Дискретни структури

план на упражненията

КН 1.1, зимен семестър 2023/2024

Калоян Цветков
kaloyants25@gmail.com

ФМИ, СУ

2.3

Ресурси (теория и задачи) по Дискретни структури

- теория

- задачи

- теория + задачи

- сайт на Скелета (задачи от минали години)
- записки на Мария Соскова
- записки на Ангел Димитриев
- лични записки (по упражненията)

Съдържание

1 Въведение

1.1 Съждения

Изреченията, съдържащи информация, която може да се оцени като вярна и невярна, наричаме **съждения**.
Частта от съждението, която приписва признак, е **предикат**.
Предикатът може да бъде пресметнат като верен или грешен при прилагането му върху **субект**.
Пример:

"Този химикал е син."е вярно/грешно съждение, получено от пресмятането на предиката "Х е син."върху субекта "този химикал".

"Съществува просто число с $100,000,000$ цифри"е съждение, но не знаем как да оценим като вярно или грешно все още.

(Най-голямото открито просто число има около $24,800,000$ цифри)[1]

1.2 Логически операции

Дефиниции чрез вектор/<u>таблица</u> от стойности и на интуитивно ниво.

- логическо отрицание $\neg$

p	$\neg p$
0	1
1	0

- дизюнкция $\vee$

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- конюнкция $\wedge$; $\&$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- изключващо или $\oplus$

[1] Към датата 17 януари 2024 г.!

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- импликация (ако..., то...) $\rightarrow$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- биимпликация (еквивалентност) $\longleftrightarrow$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Свойства:
комутативност

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \oplus q \equiv q \oplus p$$

асоциативност

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \qquad p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

дистрибутивност

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee r) \qquad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

закон за контапозицията

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

закони на Де Морган

$$\neg(p \,\&\, q) \equiv \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \ \vee \ q) \equiv \neg p \,\&\, \neg q$$

Задача 1.1. *Нека p, q, r, s и t са следните съждения:*
p: *Ще разходя кучето преди обяд.*
q: *Сутринта ще спортувам.*
r: *Следобяд ще спортувам.*
s: *Днес времето е хубаво.*
t: *Днес влажността на въздуха е ниска.*

Напишете логически изрази, съответстващи са следните изречения.
1. Няма да разходя кучето преди обяд.
2. Ще разходя кучето преди обяд и следобяд ще спортувам.
3. Днес ще спортувам или сутринта, или следобяд.
4. Днес ще спортувам сутринта или следобяд.
5. Ако днес времето е хубаво, следобяд ще спортувам.
6. Необходимо условие, за да спортувам днес следобяд е, времето да е хубаво.
7. Достатъчно условие, за да спортувам днес е времето да е хубаво и влажността да е ниска.

1.3 Квантори

1.3.1 За всеобщност - $\forall$

$\forall x \in A : P(x)$ - предикатът P се оценява като истина за всеки/за произволен елемент от множеството A.

1.3.2 За екзистенциалност - $\exists$

$\exists x \in A : P(x)$ - предикатът P се оценява като истина за някой (поне 1) от всички елементи на множеството A.

Кванторите са дуални: отрицанието на единия поражда другия.
$\neg\exists x \in A : P(x) \longleftrightarrow \forall x \in A : \neg P(x)$
$\neg\forall x \in A : P(x) \longleftrightarrow \exists x \in A : \neg P(x)$

Задача 1.2. $R(x)$ - *"x е в стая <u><номер на стая></u>";*
$C(x)$ - *"x следва КН";*
$F(x, y)$ - *"x е приятел на y";*
Да се изразят твърденията чрез квантори и предикатите R, C, F.
"Някой следва КН."
$\exists x : C(x)$;
"Всеки е приятел на себе си."
$\forall x : F(x, x)$;
"Приятелството и неприятелството са взаимни."
$\forall x : \forall y : F(x, y) \to F(y, x)$; *(защо $\longleftrightarrow$ не е необходимо)*
"Всеки има приятел."
$\forall x : \exists y : F(x, y)$;
"Всички в стая <u><номер на стая></u> следват КН."
$\forall x : R(x) \to C(x)$;
"Всеки в тази стая има приятел от КН, който не е в стаята."
$\forall x : R(x) \to (\exists y : F(x, y) \land C(y) \land \neg R(y))$;
"Хората в стаята, които не следват КН, имат приятел в стаята."
$\forall x : R(x) \land \neg C(x) \to \exists y : R(y) \land F(x, y)$

"Да нямаш приятели е достатъчно условие да не следваш КН."
$\forall x : (\forall y : \neg F(x, y)) \to \neg C(x)$. *(контрапозиция?)*

"Двама души са приятели тогава и само тогава, когато имат общ приятел от КН."
$\forall x : \forall y : F(x, y) \longleftrightarrow \exists z : F(x, z) \wedge F(y, z) \wedge C(x)$

1.4 Множества и операции над тях

1.4.1 Множества

Множество - няма дефиниция; интуитивно: колекция от неща; всички математически обекти са изградени от множества.

1.4.2 Дефиниране на множества

- чрез изброяване
- чрез предикат
- празно множество: $(\exists\emptyset :)\, \forall x : x \notin \emptyset$.

Дефиниции за равенство на множества, подмножество, строго подмножество.

$$A = B \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x : x \in A \longleftrightarrow x \in B$$

$$A \subseteq B \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x : x \in A \to x \in B$$

$$A \subset B \overset{def}{\longleftrightarrow} A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$\forall A : \emptyset \subseteq A \wedge \emptyset \subset A$$

Примери за равни множества (повторението и редът на елементите не е от значение) и подмножества.

$$\{1, 2, \emptyset\} = \{\emptyset, 1, 2\} = \{\emptyset, \emptyset, 1, 2, 1, 1\}$$

$$\{x, 1, y\} \subseteq \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

$$\{x, 1, y\} \subset \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

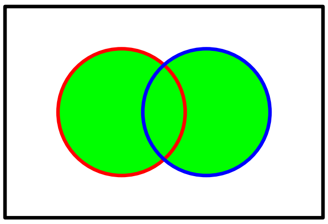
$$\{x, 1, y, z, 5, 2\} \subseteq \{2, y, 1, 5, z, x\}$$

1.4.3 Операции над множества

таблици (за произволен елемент "смятаме"резултат спрямо предикатите $x \in A$ и $x \in B$) Аналогии с логическите операции.

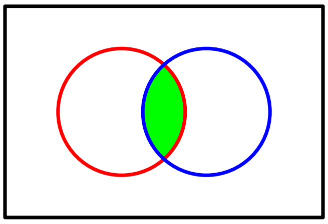
обединение

$$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



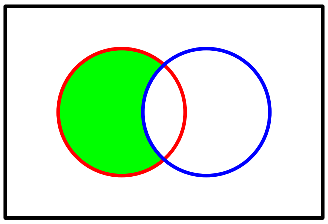
сечение

$$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



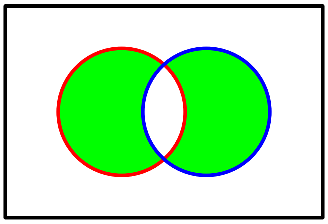
разлика

$$A \backslash B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



симетрична разлика

$$A \Delta B := \{x | x \in A \oplus x \in B\}$$



Доказателство ,че:

- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	$A \Delta B$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

$$\implies \forall x : x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \leftrightarrow x \in A\Delta B \implies (A \cup B) \setminus (B \cap A) = A\Delta B$$

- $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

A	B	$A\backslash B$	$B\backslash A$	$(A\backslash B) \cup (A\backslash B)$	$A\Delta B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

$$\implies \forall x : x \in (A\backslash B) \cup (A\backslash B) \leftrightarrow x \in A\Delta B \implies (A\backslash B) \cup (A\backslash B) = A\Delta B$$

Допълнение на множество

Универсално множество - съдържа всички разглеждани множества; определя се от контекста.

$$\overline{A} := U\backslash A; \qquad \overline{\overline{A}} = A.$$

Свойства:

- комутативност

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A \qquad A\Delta B = B\Delta A$$

- асоциативност

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Обединение на няколко множества: $\bigcup_{i\in I} A_i := \{x | \exists i \in I : x \in A_i\}$

Сечение на няколко множества: $\bigcap_{i\in I} A_i := \{x | \forall i \in I : x \in A_i\}$

- дистрибутивност

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

празно множество

$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A\backslash\emptyset = A$$

закони на Де Морган

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

степенно множество

$$\mathcal{P}(A) = 2^A := \{x | x \subseteq A\}$$

Примери за степенни множества.

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}\{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{1,2\}, 7\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\{\{1,2\}\}, \{7\}, \{\emptyset, \{1,2\}\}, \{\emptyset, 7\}, \{\{1,2\}, 7\}, \{\emptyset, \{1,2\}, 7\}\}$$

Задача 1.3. *Вярно ли е, че*

$$A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C) \text{ (не)}$$
$$(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C) \text{ (да)}$$

1.4.4 мултимножество

Множество, в което броя на повторенията на елементите е от значение.

$$\{1,3,3,2,1\} = \{1,2,3\} \text{ разглеждани като множества}$$

$$\{1,3,3,2,1\} \neq \{1,2,3\} \text{ разглеждани като мултимножества}$$

1.4.5 разбиване

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е разбиване на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i = A$$
$$\forall i, j \in I : i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset$$

$\{S\}$ разбиване ли е на S? (да$\longleftrightarrow S \neq \emptyset$)

1.4.6 покритие

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е покритие на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

1.4.7 разкрояване

$$F = \{A_i | i \in I\} \text{ е разкрояване на } A \overset{def}{\longleftrightarrow}$$
$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A$$
$$\forall i, j \in I : i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset$$

2 Индукция

Плочки домино:

Бутнали сме първата плочка и знаем, че ако падне n-тата ще падне и $n+1$-вата. Тогава ще паднат всички плочки.

2.1 Стандартна индукция

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \to P(n+1))) \to \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

Принцип на индукцията

- Проверяваме верността на твърдението за $n = 0$ $\quad (P(0))$;
- Допускаме, че твърдението е вярно за някое n $\quad (P(n))$;
- Доказваме, че твърдението е вярно и за $n+1$ $\quad (P(n) \to P(n+1))$.
- Тогава $\forall n \geq 0 : P(n)$.

Задача 2.1. *Да се докаже, че* $|2^A| = 2^{|A|}$.

Упътване:. $|A| = n+1 \geq 1 \implies |A \setminus \{a\}| = n \geq 0 \implies |2^{A\setminus\{a\}}| = 2^n$ $\implies$ *Подмножествата на A не съдържащи a са* 2^n*. Подмножествата на A са тези, несъдържащи a, и същите, обединени с* $\{a\} \implies$

$$\mathcal{P}(A) = \{x | x \subseteq A \wedge a \notin x\} \cup \{x | x \subseteq A \wedge a \in x\}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{x | x \subseteq A \wedge a \notin x\}| + |\{x | x \subseteq A \wedge a \in x\}| \text{ (since they have no intersection)}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A \setminus \{a\})| + |\{x | x \in \mathcal{P}(A \setminus \{a\}) \wedge a \in x\}|$$

те са $2.2^n = 2^{n+1}$.

Обобщен принцип на индукцията

$$P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0 : (P(n) \to P(n+1))) \to \forall n \geq n_0 : P(n)$$

- Проверяваме верността на твърдението за $n = n_0$ $\quad (P(n_0))$;
- Допускаме, че твърдението е вярно за някое n $\quad (P(n))$;
- Доказваме, че твърдението е вярно и за $n+1$ $\quad (P(n) \to P(n+1))$.
- Тогава $\forall n \geq n_0 : P(n)$.

