

Дизайн и анализ на алгоритми

план на упражненията

КН 2.1, летен семестър 2023/2024

Калоян Цветков
kaloyants25@gmail.com

ФМИ, СУ

1.1

Съдържание

1	Въведение	3
1.1	Алгоритъм	3
1.2	Изчислителен модел	4
1.2.1	Въвеждане на RAM модела	4
1.2.2	Представяне на данни в паметта	6
1.2.3	Операции за константно време в RAM модела	6
1.2.4	Псевдокод	6
1.3	Първи пример	7
1.4	Коректност на алгоритъм	8
1.4.1	Итеративен подход	8
1.4.2	Рекурсивен подход	8
1.5	Времева сложност	8
1.6	Асимптотика	8
1.6.1	Основни свойства	9
2	Линейни обхождания на масив	10
2.1	Сложност по памет	10
3	Сортиране (упражнения 3 и 4)	15

Списък с определения, задачи, важни твърдения и допълнения

1.1	Определение – Размер на входа	4
1.2	Определение – Машина с произволен достъп или RAM	4
1.3	Определение – Елементарна операция в RAM	4
1.4	Определение – Цена на елементарна операция в RAM	5
1.1	Задача – GCD	7
1.5	Определение – Асимптотично сравнение - \preceq	8
1.6	Определение – <i>Big O</i>	8
1.7	Определение – <i>Big Ω</i>	8
1.8	Определение – <i>Big Θ</i>	9
1.2	Задача – HOLE	9
2.1	Задача – MAXIMUM SUBARRAY	10
2.2	Задача – DISTANT PAIR	11
2.3	Задача – SIEVE	12
2.7	Твърдение – техника за работа със сума от монотонна непрекъсната функция . .	13
2.1	Допълнение – ($\mathcal{O}(n \log(\log n))$) е по-добра оценка за SIEVE)	13
2.4	Задача – MAX BOUNDED SUBARRAY	14
2.5	Задача – Алгоритъм на <i>Boyer – Moore</i>	14
3.1	Задача – 2-SUM	15
3.2	Задача – 3-SUM	15
3.3	Задача – 4-SUM	16
3.4	Задача – MINIMUM ABSOLUTE SUBARRAY	16
3.5	Задача – TRIANGLES	17
3.6	Задача	18
3.1	Определение – Редукция на изчислителни задачи	18
3.7	Задача – 3-SUM-TARGET	19
3.8	Задача – 3-COLLINEAR	19
3.9	Задача – CONCURRENT LINES	19
3.1	Допълнение – CONCURRENT LINES	20
3.10	Задача – Задача 1, писмен изпит 2023г.	21
3.11	Задача – MAX CLUSTER	21
3.12	Задача – INTERSECTING SEGMENTS	21

1 Въведение

1.1 Алгоритъм

Също както за *множество*, така и за *алгоритъм* няма общоприета формална дефиниция. В този курс *алгоритъм* ще интерпретираме така:

- Алгоритъм е крайна редица от операции, която решава дадена задача.
Разглеждаме го като реализация на тотална функция $A : Input \mapsto Output$, където *Input* и *Output* са крайни редици от числа и масиви.

Потенциални въпроси:

- "Защо редицата от операциите е крайна?"
Можем да отслабим изискването за крайност и ще получим т.н. *изчислителен метод*.
В рамките на курса ще разглеждаме единствено редици с краен брой операции.
- "Какво представлява една *операция*?"
Зависи от *изчислителния модел*. В курса предимно ще се използва RAM моделът.
В съответната секция ще бъдат описани позволените в RAM модела *операции*.
- "Какво представлява една *задача* и как тя се решава?"
Става въпрос за *изчислителна задача* - понятие, което има дефиниция.
Характеризира се със своите *екземпляри*, на всеки от които съответстват неотрицателен брой *решения*.
Формално, за изчислителна задача може да се счита всяка релация над \mathbb{N}^* .
Можем да мислим за *Input* и *Output* като описания на *екземпляри* и *решението* съответно (или едно от всички възможни *решения*).
- "Защо *Input* и *Output* са крайни редици и защо в тях участват само числа и масиви?"
Тук отново може да бъде отслабено изискването за крайност, но в рамките на курса няма да разглеждаме задачи с неограничено големи *Input* и *Output*.
Използваме числа и масиви за описание на *Input* и *Output*, понеже с тях могат да се представят математическите обекти, за които ще решаваме задачи.
- "Какво разбираме под 'числа и масиви'?"
Числата могат да са от \mathbb{N}, \mathbb{Z} и \mathbb{Q} . При \mathbb{R} възниква въпросът за представянето, чрез апроксимация с крайна точност (тази тема може да бъде засегната по-късно).
Масивите са крайни редици от числа или от други масиви. Множество на масивите - \mathbb{M} .
За $\mathbf{I} = \{I_i\}_{i=1}^n, n \in \mathbb{N}^+$ - редица от числа, $\mathbf{I} \in \mathbb{M}$.
За $\mathbf{M} = \{M_i\}_{i=1}^n, n \in \mathbb{N}^+$, за която $M_i \in \mathbb{M}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{M}$.

Разговорно ще наричаме *Input* вход на алгоритъма и *Output* изход на алгоритъма. Както входът, така и изходът притежават характеристика *размер* $\in \mathbb{N}^+$, определен от съдържанието на този вход.

Размерът на число $n \in \mathbb{N}$ се дава с $S_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^+$:

$$S_{\mathbb{N}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако } n = 0 \\ \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

Естествено може да бъде продължена дефиницията за \mathbb{Z}, \mathbb{Q} .

Размерът на масив $\mathbf{M} = \{M_i\}_{i=1}^m, m \in \mathbb{N}^+$ се дава с $S_{\mathbb{M}} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}^+$ и $S : \mathbb{N} \cup \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}^+$:

$$S_{\mathbb{M}}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^m S(M_i)$$

$$S(a) = \begin{cases} S_{\mathbb{N}}(a) & \text{ако } a \in \mathbb{N} \\ S_{\mathbb{M}}(a) & \text{иначе} \end{cases}$$

Размерът на редица от числа и масиви $\{E_i\}_{i=1}^n, n \in \mathbb{N}^+$ е сумата от размерите на елементите ѝ.

