Variabili aleatorie multiple

- **Caso speciale: v.a. doppie discrete**
- **Caso speciale: v.a. doppie continue**
- **Caso generale (k dimensioni)**

Cicchitelli Cap. 15

Esempio introduttivo

Si lancia tre volte una moneta bilanciata, definendo le seguenti variabili aleatorie:

X = numero di teste

Y = numero di variazioni di sequenza

Tabella 15.1 Associazione di coppie di numeri agli eventi elementari dello spazio campionario di cui all'Esempio 13.1.

Spazio campionario		X	Y
TTT	ω_1	3	0
TTC	ω_2	2	1
TCT	ω_3	2	2
TCC	ω_4	1	1
CTT	ω_5	2	1
CTC	ω_6	1	2
CCT	ω_7	1	1
CCC	ω_8	0	0

Per ogni coppia di numeri (x,y) si calcoli la probabilità dell'evento intersezione: $P(X = x \cap Y = y)$

Esempio introduttivo /cont.

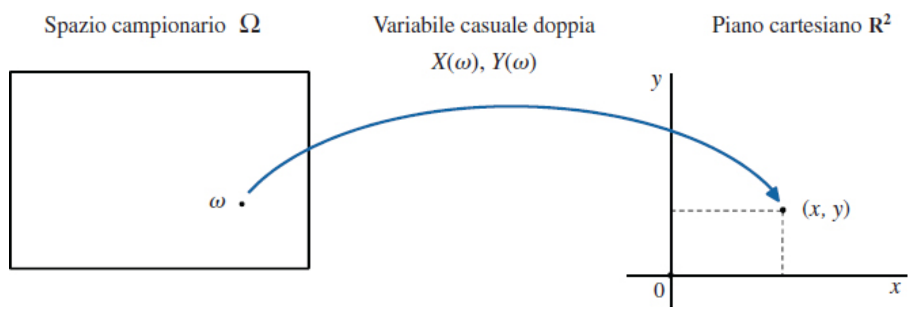
Ogni punto dello spazio campione ha probabilità 1/8 per cui si possono facilmente calcolare le probabilità degli eventi intersezione, ottenendo la seguente tabella a doppia entrata, che rappresenta la distribuzione di probabilità della v.a. doppia (X,Y)

Tabella 15.2 Probabilità delle coppie di numeri (x, y) di cui alla Tabella 15.1.

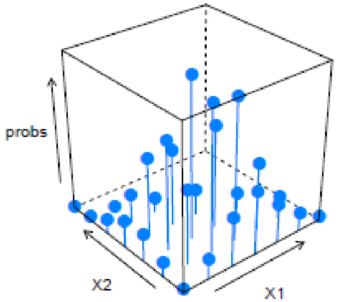
X	Y			Totale
	0	1	2	
0	0,125	0	0	0,125
1	0	0,250	0,125	0,375
2	0	0,250	0,125	0,375
3	0,125	0	0	0,125
Totale	0,250	0,500	0,250	1

Definizione di v.a. doppia

Con riferimento ad uno spazio campionario Ω, una variabile aleatoria doppia (X,Y) è una coppia di funzioni $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ a valori reali che associa ad ogni evento elementare $\omega \in \Omega$ una coppia di numeri reali (x,y).



Variabili aleatorie doppie discrete



La distribuzione congiunta doppia

- La **distribuzione di probabilità congiunta discreta** esprime la probabilità che
  - *X* assuma il valore *x* e, contemporaneamente,
  - *Y* assuma il valore *y*
- E' una funzione in due variabili x e y

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = P(X = x \cap Y = y)}$$

- Proprietà

$$f_{XY}(x,y) \geq 0$$

$$\sum_x \sum_y f_{XY}(x,y) = 1$$

Distribuzione congiunta: esempio

- Esempio. Consideriamo una popolazione di 1000 studenti universitari con due caratteri binari *X* e *Y*
  - *X*=1 → "lo studente ha la maturità scientifica"
  - *Y*=1 → "lo studente ha superato l'esame di Analisi matematica entro un anno"

