Дискретни структури

план на упражненията

КН 1.1, зимен семестър 2022/2023

Калоян Цветков
kaloyants25@gmail.com

ФМИ, СУ

1.0.2

Ресурси (теория и задачи) по Дискретни структури

- теория
- задачи
- теория + задачи

- сайт на Скелета (задачи от минали години)
- записки на Мария Соскова
- записки на Ангел Димитриев
- лични записки (по упражненията)

Съдържание

1 Въведение

1.1 Съждения

Изреченията, съдържащи информация, която може да се оцени като вярна и невярна, наричаме **съждения**.
Частта от съждението, която приписва признак, е **предикат**.
Предикатът може да бъде пресметнат като верен или грешен при прилагането му върху **субект**.
Пример:

"Този химикал е син."е вярно/грешно съждение, получено от пресмятането на предиката "X е син."върху субекта "този химикал".

"Съществува просто число с $100,000,000$ цифри"е съждение, но не знаем как да оценим като вярно или грешно все още.

(Най-голямото открито просто число има около $23,000,000$ цифри)[1]

1.2 Логически операции

Дефиниции чрез вектор/таблица от стойности и на интуитивно ниво.

отрицание

$\neg$

p	$\neg p$
0	1
1	0

дизюнкция

$\vee$

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

конюнкция

$\wedge$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

[1] Към датата 14 януари 2023 г.!

изключващо или

$\oplus$

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

импликация (ако ..., то ...)

$\rightarrow$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

биимпликация (еквивалентност)

$\longleftrightarrow$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Свойства:

комутативност

$$p \wedge q = q \wedge p \qquad p \vee q = q \vee p \qquad p \oplus q = q \oplus p$$

асоциативност

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee B) \vee C \qquad p \wedge B) \wedge C) = (p \wedge B) \wedge C$$

дистрибутивност

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (q \vee r) \qquad p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

закон за контапозицията
закони на Де Морган

Нека p, q, r, s и t са следните съждения:
p: Ще разходя кучето преди обяд.
q: Сутринта ще спортувам.
r: Следобяд ще спортувам.

s: Днес времето е хубаво.
t: Днес влажността на въздуха е ниска.
Напишете логически изрази, съответстващи са следните изречения.
1. Няма да разходя кучето преди обяд.
2. Ще разходя кучето преди обяд и следобяд ще спортувам.
3. Днес ще спортувам или сутринта, или следобяд.
4. Днес ще спортувам сутринта или следобяд.
5. Ако днес времето е хубаво, следобяд ще спортувам.
6. Необходимо условие, за да спортувам днес следобяд е, времето да е хубаво.
7. Достатъчно условие, за да спортувам днес е времето да е хубаво и влажността да е ниска.

1.3 Квантори

1.3.1 За всеобщност - $\forall$

$\forall x \in A : P(x)$ - предикатът P се оценява като истина за всеки/за произволен елемент от множеството A.

1.3.2 За екзистенциалност - $\exists$

$\exists x \in A : P(x)$ - предикатът P се оценява като истина за някой (поне 1) от всички елементи на множеството A.

Кванторите са дуални: отрицанието на единия поражда другия.

$$\neg \exists x \in A : P(x) \longleftrightarrow \forall x \in A : \neg P(x)$$
$$\neg \forall x \in A : P(x) \longleftrightarrow \exists x \in A : \neg P(x)$$

1.3.3 Задача:

$R(x)$ - "x е в стая <номер на стая>";
$C(x)$ - "x следва КН";
$F(x, y)$ - "x е приятел на y";
Да се изразят твърденията чрез квантори и предикатите R, C, F.

"Някой следва КН."
$\exists x : C(x)$;

"Всеки е приятел на себе си."
$\forall x : F(x, x)$;

"Приятелството и неприятелството са взаимни."
$\forall x : \forall y : F(x, y) \rightarrow F(y, x)$; (защо $\longleftrightarrow$ не е необходимо)

"Всеки има приятел."
$\forall x : \exists y : F(x, y)$;

"Всички в стая <номер на стая> следват КН."
$\forall x : R(x) \to C(x)$;

"Всеки в тази стая има приятел от КН, който не е в стаята."
$\forall x : R(x) \to (\exists y : F(x, y) \land C(y) \land \neg R(y))$;

"Хората в стаята, които не следват КН, имат приятел в стаята."
$\forall x : R(x) \land \neg C(x) \to \exists y : R(y) \land F(x, y)$

"Да нямаш приятели е достатъчно условие да не следваш КН."
$\forall x : (\forall y : \neg F(x, y)) \to \neg C(x)$. (контрапозиция?)

"Двама души са приятели тогава и само тогава, когато имат общ приятел от КН."
$\forall x : \forall y : F(x, y) \longleftrightarrow \exists z : F(x, z) \land F(y, z) \land C(x)$

1.4 Множества и операции над тях

1.4.1 Множества

Множество - няма дефиниция; интуитивно: колекция от неща; всички математически обекти са изградени от множества.

1.4.2 Дефиниране на множества

чрез изброяване
чрез предикат
празно множество: $(\exists\emptyset :)\, \forall x : x \notin \emptyset$.
Дефиниции за равенство на множества, подмножество, строго подмножество.

$$A = B \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x : x \in A \longleftrightarrow x \in B$$

$$A \subseteq B \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x : x \in A \to x \in B$$

$$A \subset B \overset{def}{\longleftrightarrow} A \subseteq B \land A \neq B$$

$$\forall A : \emptyset \subseteq A \land \emptyset \subset A$$

Примери за равни множества (повторението и редът на елементите не е от значение) и подмножества.

$$\{1, 2, \emptyset\} = \{\emptyset, 1, 2\} = \{\emptyset, \emptyset, 1, 2, 1, 1\}$$

$$\{x, 1, y\} \subseteq \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

$$\{x, 1, y\} \subset \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

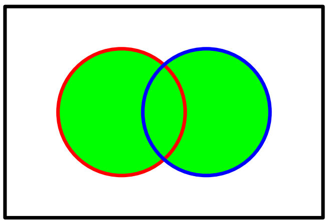
$$\{x, 1, y, z, 5, 2\} \subseteq \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

1.4.3 Операции над множества

таблици (за произволен елемент "смятаме"резултат спрямо предикатите $x \in A$ и $x \in B$) Аналогии с логическите операции.

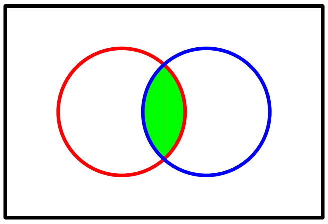
обединение

$$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



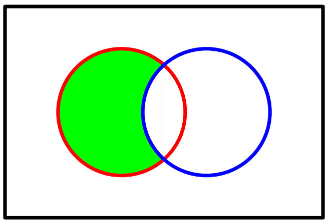
сечение

$$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



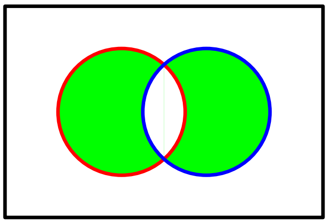
разлика

$$A \backslash B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



симетрична разлика

$$A \Delta B := \{x | x \in A \oplus x \in B\}$$



Доказателтво ,че:

- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	$A \Delta B$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

$$\implies \forall x : x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \Delta B \implies (A \cup B) \setminus (B \cap A) = A \Delta B$$

- $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

A	B	$A\backslash B$	$B\backslash A$	$(A\backslash B) \cup (A\backslash B)$	$A\Delta B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

$$\implies \forall x : x \in (A\backslash B) \cup (A\backslash B) \leftrightarrow x \in A \Delta B \implies (A\backslash B) \cup (A\backslash B) = A \Delta B$$

Допълнение на множество

Универсално множество - съдържа всички разглеждани множества; определя се от контекста.

$$\overline{A} := U \backslash A; \qquad \overline{\overline{A}} = A.$$

Свойства:

- комутативност

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A \qquad A \Delta B = B \Delta A$$

- асоциативност

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Обединение на няколко множества: $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i := \{x | \exists i \in I : x \in A_i\}$

Сечение на няколко множества: $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i := \{x | \forall i \in I : x \in A_i\}$

- дистрибутивност

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

празно множество

$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \backslash \emptyset = A$$

закони на Де Морган

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

степенно множество

$$\mathcal{P}(A) = 2^A := \{x | x \subseteq A\}$$

Примери за степенни множества.

