *Операции за достъп до паметта (четене и писане):*

- $reg \leftarrow op$
- $\alpha \leftarrow mop$
- $op \leftarrow reg$
- $mop \leftarrow \alpha$

2. *Операции за преход (jump):*

- $\underline{\text{goto}}\ k$
- $\underline{\text{if}}\ reg\ \pi\ 0\ \underline{\text{then}}\ \underline{\text{goto}}\ k$, за $\pi \in \{=, \neq, <, \leq, >, \geq\}$

3. *Аритметични операции:*

- $\alpha \leftarrow \alpha\ \pi\ mop$, за $\pi \in \{+, -, \times, div, mod\}$

4. *Операции с индексните регистри:*

- $\gamma_j \leftarrow \gamma_j \pm i$, $1 \leq j \leq n, i \in \mathbb{N}$

Горната дефиниция на RAM позволява да се съхраняват и обработват произволно големи числа, но това не е реалистично предположение. Поради това внимателно ще дефинираме *цената* за изпълнение на елементарните операции.
Цената за изпълнение на елементарна операция се състои от **достъпа до паметта** и **същинската цена за изпълнение**.
Има два основни подхода за определяне на *цената*: UCM (Unit Cost Measure) и LCM (Logarithmic Cost Measure). При UCM се абстрахираме от *размера* на операндите. Това е подходящ подход, при условие че *размерът* на числата, които са в паметта по време на изпълнение на програмата е ограничен отгоре. При LCM взимаме под внимание *размера* на операндите. Използваме дефинираната нагоре функция за *размера* S.

Определение 1.4 (Цена на елементарна операция в RAM)**.** *Определя се според:*

- *Цена за достъп до паметта според операнд:*

Операнд	*UCM*	*LCM*
i	*0*	*0*
reg	*0*	*0*
$\rho(i)$	*1*	$S(i)$
$\rho(i + \gamma_j)$	*1*	$S(i) + S(\gamma_j)$

- *Същинска цена за изпълнение:*

Операция	*UCM*	*LCM*
$reg \leftarrow op$	*1*	$1 + S(op)$
$\alpha \leftarrow mop$	*1*	$1 + S(mop)$
$op \leftarrow reg$	*1*	$1 + S(reg)$
$mop \leftarrow \alpha$	*1*	$1 + S(\alpha)$
$\underline{\text{goto}}\ k$	*1*	$1 + S(k)$
$\underline{\text{if}}\ reg\ \pi\ 0\ \underline{\text{then}}\ \underline{\text{goto}}\ k$	*1*	$1 + S(k)$
$\alpha \leftarrow \alpha\ \pi\ mop$	*1*	$1 + S(\alpha) + S(mop)$
$\gamma_j \leftarrow \gamma_j \pm i$	*1*	$1 + S(\gamma_j) + S(i)$

1.2.2 Представяне на данни в паметта

Представянето на числа е RAM модела става чрез запис в определена k-ична бройна система. Числото k е със семантиката на броя различни единици информация, които машината различава. (при машините на Тюринг k е размерът на азбуката, чиито символи пишем върху лентата).

Важна характеристика в RAM модела е т.н. размер на машинната дума: броя единици информация, които една клетка от паметта съдържа. На този етап се вижда значението на числото k. Нека размерът на машинната дума бележим с d. Тогава:

- При $k = 1$ най-голямото число, което може да се запише в една клетка, е d. Записване на числото n в паметта изисква $\lceil n/d \rceil$ клетки.
- При $k > 1$ най-голямото число, което може да се запише в една клетка, е k^d. Записване на числото n в паметта изисква $\lceil n/k^d \rceil$ клетки.

Както се вижда, разликата е експоненциална. Ние ще работим с машини, в които представянето на числата е в $k > 1$-ична бройна система.

1.2.3 Операции за константно време в RAM модела

Следните операции върху числа могат да се изпълнят за константно време в RAM модела, при условие, че операндите се побират в една машинна дума:

- $a + b$, $-a$, $a * b$, a/b $(b \neq 0)$
- a^b, $\lfloor \log_b a \rfloor$, $a!$ (в случаите, когато $a!$ се побира в машинната дума)
- $a \div b$ (целочислено), $a \mod b$
- $a = b$, $a < b$ (може да считаме, че това са операции, чиито резултат е 0 или 1)
- $a \vee b$, $\neg a$, $a >> b$, $a << b$

Разбира се, това не са всички операции. Има доста такива, които могат да се изразят като суперпозиция на изложените (например $a \leq b = a < b \vee a = b$).

1.2.4 Псевдокод

Използването на RAM програми за описване на алгоритмите в курса ще бъде доста тромаво. Затова ще представим, чрез RAM модела някои познати програмни конструкции като if then else, for, while, псевдонимите за *променливи*. Кодът, който ще пишем и анализираме ще използва тези конструкции (и други, дефинирани, когато е уместно).
Ще пишем *псевдокод* - улеснен запис на програма в *RAM* модела.

- Относно псевдонимите за променливи. В известните от досегашните курсове програмни езици като C++ или Java е въведено понятието за *променлива*. В RAM модела *променливите* представляват клетките от паметта и регистрите. Вместо да ги достъпваме с $\rho(i)$ или γ_j ще използваме подходящи имена (псевдоними).
- Относно if *condition* then *option*1 else *option*2.
- Относто for $i =$ *start to end with step* do *body* done.
- Относто while *condition* do *body* done.

1.3 Първи пример

Ще разгледаме добре известния алгоритъм на *Евклид* за намиране на най-голям общ делител на две неотрицателни естествени числа.

Задача 1.1 (GCD).
Вход: A,B $\in \mathbb{N}$.
Изход: НОД(A,B).

```
EuclidGCD( A, B : non-negative integers)
@1 while A > 0 ∧ B > 0 do
@2  if A > B then
@3   A ← A mod B
@4  else
@5   B ← B mod A
@6  end if
@7 end while
@8 return max{A, B}
```

Твърдение 1.1. *При вход естествени числа A и B,* EuclidGCD(A, B) *връща тяхното най-малко общо кратно.*

Лема 1.2. *Ако d =НОД(A,B) и A_n и B_n са състоянията съответно на A и B при n-тото достигане на ред* @1 *на* EuclidGCD*, то НОД(A_n,B_n)= d.*

Колко са операциите, които алгоритъмът извършва върху следните входове:

- A$= 0$, B$= 3$
- A$= 64$, B$= 32$
- A$= 13$, B$= 21$
- A$= f_n$, B$= f_{n+1}$ (f_n е $n-$тото число на Фибоначи)

```
EuclidGCDRec( A, B : non-negative integers)
@1 if A = 0 ∨ B = 0 then
@2  return max{A, B}
@3 end if
@4 if A > B then
@5  return EuclidGCDRec(A mod B, B)
@6 end if
@7 return EuclidGCDRec(A, B mod A)
```

Твърдение 1.3. *При вход естествени числа A и B,* EuclidGCDRec(A, B) *връща тяхното най-малко общо кратно.*

Лема 1.4. *За произволно естествено n, при вход A,B, такива, че $A + B = n$ е изпълнено, че* EuclidGCDRec(A, B) *връща най-малкото общо кратно на A и B.*

Рекурсивната версия **EuclidGCDRec** позволява сръчно намиране на числата от тъждеството на Безу:

$$A' = A - Bq, \quad B' = B$$

$$u'A' + v'B' = (A, B)$$

$$u'(A - Bq) + v'B_n = (A, B)$$

$$u'A + (v' - u'q)B = (A, B)$$
$$\boxed{u = u' \quad v = v' - u'q}$$

1.4 Коректност на алгоритъм

Искаме алгоритмите, които пишем да гарантират, че върнатата стойност за съответния *екземпляр* на изчислителната задача, да е сред множеството от възможни *решения*.
За целта доказваме свойството *коректност* за алгоритмите си.

