
Toric Code

Kaluoen

2025 年 7 月 21 日

Toric code 是一个自提出就被量子信息和拓扑物理领域青睐的模型，因为这是一个严格可解模型，同时不复杂的哈密顿量能演化出具有编织统计性质的激发态，又具有良好的纠错性能。尽管由于温度敏感性，这个模型一直无法实现，但 toric code 以及其拓展模型 Quantum Double Model，都表现出了拓扑序，因此一直被人们关注研究。本文将介绍 toric code 的基本概念，进而研究其基态、激发态和激发态的统计性质、纠错能力。

1 Toric Code 基本概念

Toric code 中的 toric 来源于 torus，即圆环，对应于我们研究问题的周期性边界条件；而 code 是因为这个模型可以作为一种纠错码使用，在热力学极限下这种纠错码性质相当良好。

该模型是定义在二维曲面上的，在二维曲面上放置着一些自旋，即图1中画圆圈的地方，其中部分边界的圆圈涂灰是用来代表周期性边界条件，即左边界与右边界粘在一起，上边界与下边界粘在一起。

该模型引入哈密顿量

$$H = -\sum_v A_v - \sum_p B_p \quad (1)$$

其中

$$A_v = \prod_{i \in n(v)} \sigma_i^z = \prod_{i \in n(v)} Z_i \quad (2)$$

$$B_p = \prod_{i \in n(p)} \sigma_i^x = \prod_{i \in n(p)} X_i \quad (3)$$

v 即 *vertex* 缩写，即 A_v 这个算符是定义在顶点处的； p 即 *plaquette* 缩写，即 B_p 这个算符是定义在一个最小面积的面上的； n 即 *neighborhood* 缩写，求积是指对哪个顶点或哪个面附近的自旋位置的算符求张量积。

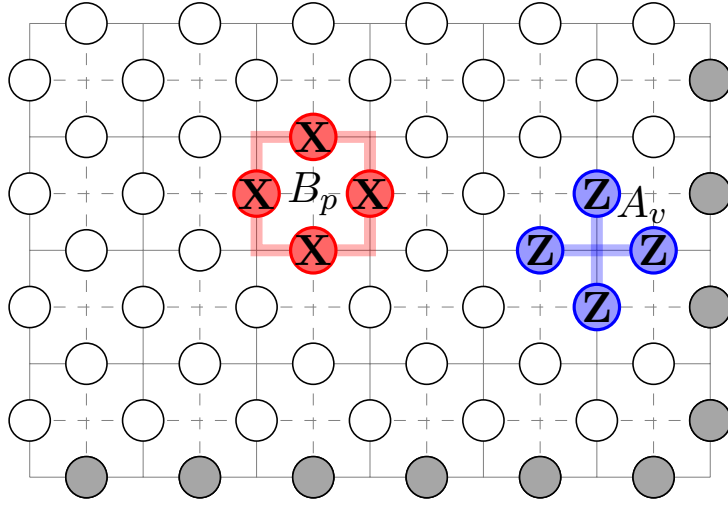


图 1: toric code 示意图

2 基态

2.1 对易关系

我们希望探索 toric code 的基态，先探讨一些对易关系：

1. 先考虑 $[A_{v1}, A_{v2}]$ ，所有 A_v 都由 Z 算符张量积得到，而 Z 算符彼此之间相互对易，故 $[A_{v1}, A_{v2}] = 0$ 。
2. 同理可以知道 $[B_{p1}, B_{p2}] = 0$ 。
3. 考虑 $[A_v, B_p]$ ，分两种情况讨论：
 - (a) A_v, B_p 没有在同一个自旋上的算符，如图1，不作用到同一个自旋，显然对易。
 - (b) 若 A_v, B_p 有在同一个自旋上的算符，那么其一定有且只有两个自旋有重合，如图23，可以知道两个自旋上分别是 XZ, ZX ，有 $XZ = ZX$ ，两个 -1 相乘给出 1 的结果，即 A_v, B_p 对易