Определение 1.1 (Размер на входа). *Размер на входа $Input$ наричаме размерът на крайната редица от числа и масиви, които $Input$ представлява.*

1.2 Изчислителен модел

1.2.1 Въвеждане на RAM модела

Машина с произволен достъп или RAM (от английски: Random Access Machine). Това е еквивалентен модел на машините на Тюринг като изразителна способност, но е по-близък до общата представа за модерен компютър.

Определение 1.2 (Машина с произволен достъп или RAM). *Машините с произволен достъп спадат към клас машини с непоследователен достъп до паметта (Random Access Memory или RAM памет). Всяка машина с произволен достъп се състои от памет и програма.*

Паметта на машината е разделена на две части:

- Краен брой регистри $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, n \in \mathbb{N}^+$.
- Основна памет, която се състои от безкрайно много клетки номерирани $0, 1, 2, \dots$

Регистри	Памет
регистър γ_0	0 <input type="text"/>
регистър γ_1	1 <input type="text"/>
регистър γ_2	2 <input type="text"/>
...	3 <input type="text"/>
регистър γ_n	...

С $\gamma_k \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, n\}$ ще означаваме стойността, която е в регистъра γ_k .

С $\rho(i) \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}$ ще означаваме стойността, която е в i -тата клетка на паметта.

Стойностите в регистрите и в паметта могат да имат произволно голям размер (тип данни *integer*).

Програма на машина с произволен достъп е крайна редица от номерирани елементарни инструкции.

Определение 1.3 (Елементарна операция в RAM). За определеност нека означим с α един от регистрите. Без ограничение на общността избираме γ_0 . Регистъра α ще наричаме акумулатор. В него се акумулира резултатът от аритметичните операции. Останалите регистри $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ще наричаме индексни регистри. Нека $i, j, k \in \mathbb{N}$. По-долу ще използваме:

- *reg*, за да означим произволен регистър от $\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n$.
- *op*, за да означим операнд от вида $i, \rho(i)$ или *reg*.
- *top*, за да означим модифициран операнд от вида $\rho(i + \gamma_j)$. Стойността на $\rho(i + \gamma_j)$ е в клетката на паметта на позиция $(i + \text{стойността на } \gamma_j)$.

Елементарните операции разделяме на следните категории:

1. Операции за достъп до паметта (четене и писане):

- $reg \leftarrow op$
- $\alpha \leftarrow mop$
- $op \leftarrow reg$
- $mop \leftarrow \alpha$

2. Операции за преход (*jump*):

- $goto\ k$
- $\underline{if\ reg\ \pi\ 0\ then\ goto\ k}$, за $\pi \in \{=, \neq, <, \leq, >, \geq\}$

3. Аритметични операции:

- $\alpha \leftarrow \alpha\ \pi\ mop$, за $\pi \in \{+, -, \times, div, mod\}$

4. Операции с индексните регистри:

- $\gamma_j \leftarrow \gamma_j \pm i$, $1 \leq j \leq n, i \in \mathbb{N}$

Горната дефиниция на RAM позволява да се съхраняват и обработват произволно големи числа, но това не е реалистично предположение. Поради това внимателно ще дефинираме *цената* за изпълнение на елементарните операции.

Цената за изпълнение на елементарна операция се състои от **достъпа до паметта** и **същинската цена за изпълнение**.

Има два основни подхода за определяне на *цената*: UCM (Unit Cost Measure) и LCM (Logarithmic Cost Measure). При UCM се абстрахираме от *размера* на операндите. Това е подходящ подход, при условие че *размерът* на числата, които са в паметта по време на изпълнение на програмата е ограничен отгоре. При LCM взимаме под внимание *размера* на операндите. Използваме дефинираната нагоре функция за *размера* S .

Определение 1.4 (Цена на елементарна операция в RAM). *Определя се според:*

- Цена за достъп до паметта според операнд:

Операнд	UCM	LCM
i	0	0
reg	0	0
$\rho(i)$	1	$S(i)$
$\rho(i + \gamma_j)$	1	$S(i) + S(\gamma_j)$

- Същинска цена за изпълнение:

Операция	UCM	LCM
$reg \leftarrow op$	1	$1 + S(op)$
$\alpha \leftarrow mop$	1	$1 + S(mop)$
$op \leftarrow reg$	1	$1 + S(reg)$
$mop \leftarrow \alpha$	1	$1 + S(\alpha)$
$goto\ k$	1	$1 + S(k)$
$\underline{if\ reg\ \pi\ 0\ then\ goto\ k}$	1	$1 + S(k)$
$\alpha \leftarrow \alpha\ \pi\ mop$	1	$1 + S(\alpha) + S(mop)$
$\gamma_j \leftarrow \gamma_j \pm i$	1	$1 + S(\gamma_j) + S(i)$

1.2.2 Представяне на данни в паметта

Представянето на числа в RAM модела става чрез запис в определена k -ична бройна система. Числото k е със семантиката на броя различни единици информация, които машината различава. (при машините на Тюринг k е размерът на азбуката, чиито символи пишем върху лентата).

Важна характеристика в RAM модела е т.н. размер на машинната дума: броя единици информация, които една клетка от паметта съдържа. На този етап се вижда значението на числото k . Нека размерът на машинната дума бележим с d . Тогава:

- При $k = 1$ най-голямото число, което може да се запише в една клетка, е d . Записване на числото n в паметта изисква $\lceil n/d \rceil$ клетки.
- При $k > 1$ най-голямото число, което може да се запише в една клетка, е k^d . Записване на числото n в паметта изисква $\lceil n/k^d \rceil$ клетки.

Както се вижда, разликата е експоненциална. Ние ще работим с машини, в които представянето на числата е в $k > 1$ -ична бройна система.

1.2.3 Операции за константно време в RAM модела

Следните операции върху числа могат да се изпълнят за константно време в RAM модела, при условие, че операндите се побират в една машинна дума:

- $a + b, -a, a * b, a/b$ ($b \neq 0$)
- $a^b, \lfloor \log_b a \rfloor, a!$ (в случаите, когато $a!$ се побира в машинната дума)
- $a \div b$ (целочислено), $a \bmod b$
- $a = b, a < b$ (може да считаме, че това са операции, чиито резултат е 0 или 1)
- $a \vee b, \neg a, a >> b, a << b$

Разбира се, това не са всички операции. Има доста такива, които могат да се изразят като суперпозиция на изложените (например $a \leq b = a < b \vee a = b$).