1.4.1 Итеративен подход

Основава се на *изобретяването* на инварианти: твърдения за състоянието на променливите и масивите, което остава вярно през целия ход на алгоритъма.

1.4.2 Рекурсивен подход

При доказването на *коректност* на алгоритми, които използват рекурсия се използва метода на математическата индукция по *свойство* на входа.

1.5 Времева сложност

Времева сложност на алгоритъм $\mathcal{A}$ при вход $Input$ наричаме броя елементарни операции, които $\mathcal{A}$ извършва върху $Input$, за да завърши.
Времева сложност в най-лошия случай на $\mathcal{A}$ е функция $Time_{\mathcal{A}}(n)$, приемаща големина на входа n и връщаща максималния брой операции, които $\mathcal{A}$ може да извърши върху вход с големина n.

Ще покажем, че действително входът, при който `EuclidGCD` извършва най-много операции, е пряко обвързан с числата на Фибоначи.

Лема 1.5. *Ако при вход A и B* `EuclidGCD` *достига ред* `@1` *точно k пъти, то* $\min\{A, B\} \geq f_{k-1}$.

Твърдение 1.6. *Времевата сложност на* `EuclidGCD` *при вход $(A > 0, B > 0)$ е не повече от* $6\log_{\varphi}(\min\{A, B\}) + 14$.
(разликата спрямо упражнението е, че там е пропусната операцията присвояване на стойност)

1.6 Асимптотика

Имаме горна граница за времевата сложност на `EuclidGCD` в най-лошия случай. Такъв аргумент обаче би бил тромав за следене при по-сложни алгоритми. За целта въвеждаме следната класификация на функциите $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$:

Определение 1.5 (Асимптотично сравнение - $\preceq$).

$$f \preceq g \overset{def}{\longleftrightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall n\, (n > N \to f(n) \leq cg(n))$$

За нас стремеж ще бъде алгоритмите, които пишем да имат "възможно най-малка" относно $\preceq$ сложност в най-лошия случай.

Определение 1.6 (*Big O*). *Класът на асимптотично не по-големите функции от f е множеството*

$$\mathcal{O}(f) = \{g \mid g \preceq f\}$$

Определение 1.7 (*Big* Ω). *Класът на асимптотично не по-малките функции от f е множеството*

$$\Omega(f) = \{g \mid f \preceq g\}$$

Определение 1.8 (*Big* Θ)**.** *Класът на асимптотично равните функции на* f *е множеството*

$$\Theta(f) = \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f)$$

Под записа $f = X(g)$, където $X \in \{O, \Omega, \Theta\}$, ще имаме предвид $f \in X(g)$.

1.6.1 Основни свойства

1. За всяко $c \in \mathbb{R}^+$ е в сила, че $cf = \Theta(f)$
2. Ако $f = \mathcal{O}(g)$ и $g = \mathcal{O}(h)$, то $f = \mathcal{O}(h)$
3. Ако $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ и $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\max\{g_1, g_2\})$
4. Ако $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ и $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$
5. Ако съществува границата $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$, то:
   (а) $L < \infty$ т.с.т.к. $f \in \mathcal{O}(g)$
   (б) $0 < L < \infty$ т.с.т.к. $f \in \Theta(g)$
   (в) ако $L = \infty$, то $f \in \Omega(g)$ (Обратното не винаги е вярно!)
6. За произволни $a > 1$ и $k \geq 0$ е в сила, че $n^k = \mathcal{O}(a^n)$
7. За произволни $a > 1$ и $k > 0$ е в сила, че $\log_a n = \mathcal{O}(n^k)$
8. Ако $f = \Theta(g)$, то $\log_a f = \Theta(\log_a g)$

Релацията $\preceq$ е преднаредба; не всеки две функции са сравними (пример са $\sin(n)$ и $\cos(n)$).

Твърдение 1.7. *Времевата сложност в най-лошия случай на* `EuclidGCD` *при вход* (A, B) *е* $\mathcal{O}(\log(\min\{A, B\}))$.

Задача 1.2 (**Hole**)**.** *Даден е масив с* n *различни числа от* 1 *до* $n+1$*. Да се намери първото положително липсващо число в масива.*
`Вход:` $A[1...n], A[i] \leq n+1, 1 \leq i \leq n$`. - масив от пол. естествени числа.`
`Изход:` $\min\{i \mid i \in \mathbb{N} \ \&\ i \notin A\}$.

2 Линейни обхождания на масив

2.1 Сложност по памет

Сума на размерите на заделените променливи и масиви по време на работа на алгоритъма $\mathcal{A}$ върху даден вход.
Заделянето на масив с размер n в псевдокод ще означаваме с:

<u>SomeAlg(Input)</u>

...
$A[1...n] \leftarrow malloc(n)$: ARRAY OF <TYPE>
...

Такова заделяне на памет извършва $\Theta(S(A[1...n]))$ елементарни операции.

Задача 2.1 (**Maximum Subarray**).
Търсим инфикс на масив с максимална сума. За целта разглеждаме т.н. алгоритъм на Kadane.

Вход: A[1...n] - **масив от рационални числа.**
Изход: $\max\left\{\sum_{k=i}^{j} A[k] \mid 1 \leq i \leq j \leq n\right\}$ - **максимална сума на непразен инфикс на** A.

<u>Kadane($A[1...n]$: array of rationals)</u>

@1 $maxInfix \leftarrow -\infty$
@2 $maxSuffix \leftarrow 0$
@3 for $i = 1$ to n do
@4 $maxSuffix \leftarrow maxSuffix + A[i]$
@5 $maxInfix \leftarrow \max\{maxSuffix, maxInfix\}$
@6 $maxSuffix \leftarrow \max\{0, maxSuffix\}$
@7 end for
@8 return $maxInfix$

Твърдение 2.1. *При подаден на вход масив от рационални числа $A[1...n]$, Kadane връща максималната сума на непразен последователен подмасив на A.*

В доказателството на **Твърдение** 2.1 ще използваме следната **Инварианта**:

Ако при k-тото достигане на ред @3 състоянията на $maxSuffix$ и $maxInfix$ са съответно $maxSuffix_k$ и $maxInfix_k$, то

$$maxInfix_k = \max\left\{\sum_{t=i}^{j} A[t] \mid 1 \leq i \leq j \leq k-1\right\} \text{ и}$$

$$maxSuffix_k = \max\left\{\sum_{t=i}^{k} A[t] \mid 1 \leq i \leq k\right\}$$

Твърдение 2.2. *Времевата сложност на* Kadane *в най-лошия случай е $\Theta(n)$.*

Друго възможно линейно решение използва т.н. *префиксни суми* и се опира на следните наблюдения:

1. Всяка инфиксна сума е разлика на 2 префиксни:

$$\sum_{k=i}^{j} A[i] = \sum_{k=1}^{j} A[i] - \sum_{k=1}^{i-1} A[i]$$

2. Тогава най-голямата инфиксна сума се намира лесно чрез:

$$\max_{1\leq i\leq j\leq n}\left\{\sum_{t=i}^{j}A[t]\right\}=\max_{1\leq i\leq j\leq n}\left\{\sum_{t=1}^{j}A[t]-\sum_{t=1}^{i-1}A[t]\right\}=\max_{1\leq j\leq n}\left\{\sum_{t=1}^{j}A[t]-\min_{1\leq i\leq j}\sum_{t=1}^{i-1}A[t]\right\}$$

Задача 2.2 (Distant Pair).
Дадени са n точки в равнината. Да се намери най-голямото манхатънско разстояние между 2 точки.
Точка ще представяме чрез записа:

$$\begin{aligned}&\texttt{Point} = \{\\ &\quad x : \texttt{rational}\\ &\quad y : \texttt{rational}\\ &\}\end{aligned}$$

Манхатънското разстояние между записи от тип `Point` *$P1$ и $P2$ ще бележим с* $d_M(P1,P2)=|P1.x-P2.x|+|P1.y-P2.y|$

Вход: P[1...n] - *масив от Points*.
Изход: $\max\{d_M(P[i],P[j])\mid 1\leq i,j\leq n\}$.