综上， $[A_v, B_p] = 0$

4. 由式1易知 $[H, A_v] = 0, [H, B_p] = 0$

因此我们可以利用 A_v, B_p 的本征值来标记哈密顿量的本征态，考虑基态，由式1，即当所有 A_v, B_p 给出本征值 1 时代表此时系统状态为基态。

一个自然而然的问题是所有的 A_v, B_p 是否构成完全集的可观测量 (Complete Set of Commuting Observables, CSCO) 呢？这个问题在2.3中会讨论。

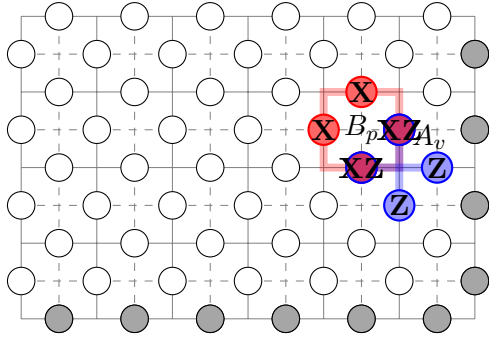


图 2: AB 算符操作

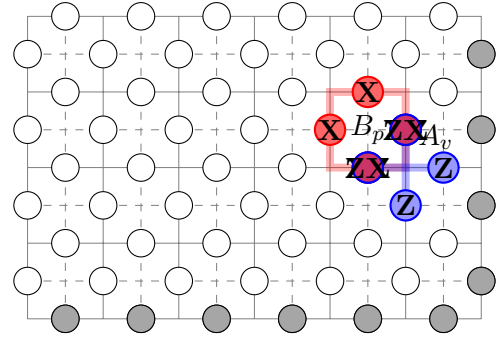


图 3: BA 算符操作

2.2 基态形式

我们可以从 $A_v = 1$ 的共同直积态出发，不妨将这个态定义为 $|\psi_0\rangle$ ，即：

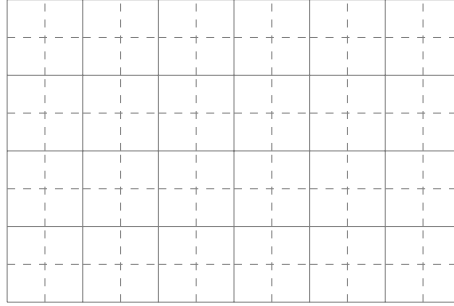


图 4: $A_v = 1$ 共同直积态¹

考虑某一个 B_p 作用到 $|\psi_0\rangle$ ，

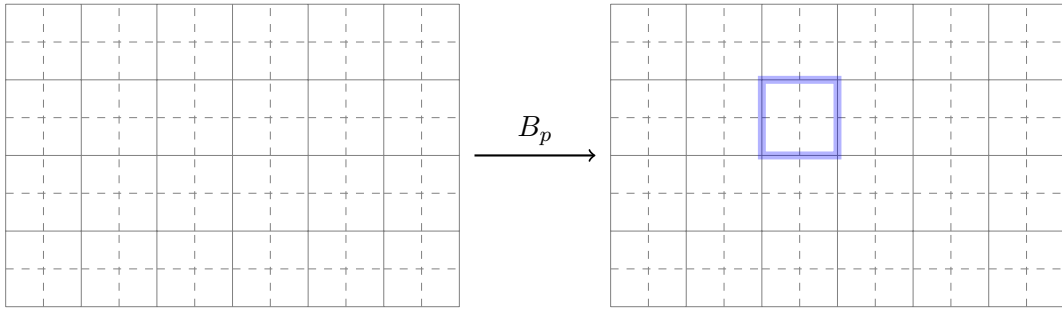


图 5: B_p 作用到 A_v 共同本征态一次²

这个 B_p 再作用一次，

¹在不引起混淆的情况下，我们用这种情况代表 $A_v = 1$ 共同直积态，即每个自旋都使得 $Z = 1$ ，后面的论述中，也有其它的简化意义。

²在不引起混淆的情况下，我们将蓝线经过代表其经过的自旋全部都做了 X 操作。其中蓝线为从顶点出发，在顶点结束

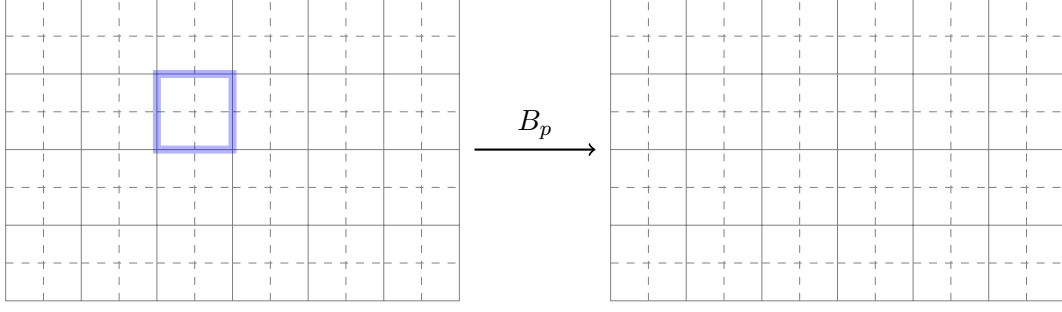


图 6: B_p 作用到 A_v 共同本征态第二次