1.2.4 Псевдокод

Използването на RAM програми за описване на алгоритмите в курса ще бъде доста тромаво. Затова ще представим, чрез RAM модела някои познати програмни конструкции като if then else, for, while, псевдонимите за *променливи*. Кодът, който ще пишем и анализираме ще използва тези конструкции (и други, дефинирани, когато е уместно).

Ще пишем *псевдокод* - улеснен запис на програма в RAM модела.

- Относно псевдонимите за променливи. В известните от досегашните курсове програмни езици като C++ или Java е въведено понятието за *променлива*. В RAM модела *променливите* представляват клетките от паметта и регистрите. Вместо да ги достъпваме с $\rho(i)$ или γ_j ще използваме подходящи имена (псевдоними).
- Относно if condition then option1 else option2.
- Относно for $i = start$ to end with step do body done.
- Относно while condition do body done.

1.3 Първи пример

Ще разгледаме добре известния алгоритъм на *Евклид* за намиране на най-голям общ делител на две неотрицателни естествени числа.

Задача 1.1 (GCD).

Вход: $A, B \in \mathbb{N}$.

Изход: $\text{НОД}(A, B)$.

EUCLIDGCD(A, B : non-negative integers)

```

@1  while  $A > 0 \wedge B > 0$  do
@2    if  $A > B$  then
@3       $A \leftarrow A \bmod B$ 
@4    else
@5       $B \leftarrow B \bmod A$ 
@6    end if
@7  end while
@8  return  $\max\{A, B\}$ 

```

Твърдение 1.1. При вход естествени числа A и B , $\text{EUCLIDGCD}(A, B)$ връща тяхното най-малко общо кратно.

Лема 1.2. Ако $d = \text{НОД}(A, B)$ и A_n и B_n са състоянията съответно на A и B при n -тото достигане на ред @1 на EUCLIDGCD , то $\text{НОД}(A_n, B_n) = d$.

Колко са операциите, които алгоритъмът извършва върху следните входове:

- $A = 0, B = 3$
- $A = 64, B = 32$
- $A = 13, B = 21$
- $A = f_n, B = f_{n+1}$ (f_n е n -тото число на Фибоначи)

EUCLIDGCDREC(A, B : non-negative integers)

```

@1  if  $A = 0 \vee B = 0$  then
@2    return  $\max\{A, B\}$ 
@3  end if
@4  if  $A > B$  then
@5    return  $\text{EuclidGCDRec}(A \bmod B, B)$ 
@6  end if
@7  return  $\text{EuclidGCDRec}(A, B \bmod A)$ 

```

Твърдение 1.3. При вход естествени числа A и B , $\text{EUCLIDGCDREC}(A, B)$ връща тяхното най-малко общо кратно.

Лема 1.4. За произволно естествено n , при вход A, B , такива, че $A + B = n$ е изпълнено, че $\text{EUCLIDGCDREC}(A, B)$ връща най-малкото общо кратно на A и B .

Рекурсивната версия **EUCLIDGCDREC** позволява съчно намиране на числата от тъждеството на Безу:

$$\begin{aligned}
 A' &= A - Bq, & B' &= B \\
 u'A' + v'B' &= (A, B) \\
 u'(A - Bq) + v'B_n &= (A, B)
 \end{aligned}$$

$$u'A + (v' - u'q)B = (A, B)$$

$$\boxed{u = u' \quad v = v' - u'q}$$

1.4 Коректност на алгоритъм

Искаме алгоритмите, които пишем да гарантират, че върнатата стойност за съответния *екземпляр* на изчислителната задача, да е сред множеството от възможни *решения*.

За целта доказваме свойството *коректност* за алгоритмите си.

1.4.1 Итеративен подход

Основава се на *изобретяването* на инварианти: твърдения за състоянието на променливите и масивите, което остава вярно през целия ход на алгоритъма.

1.4.2 Рекурсивен подход

При доказването на *коректност* на алгоритми, които използват рекурсия се използва метода на математическата индукция по *свойство* на входа.

1.5 Времева сложност

Времева сложност на алгоритъм \mathcal{A} при вход $Input$ наричаме броя елементарни операции, които \mathcal{A} извършва върху $Input$, за да завърши.

Времева сложност в най-лошия случай на \mathcal{A} е функция $Time_{\mathcal{A}}(n)$, приемаща големина на входа n и връщаща максималния брой операции, които \mathcal{A} може да извърши върху вход с големина n .

Ще покажем, че действително входът, при който $EuclidGCD$ извършва най-много операции, е пряко обвързан с числата на Фибоначи.

Лема 1.5. Ако при вход A и B $EuclidGCD$ достига ред $\Theta 1$ точно k пъти, то $\min\{A, B\} \geq f_{k-1}$.

Твърдение 1.6. Времевата сложност на $EuclidGCD$ при вход $(A > 0, B > 0)$ е не повече от $6 \log_{\varphi}(\min\{A, B\}) + 14$.

(разликата спрямо упражнението е, че там е пропусната операцията присвояване на стойност)

1.6 Асимптотика

Имаме горна граница за времевата сложност на $EuclidGCD$ в най-лошия случай. Такъв аргумент обаче би бил тромав за следене при по-сложни алгоритми. За целта въвеждаме следната класификация на функциите $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$:

Определение 1.5 (Асимптотично сравнение - \preceq).

$$f \preceq g \stackrel{def}{\iff} \exists N \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall n (n > N \rightarrow f(n) \leq cg(n))$$

За нас стремеж ще бъде алгоритмите, които пишем да имат "възможно най-малка" относително \preceq сложност в най-лошия случай.

Определение 1.6 (*Big O*). Класът на асимптотично не по-големите функции от f е множеството

$$\mathcal{O}(f) = \{g \mid g \preceq f\}$$

Определение 1.7 (*Big Ω*). Класът на асимптотично не по-малките функции от f е множеството

$$\Omega(f) = \{g \mid f \preceq g\}$$

Определение 1.8 (*Big Θ*). Класът на асимптотично равните функции на f е множеството

$$\Theta(f) = \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f)$$

Под записа $f = X(g)$, където $X \in \{\mathcal{O}, \Omega, \Theta\}$, ще имаме предвид $f \in X(g)$.