<u>Distant($P[1...n]$: array of Points)</u>

$maxSum \leftarrow -\infty$
$minSum \leftarrow +\infty$
$maxDiff \leftarrow -\infty$
$minDiff \leftarrow +\infty$
for $i=1$ **to** n **do**
  $maxSum \leftarrow \max\{P[i].x+P[i].y, maxSum\}$
  $minSum \leftarrow \min\{P[i].x+P[i].y, minSum\}$
  $maxDiff \leftarrow \max\{P[i].x-P[i].y, maxDiff\}$
  $minDiff \leftarrow \min\{P[i].x-P[i].y, minDiff\}$
end for
return $\max\{maxSum-minSum, maxDiff-minDiff\}$

Лема 2.3.

$$\max_{1\leq i,j\leq n}\{d_M(P[i],P[j])\}=\max\left\{\max_{1\leq i,j\leq n}\{(P[i].x+P[i].y)-(P[j].x+P[j].y)\},\right.$$
$$\left.\max_{1\leq i,j\leq n}\{(P[i].x-P[i].y)-(P[j].x-P[j].y)\}\right\}$$

Твърдение 2.4. *При вход масив $P[1...n]$, масив от записи* `Point`*,* Distant *връща най-голямото манхатънско разстояние между някои две от точките за време $\Theta(n)$.*

Задача 2.3 (**Sieve**). *Да се намерят простите числа* $\leq n$ *(решето на Ератостен)*
Вход: n - *положително естествено число*
Изход: $P[1...k]$=$\{p \mid p \leq n \ \&\ p$ - *просто*$\}$.

```
SIEVE( n : positive integer)
@1   A[1...n] ← malloc(n): ARRAY OF BOOLEANS
@2   for i = 2 to n do
@3    A[i] ← true
@4   end for
@5   A[1] ← false
@6   for i = 2 to n do
@7    if A[i] = true then
@8     Eliminate(i, A[2...n])
@9    end if
@10  end for
@11  P[1...k] ← ArgTrue(A[1...n])
@12  return  P[1...k]
```

```
ELIMINATE( p : prime,  A[1...n] : booleans)
j ← 2 * p
while j ≤ n do
 A[j] ← false
 j ← j + p
end while
```

```
COUNTTRUE( A[1...n] : array of booleans)
k ← 0
for i = 1 to n do
 if A[i] = true then
  k ← k + 1
 end if
end for
return  k
```

```
ARGTRUE( A[1...n] : array of booleans)
k ← CountTrue(A[2...n])
P[1...k] ← malloc(k): ARRAY OF INTEGERS
k ← 1
for i = 2 to n do
 if A[i] = true then
  P[k] ← i
  k ← k + 1
 end if
end for
return  P[1...k]
```

Твърдение 2.5. *При вход просто число p и масив от булеви стойности* $A[1...n]$, Eliminate *модифицира* $A[1...n]$ *до* $A'[1...n]$, *където за* $1 \leq i \leq n$:

$$A'[i] = \begin{cases} false & \text{, ако } p|i \\ A[i] & \text{, иначе} \end{cases}$$

Още нещо, Eliminate *завършва за време* $\Theta\left(\frac{n}{p}\right)$.

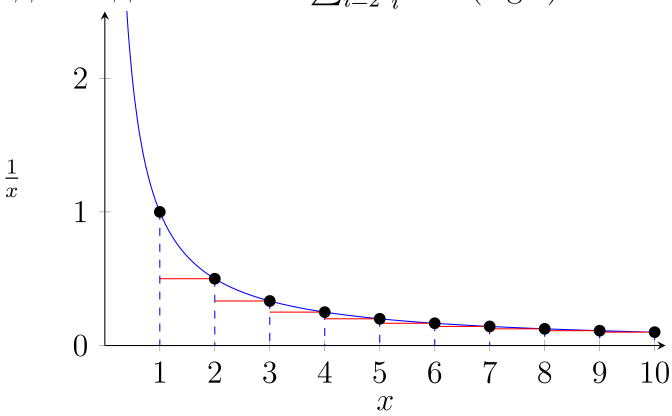
Твърдение 2.6. *При вход положително цяло число n,* Sieve *връща масив, съдържащ простите числа* $p \leq n$. *Още нещо,* Sieve *завършва за* $\mathcal{O}(n \log n)$ *време.*

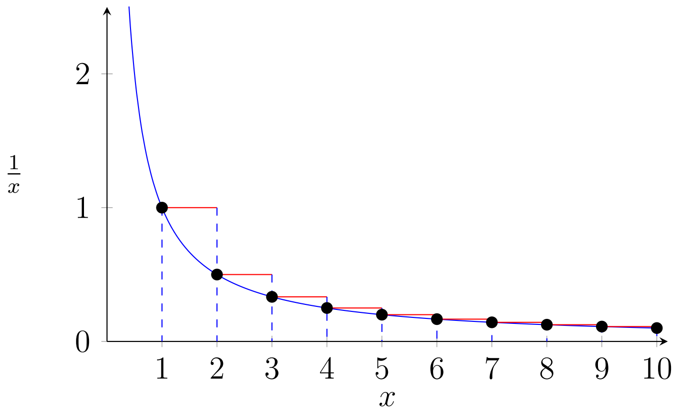
За доказателството на ***Твърдение*** 2.6:

1. Инварианта: При всяко достигане на @7 на Sieve, за всяко $1 \leq l \leq i$ е в сила, че $A[l] = true$ т.с.т.к. l е просто.
   Върността на тази инварианта съществено ползва ***Твърдение*** 2.5.
2. CountTrue и ArgTrue работят за време $\Theta(n)$ и връщат съответно броя и масив от простите числа $p \leq n$
3. Sieve работи в най-лошия случай за време

$$\mathcal{O}(n) + \sum_{i=2, i \text{ - просто}}^{n} Time_{Eliminate}(p, A[1...n]) + \Theta(n) + \Theta(n) = ... = \mathcal{O}(n \log n)$$

Идея за доказване на $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}=\Theta(\log n)$*:*





Твърдение 2.7 (техника за работа със сума от монотонна непрекъсната функция)**.** *Нека* $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{R}^+$ *монотонна непрекъсната функция и нека*

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(i)\qquad I=\int_1^n f(x)dx$$

Тогава:

- *ако* f *е растяща, то* $I+f(1)\leq S\leq I+f(n)$*.*
- *ако* f *е намаляваща, то* $I+f(n)\leq S\leq I+f(1)$*.*

(ne^{n^2} *е пример за неподходяща употреба)*

***Допълнение* 2.1** (($\mathcal{O}(n\log(\log n))$ е по-добра оценка за Sieve))**.**
Използваме наготово, че $\pi(k)=|\{p\mid p\leq k\ \&\ p\text{ е просто}\}|=\frac{k}{\log(k)}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(k)}\right)\right)$*,*

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi(k)-\pi(k-1)}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi(k)}{k}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k+1}\\&=\frac{\pi(n)}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}=\mathcal{O}(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k^2(k+1)}\\&=\sum_{k=3}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k^2}+\mathcal{O}(1)=\sum_{k=3}^{n-1}\left[\frac{1}{k\log(k)}+O\left(\frac{1}{k\log(k)^2}\right)\right]+\mathcal{O}(1)\\&=\log(\log(n))+\mathcal{O}(1)\end{aligned}$$

Инициализацията на @7 задава ненужно малка стойност за j. Оптимално е тя да бъде $i*i$, защото съставните числа по-малки от $i*i$ имат прост делител $< i$, тоест вече са отпаднали като кандидати за прости числа ($A[k]=false$). Това е мотивация за *"подобрен"* алгоритъм (асимптотично нещата не се променят):

Eliminate2(p : prime, $A[1...n]$: booleans)

```
j ← p * p
while j ≤ n do
  A[j] ← false
  j ← j + p
end while
```

Задача 2.4 (**Longest Unique Subarray**). *Елементите на масив са естествени числа, по-малки от n. Търсим най-дългия подмасив, който не съдържа повтарящи се елементи.*

Вход: $A[1...n]$ - масив от естествени числа, $A[i] \leq n$ за $1 \leq i \leq n$
Изход: $\max\left\{ j - i + 1 \mid 1 \leq i \leq j \leq n \ \&\ \{A[k]\}_{k=i}^{j} \text{ не съдържа повтарящи се елементи } \right\}$.

Задача 2.5 (Алгоритъм на $Boyer - Moore$).
Изборните резултати са представени с масив от вотове $V[1...n]$, като $V[i]$ е подаден вот за кандидат i (броят на кандидатите не ни е известен). Изборите се печелят от кандидат, когато гласовете за него са над 50%, т.е. поне $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.
Да се предложи алгоритъм с времева сложност $\Theta(n)$, който решава следния проблем:

Вход: V[1...n] - *масив от вотове (положителни естествени числа).*
Изход: i - *победител в изборите, ако има такъв, в противен случай -* 0.

3 Сортиране (упражнения 3 и 4)

Цел: подредба на елементите "по големина" (т.е. по някакво тяхно свойство)
Алгоритми за сортиране:

- $\mathcal{O}(n^2)$ в най-лошия случай
  - SelectionSort
  - InsertionSort
  - QuickSort (при случаен *pivot*, средна сложност $\mathcal{O}(n \log n)$)
- $\mathcal{O}(n \log n)$
  - HeapSort
  - MergeSort
  - QuickSort (при *pivot*, определен като "Median of medians")
- $\mathcal{O}(n + d) \longrightarrow$ CountingSort (използваме, когато имаме горна граница d за елементите на масива)

Задача 3.1 (2-Sum).

Вход: $A[1...n]$ - *масив от рационални числа.*
Изход: Има ли $1 \leq i < j \leq n$*, такива, че* $A[i] + A[j] = 0$*?*

```
TwoPointerSum( A[l...r] : sorted array of rationals,  target : rational number)
@1   i ← l
@2   j ← r
@3   while i < j ∧ A[i] + A[j] ≠ target do
@4    if A[i] + A[j] < target then
@5     i ← i + 1
@6    else
@7     j ← j − 1
@8    end if
@9   end while
@10  return  i < j
```

Твърдение 3.1. *При вход сортиран масив $A[1...n]$ и рационално число target,* TwoPointerSum *връща истина т.с.т.к. има $1 \leq i < j \leq n$, такива, че $A[i] + A[j] = target$.*
Още нещо, TwoPointerSum *работи върху всеки свой вход за време $\Theta(n)$.*

```
2Sum( A[1...n] : array of rationals)
@1   MergeSort(A[1...n])
@2   return  TwoPointerSum(A[1...n], 0)
```

Коректността на 2Sum е директно следствие от **Твърдение** 3.1, тъй като подаденият на @2 масив е сортираният вход и е в сила, че такива индекси $1 \leq i, j \leq n$ има в A т.с.т.к. има такива индекси $1 \leq i', j' \leq n$ в сортираната пермутация A' на A.

Задача 3.2 (3-Sum).

Вход: $A[1...n]$ - *масив от рационални числа.*
Изход: Има ли $1 \leq i < j < k \leq n$*, такива, че* $A[i] + A[j] + A[k] = 0$*?*

`3Sum(` $A[1...n]$ `: array of rationals)`

@1 `MergeSort(`$A[1...n]$`)`
@2 $i \leftarrow 1$
@3 `while` $i < n-1 \wedge \neg$`TwoPointerSum(`$A[i+1...n]$`,`$-A[i]$`) do`
@4 $\quad i \leftarrow i+1$
@5 `end while`
@6 `return` $\;i < n-1$

Отворен е въпросът дали има $\mathcal{O}(n^{2-\epsilon})$ алгоритъм, решаващ **3-Sum**.

Задача 3.3 (**4-Sum**).

Вход: $A[1...n]$ *- масив от рационални числа.*
Изход: Има ли $1 \leq i < j < k < l \leq n$*, такива, че* $A[i]+A[j]+A[k]+A[l]=0$*?*

```
Sum = {
  left : positive integer
  right : positive integer
  value : rational
}
```

Нека `MergeSortSums` е модификация на `MergeSort`, която сортира масив от `Sums` по контекст $s1 \prec s2$ т.с.т.к. $s1.value < s2.value \vee (s1.value = s2.value \wedge (s1.left < s2.left \vee (s1.left = s2.left \wedge s1.right < s2.right)))$.

Нека `TwoPointerSumSums` е модификация на `TwoPointerSum`, която:

- на вход получава масив от `Sums` и $target$
- на `@3` заменя $A[i]+A[j] \neq target$ с $A[i].value + A[j].value \neq target \vee A[i].left = A[j].left \vee A[i].right = A[j].right$
- на `@4` заменя $A[i]+A[j] < target$ с $A[i].value + A[j].value < target$

`4Sum(` $A[1...n]$ `: array of rationals)`

@1 $B[1...\binom{n}{2}] \leftarrow malloc(\binom{n}{2})$`: ARRAY OF Sums`
@2 $k \leftarrow 1$
@3 `for` $i = 1$ `to` $n-1$ `do`
@4 $\quad$`for` $j = i+1$ `to` n `do`
@5 $\quad\quad B[k] \leftarrow$ `Sum`$(left \leftarrow i, right \leftarrow j, value \leftarrow A[i]+A[j])$
@6 $\quad\quad k \leftarrow k+1$
@7 $\quad$`end for`
@8 `end for`
@9 `MergeSortSums(`$B[1...\binom{n}{2}]$`])`
@10 `TwoPointerSumSums(`$B[1...\binom{n}{2}]$`, 0)`

Времева сложност на `4Sum`: $\mathcal{O}(\binom{n}{2}) + \mathcal{O}(\binom{n}{2}) + \mathcal{O}(\binom{n}{2}\log\binom{n}{2}) + \mathcal{O}(\binom{n}{2}) = \mathcal{O}(n^2\log n)$.