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}\{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$
$$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{1,2\}, 7\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\{\{1,2\}\}, \{7\}, \{\emptyset, \{1,2\}\}, \{\emptyset, 7\}, \{\{1,2\}, 7\}, \{\emptyset, \{1,2\}, 7\}\}$$

1.4.4 Задачи

Вярно ли е, че

$$A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C) \text{ (не)}$$
$$(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C) \text{ (да)}$$

1.4.5 мултимножество

Множество, в което броя на повторенията на елементите е от значение.

$$\{1,3,3,2,1\} = \{1,2,3\} \text{ разглеждани като множества}$$
$$\{1,3,3,2,1\} \neq \{1,2,3\} \text{ разглеждани като мултимножества}$$

1.4.6 разбиване

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е разбиване на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i = A$$
$$\forall i, j \in I : i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

$\{S\}$ разбиване ли е на S? (да$\longleftrightarrow S \neq \emptyset$)

1.4.7 покритие

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е покритие на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

1.4.8 разкрояване

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е разкрояване на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A$$
$$\forall i, j \in I : i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

2 Индукция

Плочки домино:

Бутнали сме първата плочка и знаем, че ако падне n-тата ще падне и $n+1$-вата. Тогава ще паднат всички плочки.

2.1 Стандартна индукция

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \to P(n+1))) \to \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

Принцип на индукцията

- Проверяваме верността на твърдението за $n = 0$ $\quad (P(0))$;
- Допускаме, че твърдението е вярно за някое n $\quad (P(n))$;
- Доказваме, че твърдението е вярно и за $n+1$ $\quad (P(n) \to P(n+1))$.
- Тогава $\forall n \geq 0 : P(n)$.

2.1.1 Задачи

Да се докаже, че $|2^A| = 2^{|A|}$.

Solution:

$|A| = n+1 \geq 1 \implies |A \setminus \{a\}| = n \geq 0 \implies |2^{A\setminus\{a\}}| = 2^n$

$\implies$ All subsets of A not containing a are 2^n. All subsets of A are those not containing a and them unioned with $\{a\}$ $\implies$

$$\mathcal{P}(A) = \{x | x \subseteq A \wedge a \notin x\} \cup \{x | x \subseteq A \wedge a \in x\}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{x | x \subseteq A \wedge a \notin x\}| + |\{x | x \subseteq A \wedge a \in x\}| \text{ (since they have no intersection)}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A \setminus \{a\})| + |\{x | x \in \mathcal{P}(A \setminus \{a\}) \wedge a \in x\}|$$

they are $2.2^n = 2^{n+1}$.

Обобщен принцип на индукцията

$$P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0 : (P(n) \to P(n+1))) \to \forall n \geq n_0 : P(n)$$

- Проверяваме верността на твърдението за $n = n_0$ $\quad (P(n_0))$;
- Допускаме, че твърдението е вярно за някое n $\quad (P(n))$;
- Доказваме, че твърдението е вярно и за $n+1$ $\quad (P(n) \to P(n+1))$.
- Тогава $\forall n \geq n_0 : P(n)$.

2.2 Силна индукция

$$P(0) \land (\forall n \in \mathbb{N} : ((\forall k \leq n : P(k)) \to P(n+1))) \to \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

3 Релации

3.1 Наредена двойка

$$(a,b) \overset{\text{def}}{=} \{a, \{a,b\}\}$$
$$(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

3.2 Декартово произведение

$$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a,b)\,|a \in A \wedge b \in B\}$$

Пример:

$\{1,3,5\} \times \{2,4\} = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

$\emptyset \times \{0,2\} = \emptyset$

няма комутативност: $A \times B \neq B \times A$

Мощност на декартово произведение: $|A \times B| = |A|.|B|$
(доказателство с индукция по $|A|$)

3.3 Релация

релация е всяко подмножество на декартово произведение

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ - n-местна релация
при $n = 2$: бинарна релация $R \subseteq A \times A$ - бинарна релация над A
Пример за 3-местна релация:
$(a,b,c) \in R \overset{def}{\iff} a,b,c$ са страни на триъгълник.
Ако $|A| = n$, то колко са бинарните релации над A (2^n)

3.4 Домейн и кодомейн

$$dom\,(R) = \{a|\exists b \in A : (a,b) \in R\} \text{ - домейн}$$
$$range\,(R) = \{b|\exists a \in A : (a,b) \in R\} \text{ - кодомейн, range}$$

3.5 Свойства

$R \subseteq A \times A$

3.5.1 рефлексивност

$\forall a \in A : (a,a) \in R$

3.5.2 антирефлексивност

$\forall a \in A : (a,a) \notin R$

3.5.3 симетричност

$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \to (b, a) \in R$

3.5.4 антисиметричност

$\forall a, b \in A : a \neq b \to ((a, b) \in R \to (b, a) \notin R)$
(възможно е да има и несравними елементи)
$\longleftrightarrow$
$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \land (b, a) \in R \to a = b$

3.5.5 силна антисиметричност

$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \oplus (b, a) \in R$

3.5.6 транзитивност

$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \land (b, c) \in R \to (a, c) \in R$

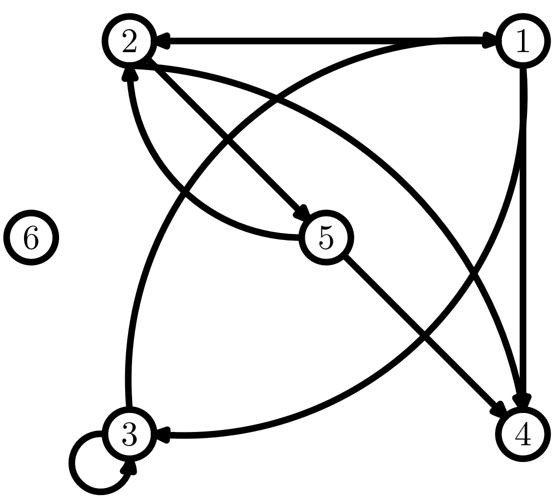
3.6 Интерпретации

$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (2,4), (3,3), (2,5), (5,4)\ (5,2)\}$$

3.6.1 Матрица

	1	2	3	4	5	6
1		x	x	x		
2				x	x	
3	x		x			
4						
5		x		x		
6						

3.6.2 Граф (диаграма на Хасе)



Интерпретация на свойствата с матрица и граф.

3.6.3 Задача

Какви свойства притежават релациите:

- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, R = \{(a,b) \,|a - b \in \mathbb{Z}\}$
- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \{(a,b) \,|a + b \geq 5\}$
- $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}, R = \{(a,b) \,|a \cap b \neq \emptyset\}$
- $R \subseteq \{0,1,2\}^2 \,, R = \{(a,b) \,|a + b \geq 5\}$

3.7 Релации на еквивалентност

R е релация на еквивалентност $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ R е рефлексивна, симетрична и транзитивна.
Примери: равенство на числа, еднаквост и подобие на триъгълници.

$$[x]_R \overset{\text{def}}{=} \{y|\,(x,y) \in R\}$$

Теорема: (лекции и изпит)

$$R \subseteq A \times A$$

$$F_R := \{[x]_R \,|x \in A\} \text{ е разбиване на } A$$

3.7.1 Примери с модулна аритметика

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$aRb \leftrightarrow 4 \mid a - b$
Да се докаже, че R е релация на еквивалентност. $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$xRy \leftrightarrow 2 \mid 2x - 5y$
Да се докаже, че R е релация на еквивалентност.

3.7.2 Модифициране на рел. на екв.

Нека R_1, R_2 са релации на еквивалентност над A. Релации на еквивалентност ли са релациите:

- $R_1 \cup R_2$ (не)

- $R_1 \cap R_2$ (да)

- $R_1 \Delta R_2$ (не)

3.7.3 Брой рел. на екв.

Колко са релациите на еквивалентност над $A = \{1, 2, 3, 4\}$?
(брой разбивания на 4-елементно множество)

3.8 Наредби

3.8.1 (Нестрога) частична наредба

R е частична наредба, когато е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
Примери: $\geq, \leq, \subseteq$.

3.8.2 Строга частична наредба

R е строга частична наредба, когато е антирефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
Примери: $>, <, \subset$.

3.8.3 Линейна наредба

R е линейна (пълна) наредба, когато е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна.

Колко елемента има линейна наредба над n-елементно множество? $\left(\dfrac{n^2+n}{2}\right)$

3.9 Специални елементи

$$R \subseteq A \times A$$

3.9.1 Минимален

$$a \text{ е минимален } \xleftrightarrow{def} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (b, a) \notin R$$

след обръщане на кванторите - "няма по-малък от него".

3.9.2 Най-малък

$$a \text{ е най-малък } \xleftrightarrow{def} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (a, b) \in R$$

"по-малък от всички други"

Възможно ли е да има повече от 1 най-малък/най-голям елемент в наредба? (не)

3.9.3 Максимален

$$a \text{ е максимален } \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (a,b) \notin R$$

след обръщане на кванторите - "няма по-голям от него".

Възможно ли е да има $0, 1, > 1$ минимален/максимален елемент в частична наредба?

(0 - не (ако R е частична наредба, то R има минимален и максимален елемент (теорема)), 1 - да, 2 - да)

А в линейна?