$X \setminus Y$	**0**	**1**	
0	90	660	750
1	10	240	250
	100	900	1000

Distribuzione congiunta: esempio

- (Segue esempio). Se estraiamo uno studente a caso le probabilità congiunte coincidono con le frequenze congiunte relative

$X \setminus Y$	**0**	**1**	
0	0.09	0.66	0.75
1	0.01	0.24	0.25
	0.10	0.90	1

$$f_{XY}(0,1) = P(X = 0 \cap Y = 1) = 0.66$$

Le due distribuzioni marginali

- Le **distribuzioni di probabilità marginali discrete** rappresentano le probabilità di una delle due variabili, ignorando l'altra

$$f_X(x) = P(X = x) \qquad f_Y(y) = P(Y = y)$$

- Si ottengono sommando le probabilità congiunte rispetto all'altra variabile

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x,y) \qquad f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x,y)$$

Distribuzioni marginali: esempio

- (Segue esempio). La distribuzione marginale di *Y* si legge nei totali di colonna

Supporto della distribuzione marginale di *Y*

$X \setminus Y$	0	1	
0	0.09	0.66	0.75
1	0.01	0.24	0.25
	0.10	0.90	1

Probabilità marginali di *Y*

Ad esempio

$$f_Y(0) = \sum_x f_{XY}(x,0) = f_{XY}(0,0) + f_{XY}(1,0) = 0.09 + 0.01 = 0.10$$

Le due distribuzioni condizionate

- Le distribuzioni di probabilità condizionate della variabile aleatoria *Y* esprimono le probabilità di *Y* condizionatamente ad uno specifico valore *x* di *X*:

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = P(Y = y\,|\,X = x)$$

Una distribuzione per ogni possibile valore *x* di *X*

- Si calcola dividendo la probabilità congiunta per la probabilità marginale di *X* (ricordarsi la definizione di probabilità condizionata!):

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

In modo simile si definisce e si deriva la distribuzione di probabilità congiunta di *X* dato *Y=y*

Distribuzioni condizionate: esempio

(segue esempio)

$X \setminus Y$	0	1	
0	0.12	0.88	1
1	0.04	0.96	1

Distribuzione di probabilità di aver superato l'esame di Analisi Matematica per gli studenti che …

… ***non*** hanno la maturità scientifica

Distribuzione di *Y* condizionata a *X*=0

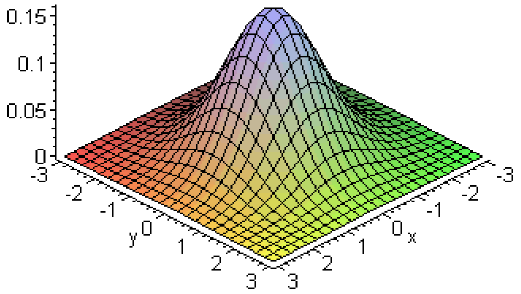
0	1	
0.12	0.88	1

… hanno la maturità scientifica

Distribuzione di *Y* condizionata a *X*=1

0	1	
0.04	0.96	1

Variabili aleatorie doppie continue



La densità congiunta doppia

- La **densità di probabilità congiunta doppia** viene usata per esprimere la probabilità che
  - X assuma un valore nell'intervallo $[a,b]$ e, contemporaneamente,
  - Y assuma un valore nell'intervallo $[c,d]$.

Il termine 'densità' sottintende che la variabile aleatoria è continua

- E' una funzione in due variabili x e y tale che

$$P(X \in [a,b] \cap Y \in [c,d]) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)dxdy$$

- Proprietà

$$f_{XY}(x,y) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$$

Le due densità marginali

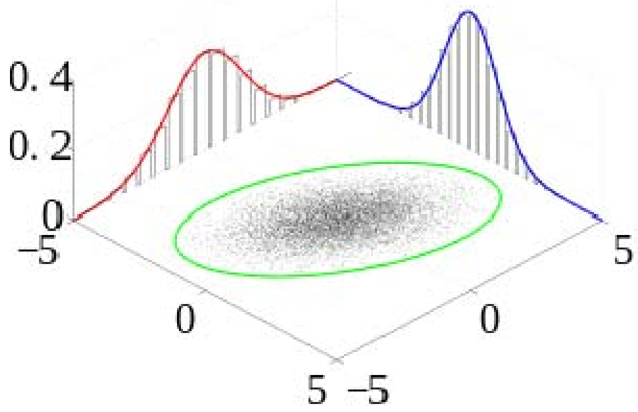
- Le **densità di probabilità marginali** riguardano una delle due variabili, ignorando l'altra