Задача 3.4 (**Minimum Absolute Subarray**). *Да се намери инфиксна сума в масив с най-малка абсолютна стойност.*
(Стока в магазин, да няма недостиг, но и да няма излишък; в кой период е постигнат оптимален резултат?)

Вход: $A[1...n]$ - *масив от рационални числа.*
Изход: $\min\left\{\left|\sum_{k=i}^{j} A[k]\right| \mid 1 \leq i \leq j \leq n\right\}$ - *най-близка до* 0 *сума на непразен инфикс на* A.

Лема 3.2. *Ако за* $k < l$ *имаме, че*

$$|S_k - S_l| = \min\{|S_j - S_i| \mid 0 \leq i < j \leq n\}$$

то няма q*, такова, че* $S_k < S_q < S_l$ *или* $S_l < S_q < S_k$.

Сега след **Лема** 3.2 остава да съобразим, че е достатъчно да сортираме префиксните суми и да търсим минимална абсолютна разлика между някои два последователни.

```
MinAbsSubarray( A[1...n] : array of rationals)
B[0...n] ← malloc(n + 1): ARRAY OF rationals
B[0] ← 0
for i = 1 to n do
 B[i] ← B[i − 1] + A[i]
end for
MergeSort(B[0...n])
m ← +∞
for i = 1 to n do
 m ← min {m, B[i] − B[i − 1]}
end for
return  m
```

Твърдение 3.3. *При вход* $A[1...n]$ *- масив от рационални числа,* MinAbsSubarray *работи за време* $\mathcal{O}(n \log n)$ *и връща най-малката абсолютна стойност на сума на елементите на непразен подмасив на* A.

Задача 3.5 (**Triangles**).

Вход: $A[1...n]$ - *масив от рационални числа.*
Изход: $|\{\langle i, j, k\rangle \mid 1 \leq i < j < k \leq n \;\&\; A[i], A[j], A[k]$ *са страни на триъгълник*$\}|$

```
Triangles( A[1...n] : array of rationals)
MergeSort(A[1...n])
count ← 0
for i = 1 to n − 2 do
 k ← i + 2
 for j = i + 1 to n − 1 do
  while k < n ∧ A[i] + A[j] > A[k] do
   k ← k + 1
  end while
  count ← count + (k − j − 1)
 end for
end for
return  count
```

Коректност на `Triangles` може да се покаже с инварианта за цикъла на `@3`, като за нейното доказване е удобно в стъпката да се дефинира друга инварианта за цикъла на `@5`.

Относно времевата сложност на `Triangles`, ключово наблюдение е `@9` се изпълнява най-много $n - i - 2$ пъти за всяко изпълнение на тялото на цикъла на ред `@3`...

$$Time_{Triangles} = \sum_{i=1}^{n-2} (\mathcal{O}(n-i-2) + \mathcal{O}(n-i-2)) = ... = \mathcal{O}(n^2)$$

Задача 3.6. *Разглеждаме редица от $2n$ рационални числа $\{a_i\}_{i=1}^{2n}$. Групиране на $\{a_i\}_{i=1}^{2n}$ ще наричаме множество от наредени двойки (a_p, a_q), такова, че всеки член a_i на редицата участва точно в една наредена двойка и то веднъж. Тежест на групиране P ще наричаме*

$$w(P) = \max\{a_p + a_q \mid (a_p, a_q) \in P\}$$

. Целим да намерим минималната възможна тежест измежду всички групирания.

Вход: $A[1...2n]$ - **представяне на редица от рационални числа.**
Изход: $m = \min\{w(P) \mid P$ **е групиране за** $A[1...2n]\}$.

Лема 3.4. *Минимална тежест на растяща редица се достига за групирането* $\{(a_i, a_{2n-i+1}) \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Очевидно пермутирането на входа не променя всички възможни групирания, а следователно и това с най-малка тежест не се променя.
След придобитата интуиция за отговора следва само да се възползваме от сортирането:

```
LightestGroup( A[1...2n] : array of rationals)
HeapSort(A[1...2n])
maxSum ← −∞
for i = 1 to n do
 maxSum ← max{maxSum, A[i] + A[2n − i + 1]}
end for
return maxSum
```

Времева сложност: $\mathcal{O}(n \log n)$.

Оказва се, че това групиране решава и следните подобни проблеми:

1. Лекота на групиране P ще наричаме

$$l(P) = \min\{a_p + a_q \mid (a_p, a_q) \in P\}$$

   Вход: $A[1...2n]$ - представяне на редица от рационални числа.
   Изход: $m = \max\{l(P) \mid P$ е групиране за $A[1...2n]\}$.

2. Потенциал на групиране P ще наричаме

$$\pi(P) = w(P) - l(P)$$

   Вход: $A[1...2n]$ - представяне на редица от рационални числа.
   Изход: $m = \min\{\pi(P) \mid P$ е групиране за $A[1...2n]\}$.

Задача 3.7 (Задача 1, писмен изпит, редовна сесия, 2023г.).

Представяне на редица от n интервала I_1,...,I_n ще наричаме двойка от масиви $L[1..n]$ и $R[1..n]$, за които:

$$I_i = [L[i], R[i]] \text{ за всяко } i \in \{1, 2, ..., n\}$$

1. *Разглеждаме следния проблем* **IntersectingPairs**:

   `Вход:` $L[1..n]$, $R[1..n]$ `представяне на редица от` n `интервала` $I_1, I_2, ..., I_n$
   `Изход:` $N = |\,\{(i,j) \mid i < j \text{ и } I_i \cap I_j \neq \emptyset\}\,|$

   Да се предложи алгоритъм със сложност $\mathcal{O}(n \log n)$, който решава проблема **IntersectingPairs**.
   Да се докаже коректността и времевата сложност на предложения алгоритъм.

2. *За редица от интервали $I = (I_1, I_2, ..., I_n)$ с $m(I)$ означаваме най-големия брой интервали от редицата, които в съвкупност имат непразно сечение.*
   Разглеждаме следния проблем **MaxIntersection**:

   `Вход:` $L[1..n]$, $R[1..n]$ `представяне на редица от` n `интервала` $I_1, I_2, ..., I_n$
   `Изход:` $m(I)$

   Да се предложи алгоритъм със сложност $\mathcal{O}(n \log n)$, който решава проблема **MaxIntersection**.
   Да се докаже коректността и времевата сложност на предложения алгоритъм.

Удобно е използването на запис

```
Endpoint = {
  x : rational
  closing : boolean
}
```

Забелязваме, че сортиране на тези записи лексикографски ($false$ считаме за "по-малко" от $true$, за да "засечем" едноточкови пресичания) би помогнало за решаване и на двата проблема за линейно време след това. За целта нека `MergeSortEndpoints` е модификация на `Mergesort`, получаваща на вход масив от `Endpoints` и връщаща негова сортирана пермутация по контекст $e1 \preceq e2$ т.с.т.к. $e1.x < e2.x \vee (e1.x = e2.x \wedge e1.closing = false)$.

