# Cours MP2I

Alexandre

*Démonstration.* testd □

## Table des matières

# I. Notes

Nullstellensatz : (démo ?)
— Idéaux
— Algébriquement clos
— Bézout ?

Topologie de Zariski : ? ? ? ?
— Lemme de Zorn (AC)

Dimension : ?
Projectif/Affine : ?

# II. Rappels : relations d'équivalence

Soit E un ensemble et $\sim$ une relation sur E.

**Définition 1 (relation d'équivalence)**
Une relation d'équivalence $\sim$ vérifie les propriétés suivantes sur E :
— $\sim$ réfléxive : $\forall x \in E, x \sim x$
— $\sim$ symétrique
— $\sim$ transitive

**Définition 2 (classe d'équivalence)**
Soit $x \in E$. L'ensemble $\tilde{x} = \{y \in E, x \sim y\}$ est la classe d'équivalence de $x$.

**Définition 3 (partition)**
Une partition d'un ensemble E est définie par :
— $\biguplus_{i \in I} X_i = X$
— $\forall i \in I, X_i \neq \emptyset$
— $\forall i,j \in I, i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j \neq \emptyset$

**Lemme 4**
Soient $x,y \in E$. On a :

$$x \sim y \iff x = y$$

*Démonstration.* tkt □

**Théorème 5 (parition formée par les classes d'équivalence)**
L'ensemble des classes d'équivalences sous $\sim$ forme une parition de $E$.

*Démonstration.* □

**Définition 6 (ensemble quotient)**
TODOf

<application canonique>

# III. Anneaux

## 1. Remarques

**Définition 7 (anneau quotient)**
Soient $A$ un anneau et $I$ un idéal bilatère (idéal à gauche et à droite) de $A$. On définit la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ suivante :

$$\forall x, y \in A, x\mathscr{R}y \iff x - y \in I$$

On dit aussi alors que $x$ et $y$ sont congrus modulo $I$ : $x \equiv y \mod I$

On peut munir l'ensemble quotient $A/I$ (càd l'ensemble des classes d'équivalence sur A) des lois induites par I :

$$+ : \begin{array}{ccc} t & \longrightarrow & a \\ e & \longmapsto & f \end{array} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{array}{ccc} t & \longrightarrow & a \\ e & \longmapsto & f \end{array}$$

$A/I$ est muni d'une structure d'anneau.

## 2. Idéaux

**Définition 8 (idéal d'un anneau)**
Soit $A$ un anneau. Un sous-ensemble $I \subseteq A$ est un idéal de A si :
- $(I, +)$ est un sous groupe de $(A, +)$
- $\forall a \in A, \forall b \in I, ab = ba \in I$

<lien avec les noyeaux de morphismes etc>

**Définition 9 (idéal premier)**
Soit $A$ un anneau, $I$ un idéal de $A$, $I$ est premier si et seulement si l'anneau $A/I$ est intègre. Cela revient au même d'imposer :
- $A \neq I$
- $\forall a, b \in A, ab \in I \implies a \in I$ ou $b \in I$

**Définition 10 (idéal maximal)**
Un idéal $I$ de $A$ est dit maximal si $I \neq A$ et si pour tout idéal $J$ de $A$ tel que $I \subseteq J$ et $J \neq A$, on a $J = I$. ($I$ est l'élément maximal pour l'inclusion)

**Proposition 11**
Soit $I$ un idéal de $A$. On a donc :

$$I \text{ maximal} \iff A/I \text{ est un corps} \implies A/I \text{ intègre} \iff I \text{ premier}$$

# IV. Induction

## 1. Champ Magnétique

### a. Notion de champ

**Définition 12 (type de champ)**
Un champ est une grandeur physique définie ne tout point M de l'espace et qui dépend de sa position et du temps.

— On parle de champ scalaire quand la valeur définie en tout point est un scalaire (température, pression...)
— On parle de champ vectoriel quand la valeur définie en tout point est un vecteur

**Définition 13 (caractéristique du champ)**
De mannière générale un champ dépend de deux variables. Dans des cas particulié on parle de :

— champ stationnaire quand il ne dépend que de la position. Il a la même valeur à tout instant.
— champ uniforme quand il ne dépend que du temps. Il a la même valeur en tout point.

**Définition 14**
Une ligne de champ d'un champ vectoriel est une ligne qui est tangente au vecteur présent en chacun des points du champ.