(0 - не (линейната наредба е и частична), 1 - да, 2 - не)

3.9.4 Най-голям

$$a \text{ е най-голям } \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (b,a) \in R$$

"по-голям от всички други"

Възможно ли е да има повече от 1 най-малък/най-голям елемент в наредба? (не)

3.9.5 Пример:

Да се посочат минимални, максимални, най-големи и най-малки елементи

	1	2	3	4	5	6	7	8
1			x	x				x
2	x	x	x	x	x	x	x	x
3							x	
4				x			x	
5								
6					x			x
7						x		x
8								

(При наличие на най-малък/най-голям, наличието на друг минимален/максимален е изключено.)

3.10 Затваряне на релации

3.10.1 Операции с релации

- Обратна релация: $R^{-1} = \{(b,a) \,|\, (a,b) \in R\}$
- Допълнение на релация: $\overline{R} = \{(a,b) \,|\, (a,b) \notin R\}$
- Композиция на релации: $S \circ R = \{(a,c) \,| \exists b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}$

$$R \subseteq A \times A$$

3.10.2 рефлексивно

$$refl(R) = R \cup \{(a,a) \,|a \in A\}$$

3.10.3 симетрично

$$sym(R) = R \cup R^{-1}$$

3.10.4 транзитивно

$$R^1 = R; R^n = R \circ R^{n-1} \text{ при } n > 1$$
$$trans(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$$

Да се намери рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на
$R = \{(1,2)\,, (2,1)\,, (2,3)\,, (3,4)\}$

3.11 Задачи:

Делимост

Да се докаже, че релацията | - "дели"е частична наредба над $\mathbb{N}$. Да се посочат най-голям, най-малък, минимален и максимален елемент или да се докаже, че такъв няма.

Комутативност

(свеждане до умножение на матрици)
Нека $|A| = n$.
Нека $S = \{x|xA\}$.
Нека $R \subseteq S \times S$.
$R_1 R R_2 \overset{def}{\longleftrightarrow} R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Релация на еквивалентност ли е R? Докажете.

Две релации

Нека $R \subseteq A \times A$ е рефлексивна и транзитивна релация.
Нека $\sim \subseteq A \times A : a \sim b \leftrightarrow aRb \wedge bRa$.
Докажете, че $\sim$ е релация на еквивалентност.
F:=$\{[x]_\sim \,|x \in A\}$
$\langle \subseteq F \times F : [a]_\sim \langle [b]_\sim \leftrightarrow \exists x \in [a]_\sim \exists y \in [b]_\sim : xRy$
Да се докаже, че $\langle$ е частична наредба.

4 Функции/Изброимост

$$f \text{ е (тотална) функция } \overset{def}{\longleftrightarrow} f \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A : \exists! b \in B : (a,b) \in f \text{ (точно 1 образ)}$$

$$f(x) = y \longleftrightarrow (x,y) \in f$$

$$f \text{ е частична функция } \overset{def}{\longleftrightarrow}$$

$$f \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A : \forall b_1 \in B : \forall b_2 \in B : (a,b_1) \in f \wedge (a,b_2) \in f \implies b_1 = b_2$$

$$\text{(най-много 1 образ)}$$

$$f \text{ е функция и } f \subseteq A \times B \text{ - записваме } f : A \longrightarrow B$$

Задача

Кои са релациите на еквивалентност $R \subseteq A \times A$, които са функции? (допускаме, че R има клас на еквивалентност с поне 2 елемента $a \neq b \implies aRb \wedge aRa \implies a = b \implies$ противоречие $\implies$ само идентитетът е релация на еквивалентност и функция едновременно).

4.1 Свойства

$$f : A \longrightarrow B$$

- инекция: $\forall a_1 \in A : \forall a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
  f е инекция$\longrightarrow |A| \leq |B|$ (необходимо условие за инекция)
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x \backslash 2^x$ са инекции
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 \backslash sin(x) \backslash x^2 - 3x + 2$ не са инекции
- сюрекция: $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$
  f е сюрекция$\longrightarrow |A| \geq |B|$
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x$
  $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)\,; f(x) = \frac{1}{x}$ са сюрекции
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 \backslash sin(x) \backslash x^2 - 3x + 2$ не са сюрекции
- биекция - инекция и сюрекция (необходимо условие за сюрекция)
  $\forall b \in B : \exists! a \in A : f(a) = b$
  f е биекция$\longrightarrow |A| = |B|$ (необходимо условие за биекция)
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^{2n+1}$ е биекции $\forall n \in \mathbb{N}$

Ако има инекция $A \longrightarrow B$, то има сюрекция $B \longrightarrow A$.

4.2 Образ на множество

Нека $f : A \longrightarrow B$ и $X \subseteq A$
$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$

4.3 Композиция

Нека $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$
$g \circ f : A \longrightarrow C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
композиция на инекции/сюрекции/биекции е отново инекция/сюрекция/биекция

4.4 Обратна функция

Нека $f : A \longrightarrow B$ е биекция (при инекция обратната функция е частична).
$f^{-1} : B \longrightarrow A$, $f^{-1}(y) = x \overset{def}{\longleftrightarrow} f(x) = y$

4.5 Крайно и безкрайно множество

A е крайно $\overset{def}{\longleftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : \exists f : I_n \longrightarrow A : f$ е биекция.
A е безкрайно $\overset{def}{\longleftrightarrow} A$ не е крайно. (с квантори?)

4.6 Задачи

4.6.1 Композиция на инекции/сюрекции е инекция/сюрекция

Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ са инекции.
Допускаме, че $a \neq b \in A$.
$\implies f(a) \neq f(b) \in B \implies g(f(a)) \neq g(f(b)) \implies g \circ f$ е инекция.

Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ са сюрекции.
Нека $z \in C \implies \exists y \in B : g(y) = z \implies \exists x \in A : f(x) = y. \implies g(f(x)) = g(y) = z \implies g \circ f$ е сюрекция.

4.6.2 Изследвайте за инективност/сюрективност функцията

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{,ако } x \text{ е четно} \\ x - 1 & \text{,ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = (2x - y, -x + 2y)$$

$$f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \backslash \{1\} : f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

4.6.3 Конструиране на биекция

Да се построи биекция $f : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}^+$, че $\forall n \in \mathbb{N} : n \mid \sum_{i=1}^{n} f(i)$.

$$f(n{+}1) := \begin{cases} m & \text{if } m \notin \{f(1), f(2), ..., f(n)\} \text{ (запазване на средното аритметично)} \\ m+n+1 & \text{otherwise (увеличаване на средното аритметично с 1).} \end{cases}$$

4.6.4 Биекциите се различават поне в две двойки

Нека $f : A \longrightarrow A$ и $g : A \longrightarrow A$ са биекции и $\exists x_1 \in A : f(a_1) \neq g(a_1)$. Да се докаже, че $\exists x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_2) \neq g(x_2)$.

4.7 Изброимо множество

A е изброимо $\overset{def}{\longleftrightarrow} \exists f : \mathbb{N} \longrightarrow A : f$ е биекция.
изброимост на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
(записки)
(диагонален метод на Кантор)
(безкрайният хотел на Хилберт)

4.8 Теорема на Кантор

$\forall A : \neg\exists f : A \longrightarrow 2^A : f$ е биекция.
неизброимост на $2^{\mathbb{N}}$
има ли инекция $A \longrightarrow 2^A$ (да се построи)
има ли сюрекция $A \longrightarrow 2^A$ (не?)

4.9 Примери за биекции

изброимост на $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, декартово произведение на изброими, изброимо на произволна степен.

4.10 Изброимо множество

A е изброимо $\overset{def}{\longleftrightarrow} \exists f : \mathbb{N} \longrightarrow A : f$ е биекция.
изброимост на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
(диагонален метод на Кантор)

4.11 Теорема на Кантор

$\forall A : \neg\exists f : A \longrightarrow 2^A : f$ е биекция.
неизброимост на $2^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}$

4.12 Примери за биекции

4.12.1 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

- чрез 2 инекции

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = (n, 0)$$
$$\implies |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$$
$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\forall m, n \in \mathbb{N} : g(m, n) = 2^m 3^n$$
$$\implies |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$$

- чрез "обхождане"на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\forall i(\text{ред}), j(\text{стълб}) \in \mathbb{N} : f(i, j) = \frac{(i + j)(i + j + 1)}{2} + j$$

- алгебрична биекция

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\forall i, j \in \mathbb{N} : f(i, j) = 2^i(2j + 1) - 1$$

4.12.2 $\mathbb{R} \sim (0, 1)$

- тригонометрична биекция

$$f : \mathbb{R} \to (0, 1)$$
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}$$

- експоненциална функция

$$f : \mathbb{R} \to (0, 1)$$
$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x}$$

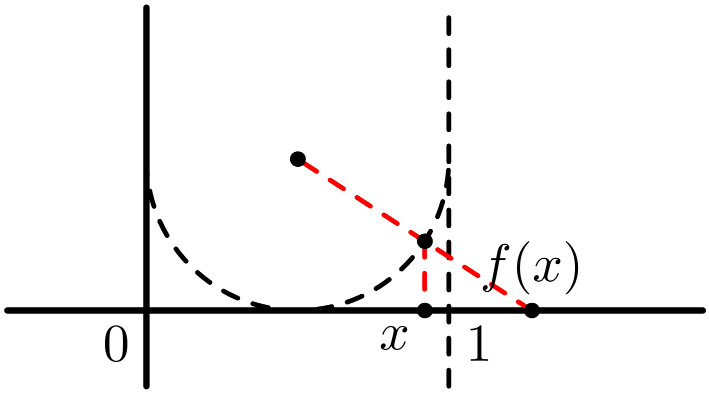
- рационална функция

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{ax + b}{x(x - 1)}$$
$$\text{where } a, b \in \mathbb{R}, ab < 0, |a| > |b|$$

- геометрична биекция

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{\frac{2x-1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + 1}{2}$$

Геометрична интерпретация:



неизброимост на $2^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (защо?), $\mathbb{C}$

4.13 Задачи за биекции

1. Да се докаже, че множеството на булевите вектори (крайни редици от $0, 1$) е изброимо.
   Да се докаже, че множеството на думите над азбуката $\{a, b\}$ е изброимо. (същата задача?)