$$f_X(x) \text{ tale che } P(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)dx$$

$$f_Y(y) \text{ tale che } P(Y \in [c,d]) = \int_c^d f_Y(y)dy$$

- Si ottengono integrando la densità congiunta rispetto all'altra variabile

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$$



Many sample observations (black) are shown from a joint probability distribution. The marginal densities are shown as well.
http://en.wikipedia.org/wiki/Joint_probability_distribution

Le due densità condizionate

- La densità di probabilità condizionata della v.a. *Y* viene usata per esprimere la probabilità che *Y* assuma un valore nell'intervallo [*c*,*d*] condizionatamente ad uno specifico valore *x* di *X*:

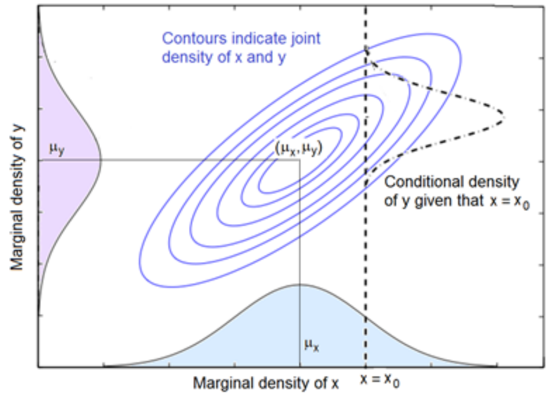
$$f_{Y|X}(y\,|\,x) \text{ tale che } P(Y \in [c,d]\,|\,X = x) = \int_c^d f_{Y|X}(y\,|\,x)dy$$

Una distribuzione per ogni possibile valore *x* di *X*

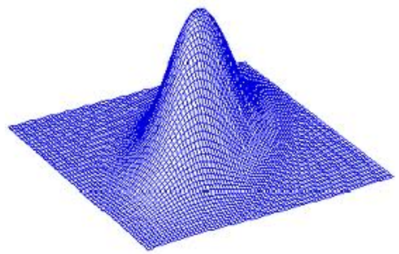
- Si ottiene dividendo la densità congiunta per la densità marginale di *X* (ricordarsi la definizione di probabilità condizionata!):

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

In modo simile si definisce e si calcola la densità congiunta di *X* dato *Y=y*



Rappresentazione della densità congiunta tramite curve di livello (contour plot). Questa rappresentazione è analoga alle cartine geografiche altimetriche, dove ogni curva di livello rappresenta i punti con la stessa altezza. Nel caso di una distribuzione di probabilità, ogni curva di livello rappresenta i punti con la stessa densità.



Indipendenza e associazione tra le componenti di v.a. multiple (con componenti tutte discrete o tutte continue)

Indipendenza

- Due variabili aleatorie *X* e *Y* sono **indipendenti** se e solo se la loro distribuzione di probabilità congiunta è uguale al prodotto delle loro distribuzioni di probabilità marginali (per tutte le possibili coppie di valori di x e y):

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

variabili discrete
→ *f* sono funzioni di probabilità

variabili continue
→ *f* sono funzioni di densità

- Estensione: *k* variabili aleatorie sono indipendenti se e solo se

$$f_{X_1X_2\cdots X_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_k}(x_k)$$

Covarianza

- La **covarianza** di due v.a. X e Y è il valore atteso del prodotto degli scarti dai rispettivi valori attesi

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

- Per variabili aleatorie discrete l'espressione è

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y) f_{XY}(x,y)$$

- Un'espressione equivalente è

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y = \sum_x \sum_y xy f_{XY}(x,y) - \mu_x\mu_y$$

Covarianza e Indipendenza

- La covarianza misura la forza della ***relazione lineare*** tra due variabili aleatorie
  - Covarianza nulla $\Leftrightarrow$ assenza di relazione lineare (indipendenza lineare)
- Se due variabili aleatorie sono statisticamente indipendenti non esiste alcuna relazione, né lineare né di altro tipo → la loro covarianza è nulla
  - Però se la covarianza è nulla non è detto che le variabili siano indipendenti

