

# Работа 4.3.4. Метод преобразования Фурье в оптике

**Цель работы:** исследование особенностей применения пространственного преобразования Фурье для анализа дифракционных явлений.

**В работе используются:** гелий-неоновый лазер, кассета с набором сеток разного периода, щель с микрометрическим винтом, линзы, экран, линейка.

## Теоретическая часть

1. Принцип Гюйгенса-Френеля:

$$g(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \iint_S f_0(\xi, \eta) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \alpha d\xi d\eta$$

2. Дифракция Фраунгофера и преобразование Фурье. Двумерное преобразование Фурье:

$$g(x, y) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint_S f_0(\xi, \eta) e^{-i(u\xi + v\eta)} \cos \alpha d\xi d\eta, \text{ где: } u = \frac{kx}{R_0}, v = \frac{ky}{R_0}$$

3. Принципы Фурье-оптики:

$$f(x, z) = ae^{i(k_x x + k_z z + \varphi)} = ce^{i(ux + \sqrt{k^2 - u^2}z)}, \text{ где: } k_x = u, c = ae^{i\varphi}$$

$$f(x, 0) = ce^{iux}, f(x, z) = f(x, 0)e^{i\sqrt{k^2 - u^2}z}$$

4. Распространение волн:

$$f(x, z) = \int C_0(u) e^{i(ux + \sqrt{k^2 - u^2}z)} du \text{ где: } C_0(u) \text{ — преобразование Фурье граничного поля}$$

5. Передаточная функция:

$$H(u) = e^{i\sqrt{k^2 - u^2}z}$$

## Экспериментальная установка:

1. Ширину щели будем определять, используя формулу для увеличения изображения:

$$\Gamma = \frac{D_1}{D} = \frac{b_1}{a_1} \quad (1)$$

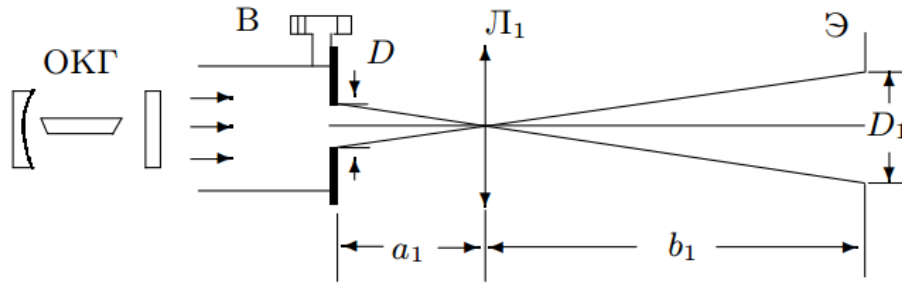


Рис. 1: Схема для определения ширины щели с помощью линзы

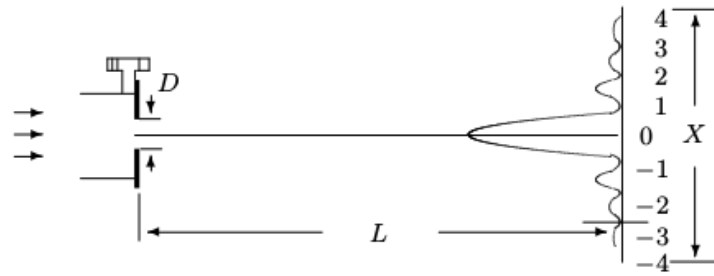


Рис. 2: Схема для определения ширины щели по спектру

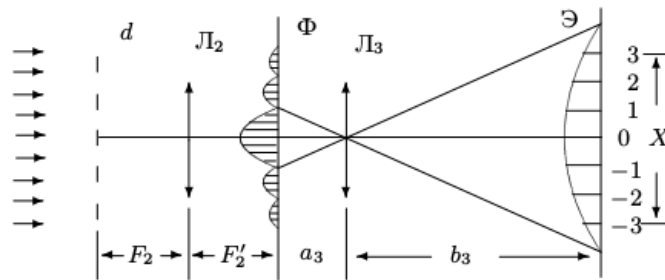


Рис. 3: Схема определения периода решётки по увеличенному изображению спектра

2. Для определения ширины щели по спекту  $b_c$  будем использовать соотношение:

$$\Delta X = \frac{X}{2m} = \frac{\lambda}{b_c} L \quad (2)$$

3. Для определния периода решеток нам понадобится расстояние  $X$  между  $m$ -ми максимумами. Тогда:

$$\Delta X = \frac{X}{2m} = \frac{\lambda}{d_c} L \quad (3)$$

4. В этом эксперименте можно рассчитать расстояние между соседними максимумами  $\Delta x$  в плоскости  $\Phi$  и период сетки  $d$  используя формулу:

$$\Delta x = \frac{\Delta X}{\Gamma_3} = \frac{\lambda}{d_l} F_2 \quad (4)$$

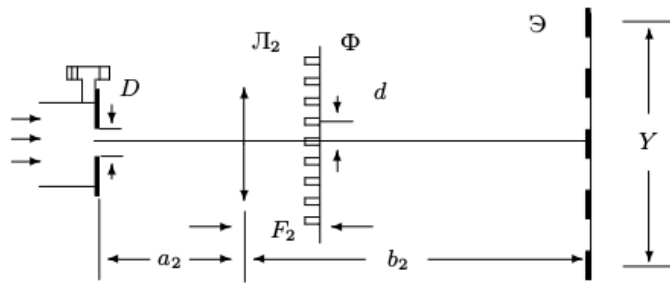


Рис. 4: Схема для наблюдения мультиплицирования

5. Периоды "фиктивных" решеток связаны с периодом решеток, определенных по спектру, связаны следующей формулой:

$$\frac{\lambda}{\Delta y} F_2 = d_c \quad (5)$$

## Ход работы

### А. Определение ширины щели

#### І. Определение ширины щели по увеличенному изображению

1. С помощью короткофокусной линзы  $L_1$  ( $F_1 = 38\text{mm}$ ) получаем на экране изображение щели
2. Определим начало отсчета ширины щели по ее открытию —  $D_0 = -30\mu\text{m}$
3. Меняя ширину щели будем снимать зависимость размеров изображения  $D_1$  от ширины щели  $b$ . Сведем измерения в таблицу:

Ширина щели $\tilde{D}, \mu\text{m}$	20	70	120	170	220	270	320	370	420
$\tilde{D} + D_0, \mu\text{m}$	50	100	150	200	250	300	350	400	450
Размер изображения $D_1, \text{mm}$	1.5	3	4	5	7	8	9	11	12

4. Измерим расстояния  $a_1$ ,  $b_1$  и  $L$  для расчета увеличения системы  $\Gamma$  по формуле 1:  
 $a_1 = 4 \pm 0.1\text{cm}$ ,  
 $b_1 = 134 \pm 0.5\text{cm}$ ,  
 $L = 139 \pm 0.5\text{cm}$

$$\Gamma = \frac{b_1}{a_1} = \frac{134\text{cm}}{4\text{cm}} = 33.5 \pm 0.9 \quad (6)$$

5. Зная увеличение линзы и размер изображения, рассчитаем по формуле 1 ширину щели  $D'$ . Результаты сведем в таблицу:

Размер изображения $D_1, \text{mm}$	1.5	3	4	5	7	8	9	11	12
Рассчитанная ширина $D', \mu\text{m}$	45	89	149	208	238	268	327	387	446
Погрешность	1.7	3.8	4.7	5.3	7.8	8.3	9.5	11.6	12.7
Ширина щели $D, \mu\text{m}$	50	100	150	200	250	300	350	400	450
Относительная погрешность, %	10.8	10.6	0.9	4.1	4.8	10.3	6.5	3.4	0.9

#### ІІ. Определение ширины щели по её спектру

1. На удаленном экране получим спектр щели. Оценим отнервал, в котором можно наблюдать и измерять спектр:

$$D \in [0\mu\text{m} - 45\mu\text{m}]$$

2. Измерим ширину спектра для щелей разной ширины. Рассчитаем ширину щели, используя формулу 2, используя значение длинны волны He-Ne-лазера  $\lambda = 6328\text{\AA}$ . Результаты сведем в таблицу:

Ширина щели $D, \mu\text{m}$	50	100	150	200	250	300	350	400
Расстояние $\Delta X$	35	20	13	8	6	5	4	3
Ширина щели $b_s, \mu\text{m}$	42	74	113	184	246	294	368	431
Погрешность	15.7	26.3	24.4	7.8	1.7	1.8	5.3	22

3. На одном графике построим зависимости  $b_l = f(b)$  и  $b_s = f(b)$ :

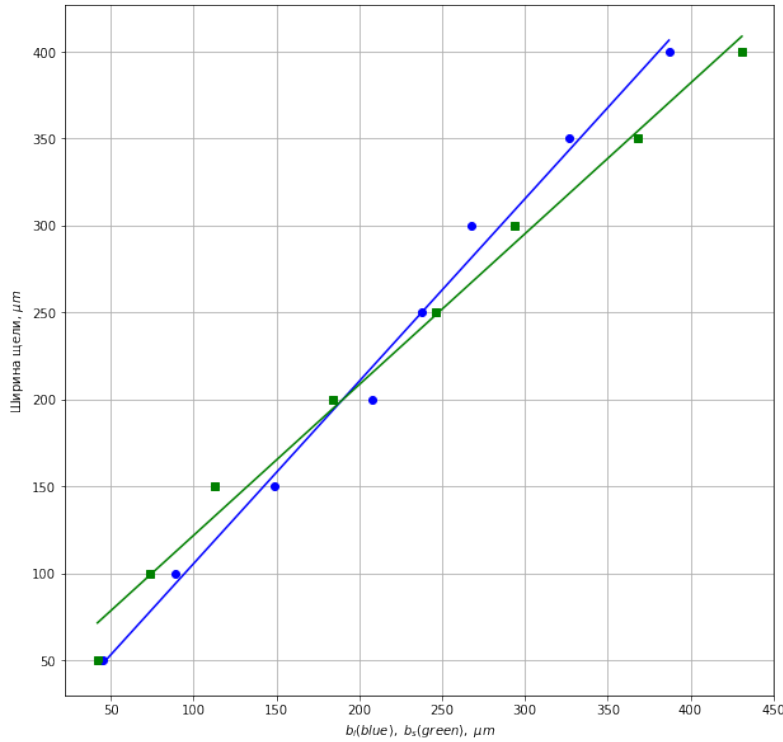


Рис. 5: Сравнение результатов первого и второго экспериментов

## Б. Определение периода решёток

### III. Определение периода по спектру на удалённом экране

1. Вычислим расстояние  $L$ . К выходу лазера поставим кассету с двумерными решетками. Для каждой сетки измерим расстояние  $X$  между  $m$ -ми максимумами и рассчитаем  $\Delta X$  и период каждой решетки  $d_c$  по формуле 3. Результаты сведем в таблицу:

$$L = 138.5 \text{ cm}$$

Решетка	1	2	3	4	6
Расстояние $X, \text{ mm}$	44	37	92	73	80
Порядок минимума $m$	10	1	5	5	10
$\Delta X, \text{ mm}$	4.4	37	18.4	14.6	8
$d_c, \mu\text{m}$	334	39	80	101	184

### IV. Определение периода решёток по увеличенному изображению спектра

1. Установим линзу с максимальным фокусным расстоянием ( $F_2 = 110 \text{ mm}$ ) на расстоянии примерно равном фокусному от кассеты. В плоскости  $\Phi$  мы получили фурье-образ сетки, а короткофокусная линза ( $F_3 = 23 \text{ mm}$ ) создает на экране увеличенное изображение этого спектра.
2. Рассчитаем увеличение короткофокусной линзы:  
 $a_3 = 2.8 \pm 0.1 \text{ cm}$   
 $b_3 = 110.5 \pm 0.5 \text{ cm}$

$$\Gamma = \frac{b_3}{a_3} = \frac{110.5 \text{ cm}}{2.8 \text{ cm}} = 39.5 \pm 1.1$$