1.6.1 Основни свойства

1. За всяко $c \in \mathbb{R}^+$ е в сила, че $cf = \Theta(f)$
2. Ако $f = \mathcal{O}(g)$ и $g = \mathcal{O}(h)$, то $f = \mathcal{O}(h)$
3. Ако $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ и $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\max\{g_1, g_2\})$
4. Ако $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ и $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$
5. Ако съществува границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$, то:
 - (а) $L < \infty$ т.с.т.к. $f \in \mathcal{O}(g)$
 - (б) $0 < L < \infty$ т.с.т.к. $f \in \Theta(g)$
 - (в) ако $L = \infty$, то $f \in \Omega(g)$ (Обратното не винаги е вярно!)
6. За произволни $a > 1$ и $k \geq 0$ е в сила, че $n^k = \mathcal{O}(a^n)$
7. За произволни $a > 1$ и $k > 0$ е в сила, че $\log_a n = \mathcal{O}(n^k)$
8. Ако $f = \Theta(g)$, то $\log_a f = \Theta(\log_a g)$

Релацията \preceq е преднаредба; не всеки две функции са сравними (пример са $\sin(n)$ и $\cos(n)$).

Твърдение 1.7. Времевата сложност в най-лошия случай на `EuclidGCD` при вход (A, B) е $\mathcal{O}(\log(\min\{A, B\}))$.

Задача 1.2 (Hole). Даден е масив с n различни числа от 1 до $n + 1$. Да се намери първото положително липсващо число в масива.

Вход: $A[1..n]$, $A[i] \leq n + 1$, $1 \leq i \leq n$. - масив от пол. естествени числа.

Изход: $\min\{i \mid i \in \mathbb{N} \ \& \ i \notin A\}$.

2 Линејни обхождания на масив

2.1 Сложност по памет

Сума на размерите на заделените променливи и масиви по време на работа на алгоритъма \mathcal{A} върху даден вход.

Заделянето на масив с размер n в псевдокод ще означаваме с:

SOMEALG(Input)

```

@1  ...
@2  A[1...n] ← malloc(n): ARRAY OF <TYPE>
@3  ...

```

Такова заделяне на памет извършва $\Theta(S(A[1...n]))$ елементарни операции.

Задача 2.1 (MAXIMUM SUBARRAY).

Търсим инфикс на масив с максимална сума. За целта разглеждаме т.н. алгоритъм на Kadane.

Вход: $A[1...n]$ - масив от рационални числа.

Изход: $\max \left\{ \sum_{k=i}^j A[k] \mid 1 \leq i \leq j \leq n \right\}$ - максимална сума на непразен инфикс на A .

KADANE($A[1...n]$: array of rationals)

```

@1  maxInfix ←  $-\infty$ 
@2  maxSuffix ← 0
@3  for i = 1 to n do
@4    maxSuffix ← maxSuffix + A[i]
@5    maxInfix ← max {maxSuffix, maxInfix}
@6    maxSuffix ← max {0, maxSuffix}
@7  end for
@8  return maxInfix

```

Твърдение 2.1. При подаден на вход масив от рационални числа $A[1...n]$, Kadane връща максималната сума на непразен последователен подмасив на A .

В доказателството на **Твърдение 2.1** ще използваме следната **Инварианта**:

Ако при k -тото достигане на ред @3 състоянията на $maxSuffix$ и $maxInfix$ са съответно $maxSuffix_k$ и $maxInfix_k$, то

$$maxInfix_k = \max \left\{ \sum_{t=i}^j A[t] \mid 1 \leq i \leq j \leq k-1 \right\} \text{ и}$$

$$maxSuffix_k = \max \left\{ \sum_{t=i}^k A[t] \mid 1 \leq i \leq k \right\}$$

Твърдение 2.2. Времевата сложност на KADANE в най-лошия случай е $\Theta(n)$.

Друго възможно линейно решение използва т.н. *префиксни суми* и се опира на следните наблюдения:

1. Всяка инфиксна сума е разлика на 2 префиксни:

$$\sum_{k=i}^j A[k] = \sum_{k=1}^j A[k] - \sum_{k=1}^{i-1} A[k]$$

2. Тогава най-голямата инфиксна сума се намира лесно чрез:

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq n} \left\{ \sum_{t=i}^j A[t] \right\} = \max_{1 \leq i \leq j \leq n} \left\{ \sum_{t=1}^j A[t] - \sum_{t=1}^{i-1} A[t] \right\} = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{t=1}^j A[t] - \min_{1 \leq i \leq j} \sum_{t=1}^{i-1} A[t] \right\}$$

Задача 2.2 (DISTANT PAIR).

Дадени са n точки в равнината. Да се намери най-голямото манхатънско разстояние между 2 точки.

Точка ще представяме чрез записа:

```
Point = {
  x : rational
  y : rational
}
```

Манхатънското разстояние между записи от тип *Point* $P1$ и $P2$ ще бележим с $d_M(P1, P2) = |P1.x - P2.x| + |P1.y - P2.y|$

Вход: $P[1..n]$ - масив от *Points*.

Изход: $\max \{d_M(P[i], P[j]) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$.

DISTANT($P[1..n]$: array of Points)

```

01  maxSum ← -∞
02  minSum ← +∞
03  maxDiff ← -∞
04  minDiff ← +∞
05  for i = 1 to n do
06    maxSum ← max {P[i].x + P[i].y, maxSum}
07    minSum ← min {P[i].x + P[i].y, minSum}
08    maxDiff ← max {P[i].x - P[i].y, maxDiff}
09    minDiff ← min {P[i].x - P[i].y, minDiff}
10  end for
11  return max {maxSum - minSum, maxDiff - minDiff}
```

Лема 2.3.

$$\max_{1 \leq i, j \leq n} \{d_M(P[i], P[j])\} = \max \left\{ \max_{1 \leq i, j \leq n} \{(P[i].x + P[i].y) - (P[j].x + P[j].y)\}, \right. \\ \left. \max_{1 \leq i, j \leq n} \{(P[i].x - P[i].y) - (P[j].x - P[j].y)\} \right\}$$

Твърдение 2.4. При вход масив $P[1..n]$, масив от записи *Point*, DISTANT връща най-голямото манхатънско разстояние между някои две от точките за време $\Theta(n)$.

