

Mathématiques

Alexandre

Table des matières

1	Séries numériques et vectorielles	1
1.1	Définitions	1
1.2	Séries réelles à termes positifs	1
1.3	Séries absolument convergentes	1
1.4	Séries alternées	1
1.5	Techniques randoms	1
2	Espaces vectoriels normés	3
2.1	Bornes supérieures et inférieures	3
2.2	Normes	3
2.3	Suites	3
2.4	Fonctions	3

1 Séries numériques et vectorielles

1.1 Définitions

PROPOSITION 1

Une suite converge si et seulement si sa série télescopique associée converge.

$$\forall (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad (u_n) \text{ converge} \iff \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

1. Convergence d'une série (somme partielle et reste partiel)
2. opération sur les séries convergentes (c'est un \mathbb{K} espace vectoriel)
3. Lien convergence suites/séries (télescopique, terme général tends vers 0)

1.2 Séries réelles à termes positifs

PROPOSITION 2 (RÈGLE D'ALEMBERT)

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$

- si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge
- si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge
- si $l = 1^+$, la série $\sum u_n$ diverge

1. Règles d'Alembert
2. Théorème de Césaro
3. Comparaison avec des inégalités
4. Comparaison avec des petit o ou grand O ou équivalent
5. Implication sur des séries (j'espère comment écrire)
6. Comparaison série/intégrale

1.3 Séries absolument convergentes

1. En dimension finie, toute série absolument convergente est convergente
2. Résultats sur les sommations dans les relations de dominations ???
3. Produit de Cauchy

1.4 Séries alternées

1. CSSA

1.5 Techniques randoms

1. quand on a un quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, passez au log pour faire des séries télescopiques
2. pour trouver un équivalent à une suite, voire sa série, étudier la série de la forme $\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}$

3. quand on cherche l'équivalent A_n d'une série à termes de signe non constant, on peut étudier la différence $u_n - A_n$
4. équivalent suites récurantes gourdon p229

2 Espaces vectoriels normés

2.1 Bornes supérieures et inférieures

2.2 Normes

1. définition
2. distance (+ espace métrique)
3. norme produit evn
4. normes équivalentes (et en dim finie)
5. boules
6. convexe
7. partie bornée

2.3 Suites

1. convergence
2. unicité limite
3. opérations / suites extraites
4. dimension finie
5. adhérence

2.4 Fonctions

1. limite
2. caractérisation séquentielle
3. unicité limite
4. opérations et composition
5. dimension finie
6. continuité (caractérisation séquentielle)
7. lien densité ?
8. fonction lipschitziennes
9. applications linéaires continues
10. norme subordonnées