2. Да се докаже, че множеството на крайните редици от естествени числа са изброимо много.
   $\big($да се направи сравнение между $2^{\mathbb{N}}$ и $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^i\big)$

4.13.1 Обединение на изброими множества е изброимо

Да се докаже, че A и B са изброими множества, то $A \cup B$ е изброимо.

5 Комбинаторика

5.1 Теория и примери

Принципи на събирането и умножението
Не се използват в теретичния си вид; описват броят начини събития да се случат в зависимост от зависимостта между тях.

1. на събирането
   Нека $R = \{S_i | i \in I\}$ е разбиване на .
   Тогава $|A| = \sum_{i \in I} |S_i|$.
2. на умножениетоо
   Нека $|X| = n, |Y| = m$. Тогава $|X \times Y| = |X|.|Y| = nm$.

Основни комбинаторни конфигурации (колко варианта има с/без наредба и с/без повторение (принцип на умножението :)):

1. с наредба и без повторение
   броят на наредените k-орки без повторение от n-елементно множество
   начините да изберем и подредим k души от n в редица
   $$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
   при $k = n : V_n^n = P_n = n!$ - пермутация
2. с наредба и с повторение
   броят на функциите $I_k \longrightarrow I_n$
   по колко начина можем да си купим k-неща измежду асортимент от n.
   $$n^k$$
3. без наредба и без повторение
   $\frac{\text{вариация}}{\text{пермутация}}$
   $$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =: \binom{n}{k} \text{ - биномен коефициент}$$
   Да се докаже, че $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.
   Комбинаторно доказателство(чак след доказване на връзката с подмножествата) и алгебрично.
   Идея за рекурсивна дефиниция на биномния коефициент чрез свойството.
   Триъгълник на Паскал.
   броят на k-елементните подмножества на n-елементно множество (да се докаже с индукция след доказване на основното свойство).

тъждества с биномни коефициенти

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Да се докаже, че $|2^A| = 2^{|A|}$ (комбинаторно с използване на горното твърдение).

4. без наредба и с повторение
   броят на начините да приберем k еднакви топчета в n чекмеджета
   броят на решенията на $x_1 + x_2 + ... + x_k = n; \forall i \in I_k : x_i \geq 0$

$$S_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

   броят на k-елементните мултимножества на n-елементно множество.

5.2 Задачи

1. Колко са булевите вектори с дължина n, които започват с 10 и завършват с 1?
2. Колко са булевите вектори, които започват и завършват с различна цифра?
3. Колко са булевите вектори, които съдържат поне 3 единици и поне 2 нули?
4. Колко са четирицифрените числа k, за които е изпълнено, че ако k е nечетно, то k съдържа 0
5. Дадена е стандартна колода от 52 карти. По колко начина можем да изберем от тях 13, така че сред тях да има:
   - точно $1J$
   - поне $1A$
   - не по-малко от $2Q$
   - точно 3 седмици
   - точно 1 боя, от която няма карти
   - най-много $2\diamondsuit$
   - точно $2A$ и точно $2\spadesuit$
   - точно $2A$ и не повече от $2\heartsuit$
   - не повече от 2 бои, в които имаме точно 1 карта.
6. Колко са булевите вектори с n нули и k единици, в които няма съседни единици?
   задачи

7. Колко различни думи могат да се получат, като се разместят буквите в думата:
   - "релация"
   - "конституционен"

   (пермутации с повторения)

8. Колко правоъгълника със страни ≥ 2 има в шахматна дъска 8×8?

$$\binom{8}{2}^2 = \frac{\binom{64}{2}}{4} - \frac{2.8.\binom{8}{2}}{2} = 784$$

9. По колко начина могат да седнат:
   - n човека на пейка;
   - n мъже и n жени на една пейка, като всяка жена седи до мъже, а всеки мъж седи до жени;
   - n човека на кръгла маса;
   - n мъже и n жени на кръгла маса, като всяка жена седи до мъже, а всеки мъж седи до жени;

10. Колко решения в естествени числа имат уравненията:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 \geq 3 \wedge x_3 \geq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7 \wedge x_3 < 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$$

11. Колко идентификатора с дължина n могат да се съставят в езика Ada? (идентификаторите започват с буква и продължават с буква, цифра или _, като _ не могат да са съседни или в края на идентификатора)

5.3 Принцип на Дирихле

формално

Нека $|A| = n$ и $|B| = k$. Тогава

$$n > k \longrightarrow \forall f : A \longrightarrow B : f \text{ не е инекция}$$

контрапозиция води до споменатото НУ за инекция.

практично

Представен чрез топки в чекмеджета:
n топки трябва да разположим в m чекмеджета. Тогава:

- има чекмедже с поне $\frac{n}{m}$ топки;
- има чекмедже с най-много $\frac{n}{m}$ топки.

При $n = m + 1 \implies$ има чекмедже с поне 2 топки.

5.3.1 Задачи

- На избори гласуват 100 души за 3 кандидата. Колко най-малко гласове ще стигнат на победителя да спечели?
- На банкет има 3 маси и 4 вида питие, по 10 бутилки от всеки вид. Да се докаже, че има маса, на която има поне по 4 бутилки от 2 различни вида питие.
- Матрица 2022×2022 да се попълни с числата $0, \pm 1$, така че всички сборове по редове, стълбове и диагонали да са различни.
- Точки с цели координати в равнината са оцветени с 8 различни цвата. Да се докаже, че има 2 едноцветни точки на растояния по-малко от 3.
- 50 точки са разположени във вътрешността на квадрат със страна 35. Да се докаже, че поне 2 точки са на рзстояние по-малко от 8.

5.4 Нютонов бином

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Доказателства:

- комбинаторно
- с инукция по n

5.5 Принцип за включване и изключване

$$\text{за две множества: } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

за три множества: $|A \cup B| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$$\text{обобщен принцип: } |\bigcup_{i \in I_k} A_i| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le j_1 \le \ldots \le j_i \le k} |\bigcap_{p \in I_i} A_{j_p}| =$$

$$= |A_1| + \ldots + |A_k| - (|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_{k-1} \cap A_k|) + \ldots + (-1)^{k-1} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$$

Доказтелства:

- Комбинаторно: използваме $(1+x)^n = ... = 0$ при $x = -1$;
- С индукция по n.

5.5.1 Задачи

1. В група студенти всеки знае поне един от езиците Java, C++, Python. Java знаят 15 души, C++ знаят 13, а Python - 10. C++ и Java знаят 5 човека, C++ и Python - 5, Java и Python - 3. Трима души знаят и трите езика. Колко души има в групата?
   $(28 = 15 + 13 + 10 - 5 - 5 - 3 + 3)$

2. В група пт 30 студенти Java знаят 15 души, C++ знаят 13, а Python - 10. C++ и Java знаят 5 човека, C++ и Python - 5, Java и Python - 3. Трима души знаят и трите езика. Колко души не знаят нито един език в групата?
   $(30 = x + 15 + 13 + 10 - 5 - 5 - 3 + 3)$

3. Нека $|A| = n$ и $|B| = m$. Колко са различните сюрекции $A \to B$?
   $$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (n-i)^n$$

4. Колко са пермутациите на $\{1, 2, ..., n\}$, такива, че $\forall i \in I_n : i$ не е на позиция i?
   $$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (n-i)!$$
   A_i - множеството от пермутациите, в които i е на позиция i;
   Отговорът е$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_k}|$.

5. Колко цели числа между 1 и 10000 съдържат цифрата 7?
   A_i - множеството от числата, в които 7 е на позиция i;
   Броим всички числа без тези, които съдържат 7 на някоя позиция.