2.2 Силна индукция

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : ((\forall k \leq n : P(k)) \to P(n+1))) \to \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

3 Релации

3.1 Наредена двойка

$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{a, \{a, b\}\}$$
$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

3.2 Декартово произведение

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \,|a \in A \wedge b \in B\}$$

Пример:
$\{1, 3, 5\} \times \{2, 4\} = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$
$\emptyset \times \{0, 2\} = \emptyset$

няма комутативност: $A \times B \neq B \times A$

Мощност на декартово произведение: $|A \times B| = |A|.|B|$
(доказателство с индукция по $|A|$)

3.3 Релация

релация е всяко подмножество на декартово произведение

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ - n-местна релация
при $n = 2$: бинарна релация $R \subseteq A \times A$ - бинарна релация над A
Пример за 3-местна релация:
$(a, b, c) \in R \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} a, b, c$ са страни на триъгълник.
Ако $|A| = n$, то колко са бинарните релации над A (2^n)

3.4 Домейн и кодомейн

$$dom\,(R) = \{a | \exists b \in A : (a, b) \in R\} \text{ - домейн}$$
$$range\,(R) = \{b | \exists a \in A : (a, b) \in R\} \text{ - кодомейн, range}$$

3.5 Свойства

$R \subseteq A \times A$

3.5.1 рефлексивност

$\forall a \in A : (a, a) \in R$

3.5.2 антирефлексивност

$\forall a \in A : (a, a) \notin R$

3.5.3 симетричност

$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$

3.5.4 антисиметричност

$\forall a, b \in A : a \neq b \rightarrow ((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R)$
(възможно е да има и несравними елементи)
$\longleftrightarrow$
$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a = b$

3.5.5 силна антисиметричност

$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \oplus (b, a) \in R$

3.5.6 транзитивност

$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$

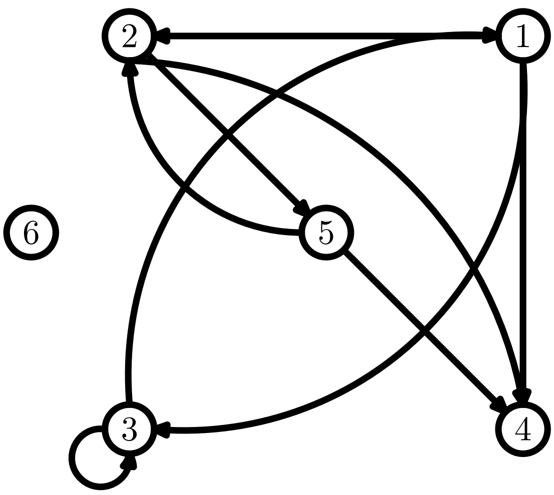
3.6 Интерпретации

$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (2,4), (3,3), (2,5), (5,4)\ (5,2)\}$$

3.6.1 Матрица

	1	2	3	4	5	6
1		x	x	x		
2				x	x	
3	x		x			
4						
5		x		x		
6						

3.6.2 Граф (диаграма на Хасе)



Интерпретация на свойствата с матрица и граф.

Задача 3.1. *Какви свойства притежават релациите:*

- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, R = \{(a, b) \, | a - b \in \mathbb{Z}\}$
- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \{(a, b) \, | a + b \geq 5\}$
- $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}, R = \{(a, b) \, | a \cap b \neq \emptyset\}$
- $R \subseteq \{0, 1, 2\}^2, R = \{(a, b) \, | a + b \geq 5\}$

3.7 Релации на еквивалентност

R е релация на еквивалентност $\stackrel{def}{\longleftrightarrow}$ R е рефлексивна, симетрична и транзитивна.
Примери: равенство на числа, еднаквост и подобие на триъгълници.

$$[x]_R \stackrel{\text{def}}{=} \{y | \, (x, y) \in R\}$$

Теорема: (лекции и изпит)

$$R \subseteq A \times A$$
$$F_R := \{[x]_R \, | x \in A\} \text{ е разбиване на } A$$

3.7.1 Примери с модулна аритметика

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$aRb \leftrightarrow 4 \mid a - b$
Да се докаже, че R е релация на еквивалентност. $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$xRy \leftrightarrow 2 \mid 2x - 5y$
Да се докаже, че R е релация на еквивалентност.

3.7.2 Модифициране на рел. на екв.

Нека R_1, R_2 са релации на еквивалентност над A. Релации на еквивалентност ли са релациите:

- $R_1 \cup R_2$ (не)
- $R_1 \cap R_2$ (да)
- $R_1 \Delta R_2$ (не)

3.7.3 Брой рел. на екв.

Колко са релациите на еквивалентност над $A = \{1, 2, 3, 4\}$?
(брой разбивания на 4-елементно множество)

3.8 Наредби

3.8.1 (Нестрога) частична наредба

R е частична наредба, когато е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
Примери: $\geq, \leq, \subseteq$.

3.8.2 Строга частична наредба

R е строга частична наредба, когато е антирефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
Примери: $>, <, \subset$.

3.8.3 Линейна наредба

R е линейна (пълна) наредба, когато е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна.

Въпрос 3.1. *Колко елемента има линейна наредба над n-елементно множество?* $\binom{\frac{n^2+n}{2}}{}$

3.9 Специални елементи

$$R \subseteq A \times A$$

3.9.1 Минимален

$$a \text{ е минимален } \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (b, a) \notin R$$

след обръщане на кванторите - "няма по-малък от него".

3.9.2 Най-малък

$$a \text{ е най-малък } \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (a, b) \in R$$

"по-малък от всички други"

3.9.3 Максимален

$$a \text{ е максимален } \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (a, b) \notin R$$

след обръщане на кванторите - "няма по-голям от него".

Въпрос 3.2. *Възможно ли е да има* $0, 1, > 1$ *минимален/максимален елемент в частична наредба?* *(0 - не (ако R е частична наредба, то R има минимален и максимален елемент (теорема)), 1 - да, 2 - да)*

А в линейна? *(0 - не (линейната наредба е и частична), 1 - да, 2 - не)*

3.9.4 Най-голям

$$a \text{ е най-голям } \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall b \in A : b \neq a \rightarrow (b, a) \in R$$

"по-голям от всички други"

Въпрос 3.3. *Възможно ли е да има повече от* 1 *най-малък/най-голям елемент в наредба?* *(не)*

3.9.5 Пример:

Да се посочат минимални, максимални, най-големи и най-малки елементи

	1	2	3	4	5	6	7	8
1			x	x				x
2	x	x	x	x	x	x	x	x
3							x	
4				x			x	
5								
6					x			x
7						x		x
8								

(При наличие на най-малък/най-голям, наличието на друг минимален/максимален е изключено.)

3.10 Затваряне на релации

3.10.1 Операции с релации

- Обратна релация: $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$
- Допълнение на релация: $\overline{R} = \{(a, b) \mid (a, b) \notin R\}$
- Композиция на релации: $S \circ R = \{(a, c) \mid \exists b \in A : (a, b) \in R \land (b, c) \in S\}$

$$R \subseteq A \times A$$

3.10.2 рефлексивно

$$refl(R) = R \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

3.10.3 симетрично

$$sym(R) = R \cup R^{-1}$$

3.10.4 транзитивно

$$R^1 = R; R^n = R \circ R^{n-1} \text{ при } n > 1$$
$$trans(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$$

Да се намери рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на
$R = \{(0,1), (0,2), (3,4), (3,5), (4,5), (6,7)\}$
(Получаваме релация на еквивалентност с класове $\mathcal{F}_R = \{\{0,1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7\}\}$)

Задача 3.2. *Да се докаже, че релацията $|$ - "дели"е частична наредба над $\mathbb{N}$. Да се посочат (или да се докаже, че такива няма) най-голям, най-малък, минимален и максимален елемент.*

Задача 3.3 (свеждане до умножение на матрици)**.** *Нека $|A| = n$.*
Нека $S = \{x|xA\}$.
Нека $R \subseteq S \times S$.
$R_1 R R_2 \overset{def}{\longleftrightarrow} R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. *Релация на еквивалентност ли е R? Докажете.*

Задача 3.4. *Нека $R \subseteq A \times A$ е рефлексивна и транзитивна релация.*
Нека $\sim \subseteq A \times A : a \sim b \leftrightarrow aRb \wedge bRa$.
Докажете, че $\sim$ е релация на еквивалентност.
F:=$\{[x]_\sim | x \in A\}$
$\langle \subseteq F \times F : [a]_\sim \langle [b]_\sim \leftrightarrow \exists x \in [a]_\sim \exists y \in [b]_\sim : xRy$
Да се докаже, че $\langle$ е частична наредба.

4 Функции/Изброимост

$$f \text{ е (тотална) функция } \overset{def}{\longleftrightarrow} f \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A : \exists! b \in B : (a, b) \in f \text{ (точно 1 образ)}$$

$$f(x) = y \longleftrightarrow (x, y) \in f$$

$$f \text{ е частична функция } \overset{def}{\longleftrightarrow}$$

$$f \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A : \forall b_1 \in B : \forall b_2 \in B : (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \implies b_1 = b_2$$

$$\text{(най-много 1 образ)}$$

$$f \text{ е функция и } f \subseteq A \times B \text{ - записваме } f : A \longrightarrow B$$

Въпрос 4.1. *Кои са релациите на еквивалентност $R \subseteq A \times A$, които са функции?*

Упътване:. *Допускаме, че R има клас на еквивалентност с поне 2 елемента $a \neq b \implies aRb \wedge aRa \implies a = b \implies$ противоречие $\implies$ само идентитетът е релация на еквивалентност и функция едновременно.*

4.1 Свойства

$$f : A \longrightarrow B$$

- инекция: $\forall a_1 \in A : \forall a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
  f е инекция$\longrightarrow |A| \leq |B|$ (необходимо условие за инекция)
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x \backslash 2^x$ са инекции
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 \backslash sin(x) \backslash x^2 - 3x + 2$ не са инекции
- сюрекция: $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$
  f е сюрекция$\longrightarrow |A| \geq |B|$
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x$
  $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 1)\,; f(x) = \frac{1}{x}$ са сюрекции
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 \backslash sin(x) \backslash x^2 - 3x + 2$ не са сюрекции
- биекция - инекция и сюрекция (необходимо условие за сюрекция)
  $\forall b \in B : \exists! a \in A : f(a) = b$
  f е биекция$\longrightarrow |A| = |B|$ (необходимо условие за биекция)
  Примери: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^{2n+1}$ е биекции $\forall n \in \mathbb{N}$

Ако има инекция $A \longrightarrow B$, то има сюрекция $B \longrightarrow A$.

4.2 Образ на множество

Нека $f : A \longrightarrow B$ и $X \subseteq A$
$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$

4.3 Композиция

Нека $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$
$g \circ f : A \longrightarrow C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

4.4 Обратна функция

Нека $f : A \longrightarrow B$ е биекция (при инекция обратната функция е частична).
$f^{-1} : B \longrightarrow A$, $f^{-1}(y) = x \overset{def}{\longleftrightarrow} f(x) = y$

4.5 Крайно и безкрайно множество

A е крайно $\overset{def}{\longleftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : \exists f : I_n \longrightarrow A : f$ е биекция.
A е безкрайно $\overset{def}{\longleftrightarrow} A$ не е крайно. (с квантори?)

