Дизайн и анализ на алгоритми

план на упражненията

КН 2.1, летен семестър 2023/2024

Калоян Цветков
kaloyants25@gmail.com

ФМИ, СУ

1.0

Съдържание

1 Въведение **3**
1.1 Алгоритъм . . . 3
1.2 Изчислителен модел . . . 4
1.2.1 Въвеждане на RAM модела . . . 4
1.2.2 Представяне на данни в паметта . . . 6
1.2.3 Операции за константно време в RAM модела . . . 6
1.2.4 Псевдокод . . . 6
1.3 Първи пример . . . 7
1.4 Коректност на алгоритъм . . . 8
1.4.1 Итеративен подход . . . 8
1.4.2 Рекурсивен подход . . . 8
1.5 Времева сложност . . . 8
1.6 Асимптотика . . . 8
1.6.1 Основни свойства . . . 9

2 Линейни обхождания на масив **10**
2.1 Сложност по памет . . . 10

Списък с определения, задачи и важни твърдения

1.1 Определение . . . 4
1.2 Определение – Машина с произволен достъп или RAM . . . 4
1.3 Определение – Елементарна операция в RAM . . . 4
1.4 Определение – Цена на елементарна операция в RAM . . . 5
1.1 Задача – **GCD** . . . 7
1.5 Определение – Асимптотично сравнение - $\preceq$ . . . 8
1.6 Определение – *Big* O . . . 8
1.7 Определение – *Big* Ω . . . 9
1.8 Определение – *Big* Θ . . . 9
1.2 Задача – **Hole** . . . 9
2.1 Задача – **Maximum Subarray** . . . 10
2.2 Задача – **Distant Pair** . . . 11
2.3 Задача – **Sieve** . . . 12
2.7 Твърдение – техника за работа със сума от монотонна непрекъсната функция . . . 13
2.4 Задача – **Max Bounded Subarray** . . . 14
2.5 Задача – Алгоритъм на $Boyer - Moore$ . . . 14

1 Въведение

1.1 Алгоритъм

Също както за *множество*, така и за *алгоритъм* няма общоприета формална дефиниция.
В този курс *алгоритъм* ще интерпретираме така:

- Алгоритъм е крайна редица от операции, която решава дадена задача.
  Разглеждаме го като реализация на тотална функция $A : Input \mapsto Output$,
  където *Input* и *Output* са крайни редици от числа и масиви.

Потенциални въпроси:

- "Защо редицата от операциите е крайна?"
  Можем да отслабим изискването за крайност и ще получим т.н. *изчислителен метод.*
  В рамките на курса ще разглеждаме единствено редици с краен брой операции.

- "Какво представлява една *операция*?"
  Зависи от *изчислителния модел.* В курса предимно ще се използва RAM моделът.
  В съответната секция ще бъдат описани позволените в RAM модела *операции.*

- "Какво представлява една *задача* и как тя се решава?"
  Става въпрос за *изчислителна задача* - понятие, което има дефиниция.
  Характеризира се със своите *екземпляри*, на всеки от които съответстват неотрицателен брой *решения.*
  Формално, за изчислителна задача може да се счита всяка релация над $\mathbb{N}^\star$.
  Можем да мислим за *Input* и *Output* като описания на *екземпляра* и *решението* съответно (или едно от всички възможни *решения*).

- "Защо *Input* и *Output* са крайни редици и защо в тях участват само числа и масиви?"
  Тук отново може да бъде отслабено изискването за крайност, но в рамките на курса няма да разглеждаме задачи с неограничено големи *Input* и *Output.*
  Използваме числа и масиви за описание на *Input* и *Output*, понеже с тях могат да се представят математическите обекти, за които ще решаваме задачи.

- "Какво разбираме под 'числа и масиви'?"
  Числата могат да са от $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$. При $\mathbb{R}$ възниква въпросът за представянето, чрез апроксимация с крайна точност (тази тема може да бъде засегната по-късно).
  Масивите са крайни редици от числа или от други масиви. Множество на масивите - $\mathbb{M}$.
  За $\mathbf{I} = \{I_i\}_{i=1}^n, n \in \mathbb{N}^+$ - редица от числа, $\mathbf{I} \in \mathbb{M}$.
  За $\mathbf{M} = \{M_i\}_{i=1}^n, n \in \mathbb{N}^+$, за която $M_i \in \mathbb{M}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{M}$.