6. Колко думи с дължина 5 над азбуката $\{a, b, c, d, e\}$ имат поне 2 последователни a-та?
   (2 начина)
   $$5^5 - 4^5 - \binom{5}{1}4^4 - \binom{4}{2}4^3 - \binom{3}{3}4^2 =$$
   $$= 4.5^3 - 3.5^2 - 3.5 + 5 + 1 + 1 + 5 - 1 = 421$$

7. Колко решения в цели числа има уравнението:
   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7 \wedge x_3 < 6 \wedge x_4 < 5$$

5.6 Комбинаторни доказателства

1. Ако $|A| = n$, то $|2^A| = 2^n$
2. $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$
3. $$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\},$$

   където $\left\{ {n \atop k} \right\}$ е броят на разбиванията на n-елементно множество на k непразни множества.

5.7 Броене на функции

Нека $|A| = n, |B| = m$. Колко са функциите $f : A \longrightarrow B$, които са:

- тотални
  $$m^n$$
- частични
  $$(1+m)^n$$
- инекции
  $$\text{вариация } V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \text{ (при } m < n \text{ няма такива (Дирихле))}$$
- сюрекции
  $$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$

6 Рекурсия

6.1 The rabbit problem

Задачата се състои в намиране броя на зайците, които ще се получат от една двойка за определен брой месеци при следните условия:

- всяка двойка плодоносни зайци дава прираст два заека на месец;
- новите зайци стават плодоносни на едномесечна възраст;
- зайците не умират никога.

Редицата от двойките за всеки месец е всъщност редицата на Фибоначи.

6.2 Рекурентни уравнения

1. Да се намери рекурентна зависимост за начините, по които n различни предмета могат да се подредят в редица.
2. Да се намери рекурентна зависимост за броя на естествените числа, чийто запис в десетична бройна система има n цифри, от които нулите са четен брой.
3. Да се намери рекурентна зависимост за броя на естествените числа, чийто запис в десетична бройна система има n цифри и няма съседни нули.

6.3 Хомогенни линейни рекурентни уравнения

От ред k с постоянни коефициенти:

$$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + ... + c_k s_{n-k} = 0$$

6.3.1 Алгоритъм за решаване:

- образуваме характеристично уравнение

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$$

$$c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + ... + c_k = 0$$

- записваме всичките му k корена в мултимножество

$$M = \{r_1, ..., r_k\}$$

- ако всички корени са различни, то решението на уравнението е

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + ... + A_n r_k^n,$$

  където числата A_i се определят от началните условия на рекурентното уравнение.

- ако има корен r_i, който се повтаря p пъти, то коефициентът пред r_i^n е

$$\left(A_{r_i,1} n^{p-1} + A_{r_i,2} n^{p-2} + ... + A_{r_i,p} n^0\right)$$

6.3.2 Задачи

1. Да се реши рекурентното уравнение:

$$s_n = 7s_{n-1} - 10s_{n-2}, n > 1; s_0 = 0; s_1 = 3$$

2. Колко са думите с дължина n от азбуката $\{a, b, c, d, e\}$, в които няма последователни a-та?

6.4 Нехомогенни линейни рекурентни уравнения

От ред k с постоянни коефициенти:

$$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + ... + c_k s_{n-k} = f(n),$$

където f е от вида:

$$f(n) = Q_1(n) b_1^n + Q_2(n) b_2^n + ... + Q_m(n) b_m^n$$

Алгоритъм за решаване:

- образуваме характеристично уравнение

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$$

$$c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + ... + c_k = 0$$

- записваме всичките му k корена, както и $b_1, ..., b_m$, съответно по $(deg(Q_1)+1), (deg(Q_2)+1), ..., (deg(Q_m)+1)$ пъти в мултимножество

$$M = \{r_1, ..., r_k, b_1, ..., b_1, b_2, ..., b_2, ..., b_m, ..., b_m, \}$$

- ако всички елементи на са различни, то решението на уравнението е

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + ... + A_p b_m^n,$$

където числата A_i се определят от началните условия на рекурентното уравнение.

- ако има елемент q, който се повтаря p пъти, то коефициентът пред q^n е

$$\left(A_{q,1} n^{p-1} + A_{q,2} n^{p-2} + ... + A_{q,p} n^0\right)$$

6.4.1 Задачи

1. Задачата за ханойските кули се състои от n диска, различни по размер един от друг, и 3 стълба. В началото дисковете са подредени на левия стълб, като най-големият е най-отдолу, а най-малкият - отгоре. Целта е кулата да бъде преместена на десния стълб. Може да се мести само по един диск на ход и не може по-голям диск да бъде поставен върху по-малък. Всеки ход е съставен от взимането на горния диск от даден стълб и в поставянето му най-отгоре на друг стълб. С колко най-малко хода може да се реши задачата?

2. Да се реши рекурентното уравнение:

$$s_n - 3s_{n-1} = 2, n > 1; s_1 = 2$$

3. Да се реши рекурентното уравнение:

$$s_n - 2s_{n-1} = 5.2^n, n > 0; s_0 = 7$$

4. Да се реши рекурентното уравнение:

$$a_{n+3} = -5a_{n+2} - 8a_{n+1} - 4a_n + 2\left(-1\right)^n + \left(-2\right)^{n+3}$$

5. Колко са булевите вектори с дължина n, които нямат съседни 0?

6. Да се намери формула за $\sum_{i=0}^{n} i$.

7. Да се намери формула за $\sum_{i=0}^{n} i^3$.

8. Да се докаже, че $\left(3+\sqrt{5}\right)^{2022} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2022} \in \mathbb{Z}$.

7 Графи

7.1 Дефиниции

- Граф наричаме наредена двойка $G\left(V,E\right)$, където V е множество на върховете (работим с краен брой), а $E\subseteq V\times V$ - множество на ребрата;
- Ако $E=\emptyset$ наричаме G празен граф;
- Ребро от вида $(v,v)\in E$ наричаме примка;
- $G\left(V,E\right)$ е неориентиран граф $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ е симетрична релация;
- Мултиграф наричаме наредена тройка $G\left(V,E,f\right)$, където V е множество на върховете (работим с краен брой), E е множество, а $f:E\rightarrow V\times V$ - функция, описваща ребрата;
- (неориентирани графи) Степен на $v\in V$ наричаме

$$d(v)\overset{\text{def}}{=}\left|\left\{\left(v,u\right)|u\in V\wedge\left(v,u\right)\in E\right\}\right|;$$

- (ориентирани графи) Полустепен на изхода на $v\in V$ наричаме

$$d^{+}(v)\overset{\text{def}}{=}\left|\left\{\left(v,u\right)|u\in V\wedge\left(v,u\right)\in E\right\}\right|;$$

- (ориентирани графи) Полустепен на входа на $v\in V$ наричаме

$$d^{-}(v)\overset{\text{def}}{=}\left|\left\{\left(u,v\right)|u\in V\wedge\left(u,v\right)\in E\right\}\right|;$$

- Графът $G\left(V,E\right)$ е k-регулярен $\overset{def}{\longleftrightarrow}\forall v\in V:d(v)=k$;
- $G\left(V,E\right)$ е пълният граф с $|V|=:n$ върха $\overset{def}{\longleftrightarrow}G$ е $n-1$ регулярен (игнорираме примките)
(има ребро между всеки два различни върха);
- $G_1\left(V_1,E_1\right)$ е подграф на $G\left(V,E\right)\overset{def}{\longleftrightarrow}V_1\subseteq V_2\wedge E_1\subseteq E_2$;
- $G'\left(V',E'\right)$ е клика в $G\left(V,E\right)\overset{def}{\longleftrightarrow}G'$ е подграф на $G\wedge G'$ е пълен граф;
- $G'\left(V',E'\right)$ е антиклика в $G\left(V,E\right)\overset{def}{\longleftrightarrow}G'$ е подграф на $G\wedge E'=\emptyset$;
- $G\left(V,E\right)$ е двуделен граф $\overset{def}{\longleftrightarrow}\exists V_1,V_2\subseteq V:V_1\cup V_2=V\wedge V_1\cap V_2=\emptyset\wedge\forall\left(u,v\right)\in E:\left(u\in V_1\leftrightarrow v\in V_1\right)$;
- p е път в $G\left(V,E\right)\overset{def}{\longleftrightarrow}p=\left(v_1e_1v_2e_2...v_{k-1}e_{k-1}v_k\right)$, където $v_i\in V$ и $e_i=\left(v_i,v_{i+1}\right)$;
- p е прост път в $G\left(V,E\right)\overset{def}{\longleftrightarrow}p=\left(v_1e_1v_2e_2...v_{k-1}e_{k-1}v_k\right)$ и $\forall i,j:v_i\neq v_j$ (без повторение на върхове);

- p е цикъл в $G\,(V,E) \overset{def}{\longleftrightarrow}$p е път в G и $v_1 = v_k$;
- p е Хамилтонов цикъл $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ p минава през всички върхове и $\forall i,j : v_i = v_j \to i = 1 \wedge j = k$;
- p е Ойлеров цикъл $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ p минава точно веднъж през всяко ребро;
- G е свързан граф $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ $\forall u,v \in V : \exists p = (u...v)$;
  (алтернативна дефиниция чрез релация $\subseteq V \times V$ на достижимост)
- (за ориентирани графи) G е силно свързан граф $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ $\forall u,v \in V : \exists p = (u...v) \wedge \exists p = (v...u)$;
- Допълнение на $G\,(V,E)$ наричаме графа $\overline{G}\left(V,\overline{E}\right)$;

7.2 Задачи

1. Да се докаже, че $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$.