4.6 Изброимо множество

A е изброимо $\overset{def}{\longleftrightarrow} \exists f : \mathbb{N} \longrightarrow A : f$ е биекция.
изброимост на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
(диагонален метод на Кантор)

4.7 Теорема на Кантор

$\forall A : \neg \exists f : A \longrightarrow 2^A : f$ е биекция.
неизброимост на $2^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}$

4.8 Примери за биекции

4.8.1 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

- "обхождане на безкрайна таблица"

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$i(\text{ред}), j(\text{стълб}) \in \mathbb{N} : f(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j$$

- алгебрично

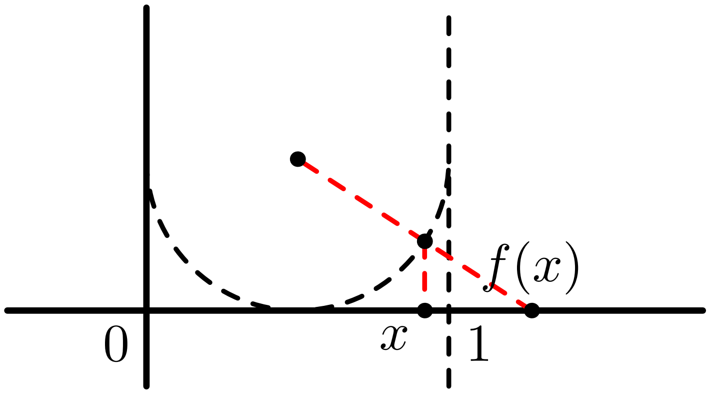
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\forall i,j \in \mathbb{N} : f(i,j) = 2^i(2j+1) - 1$$

4.8.2 $\mathbb{R} \sim (0,1)$

- тригонометрично
$$f : \mathbb{R} \to (0,1)$$
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$$
- експонента
$$f : \mathbb{R} \to (0,1)$$
$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$$
- геометрично
$$f : (0,1) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{\frac{2x-1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + 1}{2}$$

  Геометрична интерпретация:



4.8.3 $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Минава например през $(0,1)^2 \sim (0,1)$
$$f : (0,1)^2 \to (0,1)$$
$$f(0.a_0a_1a_2..., 0.b_0b_1b_2...) = 0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2...$$
Композиция на биекции води до $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

4.9 Затвореност на изброимите множество относно някои операции

- $\times$ Декартово произведение на изброими е изброимо
- $\cup$ Обединение на изброими е изброимо, нещо повече: обединение на изброим брой изброими множества е изброимо

Задача 4.1. *Композиция на инекции е инекция.*

Доказателство. Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ са инекции.
Допускаме, че $a \neq b \in A$.
$\implies f(a) \neq f(b) \in B \implies g(f(a)) \neq g(f(b)) \implies g \circ f$ е инекция. □

Задача 4.2. *Композиция на сюрекции е сюрекция.*

Доказателство. Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ са сюрекции.
Нека $z \in C \implies \exists y \in B : g(y) = z \implies \exists x \in A : f(x) = y. \implies g(f(x)) = g(y) = z \implies g \circ f$ е сюрекция. □

Задача 4.3. *Изследвайте за инективност/сюрективност функциите:*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{,ако } x \text{ е четно} \\ x-1 & \text{,ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (2x - y, -x + 2y) \ \textit{(домашна)}$$

$$f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\} : f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Задача 4.4 (Конструиране на биекция)**.** *Да се построи биекция $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, че $\forall n \in \mathbb{N} : n \mid \sum_{i=1}^{n} f(i)$.*

Задача 4.5 (Биекциите се различават поне в две двойки)**.** *Нека $f : A \longrightarrow A$ и $g : A \longrightarrow A$ са биекции и $\exists x_1 \in A : f(a_1) \neq g(a_1)$. Да се докаже, че $\exists x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_2) \neq g(x_2)$.*

Задача 4.6. *Да се докаже, че множеството на булевите вектори (крайни редици от* $0, 1$*) е изброимо.*
Да се докаже, че множеството на думите над азбуката $\{a, b\}$ е изброимо. (същата задача?)

Задача 4.7. *Да се докаже, че множеството на крайните редици от естествени числа са изброимо много.*
$\big($*да се направи сравнение между $2^{\mathbb{N}}$ и $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^i$*$\big)$

Задача 4.8. *Да се докаже, че A и B са изброими множества, то $A \cup B$ е изброимо.*

Доказателство. БОО разглеждаме случая $A \cap B = \emptyset$. Другият случай $A \cap B \neq \emptyset$ се свежда до обединението $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, които са непресичащи се. Тогава за $B \setminus A$ има 2 случая:

$B \setminus A$ е крайно. Нека $|B \setminus A| = \{c_0, c_1, ..., c_{k-1}\}$. Тогава

$$h : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B : h(n) = \begin{cases} c_n & \text{,ако } n < k \\ g\,(n-k) & \text{,ако } n \geq k \end{cases}$$

$B \backslash A$ е безкрайно. Имаме, че $B \backslash A \subseteq B \implies |B \backslash A| \leq \mathbb{N}$ и е безкрайно $\implies |B \backslash A| = \mathbb{N} \iff B \backslash A$ е изброимо и използваме аргумента за непресичащи се множества.

$\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ - биекция и $\exists g : \mathbb{N} \longrightarrow B$ - биекция.
Разглеждаме $h : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B : h(n)$

$$h : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B : h(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{,ако } n \text{ е четно} \\ g\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{,ако } n \text{ е нечетно} \end{cases}$$

h е биекция? $\square$

5 Комбинаторика

5.1 Теория и примери

Принципи на събирането и умножението
(Не се използват в теретичния си вид; описват бройката на събитията в зависимост от зависимостта между тях.)

1. на събирането
   Нека $R = \{S_i | i \in I\}$ е разбиване на .
   Тогава $|A| = \sum_{i\in I} |S_i|$.

2. на умножението
   Нека $|X| = n, |Y| = m$. Тогава $|X \times Y| = |X|.|Y| = nm$.

Основни комбинаторни конфигурации (колко варианта има (рекурсивно разсъждение?)):

1. с наредба и без повторение
   броят на наредените k-орки без повторение от n-елементно множество
   начините да изберем и подредим k души от n в редица

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

   при $k = n : V_n^n = P_n = n!$ - пермутация

2. с наредба и с повторение
   броят на функциите $I_k \longrightarrow I_n$
   по колко начина можем да си купим k-неща измежду асортимент от n.

$$n^k$$

3. без наредба и без повторение
   $\frac{\text{вариация}}{\text{пермутация}}$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =: \binom{n}{k} \text{ - биномен коефициент}$$

   Да се докаже, че $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. (алгебрично)
   Смята броя на k-елементните подмножества на n-елементно множество (да се докаже с индукция с използване на основното свойство).
   Идея за рекурсивна дефиниция на биномния коефициент чрез свойството.
   Триъгълник на Паскал.
   Да се докаже, че $|2^A| = 2^{|A|}$ (комбинаторно с използване на горното твърдение).

4. без наредба и с повторение
   броят на начините да приберем k еднакви топчета в n чекмеджета
   броят на решенията на $x_1 + x_2 + ... + x_k = n; \forall i \in I_k : x_i \geq 0$

$$S_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

   броят на k-елементните мултимножества на n-елементно множество.

5.2 Свойства на биномния коефициент

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i+1} = 2^{n-1}$$

Задача 5.1. *Колко са:*

- *Колко са булевите вектори с дължина n, които започват с* 10 *и завършват с* 1*?*
- *Колко са булевите вектори, които започват и завършват с различна цифра?*
- *Колко са булевите вектори, които съдържат поне* 3 *единици и поне* 2 *нули?*
- *Колко са четирицифрените числа k, за които е изпълнено, че ако k е печетно, то k съдържа* 0

Задача 5.2. *Дадена е стандартна колода от* 52 *карти. По колко начина можем да изберем от тях* 13*, така че сред тях да има:*

- *точно* $1J$
- *поне* $1A$
- *не по-малко от* $2Q$
- *точно* 3 *седмици*
- *най-много* $2\diamondsuit$
- *точно* $2A$ *и точно* $2\spadesuit$
- *точно* $2A$ *и не повече от* $2\heartsuit$.

Задача 5.3. *Колко са булевите вектори с n нули и k единици, в които няма съседни единици?*

5.2.1 Нютонов бином

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Два варианта за доказателство (индукция по n или комбинаторно разсъждение за коефициента пред всеки едночлен отдясно)

Задача 5.4. *Колко различни думи могат да се получат, като се разместят буквите в думата:*

- *"релация"*
- *"конституционен"*

Задача 5.5. *Колко правоъгълника със страни* ≥ 2 *има в шахматна дъска* 8×8*?*

Задача 5.6. *По колко начина могат да седнат:*

- *n човека на пейка;*
- *n мъже и n жени на една пейка, като всяка жена седи до мъже, а всеки мъж седи до жени;*
- *n човека на кръгла маса;*
- *n мъже и n жени на кръгла маса, като всяка жена седи до мъже, а всеки мъж седи до жени;*

Задача 5.7. *Колко решения в естествени числа имат уравненията:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 \geq 3 \wedge x_3 \geq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7 \wedge x_3 < 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$$

Задача 5.8. *По колко начина може да се размеси колода от 52 карти, така че в нея да има поне* 2 *последователни карти A?*

Задача 5.9. *Колко идентификатора с дължина n могат да се съставят в езика Ada? (идентификаторите започват с буква и продължават с буква, цифра или _, като _ не могат да са съседни или в края на идентификатора)*

5.3 принцип на Дирихле

формално

Нека $|A| = n$ и $|B| = k$. Тогава

$$n > k \longrightarrow \forall f : A \longrightarrow B : f \text{ не е инекция}$$

В контрапозиция води до споменатото НУ за инекция (мин. или по-миналия път). Представен чрез топки в чекмеджета:
n топки трябва да разположим в m чекмеджета. Тогава:

- има чекмедже с поне $\frac{n}{m}$ топки;
- има чекмедже с най-много $\frac{n}{m}$ топки.

При $n = m + 1$: следва, че има чекмедже с поне 2 топки.

Задача 5.10. *Да се докаже, че измежду* 12 *различни двуцифрени числа има* 2*, чиято разлика е двуцифрено число с еднакви цифри.*

Задача 5.11. *На избори гласуват* 100 *души за* 3 *кандидата. Колко най-малко гласове ще стигнат на победителя да спечели?*

Задача 5.12. *На банкет има* 3 *маси и* 4 *вида питие, по* 10 *бутилки от всеки вид. Да се докаже, че има маса, на която има поне по* 4 *бутилки от* 2 *различни вида питие.*

Задача 5.13. *Матрица* 2022×2022 *да се попълни с числата* $0, \pm 1$*, така че всички сборове по редове, стълбове и диагонали да са различни*

Задача 5.14. *Точки с цели координати в равнината са оцветени с* 8 *различни цвата. Да се докаже, че има* 2 *едноцветни точки на растояния по-малко от* 3*.*

Задача 5.15. 50 *точки са разположени във вътрешността на квадрат със страна* 35*. Да се докаже, че поне* 2 *точки са на рзстояние по-малко от* 8*.*

5.4 Принцип за включване и изключване

$$\text{за две множества: } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\text{обобщен принцип: } |\bigcup_{i \in I_k} A_i| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le j_1 \le \ldots \le j_i \le k} |\bigcap_{p \in I_i} A_{j_p}| =$$

$$= |A_1| + \ldots + |A_k| - (|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_{k-1} \cap A_k|) + \ldots + (-1)^{k-1} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$$

Доказателства:

- Комбинаторно: използваме $(1+x)^n = \ldots = 0$ при $x = -1$;
- С индукция по n.