Задача 2.3 (SIEVE). Да се намерят простите числа $\leq n$ (решето на Ератостен)

Вход: n - положително естествено число

Изход: $P[1...k] = \{p \mid p \leq n \text{ \& } p \text{ - просто}\}$.

SIEVE(n : positive integer)

```

01  A[1...n] ← malloc(n): ARRAY OF BOOLEANS
02  for i = 2 to n do
03    A[i] ← true
04  end for
05  A[1] ← false
06  for i = 2 to n do
07    if A[i] = true then
08      Eliminate(i, A[2...n])
09    end if
10  end for
11  P[1...k] ← ArgTrue(A[1...n])
12  return P[1...k]

```

ELIMINATE(p : prime, A[1...n] : booleans)

```

01  j ← 2 * p
02  while j ≤ n do
03    A[j] ← false
04    j ← j + p
05  end while

```

COUNTTRUE(A[1...n] : array of booleans)

```

01  k ← 0
02  for i = 1 to n do
03    if A[i] = true then
04      k ← k + 1
05    end if
06  end for
07  return k

```

ARGTRUE(A[1...n] : array of booleans)

```

01  k ← CountTrue(A[2...n])
02  P[1...k] ← malloc(k): ARRAY OF INTEGERS
03  k ← 1
04  for i = 2 to n do
05    if A[i] = true then
06      P[k] ← i
07      k ← k + 1
08    end if
09  end for
10  return P[1...k]

```

Твърдение 2.5. При вход просто число p и масив от булеви стойности $A[1...n]$, ELIMINATE модифицира $A[1...n]$ до $A'[1...n]$, където за $1 \leq i \leq n$:

$$A'[i] = \begin{cases} false & , \text{ ако } p|i \\ A[i] & , \text{ иначе} \end{cases}$$

Още нещо, ELIMINATE завършва за време $\Theta\left(\frac{n}{p}\right)$.

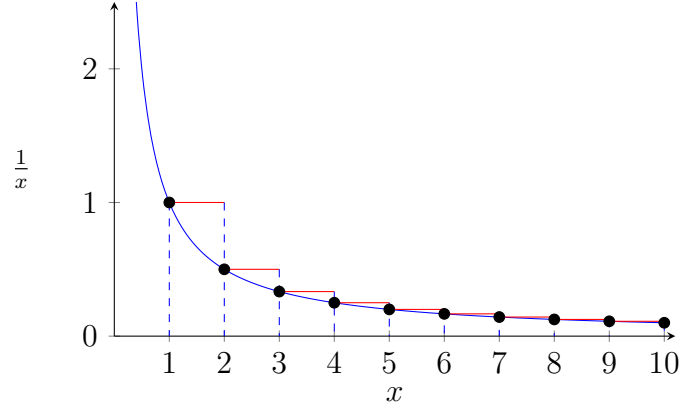
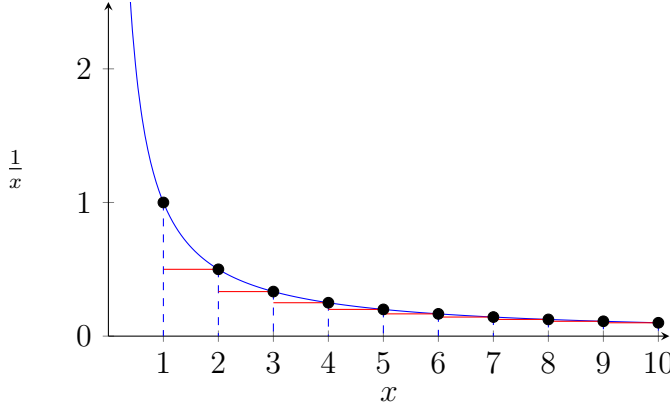
Твърдение 2.6. При вход положително цяло число n , SIEVE връща масив, съдържащ простите числа $p \leq n$. Още нещо, SIEVE завършва за $\mathcal{O}(n \log n)$ време.

За доказателството на **Твърдение 2.6**:

1. Инварианта: При всяко достигане на 07 на SIEVE, за всяко $1 \leq l \leq i$ е в сила, че $A[l] = true$ т.с.т.к. l е просто.
Вярността на тази инварианта съществено ползва **Твърдение 2.5**.
2. COUNTTRUE и ARGTRUE работят за време $\Theta(n)$ и връщат съответно броя и масив от простите числа $p \leq n$
3. SIEVE работи в най-лошия случай за време

$$\mathcal{O}(n) + \sum_{i=2, i \text{ - просто}}^n Time_{Eliminate}(p, A[1...n]) + \Theta(n) + \Theta(n) = \dots = \mathcal{O}(n \log n)$$

Идея за доказване на $\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = \Theta(\log n)$:



Твърдение 2.7 (техника за работа със сума от монотонна непрекъсната функция). Нека $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ монотонна непрекъсната функция и нека

$$S = \sum_{i=1}^n f(i)$$

$$I = \int_1^n f(x) dx$$

Тогава:

- ако f е растяща, то $I + f(1) \leq S \leq I + f(n)$.
- ако f е намаляваща, то $I + f(n) \leq S \leq I + f(1)$.

(ne^{n^2} е пример за неподходяща употреба)

Допълнение 2.1 ($(\mathcal{O}(n \log(\log n)))$ е по-добра оценка за **SIEVE**)).