   Решение: Всяко ребро е преобрено отляво и отдясно по точно 2 пъти.

2. Да се докаже, че $\sum_{v\in V} d^-(v) = \sum_{v\in V} d^+(v) = |E|$.

   Решение: Всяко ребро е преобрено отляво и отдясно по точно 1 път.

3. Да се докаже, че върховете от нечетна степен в неориентиран граф са четен брой.

   Решение: Допускаме, че графът $G\,(V,E)$ съдържа нечетен брой върхове от нечетна степен. Тогава:

   $$2|E| = \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in V, d(v)\text{ - четно}} d(v) + \sum_{v\in V, d(v)\text{ - нечетно}} d(v) \text{ е нечетно число}$$
   $$\implies \text{противоречие}$$

4. The hand-shaking lemma
   Нека $G\,(V,E)$ е граф с поне два върха. Тогава $\exists u,v \in V, u \neq v : d(u) = d(v)$.

5. Нека G е неориентиран граф, всеки връх на който е от степен ≥ 2. Да се докаже, че в G има цикъл.

   Решение: Допускаме, че няма цикли. Нека $p = x...y$ е най-дълъг път.
   Ако x и y не са инцидентни, то $\exists e = (x,u) \in E : u \notin p$. Тогава up е по-дълъг от $p \implies$ противоречие $\implies$ в G е цикличен.

6. Нека $G(V,E)$ е граф с n върха, всеки от които със степен $d(n) \geq \frac{n-1}{2}$. Да се докаже, че G е свързан.

Решение:

Допускаме, че G удовлетворява условията и G не е свързан.

Нека $G_1\left(V_1, E_1\right)$ е свързана компонента в G. Тогава $G_2\left(V_2, E_2\right) := G - G_1$ не е празен.

$$|V_1| + |V_2| = n \implies min\left(|V_1|, |V_2|\right) \leq \frac{n}{2}$$

Случай 1: $|V_1| \leq |V_2|$

$|V_1| \leq \frac{n}{2} \implies$ най-високата степен на връх в G_1 е $|V_1| - 1 \leq \frac{n-2}{2} < \frac{n-1}{2} \implies$ противоре

Аналогично за Случай 2. $\implies$ G е свързан.

7. Да се докаже, че
$$G\left(V, E\right) \text{ е свързан} \implies |E| \geq |V| - 1$$

Доказателство:

С индукция по $|V|$:

- $|V| = 2 \implies |E| = 1 \implies$ вярно е за 2
- Допускаме, че твърдението е вярно за $|V| = n$.
- Нека $|V| = n + 1$ Допускаме, че $|E| < |V| - 1 = n$ Допускаме, че $\forall v \in V$: $d(v) \geq 2$. Тогава $\sum_{v \in V} \geq 2n + 2 > 2n > 2|E| \implies$ противоречие.
$$\implies \exists v \in V : d(v) = 1 (\text{свързаността на } G \text{ не позволява степен } 0)$$
Знаем, че $G - v$ е свързан и $|V \setminus \{v\}| = n \xRightarrow{\text{(от хипотезата)}} |E| - 1 \geq |V \setminus \{v\}| - 1 = |V| - 2$
$$\implies |E| \geq |V| - 1$$

8. Да се докаже, че G не е свързан $\implies$ $\overline{G}$ е свързан.

Решение:

Разглеждаме произволните върхове $u, v \in V$.

- u и v са в различни свързани компоненти
$\implies (u, v) \notin E \implies (u, v) \in \overline{E} \implies$ има път от u до v в $\overline{G}$;
- u и v са в една свързана компонента
Тогава $\exists x \in V$, такова че x е в друга свързана компонента $\implies$ $(u, x) \notin E \wedge (v, x) \notin E \implies (u, x) \in \overline{E} \wedge (v, x) \in \overline{E} \implies p = uxv$ е път от u до v в $\overline{G}$.

$\implies$ има път между всеки два върха в $\overline{G} \implies \overline{G}$ е свързан.

9. Да се докаже, че ако в граф има точно 2 върха с нечетна степен, то има път между тях.

10. Да се докаже, че всеки 2 най-дълги пътя в свързан граф имат общ връх.

11. Нека $G\left(V, E\right)$ е граф с поне 6 върха. Тоава в G има 3-клика или 3-антиклика.

Решение:

Разглеждаме графа $G' = G + \overline{G} = K_{|V|}$, в който ребрата от G са оцветени в синьо, а ребрата от $\overline{G}$ са оцветени в червено. Нека $v, x, y, z \in V$. В графа $G' : d(v) \geq 5 \implies$ има поне 3 едноцветни ребра. БОО нека това са ребрата към x, y, z и те са сини. Разглеждаме следните 2 случая:

- някое от ребрата $(x, y), (y, z), (x, z)$ е синьо. Нека БОО (x, y) е синьо. Тогава v, x, y образуват клика в G;
- никое от ребрата $(x, y), (y, z), (x, z)$ не е синьо $\implies$ те са червени. Тогава x, y, z образуват клика в $\overline{G} \implies$ образуват антиклика в G.

12. Нека $G(V, E)$ е несвързан граф. Колко най-много ребра има G?

Решение:

Нека $G(V, E)$ има 2 свързани компоненти съответно с k и $n - k$ върхове. Тогава G има най-много

$$f(k) = \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{1}{2}\left(2k^2 - 2nk + n^2 - n\right)$$

функция на k, която достига максимум при $k = 1$ (или $k = n - 1$):

$$f(1) = f(n-1) = \binom{n-1}{2}$$

7.3 Обхождане на графи

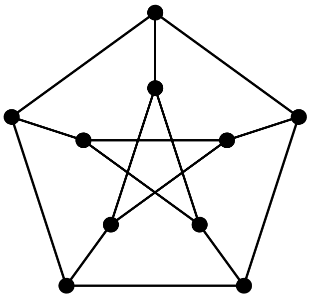
7.3.1 BFS (в широчина) (опашка (FIFO))

Записваме началния връх в опашката.
Докато опашката не е празна
-махаме първия връх от опашката
-ако не е обходен, добавяме в опашката всички върхове, инцидентни с него, и го добавяме в списъка с обходените.

7.3.2 DFS (в широчина) (стек (LIFO))

Записваме началния връх в стека.
Докато стекът не е празен
-махаме първия връх от стека
-ако не е обходен, добавяме в стека всички върхове, инцидентни с него, и го добавяме в списъка с обходените.

7.4 граф на Петерсен



1. няма цикли с дължина < 5
2. не е планарен
3. не е Хамилтонов

Доказателство:

Допускаме, че графът на Петерсен има Хамилтонов цикъл с дължина 10.

Допускаме, че всеки връх е свързан със срещуположния му в цикъла

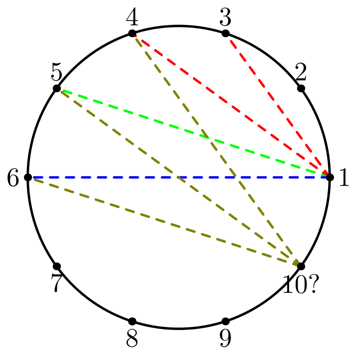
$\implies 1 - 6 - 5 - 10 - 1$ е цикъл с дължина 4 $\implies$ противорчие.

Нека БОО 1 не е свързан с 6 $\implies$ е свързан с 5 (иначе има цикъл с дължина ≤ 5)

Сега 10 не може да бъде свързан с друг връх,

понеже ще се получи цикъл с дължина ≤ 5.

$\implies$ противоречие.



4. има Хамилтонов път

8 Дървета

8.1 Дефиниция за дърво

$T\,(V,E)$ е дърво $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ T е свързан ацикличен граф
$T\,(V,E)$ е гора $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ T е ацикличен граф

8.2 Задачи

1. Да се докаже, че $G\,(V,E)$ е дърво и $|V| \geq 2 \implies \exists u,v \in V : d(u) = d(v) = 1$
2. Нека $G\,(V,E)$ е свързан граф. Нека c е цикъл в G и нека e е ребро от c. Тогава $G - e$ е свързан.
3. Даден е графът $G\,(V,E)\,, |V| =: n, n \geq 2$.
   Да се докаже, че следните твърдения са еквивалентни:
   (а) G е дърво;
   (б) G е свързан с $n-1$ ребра;
   (в) G е свързан, но при премахване на произволно ребро се получава несвързан граф;
   (г) Всяка двойка върхове е свързана с точно 1 прост път
   (д) G няма цикли, но при добавяне на ребро между произволни 2 върха се получава цикъл.