Задача 5.16. *В група студенти всеки знае поне един от езиците Java, C++, Python. Java знаят 15 души, C++ знаят 13, а Python - 10. C++ и Java знаят 5 човека, C++ и Python - 5, Java и Python - 3. Трима души знаят и трите езика. Колко души има в групата?*
($28 = 15 + 13 + 10 - 5 - 5 - 3 + 3$*)*

Задача 5.17. *Нека* $|A| = n$ *и* $|B| = m$*. Колко са различните сюрекции* $A \to B$*?*

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$

Задача 5.18.

Нека $|A| = n$ *и* $|B| = m$*. Колко са различните частични функции* $A \to B$*?*

$$(1+m)^n \text{ чрез принципа или чрез нов елемент на } B$$

Задача 5.19. *Колко са пермутациите на* $\{1, 2, ..., n\}$*, такива, че* $\forall i \in I_n : i$ *не е на позиция i?*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

Задача 5.20.

Дадена е стандартна колода от 52 *карти. По колко начина можем да изберем от тях* 13*, така че сред тях да има:*

- *точно* 1 *боя, от която няма карти*
- *не повече от* 2 *бои, в които имаме точно* 1 *карта.*

Задача 5.21. *Колко цели числа между* 1 *и* 10000 *съдържат цифрата* 7*?*

Задача 5.22. *Колко думи с дължина* 5 *над азбуката* $\{a, b, c, d, e\}$ *имат поне* 2 *последователни a-та?*

Задача 5.23. *Колко решения в цели числа има уравнението:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, x_2 < 7 \wedge x_3 < 6 \wedge x_4 < 5$$

Задача 5.24. *Докажете чрез комбинаторни разсъждения следните твърдения:*

1. *Ако* $|A| = n$*, то* $|2^A| = 2^n$

2. $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

3.

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n-1 \atop k} \right\},$$

където $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *е броят на разбиванията на* n*-елементно множество на* k *непразни множества.*

Задача 5.25. *Нека* $|A| = n, |B| = m$. *Колко са функциите* $f : A \longrightarrow B$*, които са:*

- *тотални*
- *частични*
- *инекции*
- *сюрекции*

6 Задачи

(решени и нерешени на допълнително упражнение преди семестриално контролно)

Задача 6.1. *Нека $x \in \mathbb{R}, x > 0$, а $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Докажете, че $(1+x)^n \geq 1 + nx$*

Задача 6.2. *Нека a и q са фиксирани реални числа. Докажете, че за всяко естествено число n е изпълнена формулата:*

$$\sum_{i=0}^{n} aq^i = \frac{aq^{n+1} - a}{q-1}, q \neq 1$$

Задача 6.3. *Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 1$ е в сила равенството:*

$$\sum_{\{a_1,\ldots,a_k\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (a_1 \cdot a_2 \cdots a_k) = (n+1)! - 1$$

*(*Сумирането е по всички непразни подмножества на $\{1, 2, \ldots, n\}$.*)*

Задача 6.4.

Дадена е стандартна колода от 52 карти. По колко начина можем да изберем от тях 13, така че сред тях да има:

- *точно 1 боя, от която няма карти*
- *не повече от 2 бои, в които имаме точно 1 карта.*

Задача 6.5. *Тази (4.5) задача за биекции.*

Задача 6.6. *Дадени са естествени числа $a_1, a_2, ..., a_n$. Да се докаже, че има подредица от последователни елементи $a_l, ..., a_r$ на $\{a_i\}_{i=1}^n$, такава, че $\sum_{i=l}^r$ се дели на n.*

Задача 6.7. *На витрината на магазин са наредени в редица 2 черни, 2 бели, 2 сини и 2 червени молива, различаващи се само по цвета си. По колко начина може да стане това нареждане, ако:*

(a) *няма ограничения за реда им;*

(b) *няма едноцветни моливи един до друг.*

Задача 6.8. *По колко начина върху шахматна дъска могат се разположат максимален брой топове, без да се бият взаимно? Обосновете отговора си.*

Задача 6.9. *По колко начина може да се размеси колода от 52 карти, така че в нея да има поне 2 последователни карти A?*

Задача 6.10. *Дадена е редица от 12 стола, на 9 от които седят хора. Да се докаже, че има 3 последователни заети стола.*

Задача 6.11. *Точките в равнината са оцветени в черно и бяло. Да се докаже, че има правоъгълник със само черни или само бели върхове.*

Задача 6.12. *Механизмът на сейф се състои от седем колелца, всяко от които може да заема десет различни позиции, обозначени с цифрите от 0 до 9.*
Когато механизмът работи правилно, само една седемцифрена поредица може да отвори сейфа. Поради повреда в механизма сейфът се отваря, ако поне четири от седемте колелца са в правилно положение. Колко са седемцифрените поредици, отключващи повредения сейф?

Задача 6.13. *Колко на брой са строго растящите редици от седем цели положителни числа, ако първият член е* 1 *и разликата на всеки* 2 *поредни члена не надхвърля* 4*?*

Задача 6.14. *В магистърска програма X има* 17 *студенти, а в магистърска програма Y* - 12 *студенти. Всеки от тях трябва да избере и посещава точно един от общо* 10 *избираеми курса. По колко начина студентите могат да направят своя избор, ако:*

- *няма никакви ограничения при избора;*
- *няма курс, избран от всеки студент от програмата Y;*
- *всеки курс е избран от поне един студент.*

Задача 6.15. *Нека сме избрали $n+1$ елемента на множеството $S = \{1, 2, 3, ..., 2n\}$. Покажете, че поне едно от избраните числа дели друго от избраните числа.*

Задача 6.16. *Колко са монотонно растящите редиците от естествени числа $x_1, x_2, \ldots,$ такива че $x_1 \geq 0, x_n \leq m$.*

Задача 6.17. *Означаваме множеството от реални числа с $\mathbb{R}$, а рационалните числа с $\mathbb{Q}$.*

Определяме релацията $R = \{(x, y) |\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x - y \in \mathbb{Q}\}$.

(а) *Докажете, че R е релация на еквивалентност.*

(б) *Докажете, че класове на еквивалентност, породени от R, образуват неизброимо множество.*

7 Рекурсия

Задача (Фибоначи). *Задачата се състои в намиране броя на зайците, които ще се получат от една двойка за една година при следните условия:*

- *всяка двойка плодоносни зайци дава прираст два заека на месец;*
- *новите зайци стават плодоносни на едномесечна възраст;*
- *зайците не умират никога.*

7.1 Хомогенни линейни рекурентни уравнения

От ред k с постоянни коефициенти:

$$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + ... + c_k s_{n-k} = 0$$

Алгоритъм за решаване:

- образуваме характеристично уравнение
$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$$
$$c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + ... + c_k = 0$$
- записваме всичките му k корена
в мултимножество
$$M = \{r_1, ..., r_k\}$$
- ако всички корени са различни, то решението на уравнението е
$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + ... + A_n r_k^n,$$
където числата A_i се определят от началните условия на рекурентното уравнение.
- ако има корен r_i, който се повтаря p пъти, то коефициентът пред r_i^n е
$$\left(A_{r_i,1} n^{p-1} + A_{r_i,2} n^{p-2} + ... + A_{r_i,p} n^0\right)$$

Задача 7.1. *Да се реши рекурентното уравнение:*

$$s_n = 7s_{n-1} - 10s_{n-2}, n > 1; s_0 = 0; s_1 = 3$$

Задача 7.2. *Колко са думите с дължина n от азбуката $\{a, b, c, d, e\}$, в които няма последователни a-та?*

7.2 Нехомогенни линейни рекурентни уравнения

От ред k с постоянни коефициенти:

$$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + ... + c_k s_{n-k} = f(n),$$

където f е от вида:

$$f(n) = Q_1(n)b_1^n + Q_2(n)b_2^n + ... + Q_m(n)b_m^n$$

Алгоритъм за решаване:

- образуваме характеристично уравнение

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$$
$$c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + ... + c_k = 0$$

- записваме всичките му k корена, както и $b_1, ..., b_m$, съответно по $(deg(Q_1) + 1), (deg(Q_2) + 1), ..., (deg(Q_m) + 1)$ пъти в мултимножество

$$M = \{r_1, ..., r_k, b_1, ..., b_1, b_2, ..., b_2, ..., b_m, ..., b_m, \}$$

- ако всички елементи на са различни, то решението на уравнението е

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + ... + A_p b_m^n,$$

където числата A_i се определят от началните условия на рекурентното уравнение.

- ако има елемент q, който се повтаря p пъти, то коефициентът пред q^n е

$$\left(A_{q,1} n^{p-1} + A_{q,2} n^{p-2} + ... + A_{q,p} n^0\right)$$

Задача 7.3. *Задачата за ханойските кули се състои от n диска, различни по размер един от друг, и 3 стълба. В началото дисковете са подредени на левия стълб, като най-големият е най-отдолу, а най-малкият - отгоре. Целта е кулата да бъде преместена на десния стълб. Може да се мести само по един диск на ход и не може по-голям диск да бъде поставен върху по-малък. Всеки ход е съставен от взимането на горния диск от даден стълб и в поставянето му най-отгоре на друг стълб. С колко най-малко хода може да се реши задачата?*

Задача 7.4. *Да се реши рекурентното уравнение:*

$$s_n - 3s_{n-1} = 2, n > 1; s_1 = 2$$

Задача 7.5. *Да се реши рекурентното уравнение:*

$$s_n - 3s_{n-1} = 2, n > 1; s_1 = 2$$

Задача 7.6. *Да се реши рекурентното уравнение:*

$$s_n - 2s_{n-1} = 5.2^n, n > 0; s_0 = 7$$

Задача 7.7. *Да се реши рекурентното уравнение:*

$$a_{n+3} = -5a_{n+2} - 8a_{n+1} - 4a_n + 2\left(-1\right)^n + \left(-2\right)^{n+3}$$

Задача 7.8. *Колко са булевите вектори с дължина n, които нямат съседни 0?*

Задача 7.9.

- *Да се намери формула за* $\sum_{i=0}^{n} i$.
- *Да се намери формула за* $\sum_{i=0}^{n} i^3$.

Задача 7.10. *Да се докаже, че* $\left(3+\sqrt{5}\right)^{2022} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2022} \in \mathbb{Z}$.