Използваме наготово, че $\pi(k) = |\{p \mid p \leq k \text{ \& } p \text{ е просто}\}| = \frac{k}{\log(k)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(k)}\right)\right)$,

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} &= \sum_{k=1}^n \frac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\pi(k)}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k+1} \\ &= \frac{\pi(n)}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} = \mathcal{O}(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k^2(k+1)} \\ &= \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k^2} + \mathcal{O}(1) = \sum_{k=3}^{n-1} \left[\frac{1}{k \log(k)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k \log(k)^2}\right) \right] + \mathcal{O}(1) \\ &= \log(\log(n)) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

Инициализацията на @7 задава ненужно малка стойност за j . Оптимално е тя да бъде $i * i$, защото съставните числа по-малки от $i * i$ имат прост делител $< i$, тоест вече са отпаднали като кандидати за прости числа ($A[k] = false$). Това е мотивация за "подобрен" алгоритъм (асимптотично нещата не се променят):

ELIMINATE2($p : \text{prime}$, $A[1..n] : \text{booleans}$)

```
@1  j ← p * p
@2  while j ≤ n do
@3    A[j] ← false
@4    j ← j + p
```

05 end while

Задача 2.4 (MAX BOUNDED SUBARRAY).

По даден масив A и рационално число S , търсим максималната сума на подмасив, което не надвишава S .

Да се предложи алгоритъм с времева сложност $\Theta(n)$, който решава следния проблем:

Вход: $A[1 \dots n]$ - масив от рационални числа, S - рационално число.

Изход: $\max \left\{ \sum_{k=i}^j A[k] \mid 1 \leq i, j \leq n \ \& \ \sum_{k=i}^j A[k] \leq S \right\}$.

Задача 2.5 (Алгоритъм на Boyer – Moore).

Изборните резултати са представени с масив от вотове $V[1 \dots n]$, като $V[i]$ е подаден вот за кандидат i (броят на кандидатите не ни е известен). Изборите се печелят от кандидат, когато гласовете за него са над 50%, т.е. поне $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Да се предложи алгоритъм с времева сложност $\Theta(n)$, който решава следния проблем:

Вход: $V[1 \dots n]$ - масив от вотове (положителни естествени числа).

Изход: i - победител в изборите, ако има такъв, в противен случай - 0.

3 Сортиране (упражнения 3 и 4)

Цел: подредба на елементите "по големина" (т.е. по някакво тяхно свойство)

Алгоритми за сортиране:

- $\mathcal{O}(n^2)$ в най-лошия случай
 - SELECTIONSORT
 - INSERTIONSORT
 - QUICKSORT (при случаен *pivot*, средна сложност $\mathcal{O}(n \log n)$)
- $\mathcal{O}(n \log n)$
 - HEAPSORT
 - MERGESORT
 - QUICKSORT (при *pivot*, определен като "Median of medians")
- $\mathcal{O}(n + d) \rightarrow$ COUNTINGSORT (използваме, когато имаме горна граница d за елементите на масива)

Задача 3.1 (2-SUM).

Вход: $A[1..n]$ - масив от рационални числа.

Изход: Има ли $1 \leq i < j \leq n$, такива, че $A[i] + A[j] = 0$?

TWOPOINTERSUM($A[l..r]$: sorted array of rationals, $target$: rational number)

```

@1  i ← l
@2  j ← r
@3  while i < j ∧ A[i] + A[j] ≠ target do
@4    if A[i] + A[j] < target then
@5      i ← i + 1
@6    else
@7      j ← j - 1
@8    end if
@9  end while
@10 return i < j

```

Твърдение 3.1. При вход сортиран масив $A[1..n]$ и рационално число $target$, TWOPOINTERSUM връща истина т.с.т.к. има $1 \leq i < j \leq n$, такива, че $A[i] + A[j] = target$.

Още нещо, TWOPOINTERSUM работи върху всеки свой вход за време $\Theta(n)$.

2SUM($A[1..n]$: array of rationals)

```

@1  MERGESORT( $A[1..n]$ )
@2  return TWOPOINTERSUM( $A[1..n]$ , 0)

```

Коректността на 2SUM е директно следствие от **Твърдение 3.1**, тъй като подаденият на @2 масив е сортираният вход и е в сила, че такива индекси $1 \leq i, j \leq n$ има в A т.с.т.к. има такива индекси $1 \leq i', j' \leq n$ в сортираната пермутация A' на A .

Задача 3.2 (3-SUM).

Вход: $A[1..n]$ - масив от рационални числа.

Изход: Има ли $1 \leq i < j < k \leq n$, такива, че $A[i] + A[j] + A[k] = 0$?

3SUM($A[1..n]$: array of rationals)

```

01 MERGESORT( $A[1..n]$ )
02    $i \leftarrow 1$ 
03   while  $i < n - 1 \wedge \neg \text{TwoPointerSum}(A[i+1..n], -A[i])$  do
04      $i \leftarrow i + 1$ 
05   end while
06   return  $i < n - 1$ 

```

Отворен е въпросът дали има $\mathcal{O}(n^{2-\epsilon})$ алгоритъм, решаващ **3-SUM**.

Задача 3.3 (4-SUM).

Вход: $A[1..n]$ - масив от рационални числа.

Изход: Има ли $1 \leq i < j < k < l \leq n$, такива, че $A[i] + A[j] + A[k] + A[l] = 0$?

```

Sum = {
    left: positive integer
    right: positive integer
    value: rational
}

```

Нека **MERGESORTSUMS** е модификация на **MERGESORT**, която сортира масив от **Sums** по контекст $s1 \prec s2$ т.с.т.к. $s1.value < s2.value \vee (s1.value = s2.value \wedge (s1.left < s2.left \vee (s1.left = s2.left \wedge s1.right < s2.right)))$.

Нека **TWOPOINTERSUMSUMS** е модификация на **TWOPOINTERSUM**, която:

- на вход получава масив от **Sums** и *target*
- на 03 заменя $A[i] + A[j] \neq target$ с $A[i].value + A[j].value \neq target \vee A[i].left = A[j].left \vee A[i].right = A[j].right$
- на 04 заменя $A[i] + A[j] < target$ с $A[i].value + A[j].value < target$

4SUM($A[1..n]$: array of rationals)

```

01  $B[1..\binom{n}{2}] \leftarrow \text{malloc}(\binom{n}{2}): \text{ARRAY OF Sums}$ 
02    $k \leftarrow 1$ 
03   for  $i = 1$  to  $n - 1$  do
04     for  $j = i + 1$  to  $n$  do
05        $B[k] \leftarrow \text{Sum}(left \leftarrow i, right \leftarrow j, value \leftarrow A[i] + A[j])$ 
06        $k \leftarrow k + 1$ 
07     end for
08   end for
09   MERGESORTSUMS( $B[1..\binom{n}{2}]$ )
10   TWOPOINTERSUMSUMS( $B[1..\binom{n}{2}]$ , 0)

```

Времева сложност на **4SUM**: $\mathcal{O}(\binom{n}{2}) + \mathcal{O}(\binom{n}{2}) + \mathcal{O}(\binom{n}{2} \log \binom{n}{2}) + \mathcal{O}(\binom{n}{2}) = \mathcal{O}(n^2 \log n)$.