Разговорно ще наричаме *Input* вход на алгоритъма и *Output* изход на алгоритъма. Както входът, така и изходът притежават характеристика *размер* $\in \mathbb{N}^+$, определен от съдържанието на този вход.

Размерът на число $n \in \mathbb{N}$ се дава с $S_\mathbb{N} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^+$:

$$S_\mathbb{N}(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако } n = 0 \\ \lfloor log_2(n) \rfloor + 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

Естествено може да бъде продължена дефиницията за $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.
Размерът на масив $\mathbf{M} = \{M_i\}_{i=1}^m, m \in \mathbb{N}^+$ се дава с $S_\mathbb{M} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}^+$ и $S : \mathbb{N} \cup \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}^+$:

$$S_\mathbb{M}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^{m} S(M_i)$$

$$S(a) = \begin{cases} S_{\mathbb{N}}(a) & \text{ако } a \in \mathbb{N} \\ S_{\mathbb{M}}(a) & \text{иначе} \end{cases}$$

Размерът на редица от числа и масиви $\{E_i\}_{i=1}^{n}, n \in \mathbb{N}^+$ е сумата от размерите на елементите ѝ.

Определение 1.1. *Размер на входа Input наричаме размерът на крайната редица от числа и масиви, които Input представлява.*

1.2 Изчислителен модел

1.2.1 Въвеждане на RAM модела

Машина с произволен достъп или RAM (от английски: Random Access Machine). Това е еквивалентен модел на машините на Тюринг като изразителна способност, но е по-близък до общата представа за модерен компютър.

Определение 1.2 (Машина с произволен достъп или RAM)**.** *Машините с произволен достъп спадат към клас машини с непоследователен достъп до паметта (Random Access Memory или RAM памет). Всяка машина с произволен достъп се състои от памет и програма.*
Паметта на машината е разделена на две части:

- *Краен брой регистри $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}^+$.*
- *Основна памет, която се състои от безкрайно много клетки номерирани $0, 1, 2, \ldots$*

Регистри	*Памет*
регистър γ_0	*0*
регистър γ_1	*1*
регистър γ_2	*2*
$\ldots$	*3*
регистър γ_n	$\ldots$

С $\gamma_k \in \mathbb{Z}, k \in \{0 \ldots, n\}$ ще означаваме стойността, която е в регистъра γ_k.
С $\rho(i) \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}$ ще означаваме стойността, която е в i-тата клетка на паметта.
Стойностите в регистрите и в паметта могат да имат произволно голям размер (тип данни integer).
Програма на машина с произволен достъп е крайна редица от номерирани елементарни инструкции.

Определение 1.3 (Елементарна операция в RAM)**.** *За определеност нека означим с α един от регистрите. Без ограничение на общността избираме γ_0. Регистъра α ще наричаме акумулатор. В него се акумулира резултатът от аритметичните операции. Останалите регистри $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ще наричаме индексни регистри. Нека $i, j, k \in \mathbb{N}$. По-долу ще използваме:*

- *reg, за да означим произволен регистър от $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$.*
- *op, за да означим операнд от вида i, $\rho(i)$ или reg.*
- *mop, за да означим модифициран операнд от вида $\rho(i + \gamma_j)$. Стойността на $\rho(i + \gamma_j)$ е в клетката на паметта на позиция (i + стойността на γ_j).*

Елементарните операции разделяме на следните категории:

1. *Операции за достъп до паметта (четене и писане):*

- $reg \leftarrow op$
- $\alpha \leftarrow mop$
- $op \leftarrow reg$
- $mop \leftarrow \alpha$