8 Графи

8.1 Дефиниции

- Граф наричаме наредена двойка $G\,(V,E)$, където V е множество на върховете (работим с краен брой), а $E \subseteq V \times V$ - множество на ребрата;
- Ако $E = \emptyset$ наричаме G празен граф;
- Ребро от вида $(v,v) \in E$ наричаме примка;
- $G\,(V,E)$ е неориентиран граф $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ E е симетрична релация;

  В такива случаи ще отъждествяваме E с множество от двуелементни подмножества от върхове, като
  $$\{u,v\} \text{ е ребро } \leftrightarrow (u,v) \in E$$
  и под $|E|$ ще разбираме именно броят на тези подмножества ребра.
- Мултиграф наричаме наредена тройка $G\,(V,E,f)$, където V е множество на върховете (работим с краен брой), E е множество, а $f : E \to V \times V$ - функция, описваща ребрата;
- (неориентирани графи) Степен на $v \in V$ наричаме
  $$d(v) \overset{\text{def}}{=} |\{(v,u) \mid (v,u) \in E \wedge u \in V\}|;$$
- (ориентирани графи) Полустепен на изхода на $v \in V$ наричаме
  $$d^{+}(v) \overset{\text{def}}{=} |\{(v,u) \mid (v,u) \in E \wedge u \in V\}|;$$
- (ориентирани графи) Полустепен на входа на $v \in V$ наричаме
  $$d^{-}(v) \overset{\text{def}}{=} |\{(u,v) \mid (u,v) \in E \wedge u \in V\}|;$$
- Графът $G\,(V,E)$ е k-регулярен $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ $\forall v \in V : d(v) = k$;
- $G\,(V,E)$ е пълният граф с $|V| =: n$ върха $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ G е $n-1$ регулярен (игнорираме примките)
  (има ребро между всеки два различни върха);
- $G_1\,(V_1,E_1)$ е подграф на $G\,(V,E)$ $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ $V_1 \subseteq V_2 \wedge E_1 \subseteq E_2$;
- $G'\,(V',E')$ е клика в $G\,(V,E)$ $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ G' е подграф на $G \wedge G'$ е пълен граф;
- $G'\,(V',E')$ е антиклика в $G\,(V,E)$ $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ G' е подграф на $G \wedge E' = \emptyset$;
- $G\,(V,E)$ е двуделен граф $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ $\exists V_1 \subset V\ \exists V_2 \subset V\ (V_1 \cup V_2 = V\ \&\ V_1 \cap V_2 = \emptyset\ \&\ \forall (u,v) \in E\,(u \in V_1 \leftrightarrow v \in V_2))$;

- p е път в $G(V,E) \overset{def}{\longleftrightarrow} p = (v_1 v_2 ... v_k)$, където $v_i \in V$ и $(v_i, v_{i+1}) \in E$;
- p е прост път в $G(V,E) \overset{def}{\longleftrightarrow} p = (v_1 v_2 ... v_k)$ и $\forall i, j : v_i \neq v_j$ (без повторение на върхове);
- p е цикъл в $G(V,E) \overset{def}{\longleftrightarrow}$ p е път в G и $v_1 = v_k$;
- p е Хамилтонов цикъл $\overset{def}{\longleftrightarrow} p$ минава през всички върхове и $\forall i, j : v_i = v_j \rightarrow i = 1 \wedge j = k$;
- p е Ойлеров цикъл $\overset{def}{\longleftrightarrow} p$ минава точно веднъж през всяко ребро;
- G е свързан граф $\overset{def}{\longleftrightarrow} \forall u, v \in V : \exists p = (u...v)$;
(алтернативна дефиниция чрез релация $\subseteq V \times V$ на достижимост)
- (за ориентирани графи) G е силно свързан граф $\overset{def}{\longleftrightarrow} \forall u, v \in V : \exists p = (u...v) \wedge \exists p = (v...u)$;
- Допълнение на $G(V,E)$ наричаме графа $\overline{G}\left(V, \overline{E}\right)$;

8.2 Задачи

Задача 8.1 (връзка между степените и броя на ребрата). *Да се докаже, че*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

.

Доказателство. Всяко ребро е преброено отляво и отдясно по точно 2 пъти. □

Задача 8.2 (връзка между полустепените и броя на ребрата). *Да се докаже, че*

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

.

Доказателство. Всяко ребро е преобрено отляво и отдясно по точно 1 път. □

Задача 8.3 (брой върхове от нечетна степен). *Да се докаже, че върховете от нечетна степен в неориентиран граф са четен брой.*

Доказателство. Допускаме, че графът $G(V,E)$ съдържа нечетен брой върхове от нечетна степен. Тогава:

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ - четно}} d(v) \quad + \sum_{v \in V, d(v) \text{ - нечетно}} d(v) \text{ е нечетно число}$$

$$\implies \text{ противоречие}$$

□

Задача 8.4 (The hand-shaking lemma)**.** *Нека $G\,(V,E)$ е граф с поне два върха. Тогава $\exists u, v \in V, u \neq v : d(u) = d(v)$.*

Задача 8.5 ($d_{min} \geq 2 \implies$ цикъл)**.** *Нека G е неориентиран граф, всеки връх на който е от степен ≥ 2. Да се докаже, че в G има цикъл.*

Доказателство. Допускаме, че няма цикли. Нека $p = x...y$ е най-дълъг път.
Ако x и y не са инцидентни, то $\exists e = (x, u) \in E : u \notin p$. Тогава up е по-дълъг от $p \implies$ противоречие $\implies$ в G е цикличен. □

Задача 8.6 (ДУ за свързаност на граф)**.** *Нека $G(V,E)$ е граф с n върха, всеки от които със степен $d(n) \geq \frac{n-1}{2}$. Да се докаже, че G е свързан.*

Доказателство.

Допускаме, че G удовлетворява условията и G не е свързан.

Нека $G_1\,(V_1, E_1)$ е свързана компонента в G. Тогава $G_2\,(V_2, E_2) := G - G_1$ не е празен.

$$|V_1| + |V_2| = n \implies min\,(|V_1|, |V_2|) \leq \frac{n}{2}$$

Случай 1: $|V_1| \leq |V_2|$

$|V_1| \leq \frac{n}{2} \implies$ най-високата степен на връх в G_1 е $|V_1| - 1 \leq \frac{n-2}{2} < \frac{n-1}{2} \implies$ противоречие

Аналогично за Случай 2. $\implies G$ е свързан.

□

Задача 8.7 (НУ за свързаност на граф)**.** *Да се докаже, че*

$$G\,(V,E) \text{ е свързан} \implies |E| \geq |V| - 1$$

Доказателство.

С индукция по $|V|$:

- $|V| = 2 \implies |E| = 1 \implies$ вярно е за 2
- Допускаме, че твърдението е вярно за $|V| = n$.
- Нека $|V| = n+1$ Допускаме, че $|E| < |V| - 1 = n$ Допускаме, че $\forall v \in V : d(v) \geq 2$. Тогава $\sum_{v \in V} \geq 2n + 2 > 2n > 2|E| \implies$ противоречие.

  $$\implies \exists v \in V : d(v) = 1 (\text{свързаността на } G \text{ не позволява степен } 0)$$

  Знаем, че $G - v$ е свързан и $|V \setminus \{v\}| = n \xrightarrow{\text{(от хипотезата)}} |E| - 1 \geq |V \setminus \{v\}| - 1 = |V| - 2$

  $$\implies |E| \geq |V| - 1$$

□

Задача 8.8 (свързаност на допълнението)**.** *Да се докаже, че ако G не е свързан, то $\overline{G}$ е свързан.*

(Следствие: свързаните графи с n върха са повече от несвързаните.)

Доказателство. Разглеждаме произволните върхове $u, v \in V$.

- u и v са в различни свързани компоненти
$\implies (u,v) \notin E \implies (u,v) \in \overline{E} \implies$ има път от u до v в $\overline{G}$;

- u и v са в една свързана компонента
Тогава $\exists x \in V$, такова че x е в друга свързана компонента $\implies (u,x) \notin E \wedge (v,x) \notin E \implies (u,x) \in \overline{E} \wedge (v,x) \in \overline{E} \implies p = uxv$ е път от u до v в $\overline{G}$.

$\implies$ има път между всеки два върха в $\overline{G} \implies \overline{G}$ е свързан. □

Задача 8.9 (два върха с нечетна степен)**.** *Да се докаже, че ако в граф има точно 2 върха с нечетна степен, то има път между тях.*
(допускане на противното води до свързани компоненти с по 1 връх от нечетна степен)

Задача 8.10 (най-дълги пътища)**.** *Да се докаже, че всеки 2 най-дълги пътя в свързан граф имат общ връх.*

Доказателство.

Нека $p_1 = v_1 v_2 ... v_k$ and $p_2 = u_1 u_2 ... u_k$ са 2 най-дълги пътя в $G\,(V, E)$.

Допускаме, че $p_1 \cap p_2 = \emptyset$. G е свързан $\implies \exists i, j : \exists p = v_i ... u_j \wedge p \cap (p_1 \cup p_2) = \{v_i, u_j\}$

БОО $i, j \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ (чрез обръщане на p_1 и p_2 при необходимост).

Сега пътят $p_3 = v_1 ... \underbrace{v_i ... u_j}_{\text{p}} ... u_1$ е с дължина $\geq 2\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1 > k \implies$ противоречие.

□

Задача 8.11 (6 върха $\implies$ 3-(анти)клика)**.** *Нека $G\,(V, E)$ е граф с поне 6 върха. Тоава в G има 3-клика или 3-антиклика.*

Доказателство. Разглеждаме графа $G' = G + \overline{G} = K_{|V|}$, в който ребрата от G са оцветени в синьо, а ребрата от $\overline{G}$ са оцветени в червено. Нека $v, x, y, z \in V$. В графа $G' : d(v) \geq 5 \implies$ има поне 3 едноцветни ребра. БОО нека това са ребрата към x, y, z и те са сини. Разглеждаме следните 2 случая:

- някое от ребрата $(x,y)\,, (y,z)\,, (x,z)$ е синьо. Нека БОО (x,y) е синьо. Тогава v, x, y образуват клика в G;

- никое от ребрата $(x,y)\,, (y,z)\,, (x,z)$ не е синьо $\implies$ те са червени. Тогава x, y, z образуват клика в $\overline{G} \implies$ образуват антиклика в G.

□

Задача 8.12 (път в регулярен граф). *Да се докаже, че в K_n има път с дължина n. (допускане на противното или индукция)*

Задача 8.13 (турнир). *"Турнир"е ориентиран граф $G(V,E)$, където $E \subseteq V \times V$ е силно антисиметрична релация. Да се докаже, че в всеки турнир има Хамилтонов път.*

Доказателство. С индукция по $n := |V|$:

- $n = 1$: всеки турнир с един връх има тривален Хамилтонов път;
- Допускаме, че всеки турнир с n върха има Хамилтонов път;
- Нека $G(V,E)$ е граф с $|V| = n+1$ върха и $v \in V$.
  Тогава $G - v$ е граф с n върха $\implies$ има Хамилтонов път $c = v_1 v_2 ... v_n$. E е силно антисиметрична $\implies \forall i : (v_i, v) \in E \oplus (v, v_i) \in E$. Разглеждаме следните случаи:
  - $(v, v_1) \in E \implies c' = vc$ е Хамилтонов път;
  - $(v_n, v) \in E \implies c' = cv_n$ е Хамилтонов път;
  - $(v_1, v) \in E \wedge (v, v_n) \in E$
    Допускаме, че $\forall i \in I_{n-1} : \neg((v_i, v) \in E \wedge (v, v_{i+1}) \in E)$.
    Тогава $(v_1, v) \in E \implies (v, v_2) \in E \implies ...(v, v_n) \in E \implies$ противоречие $\implies \exists i \in I_{n-1} : (v_i, v) \in E \wedge (v, v_{i+1}) \in E$. Тогава $c' = v_1 ... v_i v v_{i+1} ... v_n$ е Хамилтонов път.