Задача 3.4 (MINIMUM ABSOLUTE SUBARRAY). Да се намери инфиксна сума в масив с най-малка абсолютна стойност.

(Стока в магазин, да няма недостиг, но и да няма излишък; в кой период е постигнат оптимален резултат?)

Вход: $A[1..n]$ - масив от рационални числа.

Изход: $\min \left\{ \left| \sum_{k=i}^j A[k] \right| \mid 1 \leq i \leq j \leq n \right\}$ - най-близка до 0 сума на непразен инфикс на A .

Лема 3.2. Ако за $k < l$ имаме, че

$$|S_k - S_l| = \min \{|S_j - S_i| \mid 0 \leq i < j \leq n\}$$

то няма q , такова, че $S_k < S_q < S_l$ или $S_l < S_q < S_k$.

Сега след **Лема 3.2** остава да съобразим, че е достатъчно да сортираме префиксните суми и да търсим минимална абсолютна разлика между някои два последователни.

MINABSSUBARRAY($A[1..n]$: array of rationals)

```

01   $B[0..n] \leftarrow \text{malloc}(n+1)$ : ARRAY OF rationals
02   $B[0] \leftarrow 0$ 
03  for  $i = 1$  to  $n$  do
04     $B[i] \leftarrow B[i-1] + A[i]$ 
05  end for
06  MERGESORT( $B[0..n]$ )
07   $m \leftarrow +\infty$ 
08  for  $i = 1$  to  $n$  do
09     $m \leftarrow \min\{m, B[i] - B[i-1]\}$ 
10  end for
11  return  $m$ 
```

Твърдение 3.3. При вход $A[1..n]$ - масив от рационални числа, MINABSSUBARRAY работи за време $\mathcal{O}(n \log n)$ и връща най-малката абсолютна стойност на сума на елементите на непразен подмасив на A .

Задача 3.5 (TRIANGLES).

Вход: $A[1..n]$ - масив от рационални числа.

Изход: $|\{ \langle i, j, k \rangle \mid 1 \leq i < j < k \leq n \ \& \ A[i], A[j], A[k] \text{ са страни на триъгълник} \}|$

TRIANGLES($A[1..n]$: array of rationals)

```

01  MERGESORT( $A[1..n]$ )
02  count  $\leftarrow 0$ 
03  for  $i = 1$  to  $n-2$  do
04     $k \leftarrow i+2$ 
05    for  $j = i+1$  to  $n-1$  do
06      while  $k < n \wedge A[i] + A[j] > A[k]$  do
07         $k \leftarrow k+1$ 
08      end while
09      count  $\leftarrow$  count +  $(k - j - 1)$ 
10    end for
11  end for
12  return count
```

Коректност на **TRIANGLES** може да се покаже с инварианта за цикъла на ③, като за нейното доказване е удобно в стъпката да се дефинира друга инварианта за цикъла на ⑤.

Относно времевата сложност на **TRIANGLES**, ключово наблюдение е ⑨ се изпълнява най-много $n - i - 2$ пъти за всяко изпълнение на тялото на цикъла на ред ③...

$$Time_{Triangles} = \sum_{i=1}^{n-2} (\mathcal{O}(n - i - 2) + \mathcal{O}(n - i - 2)) = \dots = \mathcal{O}(n^2)$$

Задача 3.6. Разглеждаме редица от $2n$ рационални числа $\{a_i\}_{i=1}^{2n}$. Групиране на $\{a_i\}_{i=1}^{2n}$ ще наричаме множество от наредени двойки (a_p, a_q) , такова, че всеки член a_i на редицата участва точно в една наредена двойка и то веднъж. Тежест на групиране P ще наричаме

$$w(P) = \max \{a_p + a_q \mid (a_p, a_q) \in P\}$$

. Целим да намерим минималната възможна тежест измежду всички групирания.

Вход: $A[1\dots 2n]$ - представяне на редица от рационални числа.

Изход: $m = \min \{w(P) \mid P \text{ е групиране за } A[1\dots 2n]\}$.

Лема 3.4. Минимална тежест на растяща редица се достига за групирането $\{(a_i, a_{2n-i+1}) \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Очевидно пермутирането на входа не променя всички възможни групирания, а следователно и това с най-малка тежест не се променя.

След придобитата интуиция за отговора следва само да се възползваме от сортирането:

LIGHTESTGROUP($A[1\dots 2n]$: array of rationals)

```

①  HEAPSORT( $A[1\dots 2n]$ )
②   $maxSum \leftarrow -\infty$ 
③  for  $i = 1$  to  $n$  do
④     $maxSum \leftarrow \max \{maxSum, A[i] + A[2n - i + 1]\}$ 
⑤  end for
⑥  return  $maxSum$ 
```

Времева сложност: $\mathcal{O}(n \log n)$.

Оказва се, че това групиране решава и следните подобни проблеми:

1. Тежест на групиране P ще наричаме

$$l(P) = \min \{a_p + a_q \mid (a_p, a_q) \in P\}$$

Вход: $A[1\dots 2n]$ - представяне на редица от рационални числа.

Изход: $m = \max \{l(P) \mid P \text{ е групиране за } A[1\dots 2n]\}$.

2. Потенциал на групиране P ще наричаме

$$\pi(P) = w(P) - l(P)$$

Вход: $A[1\dots 2n]$ - представяне на редица от рационални числа.

Изход: $m = \min \{\pi(P) \mid P \text{ е групиране за } A[1\dots 2n]\}$.

Определение 3.1 (Редукция на изчислителни задачи).

Казваме, че **PR1** се свежда до **PR2** и пишем

$$\mathbf{PR1} \lll_{f(n)} \mathbf{PR2}$$

ако има алгоритъм, разрешаващ **PR1**, който константен брой пъти използва алгоритъм, решаващ **PR2**, както и извършва $\mathcal{O}(f(n))$ допълнителна работа.

