V = Vertice, F = Fuoco, d = direttrice, a = asse
Generica parabola avente vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y

$$y = ax^2$$
$$k = \frac{1}{4a}, a = \frac{1}{4k}$$
$$V(0;0),\ F\left(1;\frac{1}{4a}\right),\ d: y = -\frac{1}{4a}, a: x = 0$$

Generica parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right), F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right), d: y = -\frac{1+\Delta}{2a}, a: x = -\frac{b}{2a}$$

$a > 0$:concavità verso l'alto
$a < 0$:concavità verso l'alto

$\Delta > 0$:asse $x$ intersecato 2 volte
$\Delta < 0$:asse $x$ non intersecato
$\Delta = 0$:asse $x$ intersecato 1 volta, nel vertice

$c = 0\{$
$a > 0$:
$b > 0 : x_2(0;0)$
$b < 0 : x_1(0;0)$
$b = 0 : x(0;0)$

$a < 0$:
$b > 0 : x_1(0;0)$
$b < 0 : x_2(0;0)$
$b = 0 : x(0;0)$
$\}$

Equazione da Fuoco e direttrice

$$d: y_d,\ F(x_F,\ y_F)$$
$$-\frac{b}{2a} = x_F$$
$$\frac{1-\Delta}{4a} = y_F$$
$$-\frac{1+\Delta}{2a} = y_d$$

Per parabola parallela all'asse x ($x = ay^2 + by + c$)

$$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right), F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right), d: x = -\frac{1+\Delta}{4a}, a: y = -\frac{b}{2a}$$

# Parabola e retta

Se la retta non è parallela all'asse $y$ ($y = mx + q$) al sistema seguente possono esserci diverse soluzioni

$$\begin{gathered} Sistema: \\ y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} ax^2 + bx + c = mx + q \\ ax^2 + (b - m)x + c - q = 0 \implies \Delta \end{gathered}$$

$\Delta > 0$:retta secante (2 soluzioni)
$\Delta = 0$:retta tangente (1 soluzione)
$\Delta < 0$:retta esterna (0 soluzioni)

Se la retta è parallela all'asse $y$ ($x = k$) allora l'unica soluzione è $y = ak^2 + bk + c$

**Tangenti**
consideriamo parabola e un punto P del piano
Se P è esterno alla parabola ci saranno 2 rette tangenti alla parabola passanti per P

$$\begin{gathered} Sistema: \\ y = ax^2 + bx + c \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx - mx_0 + y_0 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} ax^2 + bx + c = mx - mx_0 + y_0 \\ ax^2 + (b - m)x + c + mx_0 - y_0 = 0 \implies \Delta > 0 \end{gathered}$$

trovo $m$

Se P appartiene alla parabola ci sarà un'unica retta tangente alla parabola passante per P
Metodo precedente OPPURE

$$\begin{gathered} P(x_0, y_0) \\ m = 2ax_0 + b \end{gathered}$$

Se P è interno alla parabola non ci saranno rette passanti per P tangenti alla parabola

Determinare l'equazione di una tangente ad una parabola parallela a una retta data($y = m_1x + q_1$)

$$\begin{gathered} Sistema: \\ y = ax^2 + bx + c \\ y = m_1x + q \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} ax^2 + bx + c = m_1x + q \\ ax^2 + (b - m_1)x + c - q = 0 \end{gathered}$$

# Teoria Di Archimede

L'area di un segmento parabolico di base AB è $\frac{2}{3}$dell'area del rettangolo AA'B'B, essendo A' e B' le proiezioni di A e B sulla retta tangente alla parabola e parallela ad AB

## Determinare Equazione Parabola

**Caso 1 - 3 punti non allineati**

$$A, B \ e \ C: \ punti \ della \ parabola$$
$$Sistema:$$
$$y_A = ax_A^2 + bx_A + c$$
$$y_B = ax_B^2 + bx_B + c$$
$$y_C = ax_C^2 + bx_C + c$$

**Caso 2 - Parabola dato vertice e un punto**

$$V: \ Vertice, \ P: \ Punto$$
$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$
$$a: y_P - y_V = a(x_P - x_V)^2$$

**Caso 3 - Parabola dato vertice e fuoco**

$$V: \ Vertice, \ F: \ Fuoco$$
$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$
$$a: \frac{1-\Delta}{4A} = \frac{1-\left(B^2 - 4AC\right)}{4A} = y_F$$

$$ex: V(1;4), \ F\left(1; \frac{15}{4}\right)$$

$$y - 4 = a(x-1)^2$$
$$y = a\left(x^2 + 1 - 2x\right) + 4$$
$$y = ax^2 + a - 2ax + 4$$
$$y = ax^2 - 2ax + 4 + a$$
$$A = a, \ B = -2a, \ C = 4 + a$$
$$y = Ax^2 + Bx + C$$
$$\frac{1-\left(B^2 - 4AC\right)}{4A} = \frac{15}{4}$$
$$etc...$$

**Caso 4 - Parabola dati due suoi punti e l'equazione dell'asse**

$$A, B \ punti, \ a: x \ asse$$
$$Sistema:$$
$$y_A = ax_A^2 + bx_A + c$$
$$y_B = ax_B^2 + bx_B + c$$
$$-\frac{b}{2a} = a: x$$

**Caso 5 - Parabola dato Fuoco e Equazione direttrice**

$$F: \ Fuoco, \ d: y \ direttrice$$
$$Sistema:$$
$$-\frac{b}{2a} = x_F$$

$$\frac{1-\Delta}{4a} = y_F$$

$$-\frac{1+\Delta}{4a} = d:y$$

**Caso 6 - Parabola data l'equazione della tangente alla parabola in un suo punto, date le coordinate del punto di tangenza e le coordinate di un secondo punto appartenente alla parabola**

$$A: \ Punto\ di\ Tangenza,\ \ t:y,m,q\ tangente,\ \ B: \ Punto$$

$$Sistema:$$

$$y_A = ax_A^2 + bx_A + c$$

$$y_B = ax_B^2 + bx_B + c$$

$$t:m = 2ax_A + b$$

**Caso 7 - Parabola dati due suoi punti e l'equazione di una retta tangente alla parabola in un punto non dato**

$$A,\ B: \ Punti,\ \ t:y,m,q\ tangente$$

$$ax^2 + (b - t:m)x + c - t:q = 0 \implies \Delta = 0 \implies (b - t:m)^2 - 4a(c - t:q) = 0$$

$$Sistema:$$

$$(b - t:m)^2 - 4a(c - t:q) = 0$$

$$y_A = ax_A^2 + bx_A + c$$

$$y_B = ax_B^2 + bx_B + c$$