2. *Операции за преход (jump):*
   - <u>goto</u> k
   - <u>if</u> $reg\ \pi\ 0$ <u>then</u> <u>goto</u> k, за $\pi \in \{=, \neq, <, \leq, >, \geq\}$
3. *Аритметични операции:*
   - $\alpha \leftarrow \alpha\ \pi\ mop$, за $\pi \in \{+, -, \times, div, mod\}$
4. *Операции с индексните регистри:*
   - $\gamma_j \leftarrow \gamma_j \pm i$, $1 \leq j \leq n, i \in \mathbb{N}$

Горната дефиниция на RAM позволява да се съхраняват и обработват произволно големи числа, но това не е реалистично предположение. Поради това внимателно ще дефинираме *цената* за изпълнение на елементарните операции.
Цената за изпълнение на елементарна операция се състои от **достъпа до паметта** и **същинската цена за изпълнение**.
Има два основни подхода за определяне на *цената*: UCM (Unit Cost Measure) и LCM (Logarithmic Cost Measure). При UCM се абстрахираме от *размера* на операндите. Това е подходящ подход, при условие че *размерът* на числата, които са в паметта по време на изпълнение на програмата е ограничен отгоре. При LCM взимаме под внимание *размера* на операндите. Използваме дефинираната нагоре функция за *размера* S.

Определение 1.4 (Цена на елементарна операция в RAM)**.** *Определя се според:*

- *Цена за достъп до паметта според операнд:*

Операнд	*UCM*	*LCM*
i	*0*	*0*
reg	*0*	*0*
$\rho(i)$	*1*	$S(i)$
$\rho O(i + \gamma_j)$	*1*	$S(i) + S(\gamma_j)$

- *Същинска цена за изпълнение:*

Операция	*UCM*	*LCM*
$reg \leftarrow op$	*1*	$1 + S(op)$
$\alpha \leftarrow mop$	*1*	$1 + S(mop)$
$op \leftarrow reg$	*1*	$1 + S(reg)$
$mop \leftarrow \alpha$	*1*	$1 + S(\alpha)$
<u>goto</u> k	*1*	$1 + S(k)$
<u>if</u> $reg\ \pi\ 0$ <u>then</u> <u>goto</u> k	*1*	$1 + S(k)$
$\alpha \leftarrow \alpha\ \pi\ mop$	*1*	$1 + S(\alpha) + S(mop)$
$\gamma_j \leftarrow \gamma_j \pm i$	*1*	$1 + S(\gamma_j) + S(i)$

1.2.2 Представяне на данни в паметта

Представянето на числа е RAM модела става чрез запис в определена k-ична бройна система. Числото k е със семантиката на броя различни единици информация, които машината различава. (при машините на Тюринг k е размерът на азбуката, чиито символи пишем върху лентата).

Важна характеристика в RAM модела е т.н. размер на машинната дума: броя единици информация, които една клетка от паметта съдържа. На този етап се вижда значението на числото k. Нека размерът на машинната дума бележим с d. Тогава:

- При $k = 1$ най-голямото число, което може да се запише в една клетка, е d. Записване на числото n в паметта изисква $\lceil n/d \rceil$ клетки.
- При $k > 1$ най-голямото число, което може да се запише в една клетка, е k^d. Записване на числото n в паметта изисква $\lceil n/k^d \rceil$ клетки.

Както се вижда, разликата е експоненциална. Ние ще работим с машини, в които представянето на числата е в $k > 1$-ична бройна система.

1.2.3 Операции за константно време в RAM модела

Следните операции върху числа могат да се изпълнят за константно време в RAM модела, при условие, че операндите се побират в една машинна дума:

- $a + b$, $-a$, $a * b$, a/b $(b \neq 0)$
- a^b, $\lfloor \log_b a \rfloor$, $a!$ (в случаите, когато $a!$ се побира в машинната дума)
- $a \div b$ (целочислено), $a \mod b$
- $a = b$, $a < b$ (може да считаме, че това са операции, чиито резултат е 0 или 1)
- $a \vee b$, $\neg a$, $a >> b$, $a << b$

Разбира се, това не са всички операции. Има доста такива, които могат да се изразят като суперпозиция на изложените (например $a \leq b = a < b \vee a = b$).