Задача 3.7 (3-SUM-TARGET).

Вход: $A[1\dots n], target$ - масив от рационални числа и търсена сума.

Изход: Има ли $1 \leq i < j < k \leq n$, такива, че $A[i] + A[j] + A[k] = target$?

Твърдение 3.5 (връзка между проблемите **3-SUM** и **3-SUM-TARGET**).

Проблемите **3-SUM** и **3-SUM-TARGET** лесно се свеждат един към друг със следните алгоритми:

- **3-SUM-TARGET** \lll_n **3-SUM**
 - За време $\mathcal{O}(n)$ заменяме $A[i] \rightsquigarrow A[i] - target/3$.
 - Връщаме резултата от извикването на **3-SUM** при вход модифицирания масив A .
- **3-SUM** \lll_1 **3-SUM-TARGET**
 - Връщаме резултата от извикването на **3-SUM-TARGET** при вход масива A и целева сума 0.

Задача 3.8 (3-COLLINEAR).

Вход: P_1, \dots, P_n - представяния на точки в равнината.

Изход: Има ли $1 \leq i < j < k \leq n$, такива, че P_i, P_j, P_k са колинеарни?

Твърдение 3.6.

$$\mathbf{3-SUM} \lll_{n \log n} \mathbf{3-COLLINEAR}$$

Алгоритъм за **3-SUM**:

1. За време $\mathcal{O}(n \log n)$ може да се провери дали има тройка индекси, за които някои два елемента са равни и сумата на трите е 0 (как?)
2. Премахваме повтарящите се елементи
3. За всеки елемент на A конструираме $A[i] \rightsquigarrow (A[i], A[i]^3)$
4. Връщаме резултата от **3-COLLINEAR** при вход съпоставените точки.

Използваме фактът, че $A[i] + A[j] + A[k] = 0$ т.с.т.к. $\langle A[i], A[i]^3 \rangle, \langle A[j], A[j]^3 \rangle, \langle A[k], A[k]^3 \rangle$ са колинеарни.

(Второто е еквивалентно на нулева детерминанта $\begin{vmatrix} A[i] & A[i]^3 & 1 \\ A[j] & A[j]^3 & 1 \\ A[k] & A[k]^3 & 1 \end{vmatrix}$)

Задача 3.9 (CONCURRENT LINES).

Вход: l_1, \dots, l_n - представяния на прави в равнината.

Изход: Има ли $1 \leq i < j < k \leq n$, такива, че l_i, l_j, l_k се пресичат в една точка?

Допълнение 3.1 (CONCURRENT LINES).**3-COLLINEAR $\lll_{n \log n}$ CONCURRENT LINES**Алгоритъм за **3-COLLINEAR**:

1. Сортираме по x точките за $\mathcal{O}(n \log n)$
2. Проверяваме дали има някои с еднаква x координата за $\mathcal{O}(n)$
3. Заменяме всяка точка $(x_i, y_i) \rightsquigarrow l_i : x_i x - y - y_i = 0$
4. Три точки с различни x координати са колинеарни т.с.т.к. съпоставените им прави се пресичат в 1 точка, т.е. връщаме резултата от **CONCURRENT LINES** при вход съпоставените прави.

Използваме, че $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ с $x_i \neq x_j$ лежат на права $l : ax - y - b = 0$ т.с.т.к. (a, b) е пресечната точка на l_i и l_j .

Има ли по-бърз алгоритъм за 1. и 2. (тоест да се провери дали има 3 еднакви числа в масив) - не

(редукция на **UNIQUENESS** към **3-EQUAL** за линейно време с дублиране на масива A , т.е. извикваме **3-EQUAL** с $A \circ A$) (поне след лекция 5, когато излезе теоретична за **UNIQUENESS**???)

Неаразгледани (до момента) задачи:

Задача 3.10 (Задача 1, писмен изпит 2023г.).

Представяне на редица от n интервала I_1, \dots, I_n ще наричаме двойка от масиви $L[1..n]$ и $R[1..n]$, за които:

$$I_i = [L[i], R[i]] \text{ за всяко } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

1. Разглеждаме следния проблем **INTERSECTING PAIRS**:

Вход: $L[1..n]$, $R[1..n]$ представяне на редица от n интервала I_1, I_2, \dots, I_n

Изход: $N = |\{(i, j) \mid i < j \text{ и } I_i \cap I_j \neq \emptyset\}|$

Да се предложи алгоритъм със сложност $\mathcal{O}(n \log n)$, който решава проблема **INTERSECTING PAIRS**.

Да се докаже коректността и времевата сложност на предложения алгоритъм.

2. За редица от интервали $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)$ с $m(I)$ означаваме най-големия брой интервали от редицата, които в съвкупност имат непразно сечение.

Разглеждаме следния проблем **MAXINTERSECTION**:

Вход: $L[1..n]$, $R[1..n]$ представяне на редица от n интервала I_1, I_2, \dots, I_n

Изход: $m(I)$

Да се предложи алгоритъм със сложност $\mathcal{O}(n \log n)$, който решава проблема **MAXINTERSECTION**.

Да се докаже коректността и времевата сложност на предложения алгоритъм.

Задача 3.11 (MAX CLUSTER).

Вход: $A[1..n]$ - масив от рационални числа, $d \in \mathbb{Q}^+$.

Изход: $\max \{|S| \mid S \subseteq A \text{ и } \forall x, y \in S (|x - y| \leq d)\}$.

Задача 3.12 (INTERSECTING SEGMENTS).

Разглеждаме правите в равнината $y = 0$ и $y = 1$. Върху $y = 0$ са разположени n различни точки

$$(a_1, 0), (a_2, 0), \dots, (a_n, 0)$$

Върху $y = 1$ са разположени n различни точки

$$(b_1, 1), (b_2, 1), \dots, (b_n, 1)$$

С s_i бележим отсечката с краища $(a_i, 0)$ и $(b_i, 1)$.

Вход: $A[1..n], B[1..n]$ - масив от абсцисите на точките.

Изход: $|\{(s_i, s_j) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ и } s_i \cap s_j \neq \emptyset\}|$.

Следва продължение...