3. Измерим  $X$  и  $m$  для всех сеток, где это возможно. Теперь по формуле 4 рассчитаем расстояние между максимумами  $\Delta x$  и период сетки  $d_l$ . Результаты сведем в таблицу:

Решетка	1	2	3	4	5	6
Расстояние $X, mm$	65	103	105	125	126	102
Порядок минимума $m$	5	1	2	3	3	5
$\Delta X, mm$	13	103	52.5	41.7	42	20.4
$d_l, \mu m$	355	45	88	110	111	226

## В. Пространственное преобразование спектров

### V. Мультиплицирование

1. С помощью линзы с максимальным фокусом получим в резкое изображение щели. В фокальной плоскости линзы установим кассету с сетками, которые будут осуществлять пространственную фильтрацию.

2. Подберем такую ширину входной щели  $D$ , чтобы на экране можно было наблюдать мультиплицированное изображение для любой сетки. Рассчитаем увеличение линзы.

$$D = 140 \mu m$$

$$F_2 = 110 mm$$

$$a_2 = 10.5 \pm 0.1 cm$$

$$b_2 = 127 \pm 0.5 cm$$

$$\Gamma_2 = \frac{b_2}{a_2} = \frac{127 cm}{10.5 cm} = 12.1 \pm 0.2$$

3. Снимем зависимость  $Y$  (расстояния между удаленными изображениями щели) и  $K$  (число промежутков между изображениями) для каждой из сеток. По полученным данным рассчитаем периоды  $\Delta y$ :  $\Delta y = \Delta Y / \Gamma_2$ , где:  $\Delta Y = Y / K$ . Запишем результаты:

Решетка	1	2	3	4	5	6
Расстояние $Y, mm$	18	90	75	60	72	30
$K$	5	3	5	5	6	5
$\Delta Y, mm$	3.6	30	15	12	12	6
$\Delta y, mm$	2.9	24.8	12.4	9.9	9.9	5.0

4. Построим график  $\Delta y = f(1/d_c)$ :

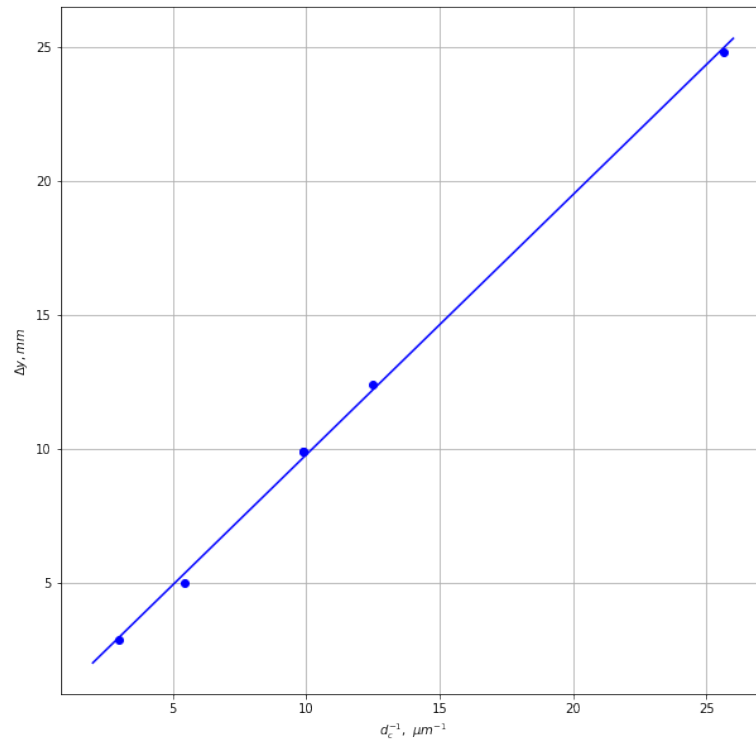


Рис. 6: Зависимость  $\Delta y(1/d_c)$

**Вывод:** исследовали особенности применения пространственного преобразования Фурье для анализа дифракционных явлений.