1.2.4 Псевдокод

Използването на RAM програми за описване на алгоритмите в курса ще бъде доста тромаво. Затова ще представим, чрез RAM модела някои познати програмни конструкции като if then else, for, while, псевдонимите за *променливи*. Кодът, който ще пишем и анализираме ще използва тези конструкции (и други, дефинирани, когато е уместно).
Ще пишем *псевдокод* - улеснен запис на програма в RAM модела.

- Относно псевдонимите за променливи. В известните от досегашните курсове програмни езици като C++ или Java е въведено понятието за *променлива*. В RAM модела *променливите* представляват клетките от паметта и регистрите. Вместо да ги достъпваме с $\rho(i)$ или γ_j ще използваме подходящи имена (псевдоними).
- Относно if *condition* then *option*1 else *option*2.
- Относто for $i =$ *start to end with step* do *body* done.
- Относто while *condition* do *body* done.

1.3 Първи пример

Ще разгледаме добре известния алгоритъм на *Евклид* за намиране на най-голям общ делител на две неотрицателни естествени числа.

Задача 1.1 (GCD).
GCD
Вход: A,B $\in \mathbb{N}$.
Изход: НОД(A,B).

```
EuclidGCD( A, B : non-negative integers)
@1 while A > 0 ∧ B > 0 do
@2  if A > B then
@3   A ← A mod B
@4  else
@5   B ← B mod A
@6  end if
@7 end while
@8 return max{A, B}
```

Твърдение 1.1. *При вход естествени числа A и B,* EuclidGCD(A, B) *връща тяхното най-малко общо кратно.*

Лема 1.2. *Ако d =НОД(A,B) и A_n и B_n са състоянията съответно на A и B при n-тото достигане на ред* `@1` *на* EuclidGCD, *то НОД(A_n,B_n)= d.*

Колко са операциите, които алгоритъмът извършва върху следните входове:

- A$= 0$, B$= 3$
- A$= 64$, B$= 32$
- A$= 13$, B$= 21$
- A$= f_n$, B$= f_{n+1}$ (f_n е $n-$тото число на Фибоначи)

```
EuclidGCDRec( A, B : non-negative integers)
if A = 0 ∨ B = 0 then
 return max{A, B}
end if
if A > B then
 return EuclidGCDRec(A mod B, B)
end if
return EuclidGCDRec(A, B mod A)
```

Твърдение 1.3. *При вход естествени числа A и B,* EuclidGCDRec(A, B) *връща тяхното най-малко общо кратно.*

Лема 1.4. *За произволно естествено n, при вход A,B, такива, че $A + B = n$ е изпълнено, че* EuclidGCDRec(A, B) *връща най-малкото общо кратно на A и B.*

Рекурсивната версия **EuclidGCDRec** позволява сръчно намиране на числата от тъждеството на Безу:

$$A' = A - Bq, \quad B' = B$$

$$u'A' + v'B' = (A, B)$$
$$u'(A - Bq) + v'B_n = (A, B)$$
$$u'A + (v' - u'q)B = (A, B)$$
$$\boxed{u = u' \quad v = v' - u'q}$$

1.4 Коректност на алгоритъм

Искаме алгоритмите, които пишем да гарантират, че върнатата стойност за съответния *екземпляр* на изчислителната задача, да е сред множеството от възможни *решения*.
За целта доказваме свойството *коректност* за алгоритмите си.

1.4.1 Итеративен подход

Основава се на *изобретяването* на инварианти: твърдения за състоянието на променливите и масивите, което остава вярно през целия ход на алгоритъма.

1.4.2 Рекурсивен подход

При доказването на *коректност* на алгоритми, които използват рекурсия се използва метода на математическата индукция по *свойство* на входа.

1.5 Времева сложност

Времева сложност на алгоритъм $\mathcal{A}$ при вход $Input$ наричаме броя елементарни операции, които $\mathcal{A}$ извършва върху $Input$, за да завърши.
Времева сложност в най-лошия случай на $\mathcal{A}$ е функция $Time_{\mathcal{A}}(n)$, приемаща големина на входа n и връщаща максималния брой операции, които $\mathcal{A}$ може да извърши върху вход с големина n.