□

Задача 8.14. *Нека $G(V,E)$ е несвързан граф. Колко най-много ребра има G?*

Доказателство. Нека $G(V,E)$ има 2 свързани компоненти съответно с k и $n-k$ върхове. Тогава G има най-много

$$f(k) = \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{1}{2}\left(2k^2 - 2nk + n^2 - n\right)$$

функция на k, която достига максимум при $k = 1$ (или $k = n-1$):

$$f(1) = f(n-1) = \binom{n-1}{2}$$

□

8.3 Планарност на графи

8.3.1 Дефиниция

G е планарен $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ G може да се "нарисува" в равнината без пресичащи се ребра

Едно достатъчно условие за непланарност $|E| \geq 3|V| - 6$ (следствие от формулата на Ойлер за планарни свързани графи)

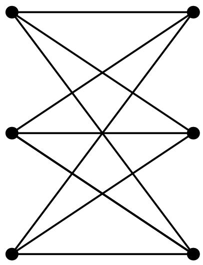
8.3.2 Примери

Планарни

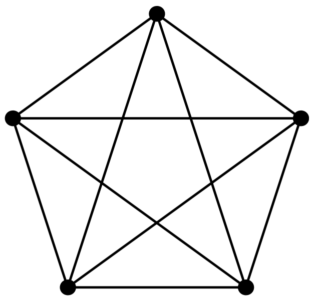
- K_4

Непланарни

- $K_{3,3}$



- K_5



8.3.3 Теорема на Куратовски

Разкъсване на ребро (u, v) наричаме заместването на (u, v) с ребра (u, x) и (x, v), където x е нов връх.
Графът G_1 ще наричаме разкъсване на G_2, ако G_1 се получава от G_2 чрез последователност от разкъсвания на ребра.
Графите G_1 и G_2 са хомеоморфни, когато има граф G, такъв, че G_1 и G_2 са разкъсвания на G.

Теорема 1 (Kuratowski). *$G(V, E)$ е планарен тогава и само тогава, когато не съдържа подграф, хомеоморфен на K_5 или $K_{3,3}$.*

8.4 Обхождане на графи

8.4.1 BFS (в широчина) (опашка (FIFO))

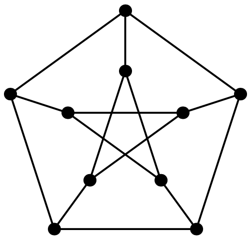
```
@1  Записваме началния връх в опашката и го обяввяваме за обходен.
@2  Докато опашката не е празна:
```

```
@3         -махаме връх v от опашката;
@4         -добавяме в опашката всички двойки (v,u),
   за които u е инцидентен с v, обявявайки u за обходен;
```

8.4.2 DFS (в широчина) (стек (LIFO))

```
@1  Записваме началния връх в стека.
@2  Докато опашката не е празна:
@3         -махаме връх v от опашката и го обявяваме за обходен;
@4         -ако v не е обходен: добавяме в опашката всички двойки (v,u),
   за които u е инцидентен с v и u не е обходен.
```

8.5 граф на Петерсен



3-регулярен

няма цикли с дължина < 5

Задача 8.15. *Да се докаже, че графът на Петерсен не е планарен.*

Задача 8.16. *Да се докаже, че графът на Петерсен не е Хамилтонов.*

Доказателство.

Допускаме, че графът на Петерсен има Хамилтонов цикъл с дължина 10.

Допускаме, че всеки връх е свързан със срещуположния му в цикъла

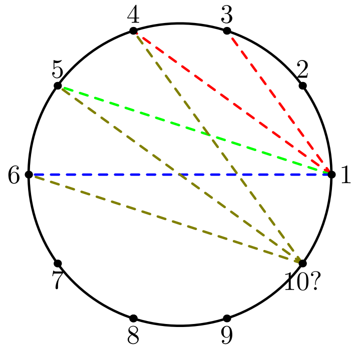
$\implies 1-6-5-10-1$ е цикъл с дължина 4 $\implies$ противоречие.

Нека Б.О.О. 1 не е свързан с 6 $\implies$ е свързан с 5 (иначе има цикъл с дължина < 5)

Сега 10 не може да бъде свързан с друг връх,

понеже ще се получи цикъл с дължина < 5.

$\implies$ противоречие.



□

9 Дървета

9.1 Дефиниция за дърво

$T\,(V, E)$ е гора $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ T е ацикличен граф
$T\,(V, E)$ е дърво $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ T е свързан ацикличен граф

9.2 Задачи

Задача 9.1 (всяко дърво има поне 2 листа)**.** *Да се докаже, че* $G\,(V, E)$ *е дърво и* $|V| \geq 2 \implies \exists u, v \in V : d(u) = d(v) = 1$

Доказателство. Нека $(u, ..., v)$ път в G. Допускаме, че u не е листо $(d(u) \geq 2) \implies \exists w \notin p : (u, w) \in E$ (ако $w \in p$, то намираме цикъл в G). Сега $|wp| > |p| \implies$ противоречие. Аналогично v е листо. □

Задача 9.2 (Премахване на ребро от цикъл в граф)**.** *Нека* $G\,(V, E)$ *е свързан граф. Нека* c *е цикъл в* G *и нека* e *е ребро от* c*. Тогава* $G - e$ *е свързан.*

Доказателство. Нека $u, v \in V$ са произволни и $p = (u, ..., v)$ е път в G.

- 1сл. $e \notin p \implies p$ е път от u до v в $G - e$;
- 2сл. $e \in p$: Нека $c = (x, ..., y, x)$ и $e = (x, y)$. Тогава $c' = (x, ..., y)$ е път в $G - e$.
  $e \in p \implies p = (u, ..., p, , x/y, y/x, q, ..., v) \implies p' = (u, ...p, c', q...)$ е път от u до v в $G - e$.

$\implies G - e$ остава свързан. □

Задача 9.3 (еквивалентни дефиниции за дърво)**.** *Даден е графът* $G\,(V, E)\,, |V| =: n, n \geq 2$*.*
Да се докаже, че следните твърдения са еквивалентни:

1. *G е дърво;*
2. *G е свързан с $n - 1$ ребра;*
3. *G е свързан, но при премахване на произволно ребро се получава несвързан граф;*
4. *Всяка двойка върхове е свързана с точно 1 прост път*
5. *G няма цикли, но при добавяне на ребро между произволни 2 върха се получава цикъл.*

(свързан граф от еквивалентности (интересна рекурсия :))

Доказателство. • $1 \implies 2$
С индукция по $|V|$:

- при $n = 1$: всяко дърво с 1 връх е свързано с 0 ребра;

- Допускаме, че всяко дърво с n върха е свързано с $n-1$ ребра;
- Нека $G\,(V, E)$ е дърво с $n+1 \geq 2$ върха. Тогава (от предната задача) $\exists u \in V : d(u) = 1$ и нека $(u, x) \in E$.
  Разглеждаме $G' - u$. G' е свързан и ацикличен $\implies$ G' е дърво с n върха $\implies$ G' има $n-1$ ребра.
  Тогава от $d(u) = 1 \implies G$ има n ребра.

- $2 \implies 3$
  Разглеждаме $G' := G - e$, където $e \in E$ е произволно ребро. За G' имаме, че $|E'| = n - 2 < n - 1 = |V| - 1 \implies G'$ не е свързан. (от НУ за свързаност).

- $3 \implies 4$
  Допускаме, че $\exists u, v \in V : \exists p1, p2 : p1 = (ux_1...x_kv) \wedge p2 = (uy_1...y_lv) \wedge p1 \neq p2$. Нека $x_i \neq y_i$ е първата двойка различни върхове от $p1$ и $p2$, а $x_j \neq y_j$ е последната. Тогава всеки път $p_1 = (w, ..., x_i, x_{i+1}, ..., z)$ можем да заменим с $(w, ..., \underbrace{x_i, x_{i-1}}_{p_1}, \underbrace{y_i, ..., y_{j+1}}_{p_2}, \underbrace{x_j, ...x_i}_{p_1}, ..., z)$.
  $\implies$ при премахване на (x_{i-1}, x_i) G' остава свързан $\implies$ противоречие $\implies$ всяка двойка върхове е свързана с точно 1 прост път.

- $4 \implies 5$
  $\forall u, v \in V : \exists! p = (u...v) \implies$ при добавяне на реброто (u, v) ще получим цикъл $pu = vp$;

- $5 \implies 1$
  В G няма цикли, но ако добавим ребро, получаваме цикъл $\implies$ преди неговото добавяне е имало път между всеки 2 върха $\implies G$ е свързан $\implies G$ е дърво.

□

Задача 9.4 (n върха с $d \geq 3 \implies$ цикъл)**.** *Нека $G\,(V, E)\,, |V| = 2n$ е такъв, че n от върховете са от степен поне 3. Да се докаже, че в G има цикъл. (допускане на противното)*

Задача 9.5 (вътрешните върхове са срязващи)**.** *Нека $T\,(V, E)$ е свързан граф. Да се докаже, че*

$$G \text{ е дърво} \implies \forall v \in V : d(v) \geq 2 \rightarrow v \text{ е срязващ връх}$$

Задача 9.6 (висящи върхове)**.** *Да се докаже, че ако в граф с n върха има $n-1$ висящи върха, то графът е или дърво, или не е свързан.*

Доказателство. Нека $G\,(V, E)\,,\ |V| = n,\ \exists! v \in V : d\,(v) \neq 1$

Допускаме противното, а именно, че G не е дърво и е свързан или G е дърво и не е свързан (дясната част на дизюнкцията води до противоречие и не подлежи на разглеждане) $\implies G$ съдържа цикъл $\implies \exists u, v \in V,\ u \neq v : d(u) \geq 2,\ d(v) \geq 2.$ □

Доказателство. (2)

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = (n-1).1 + k, \text{ където } 0 \leq k \leq n-1$$

1. 1сл. $k = n-1 \implies |E| = n-1 = |V|-1$ и G е свързан $\implies G$ е дърво;
2. 2сл. $k < n-1 \implies |E| < |V|-1 \implies G$ не е свързан.

$\square$

10 Покриващи дървета

10.1 MST

Даден е графът $G\left(V, E\right)$.

$T\left(V, E'\right)$ е покриващо дърво на $G \stackrel{def}{\longleftrightarrow} T$ е дърво и $E' \subseteq E$.

10.1.1 Дефиниция

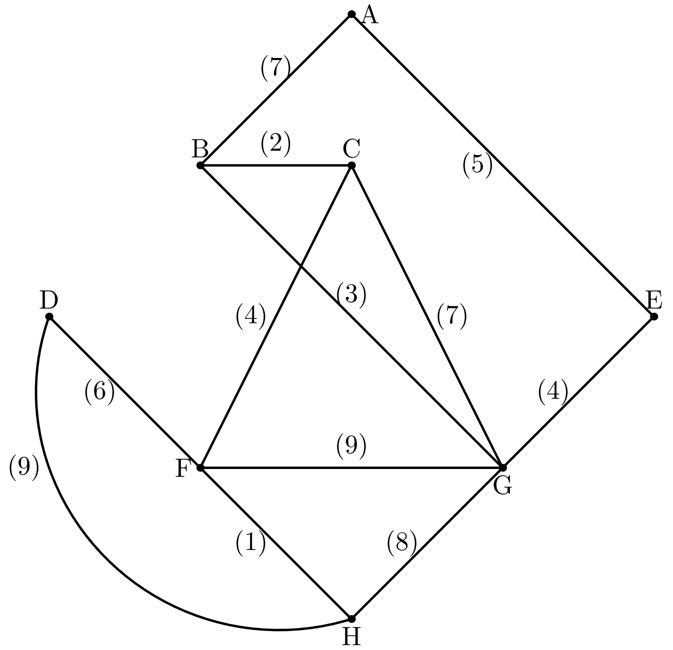
Нека е дадена теглова функция $c : E \to \mathbb{N}$.