X e Y indipendenti $\;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\;$ Cov(X,Y) = 0

Correlazione

- Il **coefficiente di correlazione lineare** tra due v.a. X e Y è

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

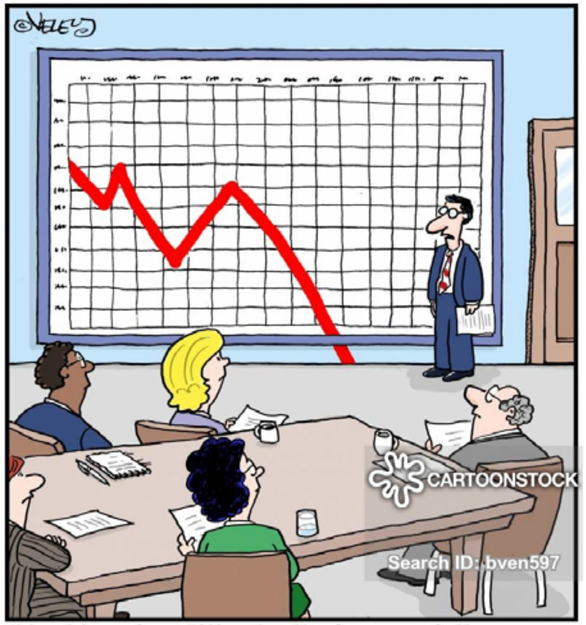
$\rho = 0 \Leftrightarrow$ non c'è relazione lineare tra X e Y

$\rho > 0 \Leftrightarrow$ relazione lineare positiva tra X e Y (quando X assume valori alti allora Y tende ad assumere valori alti)

$\rho = +1 \Leftrightarrow$ dipendenza lineare perfetta positiva

$\rho < 0 \Leftrightarrow$ relazione lineare negativa tra X e Y (quando X assume valori alti allora Y tende ad assumere valori bassi)

$\rho = -1 \Leftrightarrow$ dipendenza lineare perfetta negativa



"At this point, I'll ask all of you to follow me to the conference room directly below us!"

Combinazione lineare di k variabili aleatorie

Somma di due variabili aleatorie

Iniziamo con il caso più semplice: date k=2 variabili aleatorie (discrete o continue) con medie μ_X, μ_Y e varianze σ_X^2, σ_Y^2 consideriamo la v.a. somma W= X+Y

Es. un test è composto da due sezioni, indichiamo con X, Y i tempi per completare le due sezioni → il tempo per completare il test è W = X+Y

La v.a. somma W ha media $\boxed{\mu_W = \mu_X + \mu_Y}$

e varianza $\boxed{\sigma_W^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}}$

σ = 0 se X e Y sono indipendenti

Esercizio: lanciamo in modo indipendente due monete bilanciate e definiamo X come la v.a. che vale -1 se la esce croce e 1 se esce testa; definiamo in modo analogo Y con riferimento alla seconda moneta. Scrivere la distribuzione di probabilità di W = X + Y e verificare che la sua varianza è la somma delle varianze di X e Y.

Somma di variabili aleatorie: media

Siano date k variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots X_k$ (discrete o continue) con medie $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ e varianze $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$

Es. i tempi di 4 atleti della squadra di una corsa a staffetta sono X_1, X_2, X_3, X_4 → il tempo della squadra è $W = X_1+ X_2+ X_3+ X_4$

La media della loro somma è la somma delle loro medie

$$\boxed{E(X_1 + X_2 + \ldots + X_k) = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k}$$

Somma di variabili aleatorie: varianza

Siano date k variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots X_k$ (discrete o continue) con medie $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ e varianze $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$

- Se la covarianza fra ogni coppia di queste variabili aleatorie è 0, allora la varianza della loro somma è la somma delle loro varianze

$$\boxed{Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2}$$

- Se le covarianze fra le coppie di variabili non sono 0, la varianza della loro somma è

$$\boxed{Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2 + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} Cov(X_i, X_j)}$$

Combinazione lineare di due v.a.