Ще покажем, че действително входът, при който EuclidGCD извършва най-много операции, е пряко обвързан с числата на Фибоначи.

Лема 1.5. *Ако при вход A и B* EuclidGCD *достига ред* @1 *точно k пъти, то* $\min\{A, B\} \geq f_{k-1}$.

Твърдение 1.6. *Времевата сложност на* EuclidGCD *при вход $(A > 0, B > 0)$ е не повече от* $6\log_{\varphi}(\min\{A, B\}) + 14$.
(разликата спрямо упражнението е, че там е пропусната операцията присвояване на стойност)

1.6 Асимптотика

Имаме горна граница за времевата сложност на EuclidGCD в най-лошия случай. Такъв аргумент обаче би бил тромав за следене при по-сложни алгоритми. За целта въвеждаме следната класификация на функциите $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$:

Определение 1.5 (Асимптотично сравнение - $\preceq$)**.**

$$f \preceq g \overset{def}{\longleftrightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall n \, (n > N \to f(n) \leq cg(n))$$

За нас стремеж ще бъде алгоритмите, които пишем да имат "възможно най-малка" относно $\preceq$ сложност в най-лошия случай.

Определение 1.6 (*Big O*)**.** *Класът на асимптотично не по-големите функции от f е множеството*

$$\mathcal{O}(f) = \{g \mid g \preceq f\}$$

Определение 1.7 (*Big* Ω)**.** *Класът на асимптотично не по-малките функции от f е множеството*

$$\Omega(f) = \{g \mid f \preceq g\}$$

Определение 1.8 (*Big* Θ)**.** *Класът на асимптотично равните функции на f е множеството*

$$\Theta(f) = \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f)$$

Под записа $f = X(g)$, където $X \in \{O, \Omega, \Theta\}$, ще имаме предвид $f \in X(g)$.

1.6.1 Основни свойства

1. За всяко $c \in \mathbb{R}^+$ е в сила, че $cf = \Theta(f)$
2. Ако $f = \mathcal{O}(g)$ и $g = \mathcal{O}(h)$, то $f = \mathcal{O}(h)$
3. Ако $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ и $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\max\{g_1, g_2\})$
4. Ако $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ и $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$
5. Ако съществува границата $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$, то:
   (а) $L < \infty$ т.с.т.к. $f \in \mathcal{O}(g)$
   (б) $0 < L < \infty$ т.с.т.к. $f \in \Theta(g)$
   (в) ако $L = \infty$, то $f \in \Omega(g)$ (Обратното не винаги е вярно!)
6. За произволни $a > 1$ и $k \geq 0$ е в сила, че $n^k = \mathcal{O}(a^n)$
7. За произволни $a > 1$ и $k > 0$ е в сила, че $\log_a n = \mathcal{O}(n^k)$
8. Ако $f = \Theta(g)$, то $\log_a f = \Theta(\log_a g)$

Релацията $\preceq$ е преднаредба; не всеки две функции са сравними (пример са $\sin(n)$ и $\cos(n)$).

Твърдение 1.7. *Времевата сложност в най-лошия случай на* `EuclidGCD` *при вход* (A, B) *е* $\mathcal{O}(\log(\min\{A, B\}))$.

Задача 1.2 (**Hole**)**.** *Даден е масив с n различни числа от 1 до $n+1$. Да се намери първото положително липсващо число в масива.*
`Вход:` $A[1...n], A[i] \leq n+1, 1 \leq i \leq n$. `- масив от пол. естествени числа.`
`Изход:` $\min\{i \mid i \in \mathbb{N} \,\&\, i \notin A\}$.

2 Линейни обхождания на масив

2.1 Сложност по памет

Сума на размерите на заделените променливи и масиви по време на работа на алгоритъма $\mathcal{A}$ върху даден вход.
Заделянето на масив с размер n в псевдокод ще означаваме с:

SomeAlg(Input)

...
$A[1...n] \leftarrow malloc(n)$: ARRAY OF <TYPE>
...