### b. Sources du champ magnétique

**Proposition 15 (champ magnétique d'un fil)**
Pour un fil droit rectiligne infini parcourue par un courant $I$, le champ magnétique à une distance $r$ est donné par :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{U_\theta}$$

**Proposition 16**
On parle de solénoide pour une bobine de $N$ spires, de longueur $L$ et rayon $R$ telle que $L >> R$. Dans un solénoide, le champ magnétique intérieur est constant et le champ magnétique extérieur est nul. On a la relation :

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 nI\overrightarrow{U_z} \quad \text{où} \quad n = \frac{N}{L}$$

## 2. Actions du champ magnétique

**Proposition 17 (force de Laplace élémentaire)**
Soit un élément de courant, c'est-à-dire un fil conducteur de section $S$, de longueur $dl$, parcouru par le courant $i$ et plogné dans $\overrightarrow{B}$. L'ensemble des charges mobiles dans le conducteur est soumis à la force de Laplace élémentaire :

$$d\overrightarrow{F_{Lap}} = id\overrightarrow{l} \wedge \overrightarrow{B}$$

*Démonstration.* TODO □

**Proposition 18 (couple magnétique)**
Soit un moment magnétique $\overrightarrow{\mathscr{M}}$ placé dans le champ magnétique $\overrightarrow{B}$, alors le couple des actions du champ magnétique sur le moment magnétique est :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathscr{M}} \wedge \overrightarrow{B}$$

**Proposition 19 (effet d'orientation)**

force de laplace, rails, puissance
couple magnétique
effet d'orientation, équilibre
champ tournant, machine synchrone

## 3. Lois de l'induction

**Définition 20 (flux du champ magnétique)**
Soit un contour orienté de vecteur surface $\vec{S}$ et placé dans le champ magnétique $\vec{B}$ homogène. On définit le flux du champ magnétique à travers la surface :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

On exprime $\phi$ en Wb (Weber) et il est proportionel à $B$ et $S$.

**Proposition 21 (Loi de Lenz-Faraday)**
Soit un circuit electrique définissant une surface $\vec{S}$ et placée dans une zone de champ magnétique $\vec{B}$ uniforme.

La variation du flux magnétique $\phi$ engendre un phénomèune d'induction, c'est à dire l'apparition d'un couratn dans le circuit que produirait un générateur fictif de force electromotrice $e$ telle que :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

L'induction revient donc à ajouter un générateur dans le circuit éléctrique. Ce générateur est toujours placé en convention générateur.

Cela est lié aux principe de modération : l'effet s'oppose toujours à celui qui lui donne naissance.

**Remarque 22**
Pour avoir un effect d'induction, il faut que $\phi$ varie.

## 4. Circuit fixe dans un champ magnétique uniforme

### a. Phenomène d'auto-induction

Soit un solénoide de $N$ spires et de longueur $l$. Il est parcouru par un champ magnétique $\vec{B}$.

Soit une spire du solénoide parcourue par le courant $i$, de vecteur surface $\vec{S}$ et traversée par le champ magnétique $\vec{B}$. On a donc :

$$\phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

**Définition 23 (flux propre)**
Le flux propre de la bobine $\phi_p$ est le flux qui traverse l'ensemble des spires de la bobine. On a :

$$\phi_p = N\phi_1 = NBS$$

**Remarque 24**
Si en plus, il existe un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B_{ext}}$, on a :

$$\phi_{tot} = \phi_p + \phi_{ext}$$

**Définition 25 (coefficient d'auto-inductance)**
$\phi_p$ est proportionel à $i$. On définit $L$ l'auto-inductance de la bobine telle que :

$$L = \frac{\phi_p}{i}$$

$L$ s'exprime en Henry (H).

**Remarque 26**
Dans le cas du solénoide, on a : $L = \frac{\mu_0 S N^2}{l}$

**Proposition 27 (force electromotrice induite)**
D'après la loi de Lenz-Faraday, la force electromotrice d'induction est donc : $e(t) = -L\frac{di}{dt}$.

Le generateur induit en convention générateur est donc équivalent à une bobine en convention recepteur.

TODO : Mutuelle inductance

w

# V. Energie d'un point materiel

## 1. Puissance et travail d'un force

**Définition 28 (travail d'une force)**
C'est l'énergie fournie par cette force lorsque son point d'application se déplace.

**Définition 29 (energie d'un système)**
Un système possède de l'énergie s'il est capable de fournir un travail. On distingue deux types d'énergie :

- L'énergie cinétique : si un travail peut être fourni par une modification de vitesse
- L'énergie potentielle : si un travail peut être fourni par une modification de position

# VI. Moment cinétique d'un point matériel

## 1. Moment cinétique

On s'interesse tout d'abord à un point matériel $M$ de masse $m$ et animé de la vitesse $\vec{v}_R$ dans un référentiel $R$.