- Una combinazione lineare di due variabili aleatorie X e Y (dove a e b sono constanti) è

$$W = aX + bY$$

- La media di W è

$$\mu_W = E[W] = E[aX + bY] = a\mu_X + b\mu_Y$$

- La varianza di W è

$$\sigma_W^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2abCov(X,Y)$$

Se entrambe X e Y hanno distribuzione Normale allora anche la combinazione lineare W ha distribuzione Normale

Differenza tra 2 variabili aleatorie

La differenza *X-Y* è un caso speciale di combinazione lineare con $a = 1$ e $b = -1$

- La media della differenza è la differenza delle medie:

$$E(X-Y) = \mu_X - \mu_Y$$

- Se la covarianza tra X e Y è 0, allora la varianza della differenza è la somma delle varianze:

$$Var(X-Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

- Se la covarianza tra X e Y non è 0, allora la varianza della differenza include anche la covarianza:

$$Var(X-Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2Cov(X,Y)$$

Ricapitoliamo: somma vs. differenza

- Date due v.a. X e Y (***dipendenti*** o ***indipendenti***)

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad (a = 1,\ b = 1)$$

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y) \qquad (a = 1,\ b = -1)$$

- Date due v.a. X e Y

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) \qquad (a = 1,\ b = 1)$$

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) \qquad (a = 1,\ b = -1)$$

Se X e Y sono indipendenti allora Cov(X,Y)=0 e si omette

Esempio

- Due mansioni devono essere eseguite dallo stesso lavoratore.
  - X = minuti per completare mansione 1; $\mu_X = 20$, $\sigma_X = 5$
  - Y = minuti per completare mansione 2; $\mu_Y = 30$, $\sigma_Y = 8$
  - X e Y sono distribuite normalmente e sono indipendenti

- Quali sono la media e la deviazione std del tempo necessario per completare entrambe le mansioni? Qual è la distribuzione?

Esempio /cont.

- X = minuti per completare mansione 1; $\mu_X = 20$, $\sigma_X = 5$
- Y = minuti per completare mansione 2; $\mu_Y = 30$, $\sigma_Y = 8$

- Calcolare media e deviazione std del tempo $W=X+Y$ necessario per completare entrambe le mansioni

$$\mu_W = \mu_X + \mu_Y = 20 + 30 = 50$$

- Siccome X e Y sono indipendenti, Cov(X,Y) = 0, perciò

$$\sigma_W^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = (5)^2 + (8)^2 = 89$$

- La deviazione std è $\sigma_W = \sqrt{89} = 9.434$

Attenzione, questo calcolo invece è errato:

$$\sigma_W = \sigma_X + \sigma_Y = 5 + 8 = 13$$

- La distribuzione di W è $W \sim N(50,89)$

Esempio: rendimento investimenti /1

Rendimento in migliaia di dollari per due investimenti

P(x,y)	Situazione economica	Rendimento titolo prudente X	Rendimento titolo aggressivo Y
0.2	Recessione	-25	-200
0.5	Stabile	+50	+60
0.3	Espansione	+100	+350

$$\mu_X = (-25)(0.2) + (50)(0.5) + (100)(0.3) = 50$$

$$\mu_Y = (-200)(0.2) + (60)(0.5) + (350)(0.3) = 95$$

$$\sigma_X = \sqrt{(-25-50)^2(0.2) + (50-50)^2(0.5) + (100-50)^2(0.3)} = 43.30$$

$$\sigma_Y = \sqrt{(-200-95)^2(0.2) + (60-95)^2(0.5) + (350-95)^2(0.3)} = 193.71$$