Такова заделяне на памет извършва $\Theta(S(A[1...n]))$ елементарни операции.

Задача 2.1 (**Maximum Subarray**).
Търсим инфикс на масив с максимална сума. За целта разглеждаме т.н. алгоритъм на Kadane.

Maximum Subarray
Вход: A[1...n] - масив от рационални числа.
Изход: $\max\left\{\sum_{k=i}^{j} A[k] \mid 1 \le i \le j \le n\right\}$ - максимална сума на непразен инфикс на A.

Kadane($A[1...n]$: array of rationals)

@1 $maxInfix \leftarrow -\infty$
@2 $maxSuffix \leftarrow 0$
@3 for $i = 1$ to n do
@4 $maxSuffix \leftarrow maxSuffix + A[i]$
@5 $maxInfix \leftarrow \max\{maxSuffix, maxInfix\}$
@6 $maxSuffix \leftarrow \max\{0, maxSuffix\}$
@7 end for
@8 return $maxInfix$

Твърдение 2.1. *При подаден на вход масив от рационални числа $A[1...n]$, $Kadane$ връща максималната сума на непразен последователен подмасив на A.*

В доказателството на **Твърдение** 2.1 ще използваме следната **Инварианта**:

Ако при k-тото достигане на ред @3 състоянията на $maxSuffix$ и $maxInfix$ са съответно $maxSuffix_k$ и $maxInfix_k$, то

$$maxInfix_k = \max\left\{\sum_{t=i}^{j} A[t] \mid 1 \le i \le j \le k-1\right\} \text{ и}$$

$$maxSuffix_k = \max\left\{\sum_{t=i}^{k} A[t] \mid 1 \le i \le k\right\}$$

Твърдение 2.2. *Времевата сложност на* Kadane *в най-лошия случай е* $\Theta(n)$.

Друго възможно линейно решение използва т.н. *префиксни суми* и се опира на следните наблюдения:

1. Всяка инфиксна сума е разлика на 2 префиксни:

$$\sum_{k=i}^{j} A[i] = \sum_{k=1}^{j} A[i] - \sum_{k=1}^{i-1} A[i]$$

2. Тогава най-голямата инфиксна сума се намира лесно чрез:

$$\max_{1\le i\le j\le n}\left\{\sum_{t=i}^{j}A[t]\right\}=\max_{1\le i\le j\le n}\left\{\sum_{t=1}^{j}A[t]-\sum_{t=1}^{i-1}A[t]\right\}=\max_{1\le j\le n}\left\{\sum_{t=1}^{j}A[t]-\min_{1\le i\le j}\sum_{t=1}^{i-1}A[t]\right\}$$

Задача 2.2 (Distant Pair).
Дадени са n точки в равнината. Да се намери най-голямото манхатънско разстояние между 2 точки.
Точка ще представяме чрез записа:

$$\begin{aligned}&\texttt{Point}=\{\\&\quad x:\texttt{rational}\\&\quad y:\texttt{rational}\\&\}\end{aligned}$$

Манхатънското разстояние между записи от тип `Point` *$P1$ и $P2$ ще бележим с* $d_M(P1,P2)=|P1.x-P2.x|+|P1.y-P2.y|$
Вход: `P[1...n]` *- масив от Points.*
Изход: $\max\{d_M(P[i],P[j])\mid 1\le i,j\le n\}$.

<u>DISTANT($P[1...n]$: array of Points)</u>

$maxSum \leftarrow -\infty$
$minSum \leftarrow +\infty$
$maxDiff \leftarrow -\infty$
$minDiff \leftarrow +\infty$
for $i=1$ **to** n **do**
  $maxSum \leftarrow \max\{P[i].x+P[i].y, maxSum\}$
  $minSum \leftarrow \min\{P[i].x+P[i].y, minSum\}$
  $maxDiff \leftarrow \max\{P[i].x-P[i].y, maxDiff\}$
  $minDiff \leftarrow \min\{P[i].x-P[i].y, minDiff\}$
end for
return $\max\{maxSum-minSum, maxDiff-minDiff\}$