1. IntersectingPairs:

```
IntersectingPairs( L[1...n] : left ends,  R[1...n] : right ends)
A[1...2*n] ← malloc(2*n): ARRAY of Endpoints
for i = 1 to n do
 A[2*i-1] ← Endpoint(x ← L[i], closing ← false)
 A[2*i] ← Endpoint(x ← R[i], closing ← true)
end for
MergeSortEndpoints(A[1...2n])
active ← 0
intersections ← 0
for i = 1 to 2*n do
 if A[i].closing = true then
  active ← active - 1
 else
  intersections ← intersections + active
  active ← active + 1
 end if
```

@16 end for
@17 return *intersections*

Твърдение 3.5. *При вход представяне на интервали* $I_1, ..., I_n$ *с* $L[1...n], R[1...n]$, IntersectingPairs *връща броя на двойките различни интервали, които се пресичат.*

Аргументация:
Нека полетата x в сортирания на @6 $A'[1...2n]$ са

$$\underbrace{x_{1,1}, x_{1,2}, ..., x_{1,c_1}}_{c_1}, \underbrace{x_{2,1}, x_{2,2}, ..., x_{2,c_2}}_{c_2}, ..., \underbrace{x_{t,1}, x_{t,2}, ..., x_{t,c_t}}_{c_t}$$

където $x_{i,p} = x_{j,q}$ т.с.т.к. $i = j$.
Тогава, ако $active_k$ и $intersections_k$ са състоянията на *active* и *intersections* непосредствено преди обработването на $x_{k,1}$ (при $1 + c_1 + c_2 + ... + c_{k-1}$-вото достигане на @9), то

$$active_k = |\{I_i \mid L[i] < x_{k,1} \;\&\; R[i] \geq x_{k,1}\}|$$

$$intersections_k = |\{(i,j) \mid L[i] < x_{k,1} \;\&\; L[j] < x_{k,1} \;\&\; I_i \cap I_j \neq \emptyset\}|$$

Относно времевата сложност:

$$Time_{IntersectingPairs} = O(2n) + O(n) + O(2n\log(2n)) + O(2n) = O(n\log n)$$

2. MaxIntersection:

MaxIntersection($L[1...n]$: left ends, $R[1...n]$: right ends)

@1 $A[1...2*n] \leftarrow malloc(2*n)$: ARRAY of Endpoints
@2 for $i = 1$ to n do
@3 $A[2*i-1] \leftarrow$ Endpoint($x \leftarrow L[i], closing \leftarrow false$)
@4 $A[2*i] \leftarrow$ Endpoint($x \leftarrow R[i], closing \leftarrow true$)
@5 end for
@6 MergeSortEndpoints($A[1...2n]$)
@7 $active \leftarrow 0$
@8 $maxIntersecting \leftarrow -\infty$
@9 for $i = 1$ to $2*n$ do
@10 if $A[i].closing = true$ then
@11 $active \leftarrow active - 1$
@12 else
@13 $active \leftarrow active + 1$
@14 $maxIntersecting \leftarrow max\,\{maxIntersecting, active\}$
@15 end if
@16 end for
@17 return *maxIntersecting*

Твърдение 3.6. *При вход представяне на интервали* $I_1, ..., I_n$ *с* $L[1...n], R[1...n]$, MaxIntersection *връща максималния брой интервали с непразно сечение в съвкупност.*

Аргументация:
Нека полетата x в сортирания на @6 $A'[1...2n]$ са

$$\underbrace{x_{1,1}, x_{1,2}, ..., x_{1,c_1}}_{c_1}, \underbrace{x_{2,1}, x_{2,2}, ..., x_{2,c_2}}_{c_2}, ..., \underbrace{x_{t,1}, x_{t,2}, ..., x_{t,c_t}}_{c_t}$$

където $x_{i,p} = x_{j,q}$ т.с.т.к. $i = j$.
Тогава, ако $active_k$ и $intersections_k$ са състоянията на $active$ и $intersections$ непосредствено преди обработването на $x_{k,1}$ (при $1 + c_1 + c_2 + ... + c_{k-1}$-вото достигане на `@9`), то

$$active_k = |\{I_i \mid L[i] < x_{k,1} \ \&\ R[i] \geq x_{k,1}\}|$$

$$maxIntersecting_k = m(\{I_i \mid L[i] < x_{k,1}\})$$

Относно времевата сложност:

$$Time_{MaxIntersection} = O(2n) + O(n) + O(2n\log(2n)) + O(2n) = O(n\log n)$$

Определение 3.1 (Редукция на изчислителни задачи).
Казваме, че **PR1** *се свежда до* **PR2** *и пишем*

$$\mathbf{PR1} \lll_{f(n)} \mathbf{PR2}$$

ако има алгоритъм, разрешаващ **PR1**, *който константен брой пъти използва алгоритъм, решаващ* **PR2**, *както и извършва* $\mathcal{O}(f(n))$ *допълнителна работа.*

Задача 3.8 (**3-Sum-Target**).

`Вход:` $A[1...n], target$ `- масив от рационални числа и търсена сума.`
`Изход: Има ли` $1 \leq i < j < k \leq n$`, такива, че` $A[i] + A[j] + A[k] = target$`?`

Твърдение 3.7 (връзка между проблемите **3-SUM** и **3-SUM-Target**).
Проблемите **3-SUM** *и* **3-SUM-Target** *лесно се свеждат един към друг със следните алгоритми:*

- **3-SUM-Target** $\lll_n$ **3-SUM**
  - *За време* $\mathcal{O}(n)$ *заменяме* $A[i] \rightsquigarrow A[i] - target/3$.
  - *Връщаме резултата от извиването на* **3-SUM** *при вход модифицирания масив A.*
- **3-SUM** $\lll_1$ **3-SUM-Target**
  - *Връщаме резултата от извиването на* **3-SUM-Target** *при вход масива A и целева сума* 0.

Задача 3.9 (**3-Collinear**).

`Вход:` $P_1, ..., P_n$ `- представяния на точки в равнината.`
`Изход: Има ли` $1 \leq i < j < k \leq n$`, такива, че` P_i, P_j, P_k `са колинеарни?`

Твърдение 3.8.

$$\textbf{3-Sum} \lll_{n\log n} \textbf{3-Collinear}$$

Алгоритъм за **3-Sum***:*

1. *За време* $\mathcal{O}(n\log n)$ *може да се провери дали има тройка индекси, за които някои два елемента са равни и сумата на трите е* 0 *(как?)*

2. *Премахваме повтарящите се елементи*

3. *За всеки елемент на A конструираме* $A[i] \rightsquigarrow (A[i], A[i]^3)$

4. *Връщаме резултата от* **3-COLLINEAR** *при вход съпоставените точки.*

Използваме фактът, че $A[i] + A[j] + A[k] = 0$ *т.с.т.к.* $\langle A[i], A[i]^3\rangle, \langle A[j], A[j]^3\rangle, \langle A[k], A[k]^3\rangle$ *са колинеарни.*
(Второто е еквивалентно на нулева детерминанта $\begin{vmatrix} A[i] & A[i]^3 & 1 \\ A[j] & A[j]^3 & 1 \\ A[k] & A[k]^3 & 1 \end{vmatrix}$ *)*

Задача 3.10 (**CONCURRENT LINES**).