Esempio: rendimento investimenti /2

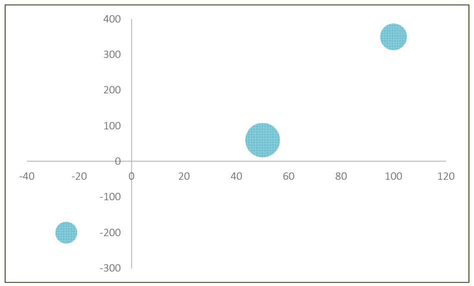
P(x,y)	Situazione economica	Rendimento titolo prudente X	Rendimento titolo aggressivo Y
0.2	Recessione	-25	-200
0.5	Stabile	+50	+60
0.3	Espansione	+100	+350

$$\mu_X = 50 \quad \mu_Y = 95$$

$$\sigma_X = 43.30 \quad \sigma_Y = 193.71$$

$$Cov(X,Y) = (-25-50)(-200-95)(0.2) + \\ + (50-50)(60-95)(0.5) + \\ + (100-50)(350-95)(0.3) = 8250$$

$$Corr(X,Y) = \frac{8250}{43.3 \times 193.71} = 0.984$$



Esempio: rendimento investimenti /3

- Il fondo aggressivo ha un rendimento atteso più alto, ma è molto più rischioso

$$\mu_Y = 95 \quad > \quad \mu_X = 50$$

$$\sigma_Y = 193.71 \quad > \quad \sigma_X = 43.30$$

- La correlazione 0.984 indica che tra i due investimenti c'è una forte relazione positiva e tendono a variare nella stessa direzione

Esempio: rendimento investimenti /4

- Immaginiamo un portafoglio *W* costituito per il 40% dal titolo *X* e per il 60% dal titolo *Y*: $\boxed{W = 0.4X + 0.6Y}$

$$\mu_X = 50 \quad \mu_Y = 95 \quad \sigma_X = 43.30 \quad \sigma_Y = 193.71 \quad \sigma_{XY} = 8250$$

$$\mu_W = (0.4)(50) + (0.6)(95) = 77$$

$$\sigma_W = \sqrt{(0.4)^2(43.30)^2 + (0.6)^2(193.21)^2 + 2(0.4)(0.6)(8250)}$$
$$= 133.04$$

- Il rendimento del portafoglio *W* ha media e varianza con valori intermedi rispetto a quelli dei titoli *X* e *Y* presi singolarmente
- In generale, si possono scegliere i pesi attribuiti a *X* e *Y* in modo da ottenere un portafoglio con certe caratteristiche

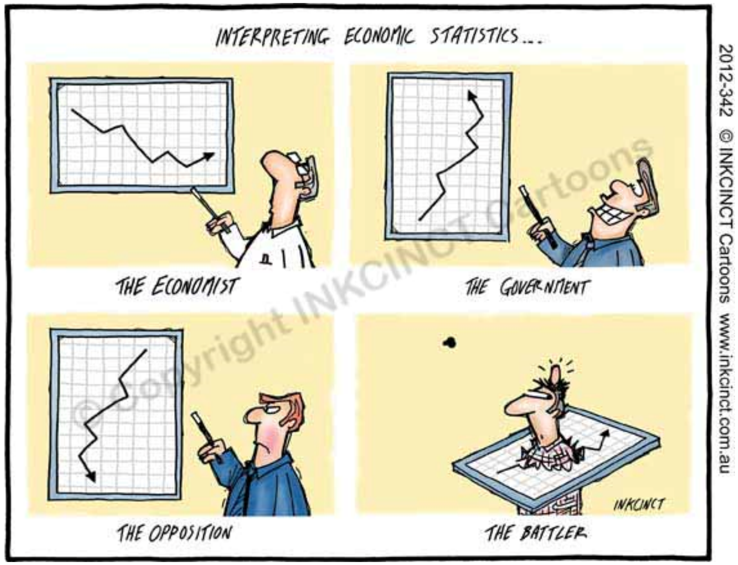
Esercizio

Si consideri la seguente distribuzione di probabilità congiunta:

X	Y = 0	Y = 1
-1	0.1	0.1
0	0.2	0.2
1	0.1	0.3

Determinare

1. i valori attesi e le varianze delle distribuzioni marginali di X e Y
2. la covarianza tra le v.a. X e Y; sulla base di tale risultato possiamo affermare che X e Y sono indipendenti?
3. il valore atteso e la varianza della v.a. Z = X+Y
4. il valore atteso e la varianza della v.a. T = 3X+2
5. la distribuzione condizionata di Y dato X=1



BATTLER: termine colloquiale australiano che si riferisce a individui "normali" o della classe operaia che perseverano nei loro impegni nonostante le avversità.