

6.1) Dite se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente/superiormente, limitati. In caso affermativo, determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore (motivando la risposta). Dite se sono massimo e/o minimo, rispettivamente.

- i) $A = \{x_n = \cos(\pi + \frac{1}{n}), n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$; ii) $B = \{x_n = \cos(\pi - \frac{1}{n}), n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$;
 iii) $C = \{x_n = \sin(\pi + \frac{1}{n}), n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$; iv) $D = \{x_n = \arccos(\frac{1-n}{2+n}), n \in \mathbf{N}, n \geq 0\}$.

Soluzione

6.2) Calcolate i seguenti limiti di funzioni razionali:

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - x - 3}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2 - 2}{\frac{1}{5x}}$; c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 5}{(x-2)^2}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 1}{x^2 - 1}$; f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - x - 2}$; g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + 2x^2}{x^7}$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - \frac{1}{2x^3}}{2x^4 + 5}$.

Soluzione

6.3) Calcolate i seguenti limiti di funzioni irrazionali:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x+2}} \sqrt{x^2 + x + 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{|x|}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1}}$; g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1}$.

Soluzione

6.4) Calcolate i seguenti limiti (infiniti, infinitesimi e funzioni trigonometriche):

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x^2 + \sin x \cos x}{e^{x^2-2x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^{2x}}{x^3 + \log x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{\log(x^2 - x) + 3^x - x^5}{2^{x-1} + 2}\right)$;
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 5x)^{\frac{1}{x}}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^5}{x+5}\right)^{x^3+x}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 3x + 3x}{\arctan 4x - e^{2x}}$.

Soluzione

6.5) Calcolate i seguenti limiti (usando i limiti notevoli...):

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log\left(\frac{1}{x}\right)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{\log\left(\frac{x}{x-1}\right)}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x) + \log(1+x)}{x}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^4}{\sin x^2}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{3x+4}$; g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^3}$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^{x^2} - 5^{2x})$;
 i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+3x))}{x \sin^2 4x}$; j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x-5}{25-x^2}\right)^x$; k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\tan x}$.

Soluzione

6.6) Studiate, al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ i seguenti limiti:

- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - \alpha}{x - 1} - \alpha(x - 1)\right]$; ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha)}{3x^5}$;
 iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \sin \frac{1}{2^n}$; iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\log n}$; v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(2^n + 1)}{n^\alpha}$.

Soluzione Soluzione

6.7) Determinate per quali valori dei parametri α e $\beta \in \mathbf{R}$ le seguenti funzioni sono continue su \mathbf{R} :

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + \alpha & \text{se } x < -1 \\ -x2^{-x} & \text{se } x \geq -1; \end{cases}$$

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} \alpha(x+1) & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{e^{2x}-1}{\sin 4x \cos x} & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

$$\text{iii) } f(x) = \begin{cases} \cos x - 2\beta & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ \alpha \sin x + \beta & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{1}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Soluzione