`Вход:` $l_1, ..., l_n$ `- представяния на прави в равнината.`
`Изход: Има ли` $1 \leq i < j < k \leq n$`, такива, че` l_i, l_j, l_k `се пресичат в една точка?`

***Допълнение* 3.1** (**CONCURRENT LINES**).

$$\textbf{3-COLLINEAR} \lll_{n \log n} \textbf{CONCURRENT LINES}$$

Алгоритъм за **3-COLLINEAR***:*

1. Сортираме по x точките за $\mathcal{O}(n \log n)$

2. Проверяваме дали има някои с еднаква x координата за $\mathcal{O}(n)$

3. Заменяме всяка точка $(x_i, y_i) \rightsquigarrow l_i : \ x_i x - y - y_i = 0$

4. Три точки с различни x координати са колинеарни т.с.т.к. съпоставените им прави се пресичат в 1 точка, т.е. връщаме резултата от **CONCURRENT LINES** при вход съпоставените прави.

Използваме, че $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ с $x_i \neq x_j$ лежат на права $l : ax - y - b = 0$ т.с.т.к (a, b) е пресечната точка на l_i и l_j.

Неразгледани (до момента) задачи:

Задача 3.11 (**Max Cluster**).

`Вход:` $A[1...n]$ `- масив от рационални числа,` $d \in \mathbb{Q}^+$.
`Изход:` $\max\{|S| \mid S \subseteq A \,\&\, \forall x, y \in S\, (|x - y| \leq d)\}$.

Задача 3.12 (**IntersectingSegments**).
Разглеждаме правите в равнината $y = 0$ и $y = 1$. Върху $y = 0$ са разположени n различни точки

$$(a_1, 0), (a_2, 0), ..., (a_n, 0)$$

Върху $y = 1$ са разположени n различни точки

$$(b_1, 1), (b_2, 1), ..., (b_n, 1)$$

С s_i бележим отсечката с краища $(a_i, 0)$ и $(b_i, 1)$.

`Вход:` $A[1...n], B[1...n]$ `- масив от абсцисите на точките.`
`Изход:` $|\{(s_i, s_j) \,\&\, 1 \leq i < j \leq n \,\&\, s_i \cap s_j \neq \emptyset\}|$.

4 Двоично търсене (Разделяй и владей)

Задача 4.1 (**Flip**). *$A[1...n]$, за който $A[1] > A[n]$; да се намери позицията на елемент $A[i] > A[i+1]$.*

Вход: $A[1...n]$ - **масив от рационални числа, за който** $A[1] > A[n]$.
Изход: $i \in \mathbb{N}$, **такова, че** $1 \leq i < n$ *и* $A[i] > A[i+1]$.

Лема 4.1. *Ако за редица от рационални числа $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ е изпълнено, че $a_1 > a_n$, то има $1 \leq i < n$, такова, че $a_i > a_{i+1}$.*

Тогава такъв индекс в масива, подаден на вход има. Удобно е да го потърсим двоично:

```
Flip( A[1...n] : array of rationals, such that A[1] > A[n])
left ← 1
right ← n
while right − left > 1 do
 m ← ⌊(left + right)/2⌋
 if A[left] > A[m] then
  right ← m
 else
  left ← m
 end if
end while
return left
```

Твърдение 4.2. *При вход $A[1...n]$, за който $A[1] > A[n]$,* Flip *връща индекс i, такъв, че $1 \leq i < n$ и $A[i] > A[i+1]$. Също така* Flip *има времева сложност $\mathcal{O}(\log n)$.*

По-удобно за анализ е следното рекурсивно решение на същия проблем:

```
FlipRec( A[l...r] : array of rationals, such that A[1] > A[n])
if r − l <= 1 then return l
m ← ⌊(l + r)/2⌋
if A[l] > A[m] then return FlipRec(A[l...m])
return FlipRec(A[m...r])
```

FlipRec поражда следното уравнение за времевата си сложност:

$$T(2) \leq 2$$
$$T(n) \leq T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(1)$$

...чието решение е $T(n) = \log(n)$.

Задача 4.2 (Домашно 1, писмен изпит, редовна сесия, 2023г.).
За матрица $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ от нули и единици ще казваме, че е 4-интересна, ако сумата на четирите ѝ ъглови елемента не се дели на 4, т.е., ако:

$$a_{1,1} + a_{1,n} + a_{n,1} + a_{n,n} \not\equiv 0 \pmod 4$$

1. *Да се докаже, че ако A е 4-интересна, то A съдържа подматрица 2×2, определена от два съседни реда и два съседни стълба, която е 4-интересна.*

2. *Да се предложи алгоритъм с времева сложност $O(\log n)$, който решава следния проблем:*

   Вход: $A[1...n][1...n]$ - 4-*интересна матрица*
   Изход: (i, j), *за които* $A[i...i+1][j...j+1]$ *е* 4-*интересна подматрица.*

Ще използваме Flip, заедно със следните негови модификации:

- FlipCol - получава на вход матрица $A[1...n][1...n]$, както и индекс на неин стълб j, за който $A[1][j] > A[n][j]$ и връща индекс на ред i, такъв, че $A[i][j] > A[i+1][j]$.
  Единствено заменяме проверката на @5 с $A[left][j] > A[m][j]$

- FlipInv - получава на вход масив $A[1...n]$, за който $A[n] > A[1]$ и връща индекс $1 < i \leq n$, такъв, че $A[i] > A[i-1]$.
  Единствено заменяме проверката на @5 с $A[left] < A[mid]$.

- FlipColInv - получава на вход матрица $A[1...n][1...n]$, както и индекс на неин стълб j, за който $A[1][j] < A[n][j]$ и връща индекс на ред i, такъв, че $A[i][j] > A[i-1][j]$.
  Единствено заменя проверката на @5 с $A[left][j] < A[m][j]$

4Interesting($A[1...n][1...n]$: 0/1 matrix)

@1 if $A[1][1] > A[1][n]$ then
@2 $pos \leftarrow$Flip($A[1][1...n]$)
@3 return $A[1...2][pos...pos+1]$
@4 else if $A[1][n] > A[n][n]$ then
@5 $pos \leftarrow$FlipCol($A[1...n][1...n]$,n)
@6 return $A[pos...pos+1][n-1...n]$
@7 else if $A[n][n] > A[n][1]$ then
@8 $pos \leftarrow$FlipInv($A[n][1...n]$)
@9 return $A[n-1...n][pos-1...pos]$
@10 end if
@11 $pos \leftarrow$FlipColInv($A[1...n][1...n]$,1)
@12 return $A[pos-1...pos][1...2]$

Твърдение 4.3.
При вход 4-*интересна матрица* $A[1...n][1...n]$, 4Interesting *връща за време* $\mathcal{O}(\log n)$ 4-*интересна* 2×2 *подматрица на* A.

Най-съществената част от доказателството на **Твърдение** 4.3 е фактът, че някое от условията $A[1][1] > A[1][n]$, $A[1][n] > A[n][n]$, $A[n][n] > A[n][1]$ и $A[n][1] > A[1][1]$ е истина за всяка 4-интересна матрица.

Неразгледани (до момента) задачи:

Задача 4.3 (Домашно 1, Контролно 1, 2023г.).

1. *На окръжност по часовниковата стрелка, са написани n реални числа, $a_0, ..., a_{n-1}$, със сума 0. Да се докаже, че има $i \leq n$, за което:*

$$\sum_{k=0}^{j} a_{(i+k)\ (mod\ n)} \geq 0 \text{ за всяко } j \geq 0. \qquad (\star)$$

2. *Да е предложи алгоритъм със сложност $\mathcal{O}(n)$, който решава следния проблем:*

   `Вход:` $A[0...n-1]$ `- масив от цели числа със сума` 0.
   `Изход:` i`, за което е изпълнено` $(\star)$.