如果考虑一个如下的态，即 $(1 + B_p)|\psi_0\rangle$ ，显然使得这个 $B_p = 1$ ，而 $[A_v, B_p] = 0$ ，故所有 $A_v = 1$ ，因此这是一个所有 A_v 和一个 B_p 的共同本征态。

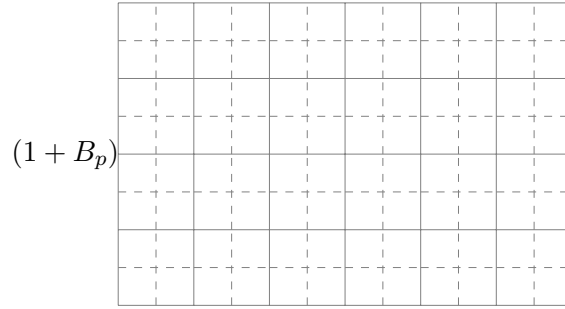


图 7: 所有 A_v 与一个 B_p 的共同本征态

以此类推，我们可以得到所有 A_v, B_p 的共同本征态 $\prod_p (1 + B_p)|\psi_0\rangle$ 。

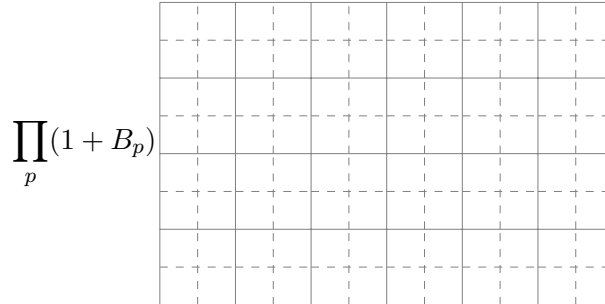


图 8: 所有 A_v 与一个 B_p 的共同本征态

于是，我们成功推导出了 toric code 模型的一个基态，一个自然而然的问题是是否只有一个基态呢？

2.3 基态数目与拓扑结构

一种观点是可以将 $A_v = 1, B_p = 1$ 看成约束条件，不妨假设有 n 个 A_v, B_p ，则自旋的数目是 $2n$ ，这是因为一个顶点有 4 个自旋，而 1 个自旋被两个顶点共有，因此系统的总自由度就是 2^{2n} 。

由于 A_v 的本征值只能是 $1, -1$ ，而且这两种出现的概率一样，所以一个 $A_v = 1$ 导致系统的总自由度变为 $\frac{2^{2n}}{2}$ ， $B_p = 1$ 同理有这样的约束效果。

而由于系统简单的周期性边界条件，我们发现所有 A_v 不是独立的，因为 $\prod_v A_v = I$ ，而且只有这样一种简单的不独立关系，也就是所有独立 A_v 的数量应该为 $n-1$ ，同理 B_p 独立的数量也为 $n-1$ 。

因此系统的总自由度为 $\frac{2^{2n}}{2^{2(n-1)}} = 4$ ，从这个角度看，基态的简并度应该为 4，也就是说我们理应能找到四个独立的基态。