Лема 2.3.

$$\max_{1\le i,j\le n}\{d_M(P[i],P[j])\}=\max\left\{\max_{1\le i,j\le n}\{(P[i].x+P[i].y)-(P[j].x+P[j].y)\},\ \max_{1\le i,j\le n}\{(P[i].x-P[i].y)-(P[j].x-P[j].y)\}\right\}$$

Твърдение 2.4. *При вход масив $P[1...n]$, масив от записи* `Point`*,* DISTANT *връща най-голямото манхатънско разстояние между някои две от точките за време $\Theta(n)$.*

Задача 2.3 (**Sieve**). *Да се намерят простите числа $\leq n$ (решето на Ератостен)*
Вход: n - *положително естествено число*
Изход: $P[1...k]$={$p \mid p \leq n$ & p - *просто*}.

```
Sieve( n : positive integer)
@1   A[1...n] ← malloc(n): ARRAY OF BOOLEANS
@2   for i = 2 to n do
@3    A[i] ← true
@4   end for
@5   A[1] ← false
@6   for i = 2 to n do
@7    if A[i] = true then
@8     Eliminate(i, A[2...n])
@9    end if
@10  end for
@11  P[1...k] ← ArgTrue(A[1...n])
@12  return  P[1...k]
```

```
Eliminate( p : prime,  A[1...n] : booleans)
j ← 2 * p
while j ≤ n do
 A[j] ← false
 j ← j + p
end while
```

```
CountTrue( A[1...n] : array of booleans)
k ← 0
for i = 1 to n do
 if A[i] = true then
  k ← k + 1
 end if
end for
return  k
```

```
ArgTrue( A[1...n] : array of booleans)
k ← CountTrue(A[2...n])
P[1...k] ← malloc(k): ARRAY OF INTEGERS
k ← 1
for i = 2 to n do
 if A[i] = true then
  P[k] ← i
  k ← k + 1
 end if
end for
return  P[1...k]
```

Твърдение 2.5. *При вход просто число p и масив от булеви стойности $A[1...n]$,* Eliminate *модифицира $A[1...n]$ до $A'[1...n]$, където за $1 \leq i \leq n$:*

$$A'[i] = \begin{cases} false & \text{, ако } p|i \\ A[i] & \text{, иначе} \end{cases}$$

Още нещо, Eliminate *завършва за време $\Theta\left(\frac{n}{p}\right)$.*

Твърдение 2.6. *При вход положително цяло число n,* Sieve *връща масив, съдържащ простите числа $p \leq n$. Още нещо,* Sieve *завършва за $\mathcal{O}(n \log n)$ време.*

За доказателството на ***Твърдение*** 2.6:

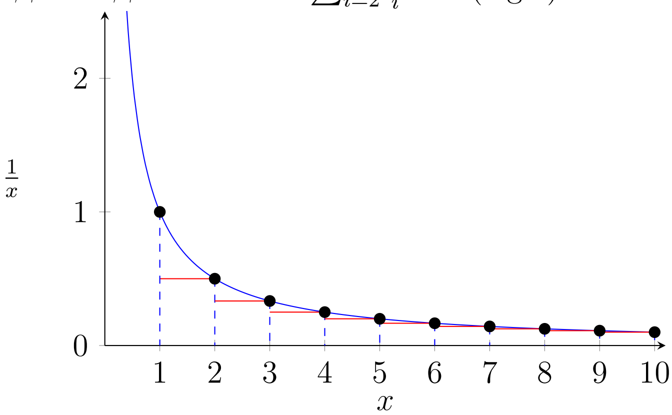
1. Инварианта: При всяко достигане на @7 на Sieve, за всяко $1 \leq l \leq i$ е в сила, че $A[l] = true$ т.с.т.к. l е просто.
   Вярността на тази инварианта съществено ползва ***Твърдение*** 2.5.