$T\left(V, E_T\right)$ е минимално покриващо дърво (MST) на $G \stackrel{def}{\longleftrightarrow} T$ е покриващо дърво на G и за всяко покриващо дърво $T' = (V, E')$ е изпълнено:

$$\sum_{e \in E_T} c(e) \leq \sum_{e \in E'} c(e)$$

10.1.2 Алгоритми

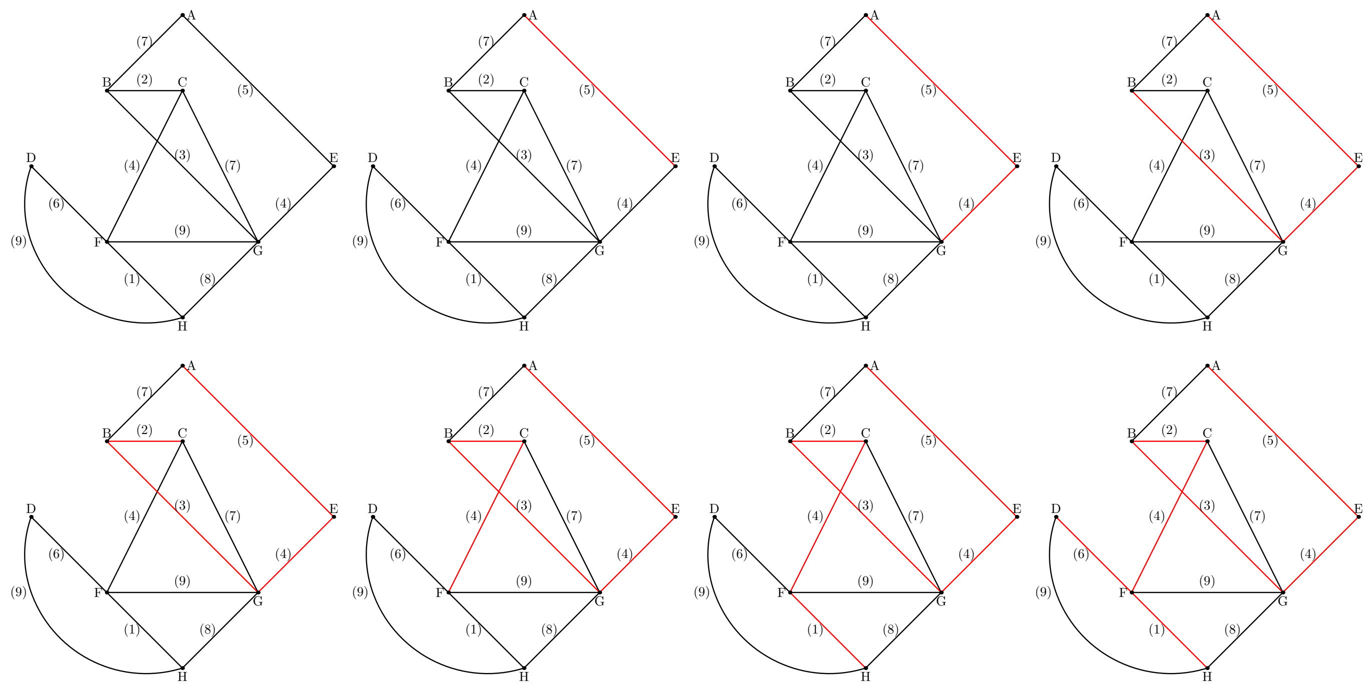
$G\left(V, E\right), c : E \to \mathbb{N} :$



10.1.3 Prim

Визуализация на MST Prim algorithm

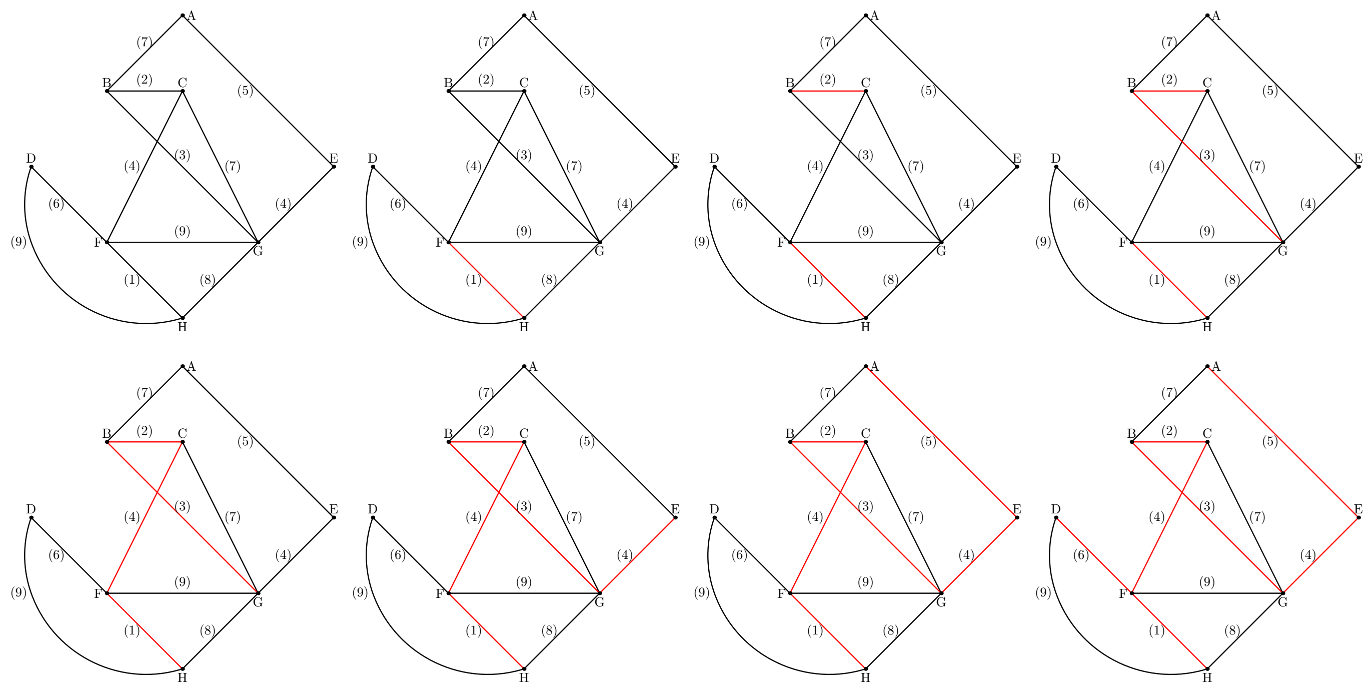
Добавяме най-лекото ребро с начало обходен връх и край необходен. Обявяваме необходения за обходен.



10.1.4 Kruskal

Визуализация на MST Kruskal algorithm

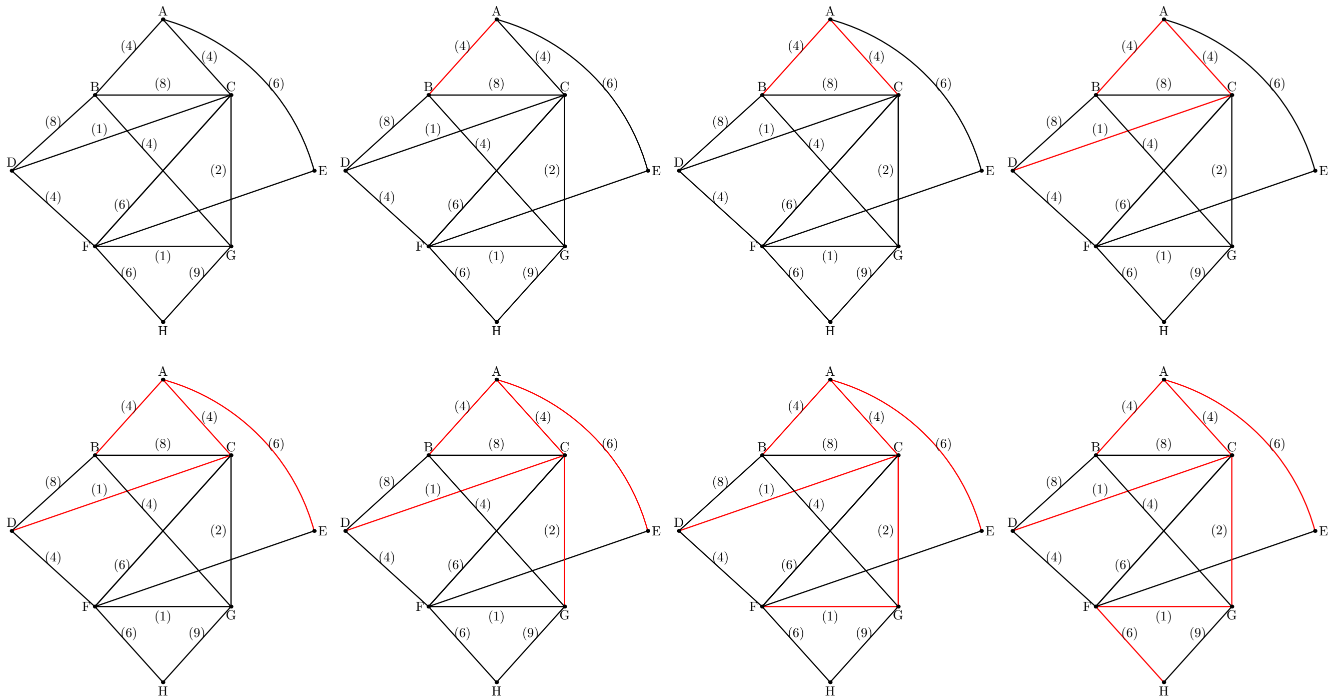
Сортираме ребрата според теглото им във възходящ ред и добавяме най-лекото ребро, необразуващо цикъл.



10.1.5 Dijkstra

Визуализация на MST Dijkstra algorithm

Последователно строи най-късите пътища от началния връх до останалите.



1	A	0				
2	B	∞	4 A			
3	C	∞	4 A			
4	D	∞	~~12~~ ~~B~~	5 C		
5	E	∞	6 A			
7	F	∞	~~10~~ ~~C~~	~~9~~ ~~D~~	~~8~~ ~~F~~	7 G
6	G	∞	~~8~~ ~~B~~	6 C		
8	H	∞	~~15~~ ~~G~~	13 F		

11 Хиперкуб

11.1 Дефиниция

n-мерният хиперкуб е графът

$$B_n\left(V,E\right)$$

$$V=\mathbb{J}_2^n=\left\{\left(a_1,...,a_n\right)|a_i\in\mathbb{J}_2\right\}$$

$$E=\left\{\left(\tilde{\alpha}^n,\tilde{\beta}^n\right)|\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-\beta_i|=1\right\}$$

$$\text{наредба на върховете: }\tilde{\alpha}\preceq\tilde{\beta}\iff\forall i:\alpha_i\leq\beta_i$$

- n-регулярен
- $|V|=2^n$
- $|E|=\frac{\sum_{\tilde{\alpha}^n\in V}d(v)}{2}=\frac{2^n n}{2}=2^{n-1}n$
- B_n е двуделен

$$V_1=\left\{\alpha|\alpha\in\mathbb{J}_2^n\wedge\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\equiv 0\pmod 2\right\}\quad V_2=\left\{\alpha|\alpha\in\mathbb{J}_2^n\wedge\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\equiv 1\pmod 2\right\}$$

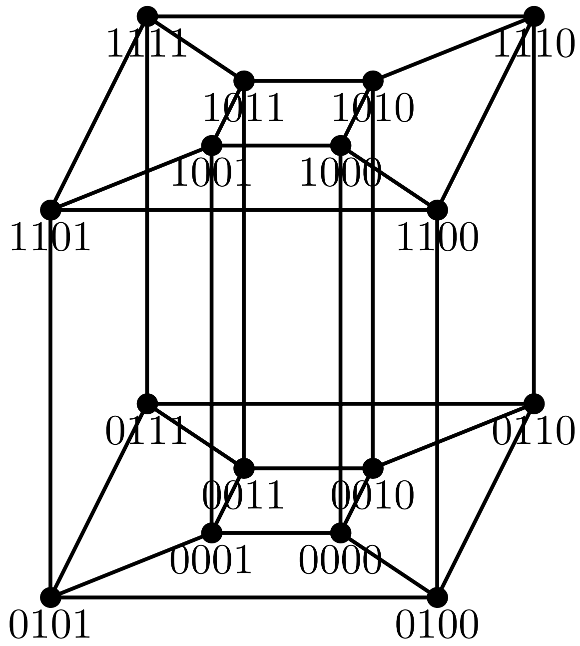
11.2 Задачи

1. Колко са различните максимални вериги в B_n? (верига е последователност от върхове $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,...,\tilde{\alpha}_n$, такива че $\forall i:\tilde{\alpha}_i\preceq\tilde{\alpha}_{i+1}$)
2. Да се намери броя на върховете в максимална антиклика на B_n.
   (2^{n-1})
3. Да се докаже, че B_n е хамилтонов за $n\geq 2$.
4. Да се докаже, че B_n не е планарен за $n\geq 4$.