这种代数的方法在推广到具有更复杂的边界条件的系统时是相对困难的，譬如系统的边界条件为具有更多亏格 (genus, g) 的拓扑结构。我们考虑另一个更具启发性的观点来看基态简并度。

考虑从基态 $\prod_p (1 + B_p)|\psi_0\rangle$ ，考虑做任意的 X 门操作，考察每个 A_v 的变化情况：

1. 若这样的 X 门操作恰好形成了闭合曲线，那么对于每个顶点，蓝线不会停在这个顶点处，也就是在这个顶点附近的自旋发生 X 操作的自旋数量为偶数，因此这个操作和 A_v 对易，因此，闭合曲线保持所有 $A_v = 1$ 。
2. 考虑这样的 X 门操作形成了一条开曲线，那么不在曲线端点处的 A_v 与上述论证一样，与这个操作对易，保持 $A_v = 1$ ，而对于在端点处的 A_v ，附近的自旋发生 X 操作的自旋数量为奇数，这会导致这两个端点处 $A_v = -1$ 。那么此时系统属于能量最低的激发态。
3. 如果这样的 X 门操作形成了更多条开曲线（不同曲线的端点不重合），那么此时形成更复杂的激发态。

若系统具有更多的基态，也就是我们用 A_v, B_p 标记还无法构成 $CSCO$ ，是否存在更多与哈密顿量对易的算符呢？

从上述论证可以看出只有闭合的 X 操作才保持所有 $A_v = 1$ ， B_p 本身构成了闭合曲线， B_p 也可以张量积构成更复杂的闭合曲线，那是否所有的闭合 X 操作都能由 B_p 构成呢？

观察拓扑结构，发现由 B_p 构成的环都是可收缩的环，即可连续收缩到一点，而 torus 上是有一些不可连续收缩到一点的环的，如图910，分别对应着两种操作 $L_{x\parallel}, L_{x\perp}$ 。

显然， $[L_{x\parallel}, A_v] = 0$ ， $[L_{x\parallel}, B_p] = 0$ ，因此 $[L_{x\parallel}, H] = 0$ ，同理 $[L_{x\perp}, H] = 0$ 。

因此所有 A_v, B_p 和 $L_{x\parallel}, L_{x\perp}$ 共同构成了这个系统的 $CSCO$ ，而 $L_{x\parallel}, L_{x\perp}$ 的本征值也只能为 $1, -1$ ，因此这两个算符带来的简并度为 $2^2 = 4$ 。

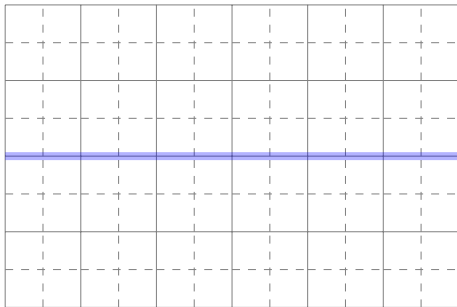


图 9: $L_{x\parallel}$ 算符操作

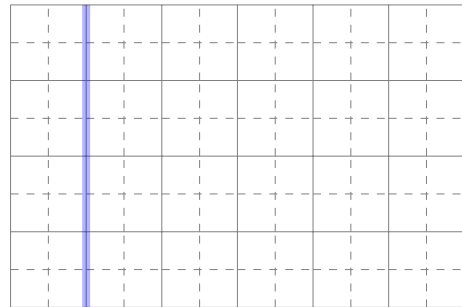


图 10: $L_{x\perp}$ 算符操作

因此所有的基态为

$$|\psi_1\rangle = \prod_p (1 + B_p) |\psi_0\rangle \quad (4)$$

$$|\psi_2\rangle = L_{x\parallel} |\psi_1\rangle = \prod_p (1 + B_p) L_{x\parallel} |\psi_0\rangle \quad (5)$$

$$|\psi_3\rangle = L_{x\perp} |\psi_1\rangle = \prod_p (1 + B_p) L_{x\perp} |\psi_0\rangle \quad (6)$$

$$|\psi_4\rangle = L_{x\parallel} |\psi_3\rangle = \prod_p (1 + B_p) L_{x\parallel} L_{x\perp} |\psi_0\rangle \quad (7)$$