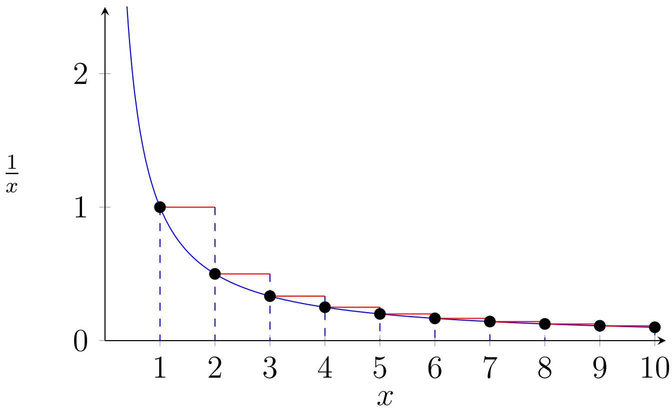
2. CountTrue и ArgTrue работят за време $\Theta(n)$ и връщат съответно броя и масив от простите числа $p \leq n$

3. Sieve работи в най-лошия случай за време

$$\mathcal{O}(n) + \sum_{i=2, i \text{ - просто}}^{n} Time_{Eliminate}(p, A[1...n]) + \Theta(n) + \Theta(n) = ... = \mathcal{O}(n \log n)$$

Идея за доказване на $\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\log n)$*:*





Твърдение 2.7 (техника за работа със сума от монотонна непрекъсната функция)**.** *Нека* $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^+$ *монотонна непрекъсната функция и нека*

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

$$I = \int_1^n f(x)dx$$

Тогава:

- *ако* f *е растяща, то* $I + f(1) \le S \le I + f(n)$.
- *ако* f *е намаляваща, то* $I + f(n) \le S \le I + f(1)$.

(ne^{n^2} *е пример за неподходяща употреба)*

($\mathcal{O}(n \log(\log n))$ *е по-добра оценка*)
Използваме наготово, че $\pi(k) = |p \mid p \le k \,\&\, p$ *е просто*$| = \frac{k}{\log(k)}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(k)}\right)\right)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{p \le n} \frac{1}{p} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi(k)}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k+1} \\
&= \frac{\pi(n)}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} = \mathcal{O}(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k^2(k+1)} \\
&= \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k^2} + \mathcal{O}(1) = \sum_{k=3}^{n-1} \left[\frac{1}{k\log(k)} + O\left(\frac{1}{k\log(k)^2}\right)\right] + \mathcal{O}(1) \\
&= \log(\log(n)) + \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

Инициализацията на @7 задава ненужно малка стойност за j. Оптимално е тя да бъде $i * i$, защото съставните числа по-малки от $i * i$ имат прост делител $< i$, тоест вече са отпаднали като кандидати за прости числа ($A[k] = false$). Това е мотивация за *"подобрен"* алгоритъм (асимптотично нещата не се променят):

```
ELIMINATE2( p : prime,  A[1...n] : booleans)
  j ← p * p
  while j ≤ n do
     A[j] ← false
     j ← j + p
```

```
end while
```

Задача 2.4 (Max Bounded Subarray)**.**
По даден масив A и рационално число S, търсим максималната сума на подмасив, което не надвишава S.
Да се предложи алгоритъм с времева сложност $\Theta(n)$, който решава следния проблем:

Вход: `A[1...n]` *- масив от рационални числа,* `S` *- рационално число.*
Изход: $\max\left\{\sum_{k=i}^{j} A[k] \mid 1 \leq i, j \leq n \;\&\; \sum_{k=i}^{j} A[k] \leq S\right\}$.

Задача 2.5 (Алгоритъм на $Boyer - Moore$)**.**
Изборните резултати са представени с масив от вотове $V[1...n]$, като $V[i]$ е подаден вот за кандидат i (броят на кандидатите не ни е известен). Изборите се печелят от кандидат, когато гласовете за него са над 50%, т.е. поне $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.
Да се предложи алгоритъм с времева сложност $\Theta(n)$, който решава следния проблем:

Вход: `V[1...n]` *- масив от вотове (положителни естествени числа).*
Изход: i *- победител в изборите, ако има такъв, в противен случай -* 0.

Следва продължение...