

# Tutorato 1

September 2020

## 1 Insiemistica

### 1.1 Esercizio 1

Sia  $A = ]-2, -1] \cup \{3\}$ . Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme  $A \times \mathbb{R}$ .

### 1.2 Esercizio 2

Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 \leq 1, y \leq |x|\}$ .

### 1.3 Esercizio 3

Siano dati gli insiemi  $A = [-2, 5[$ ,  $B = ]-\infty, -1[ \cup ]2, +\infty[$  e  $C = \{-1, 2\}$ .

a) Rappresentate graficamente gli insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$  sulla retta reale.

b) Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (scritture scorrette sono da considerarsi affermazioni false):

$-1 \in B$ ;  $\{-1\} \subseteq C$ ;  $A \cap C = C$ ;  $4 \subset A$ ;  $]2, 5[ \subset A$ ;  $C \subseteq \mathbb{R} \setminus B$ ;  $C \setminus A \neq \emptyset$ .

## 2 Maggioranti, minoranti, massimi e minimi

### 2.1 Esercizio 4

Dati gli insiemi

i)  $A = \{a_n : a_n = [1 + (-1)^n] \frac{n-1}{n}, n \in \mathbf{N}^+\};$

ii)  $B = \{x_n : x_n = (\cos n\pi)^3 - \frac{3}{n}, n \in \mathbf{N}^+\};$

iii)  $C = \{\frac{n+n^2}{n-1} : n \in \mathbf{N}, n \geq 2\},$

determinate  $\inf A$  e  $\sup A$ , determinate  $\inf B$  e  $\sup B$  e  $\inf C$  e  $\sup C$ . Sono minimi e massimi?

### 2.2 Esercizio 5

i) Determinate l'insieme  $A = \{x \in \mathbf{R} : \left| \frac{x}{x-1} \right| > 1\}$ . Dite se  $A$  è un intervallo. Dite se è limitato.

ii) Determinate l'insieme  $B = \{x \in \mathbf{R} : \log_2(3 - |x|) < 1\}$ . Dite se  $B$  è un intervallo. Dite se è limitato.

iii) Determinate  $\inf A$  e  $\sup B$ .

### 2.3 Esercizio 6

i) Individuate gli insiemi  $A = \{x \in \mathbf{R} : |x-2| < 3\}$  e  $B = \{x \in \mathbf{R} : \sqrt{x|x|-2} \leq 1\}$ .

ii) Dite se sono insiemi limitati inferiormente/limitati superiormente/limitati.

iii) Determinate  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  e  $A \setminus B$ .

iv) Determinate  $\inf(A \cap B)$  e  $\sup A$ .

### 3 Iniettività e suriettività

#### 3.1 Esercizio 7

Dire per le seguenti funzioni se sono iniettive; inoltre determinare se sono funzioni pari o dispari.

i)  $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = x + \frac{1}{x};$

ii)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = 2 + \sin x;$

iii)  $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = x - \frac{1}{x};$

iv)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = x^3 - 2.$

#### 3.2 Esercizio 8

Siano date le funzioni  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  e  $g : ]-\infty, 0[ \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x > 0 \\ 3x + 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ -x - 1 & \text{se } -1 < x < 0. \end{cases}$$

- i) Determinate l'immagine di  $f$  e l'immagine di  $g$ .
- ii) Dite se sono funzioni iniettive, e se sono funzioni suriettive.
- iii) Determinate, dove esiste, la funzione composta  $f \circ g$ .

### 4 Induzione

#### 4.1 Esercizio 9

Provate per induzione che

i)  $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbf{N};$

ii)  $3^n \geq n2^n \quad \forall n \in \mathbf{N}.$