对于具有不同拓扑结构，即有不同 g 的系统来说，每一个洞可以定义两个拓扑非平庸的环， g 个洞可以定义 $2g$ 个拓扑非平庸的环，基态简并度为 2^{2g} 。

我们可以利用基态的简并度来看成一个两比特的系统，譬如令 $|\psi_1\rangle = |00\rangle, |\psi_1\rangle = |01\rangle, |\psi_1\rangle = |10\rangle, |\psi_1\rangle = |11\rangle$

在4部分我们可以看到这样的两比特系统具有强大的抗干扰能力。

2.4 补充说明

那么相应地是否也可以定义 $L_{z\parallel}, L_{z\perp}$ 1112呢？这能不能说明基态具有更多简并度呢？

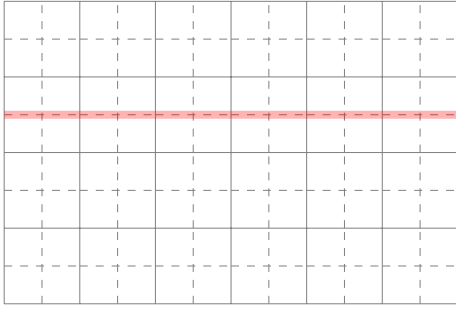


图 11: $L_{z\parallel}$ 算符操作³

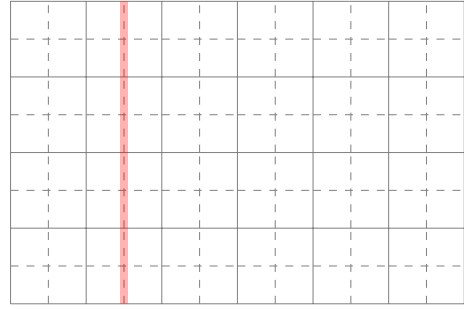


图 12: $L_{z\perp}$ 算符操作

将这两个算符作用到基态上，由于 $L_{z\parallel}, L_{z\perp}$ 与 B_p 对易

$$L_{z\parallel} |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \quad (8)$$

$$L_{z\parallel} |\psi_1\rangle = \prod_p (1 + B_p) L_{z\parallel} |\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle \quad (9)$$

$$L_{z\parallel} |\psi_2\rangle = L_{z\parallel} L_{x\parallel} |\psi_1\rangle = L_{x\parallel} L_{z\parallel} |\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle \quad (10)$$

$$L_{z\parallel} |\psi_3\rangle = L_{z\parallel} L_{x\perp} |\psi_1\rangle = -L_{x\perp} L_{z\parallel} |\psi_1\rangle = -|\psi_3\rangle \quad (11)$$

$$L_{z\parallel} |\psi_4\rangle = L_{z\parallel} L_{x\parallel} |\psi_3\rangle = L_{x\parallel} L_{z\parallel} |\psi_3\rangle = -|\psi_4\rangle \quad (12)$$

同理，

$$L_{z\perp} |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \quad (13)$$

³在不引起混淆的情况下，我们将红线经过代表其经过的自旋全部都做 Z 操作，其中红线沿着虚线走，红线从虚线的顶点出发，到虚线的顶点结束。

$$L_{z\perp}|\psi_1\rangle=|\psi_1\rangle \quad (14)$$

$$L_{z\perp}|\psi_2\rangle=-|\psi_2\rangle \quad (15)$$

$$L_{z\perp}|\psi_3\rangle=|\psi_3\rangle \quad (16)$$

$$L_{z\perp}|\psi_4\rangle=-|\psi_4\rangle \quad (17)$$

因此，我们找这组基态是算符 $L_{z\parallel}, L_{z\perp}$ 的共同本征态，也就是说，算符 $L_{z\parallel}, L_{z\perp}$ 不代表新的对称性，否则作用上去会得到更多不一样的基态。

实际上，我们也可以从 $B_p = 1$ 的共同直积态出发构造，如果是这样构造的话我们在论证时自然而然用的就是算符 $L_{z\parallel}, L_{z\perp}$ ，在这种情况下我们可以考虑观察虚线，对虚线来说，所谓 B_p 应该是 B_v ， A_v 应该是 A_p ，从而进行论证，思路完全一致，只是两种完全等价的做法。