   (свързан граф от еквивалентности (рекурсия :))
4. Нека $G\,(V,E)\,, |V| = 2n$ е такъв, че n от върховете са от степен поне 3. Да се докаже, че в G има цикъл.
5. Нека $T\,(V,E)$ е свързан граф. Да се докаже, че

   $$G \text{ е дърво } \implies \forall v \in V : d(v) \geq 2 \to v \text{ е срязващ връх}$$
6. Да се докаже, че ако в граф с n върха има $n-1$ висящи върха, то графът е или дърво, или не е свързан.

9 Покриващи дървета

9.1 MST

Даден е графът $G(V, E)$.
$T(V, E')$ е покриващо дърво на $G \overset{def}{\longleftrightarrow} T$ е дърво и $E' \subseteq E$.

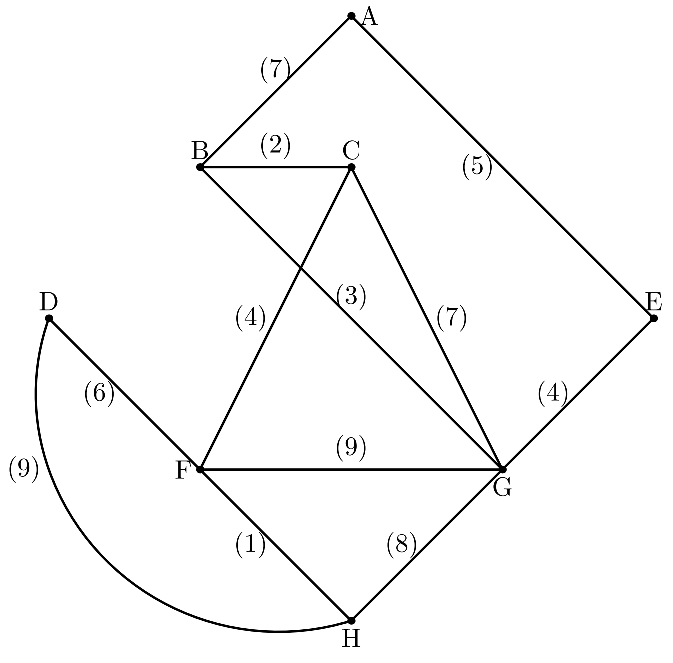
9.1.1 Дефиниция

Нека е дадена теглова функция $\omega : E \to \mathbb{N}$.
$T(V, E')$ е минимално покриващо дърво (MST) на $G \overset{def}{\longleftrightarrow} T$ е покриващо дърво на G и за всяко покриващо дърво $T' = (V, E_0)$ е изпълнено:

$$\sum_{e \in E'} c(e) \leq \sum_{e \in E_0} c(e)$$

9.1.2 Алгоритми

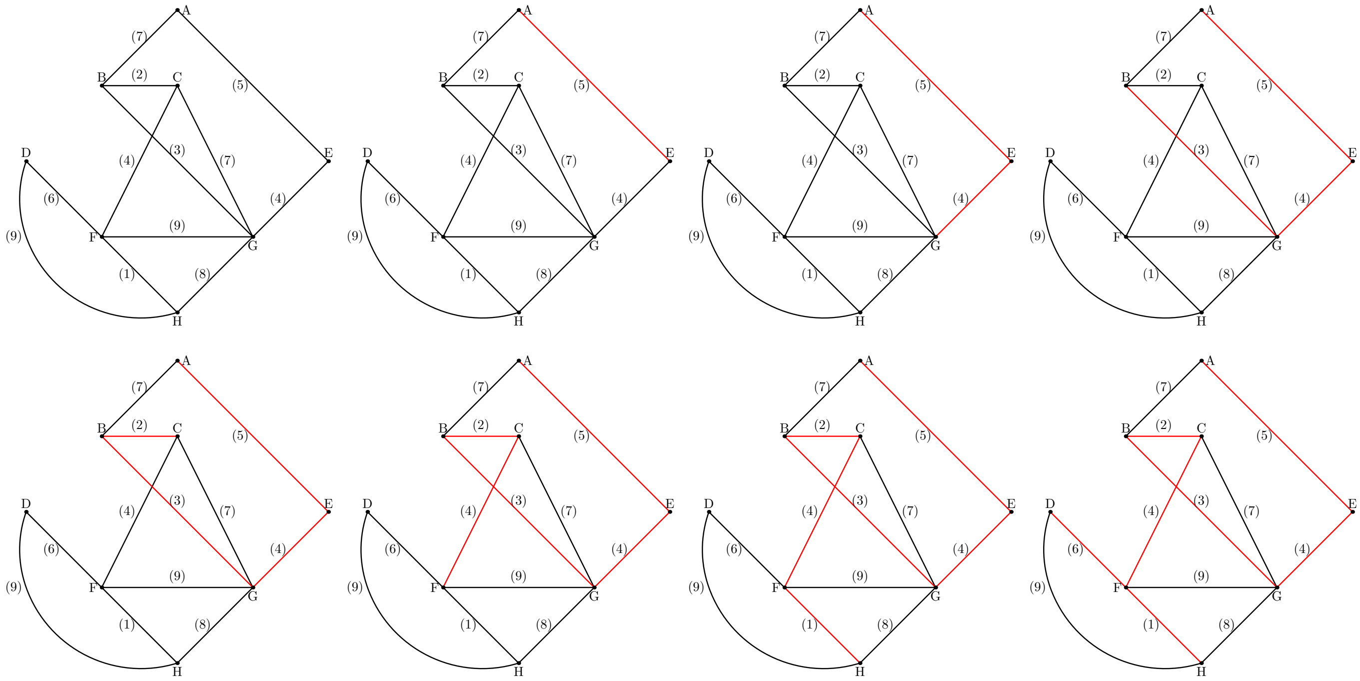
$G(V, E), \omega : E \to \mathbb{N}$:



9.1.3 Prim

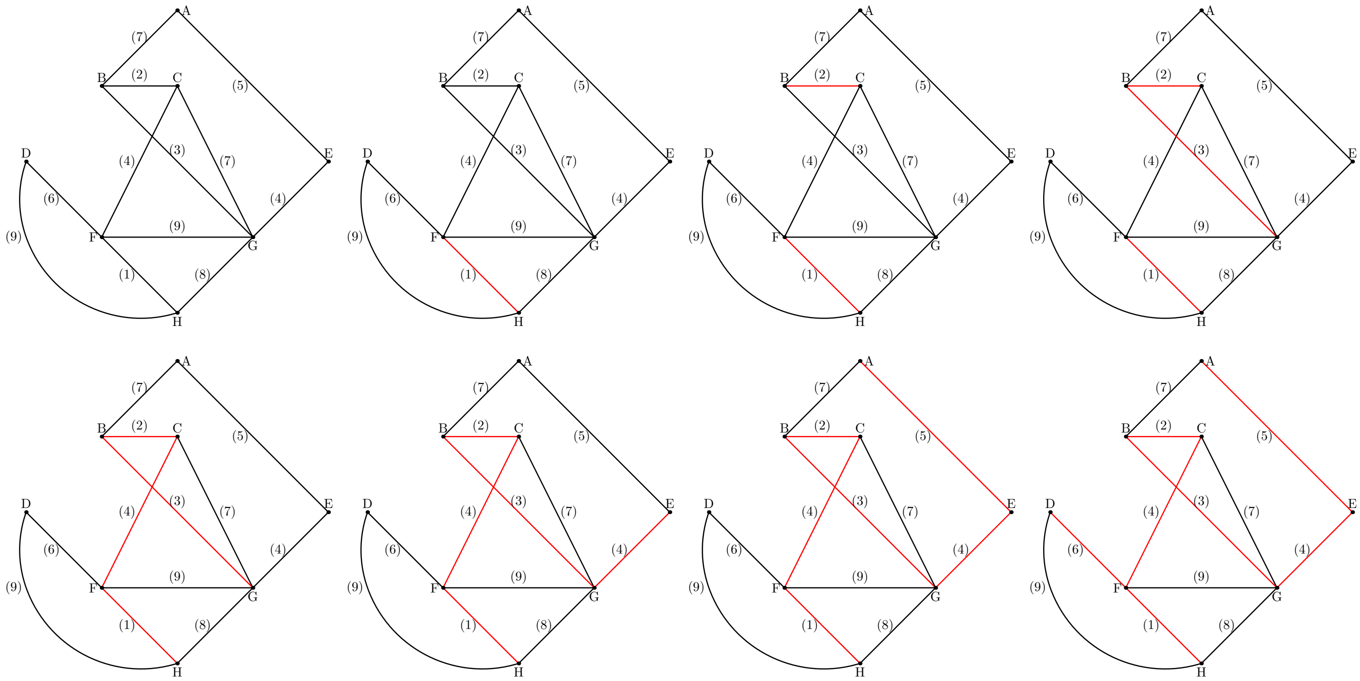
Визуализация на MST Prim algorithm

Добавяме най-лекото ребро с начало обходен връх и край необходен. Обявяваме необходения за обходен.