   Решение:

   $$\forall n\geq 4: B_4\text{ е подграф на }B_n.$$

   Тогава е достатъчно да покажем, че B_4 не е планарен.



След прилагане на следните премахвания:

(а) премахваме 1000;

(б) премахваме 0100;

(в) премахваме 1100 и добавяме $(1110, 1101)$;

(г) премахваме 0000;

(д) премахваме 0001;

(е) премахваме 1001 и добавяме $(1101, 1011)$;

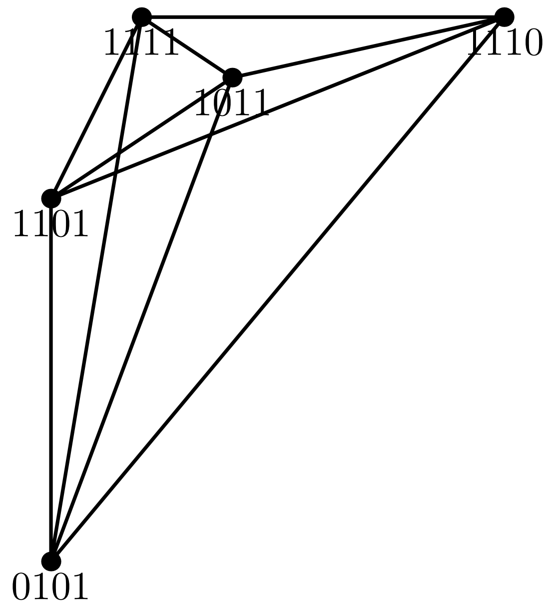
(ж) премахваме 1010 и добавяме $(1110, 1011)$;

(з) премахваме 0101 и добавяме $(0111, 1101)$;

(и) премахваме 0110 и добавяме $(0111, 1110)$;

(к) премахваме 0011 и добавяме $(0111, 1011)$;

Получаваме графът K_5 :



12 Булеви функции

Работим с (тотални) функции $f : \mathbb{J}_2^n \to \mathbb{J}_2$

$$\mathbb{F}_2^n = \{f | f : \mathbb{J}_2^n \to \mathbb{J}_2\}$$

Задача 12.1. *Да се намери броя на булевите функции на n променливи,*

- *Да се намери броя на булевите функции на n променливи, които зависят от всичките си аргументи.*
- *Да се намери броя на булевите функции на n променливи, за които:*
  1. *върху k вектора стойността на функцията е фиксирана, а върху останалите е произволна;*
  2. *върху точно k аргумента има стойност 0, а върху останалите е 1.*
- *Да се намери броя на булевите функции на n променливи, за които*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_2, x_1, ..., x_n)$$

12.1 СДНФ

12.1.1 Теорема на Boole

Множеството $\{\neg, \wedge, \vee\}$ е пълно.

От $x \wedge y \equiv \neg(\neg x \vee \neg y) \implies \{\neg, \vee\}$ е пълно. Аналогично и $\{\neg, \wedge\}$ е пълно.

12.2 МДНФ

12.2.1 Алгоритъм за намиране

1. Опростяване на конюнкти от СДНФ (различаващи се по една променлива)
2. Определяне на минималния брой необходими опростени конюнкти

12.2.2 Покритие на аргументите с образ 1

Всеки конюнкт "покрива" (имплицира; истинността му гарантира истинността на функцията) определени вектори. Задачата за МДНФ се свежда до търсене на покритие [1] на всички вектори, за които стойността на функцията е 1.

1. дефинираме q_i - конюнктът с етикет $i \in I$ (най-удобно с числови индекси) участва във формула;
2. образуваме конюнкция на дизюнкции на конюнктите, покриващи всеки ред:

$$\bigwedge_{\tilde{\alpha} \in \left\{\tilde{\beta} | f(\tilde{\beta})=1\right\}} \left(\bigvee_{i \in I \wedge \text{ конюнкт } i \text{ покрива } \tilde{\alpha}} q_i \right)$$

3. след опростяване взимаме конюнктите с най-малка дължина.

[1] виж 1.4.6

Пример: $f = (0110110001011001)$

x	y	z	w	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Опростените конюнкти са $xzw(1), \overline{x}\overline{z}w(2), \overline{y}\overline{z}w(3), y\overline{z}\overline{w}(4), \overline{x}y\overline{z}(5), x\overline{y}w(6), \overline{x}\overline{y}z\overline{w}(7)$.

Кои покриват в този ред $0001, 0010, 0100, 0101, 1001, 1011, 1100, 1111$:

$$(q_2 \vee q_3) \wedge (q_7) \wedge (q_4 \vee q_5) \wedge (q_2 \vee q_5) \wedge (q_3 \vee q_6) \wedge (q_1 \vee q_6) \wedge (q_4) \wedge (q_1) =$$
$$= q_1q_4q_7 \vee ((q_2 \vee q_3) \wedge (q_4 \vee q_5) \wedge (q_3 \vee q_6) \wedge (q_1 \vee q_6) \wedge (q_2 \vee q_5)) =$$
$$= (q_1q_4q_7 \vee (q_2 \vee q_5)) \wedge ((q_2q_4 \vee q_2q_5 \vee q_3q_4 \vee q_3q_5) \wedge (q_3q_1 \vee q_3q_6 \vee q_6q_1 \vee q_6)) =$$
$$= (q_1q_2q_4q_7q_2q_4 \vee q_1q_2q_4q_7q_2q_5 \vee q_1q_2q_4q_7q_3q_4 \vee q_1q_2q_4q_7q_3q_5) \wedge (q_3q_1 \vee q_3q_6 \vee q_6q_1 \vee q_6) \wedge$$
$$\wedge (q_1q_5q_4q_7q_2q_4 \vee q_1q_2q_4q_7q_2q_5 \vee q_1q_2q_4q_7q_3q_4 \vee q_1q_2q_4q_7q_3q_5) \wedge (q_3q_1 \vee q_3q_6 \vee q_6q_1 \vee q_6) =$$
$$= \underline{q_1q_2q_3q_4q_7} \vee \ldots \vee \underline{q_1q_2q_4q_6q_7} \vee \ldots \vee \underline{q_1q_3q_4q_5q_7}$$

$\Longrightarrow$ МДНФ се определят от $q_1q_2q_3q_4q_7$, $q_1q_2q_4q_6q_7$ и $q_1q_3q_4q_5q_7$

$\Longrightarrow$ МДНФ са

$$xzw \vee \overline{x}\overline{z}w \vee \overline{y}\overline{z}w \vee y\overline{z}\overline{w} \vee \overline{x}\overline{y}z\overline{w}$$
$$xzw \vee \overline{x}\overline{z}w \vee y\overline{z}\overline{w} \vee x\overline{y}w \vee \overline{x}\overline{y}z\overline{w}$$
$$xzw \vee \overline{y}\overline{z}w \vee y\overline{z}\overline{w} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\overline{y}z\overline{w}$$

12.3 Полином на Жегалкин

Полином на Жегалкин наричаме формула от вида

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 \oplus \bigoplus_{1\leq i\leq n} a_i x_i \oplus \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij} x_i x_j \oplus ... \oplus a_{12...n} x_1 x_2 ... x_n$$

12.3.1 определяне

1-ви начин: заместване на $\vee$ с $\oplus$ и $\neg x$ с $1 \oplus x$ в СДНФ; опростяване до получване на ПЖ;

2-ри начин: конструиране на система линейни уравнения по общия вид на ПЖ чрез заместване с всеки възможен аргумент.

12.3.2 Теорема на Жегалкин

Всяка булева функция може да се представи по единствен начин чрез полином на Жегалкин.
(еднакъв брой и сюрекция от полиномите към функциите (заради пълнотата на $\{1, \oplus, \wedge\}$))

12.4 Критерий на Пост-Яблонски

Множеството F е пълно $\iff F \not\subseteq T_0 \wedge F \not\subseteq T_1 \wedge F \not\subseteq M \wedge F \not\subseteq L \wedge F \not\subseteq S$

12.5 Шеферови функции

12.5.1 Шеферова функция

f е Шеферова функция $\stackrel{def}{\longleftrightarrow} \{f\}$ е пълно.

12.6 Задачи

Задача 12.2. *Да се намерят СДНФ, МДНФ и полином на Жегалкин на функциите:*

- $f = (1010)$
- $f = (\overline{x} \to (y \to z) \oplus xz \oplus 1)$
- $f = (01101010)$
- $f = (11011011)$

Задача 12.3. *Пълно ли е множеството:*

- $\{1, \wedge, \oplus\}$
- $\{x \to y, x \oplus y\}$
- $\{f_1 = (10000001)\,, f_2 = (0110)\,, f_3 = (00110111)\}$
- $\{\overline{x}, 1, x\,(y \leftrightarrow z) \oplus \overline{x}\,(y \oplus z)\}$

- $\{xy \oplus z, x \oplus y \oplus 1, \overline{x}\}$

Задача 12.4.

Намерете броя на n-местните булеви функции, които са от:

- L
- $L \cap T_0$
- $L \cap T_1$
- $L \cap S$

12.6.1 критерий

f е Шеферова функция $\iff f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$.

Доказателство:

$\boxed{\Rightarrow}$ Следва от критерия на Пост-Яблонски

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$.

$$\implies f(0,..,0) = 1 \wedge f(1,..,1) = 0 \implies f \notin M$$

$$\text{Допускаме, че } f \in L \implies f = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus ... \oplus a_nx_n$$

$$f(0,..,0) = 1 = a_0$$

$$f(1,..,1) = 0 = a_0 \oplus a_1 \oplus ... \oplus a_n$$

$$\overline{f}(\overline{x_1},...,\overline{x_n}) = 1 \oplus a_0 \oplus a_1(1 \oplus x_1) \oplus ... \oplus a_n(1 \oplus x_n)$$

$$\overline{f}(\overline{x_1},...,\overline{x_n}) = 1 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n \oplus a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ... \oplus a_nx_n$$

$$\overline{f}(\overline{x_1},...,\overline{x_n}) = 0 \oplus a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ... \oplus a_nx_n = f(x_1,...,x_n) \implies f \in S \implies \text{противоречие}$$

$$\implies f \notin L \implies f \text{ е Шеферова.}$$

$\boxed{\text{Критерият е следствие от: } M \cup L \subseteq T_0 \cup T_1 \cup S}$

Задача 12.5. *Шеферова ли е* $f = (10101000)$

to be continued...🙏