3 激发态的统计性质

研究完基态，一个自然而然的问题是最低激发态的性质，我们从引入准粒子的概念开始。

3.1 准粒子

以下我们默认在基态的状态下进行操作，以下不妨用 $|\psi\rangle$ 代表基态，最低激发态是作用一条开曲线 X 或 Z 算符，都只在端点处给出-1。当然，对于给定位置的激发态，也是有简并度的，其简并度与基态简并度保持一致。

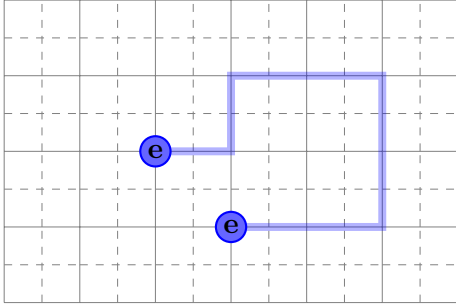


图 13: 准粒子 e

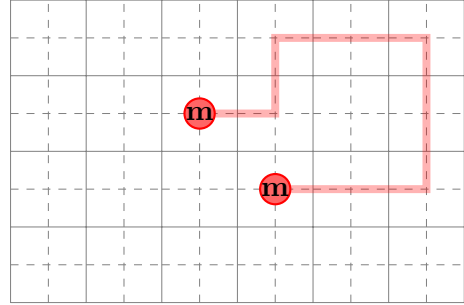


图 14: 准粒子 m

如图1314，我们将开曲线的首尾当作两端分别命名为 e,m 准粒子，将蓝线、红线的延伸当作准粒子的运动，不妨将蓝线、红线对应的算符分别命名为 l_e, l_m 。

3.2 e,m 粒子作为玻色子

对准粒子，考察其统计性质是自然而然的。

对一对 e 粒子，考虑其交换，

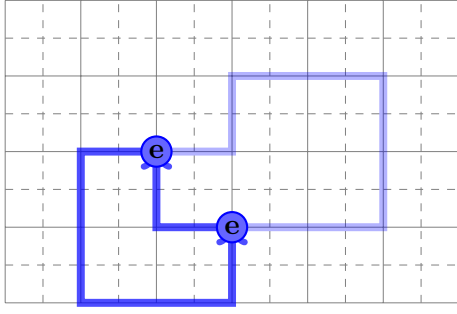


图 15: 一对 e 粒子交换⁴

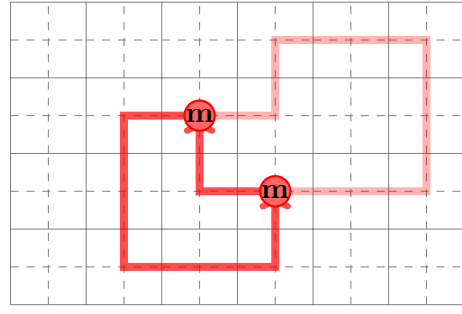


图 16: 一对 m 粒子交换

像图15这样的交换是刚好形成可收缩环的，操作与操作之间都是 X 算符，总是对易的，因此这样的交换等价于作用了若干个 B_p ，不影响激发态，作用前后没有任何区别，因此，在这个意义下，e 粒子是玻色子。在热力学极限下，我们可以不考虑形成了不可收缩的环，这样的交换直接影响了状态，与我们希望的保持状态不变相悖。同理，我们可以知道 m 粒子也是玻色子。

3.3 e,m 粒子的编织统计性质

接下来考虑两种粒子之间的统计性质，考虑一个 e 粒子绕 m 粒子一周，

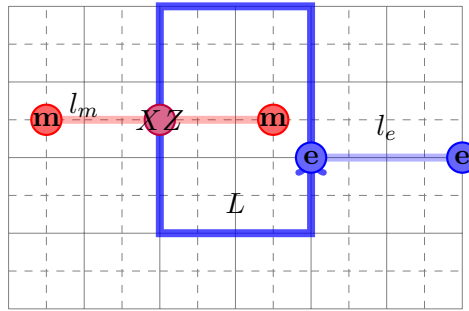


图 17: e 粒子绕 m 粒子一周 (其中 L_e)