3. *Да се докаже, че за всяко непразно множество $M = \{x_1, ..., x_n\}$ от точки в равнината и всяка права l има точка $x_i \in M$, такава, че правата през x_i, успоредна на l, разделя равнината на две полуравнини, като една от двете не съдържа точки от M*

4. *Да се предложи алгоритъм със сложност $\mathcal{O}(n)$, който решава следния проблем:*

   `Вход:` $M[1...n][2]$ `- масив от целочислени точки в ранината,` $v[2]$ `- ненулев целочислен вектор`

   `Изход:` i `- индекс на точка` $M[i]$`, такава, че` $\langle\overrightarrow{M[i]M[j]}, v\rangle \geq 0$ `за всяко` $j \leq n$.

Задача 4.4 (Локален минимум в масив).
Ще казваме, че индексът $1 < i < n$ е локален минимум за масива $A[1...n]$, когато за всеки индекс $1 \leq j \leq n$

$$\text{ако } |i-j| = 1, \text{ то } A[i] < A[j]$$

.Предложете алгоритъм с времева сложност $\mathcal{O}(\log n)$, решаващ следния проблем:

`Вход:` $A[1...n]$ `- масив от рационални числа, в който има индекс на локален минимум`
`Изход:` i `- индекс на локален минимум.`

5 Разделяй и владей

Твърдение 5.1 (Частни случаи на уравнение, породено от *Разделяй и владей*).
Ако $c \in \mathbb{R}^+$, $b > 1$, а $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ е функция, за която

$$T(n) \leq a \text{ при } n < b$$
$$T(n) \leq c\,T\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + f(n) \qquad \text{, то}$$

- *ако $f(n) \in \mathcal{O}(n^\alpha)$ с $\alpha < \log_b c$, то $T \in \mathcal{O}(n^{\log_b c})$*
- *ако $f(n) \in \Omega(n^\alpha)$ с $\alpha > \log_b c$, то $T \in \mathcal{O}(n^\alpha)$*
- *ако $f(n) \in \Theta(n^{\log_b c})$, то $T \in \mathcal{O}(n^{\log_b c} \log_b n)$*

Примери:

- $T(n) \leq 9T\left(\frac{n}{3}\right) + \mathcal{O}(n) \rightsquigarrow T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$
- $T(n) \leq 4T\left(\frac{n}{5}\right) + \mathcal{O}(n) \rightsquigarrow T(n) \in \mathcal{O}(n)$
- $T(n) \leq 4T\left(\frac{n}{5}\right) + \mathcal{O}(1) \rightsquigarrow T(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_5 4})$
- $T(n) \leq T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(1) \rightsquigarrow T(n) \in \mathcal{O}(\log n)$
- $T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) \rightsquigarrow T(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$
- $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) \rightsquigarrow T(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_2 3})$
- $T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n \log n)$ - **Твърдение** 5.1 не е приложимо, решаваме с различни методи, например с развиване на рекурентната зависимост за $F(n) = \frac{T(n)}{n}$ следва, че $F(n) \in \mathcal{O}(\log^2 n)$

Задача 5.1 (**Closest Pair**).
При наличие на n точки в равнината, колко е най-малкото разстояние между някои две от тях? Проблемът очевидно е приложим в практиката

Точка с рационални координати в равнината представяме със записа:

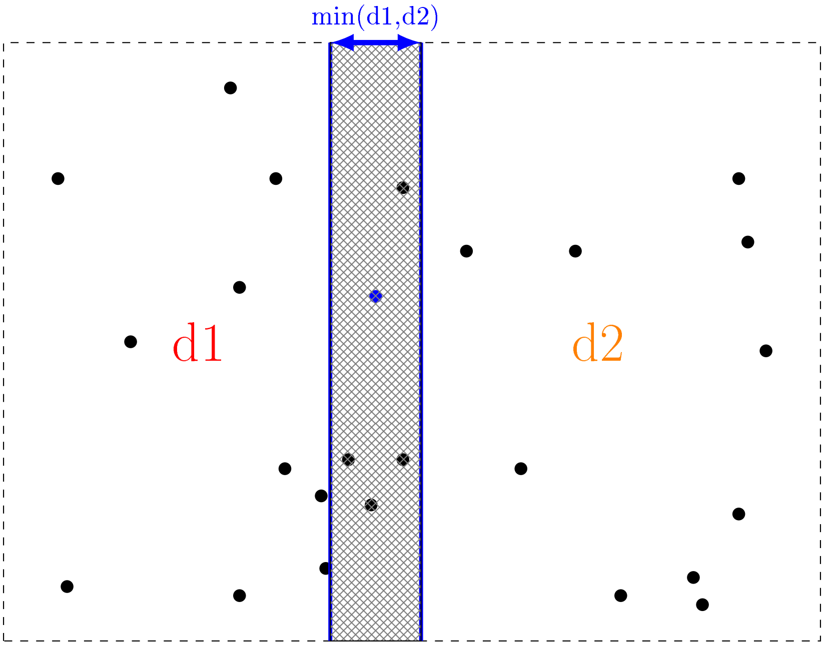
$$\begin{aligned}&\texttt{Point} = \{\\ &\quad \texttt{x} : \texttt{rational}\\ &\quad \texttt{y} : \texttt{rational}\\ &\}\end{aligned}$$

Вход: `A[1...n]` *: масив от* `Point` *записи.*
Изход: $\min\{d(A[i], A[j]) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

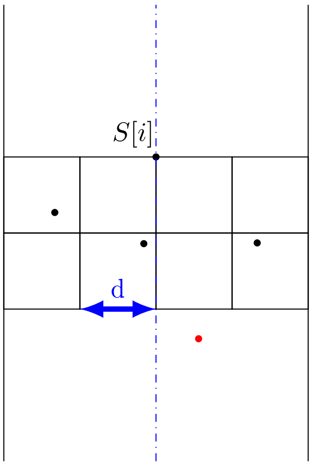
Тривиалният алгоритъм, търсещ минимума по всички двойки различни точки за време $\Theta(n^2)$, ще наречем ClosestPairDummy.

Тук алгоритъм от вида *Разделяй и владей* е приложим.

Как да реализираме стъпката "*владей*" най-ефективно?
Сортиране на средната ивица за $\mathcal{O}(n \log n)$ всеки път води до алгоритъм с времева сложност $\mathcal{O}(n \log^2 n)$.



Фигура 1: *Разделяй и владей* идея за най-близки точки в равнината



Фигура 2: Идея за изследване на средната ивица с широчина d

Целим времева сложност:

$$T(n) \leq a \text{ при } n < 4$$
$$T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n)$$

тоест $Time_{ClosestPair}(n) = \underbrace{\mathcal{O}(n\log n)}_{\text{сортиране по } x} + T(n) = \mathcal{O}(n\log n)$.

Твърдение 5.2 (долна граница за **Closest Pair**).
Ще покажем, че проблемът **Closest Pair** е $\Omega(n\log n)$, *като посочим редукция на* **Uniqueness** *към* **Closest Pair**.

$$\textsc{Uniqueness} \lll_n \textsc{Closest Pair}$$

Preprocessing:

1. *За всеки елемент* $A[i] \rightsquigarrow (A[i], 0)$

2. *$A[i] = A[j]$ за някои $1 \leq i < j \leq n$ т.с.т.к. най-късото евклидово разстояние между две от точките е 0, т.е. връщаме дали* **Closest Pair** *при вход съпоставените точки е 0.*

Следва продължение...