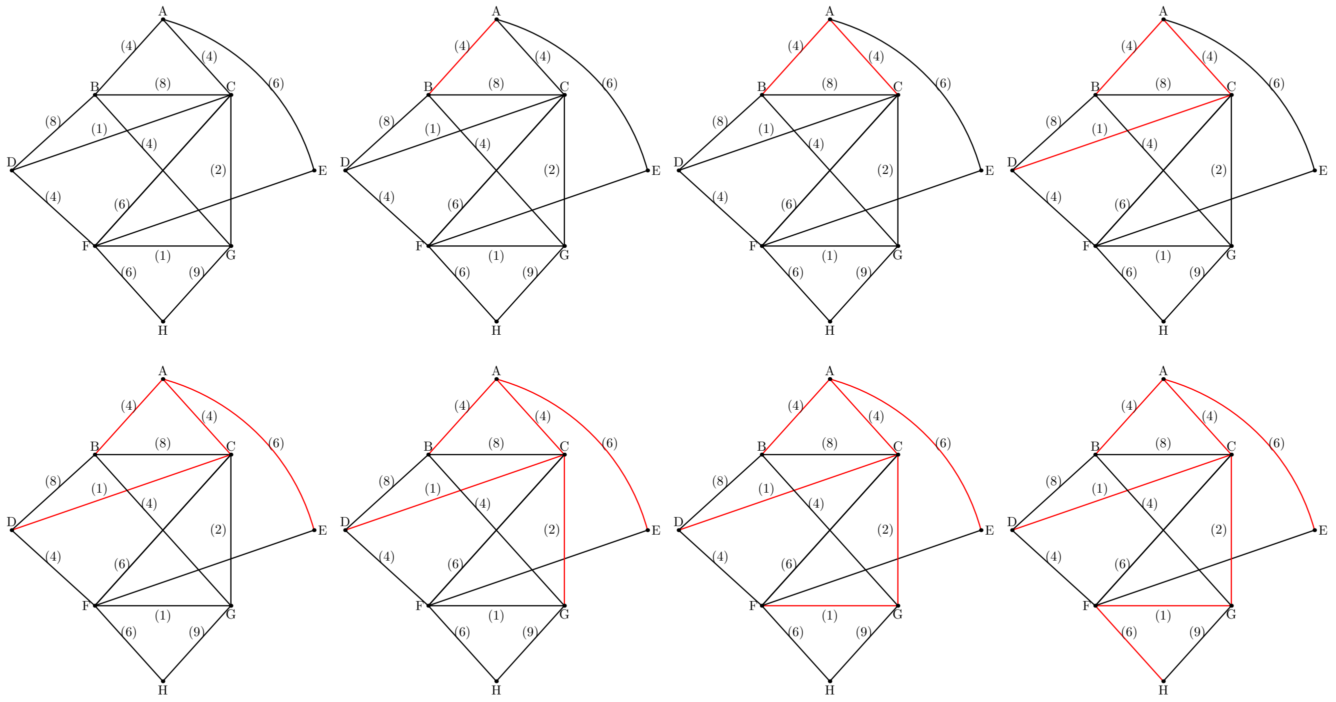
9.1.4 Kruskal

Визуализация на MST Kruskal algorithm
Сортираме ребрата според теглото им във възходящ ред и добавяме най-лекото ребро, необразуващо цикъл.



9.1.5 Dijkstra

Визуализация на MST Dijkstra algorithm Последователно строи най-късите пътища от началния връх до останалите.



1	A	0				
2	B	∞	4 A			
3	C	∞	4 A			
4	D	∞	$\cancel{12}$ $\cancel{B}$	5 C		
5	E	∞	6 A			
7	F	∞	$\cancel{10}$ $\cancel{C}$	$\cancel{9}$ $\cancel{D}$	$\cancel{8}$ $\cancel{F}$	7 G
6	G	∞	$\cancel{8}$ $\cancel{B}$	6 C		
8	H	∞	$\cancel{15}$ $\cancel{G}$	13 F		

10 Хиперкуб

10.1 Дефиниция

n-мерният хиперкуб е графът

$$B_n\left(V,E\right)$$
$$V=\mathbb{J}_2^n=\left\{\left(a_1,...,a_n\right)|a_i\in\mathbb{J}_2\right\}$$
$$E=\left\{\left(\tilde{\alpha}^n,\tilde{\beta}^n\right)|\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-\beta_i|=1\right\}$$
$$\text{наредба на върховете: } \tilde{\alpha}\preceq\tilde{\beta}\iff\forall i:\alpha_i\leq\beta_i$$

- n-регулярен
- $|V|=2^n$
- $|E|=\frac{\sum_{\tilde{\alpha}^n\in V}d(v)}{2}=\frac{2^n n}{2}=2^{n-1}n$
- B_n е двуделен

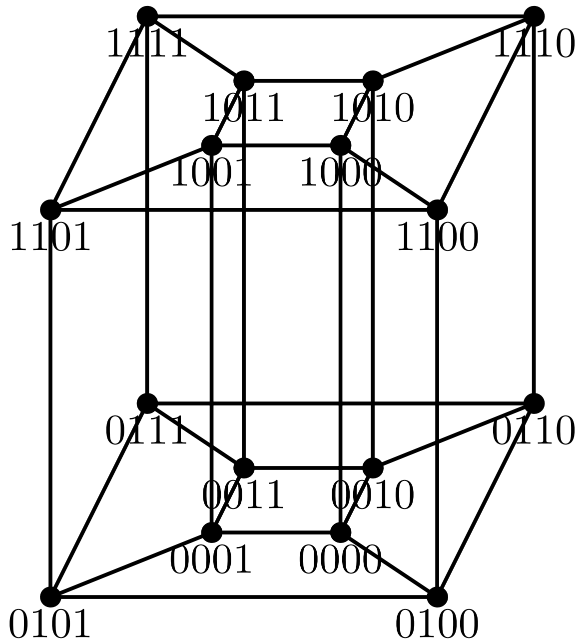
$$V_1=\left\{\alpha|\alpha\in\mathbb{J}_2^n\wedge\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\equiv 0\pmod 2\right\}\quad V_2=\left\{\alpha|\alpha\in\mathbb{J}_2^n\wedge\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\equiv 1\pmod 2\right\}$$

10.2 Задачи

1. Колко са различните максимални вериги в B_n? (верига е последователност от върхове $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,...,\tilde{\alpha}_n$, такива че $\forall i:\tilde{\alpha}_i\preceq\tilde{\alpha}_{i+1}$)
2. Да се намери броя на върховете в максимална антиклика на B_n.
   (2^{n-1})
3. Да се докаже, че B_n е хамилтонов за $n\geq 2$.
4. Да се докаже, че B_n не е планарен за $n\geq 4$.

Решение:

$$\forall n\geq 4: B_4 \text{ е подграф на } B_n.$$



След прилагане на следните премахвания:

(а) премахваме 1000;

(б) премахваме 0100;

(в) премахваме 1100 и добавяме $(1110, 1101)$;

(г) премахваме 0000;

(д) премахваме 0001;

(е) премахваме 1001 и добавяме $(1101, 1011)$;

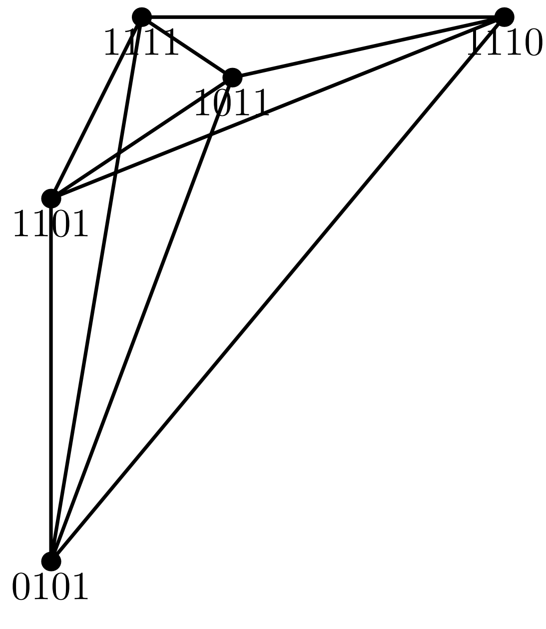
(ж) премахваме 1010 и добавяме $(1110, 1011)$;

(з) премахваме 0101 и добавяме $(0111, 1101)$;

(и) премахваме 0110 и добавяме $(0111, 1110)$;

(к) премахваме 0011 и добавяме $(0111, 1011)$;

Получаваме графът K_5 :



to be continued...