从图17可以看出，编织性质的核心在于 L_e, l_m 算符的交点，作用后的状态为

$$Ll_m l_e |\psi\rangle = \dots \otimes XZ \otimes \dots l_e |\psi\rangle = -\dots \otimes ZX \otimes \dots l_e |\psi\rangle = -l_m Ll_e |\psi\rangle = -l_m l_e L |\psi\rangle = -l_m l_e |\psi\rangle \quad (18)$$

因此作用 L 前后得到的状态为同一个状态，但是差了一个 -1 ，这是独特的统计性质，也就是所谓的编织统计 (braiding statistics)。

这里的状况与 Aharonov-Bohm 效应类似，因此，我们分别给这两个粒子命名为 e, m ， e 即电荷， m 即磁通。

⁴这里的浅蓝色代表生成的路径，深蓝色代表交换的路径

⁴我们用大写字母代表闭合曲线，小写字母代表开曲线

3.4 准粒子 f

我们也可以将 e, m 粒子同时激发起来并打包当成一种准粒子 f ，可以进一步研究 f 的统计性质，

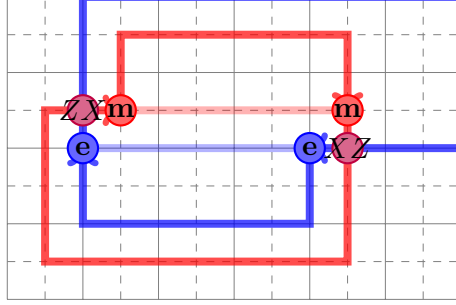


图 18: 一对 f 粒子交换

如图18，有两个位置有交点，导致没有完整的 L_e, L_m 算符，

$$L_f|\psi\rangle = \dots \otimes XZ \otimes \dots \otimes ZX \otimes \dots |\psi\rangle = -\dots \otimes ZX \otimes \dots \otimes ZX \otimes \dots |\psi\rangle = -L_m L_e |\psi\rangle = -|\psi\rangle \quad (19)$$

因此 f 粒子是费米子，类似地讨论可以得到 e, f 和 m, f 间也会出现绕行得到 -1 相位的编织统计性质。

4 纠错性质

Toric code 的纠错性质是强大的，为了简单地说明这点，我们可以考虑误差类型是 X ，假设我们可以实时监控所有 A_v 的取值，若两个点变成了 -1 ，我们可以在这两点中选取一条短路径做 X 操作来实现纠错，若实际的误差路径和我们的纠错路径形成了一条可连续收缩到一点的闭合曲线，那么就相当于对系统做了若干个 B_p 操作，系统仍然保持在基态；但是也有可能我们补充的路径和实际的误差路径形成了一条不可连续收缩到一点的闭合曲线，此时该系统储存的量子信息发生变化，考虑热力学极限情形，这样的概率小到可以忽略，此时可以认为我们的纠错总能不发生错误。

5 总结

由于 toric code 模型的边界的拓扑性质，其基态表现出了四重简并，在具有更复杂的边界条件的模型上，同样可以利用拓扑性质计算其基态简并度。

研究 toric code 的最低激发态发现其具有编织统计性质，与基态简并共同表现出这个模型拓扑序性质，因此，一直有学者在研究这个模型。

Toric code 作为纠错码在热力学极限下具有强大的纠错性能，若能物理地实现这个模型，其具有较高的实用价值。

对 toric code 的研究还在延续，譬如拓展模型 Quantum Double Model, 3D toric code 的拓展，将其作为规范场耦合到某些模型中。

补充: 这只是笔者在此前学习留下的笔记, 笔者知道了更多与这个模型相关有趣的东西, 会在之后补充, 譬如拓扑纠缠熵, 譬如考虑开放边界条件, 可以在边界实现 1-d ising model, 以及得到所谓 e-condensed phase, m-condensed phase, 从而得到对 bulk-edge correspondence 最简单的例子, 然后引入对 bulk-edge 之间的确定关系这样的讨论, 相当有趣。