**Définition 30 (quantité de mouvement)**
La quantité de mouvement du point $M$ est :

$$\vec{p}_R = m \cdot \vec{v}_R$$

**Définition 31 (moment cinétique par rapport à un point)**
Le moment cinétique du point $M$ par rapport au point $O$ est :

$$\vec{L_O}(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p}$$

$\vec{L_O}(M)$ s'exprime en $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$ et est orthogonal à $\vec{OM}$ et $\vec{v}$

**Remarque 32**
On peut faire un changement d'origine d'un point $O$ vers un point $O'$ :

$$\vec{L_{O'}}(M) = \vec{O'O} \wedge m\vec{v} + \vec{L_O}(M)$$

**Définition 33 (moment cinétique par rapport à un axe)**
Soit un axe $\Delta$ dirigé par un vecteur unitaire $\vec{u}$.
On définit le moment cinétique $L_\Delta(M)$ du point $M$ par rapport à l'axe $\Delta$ par :

$$L_\Delta(M) = \vec{L_O}(M) \cdot \vec{u}$$

## 2. Moment d'une force

**Définition 34 (moment d'une force par rapport à un point)**
Le moment de la force $\vec{F}$ qui s'exerce au point $M$ par rapport au point $O$ est donnée par la relation :

$$\vec{M_O}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

$\vec{M_O}(\vec{F})$ s'exprime en $N \cdot m$.

Cela traduit la capacité de la force $\vec{F}$ à faire tourner le point $M$ autour du point $O$. C'est toujours possible sauf si $\vec{F}$ est colinéaire à $\vec{OM}$

**Remarque 35**
On peut faire un changement d'origine d'un point $O$ vers un point $O'$ :

$$\vec{M_{O'}}(\vec{F}) = \vec{O'O} \wedge \vec{F} + \vec{M_O}(\vec{F})$$

**Définition 36 (moment d'une force par rapport à un axe)**
Soit un axe $\Delta$ dirigé par un vecteur unitaire $\vec{u}$.
On définit le moment d'une force $M_\Delta(\vec{F})$ du point $M$ par rapport à l'axe $\Delta$ par :

$$M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M_O}(\vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$\vec{M_O}(\vec{F})$ s'exprime en $N \cdot m$.

Cela traduit la capacité de la force $\vec{F}$ à faire tourner le point $M$ autour de l'axe $\Delta$. C'est toujours possible sauf si $\vec{F}$ et $\vec{OM}$ sont coplanaire.

**Remarque 37**
$M_\Delta(\vec{F})$ est indépendant du choix du point sur l'axe $\Delta$.

**Notion de bras de levier**

TODO

## 3. Théorème du moment cinétique

**Théorème 38 (théorème du moment cinétique vectoriel)**
Soit $O$ un point fixe du reférentiel $R$ galiléen.
Soit $M$ un point materiel du masse $m$, animé de la vitesse $\vec{v}$ et soumis a un ensemble de forces $\sum_i \vec{f_i}$. On a :

$$\frac{d\vec{L_O}(M)}{dt} = \sum_i \vec{M_O}(\vec{F_i})$$

**Démonstration 39**
On démontre le théorème du moment cinétique vectoriel :

$$\frac{d\vec{L_O}(M)}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L_O}(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{L_O}(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge \sum_i \vec{f_i}$$

$$\frac{d\vec{L_O}(M)}{dt} = \sum_i (\vec{OM} \wedge \vec{f_i})$$

$$\frac{d\vec{L_O}(M)}{dt} = \sum_i \vec{M_O}(\vec{F_i})$$

**Théorème 40 (théorème du moment cinétique scalaire)**
On projete le théorème du moment cinétique sur un axe dirigé par le vecteur unitaire $\vec{u}$ :

$$\frac{dL_\Delta(M)}{dt} = \sum_i M_\Delta(\vec{F_i})$$

**Exemple 41**
On peut appliquer le théorème du moment cinétique sur un pendule simple ou sur une bille dans une cuvette.

## 4. Cas des forces centrales

### a. Définition

**Définition 42 (force centrale)**
Une force $\vec{F}$ est dite centrale si sa droite support passe en permanance par le point fixe $O$.

**Conséquence 43**
Le moment de la force $\vec{F}$ est donc nul :

$$\vec{M_O} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$\vec{F}$ ne fait pas trourner le point $M$ autour de $O$

**Conséquence 44 (conséquence sur le TMC)**
Soit un point $M$ soumis à un ensemble de forces centrales de resultante $\vec{F}$. On a :

$$\frac{d\vec{L_O}(M)}{dt} = \vec{M_O}(\vec{F}) = \vec{0}$$

Donc :

$$\vec{L_O}(M) = co\vec{n}st$$

TODO

# VII. Mouvement dans un champ newtonien