Cours MP2I

Alexandre

Table des matières

1 Notes

Nullstellensatz : (démo ?)
- Idéaux
- Algébriquement clos
- Bézout ?

Topologie de Zariski : ? ? ? ?
- Lemme de Zorn (AC)

Dimension : ?
Projectif/Affine : ?

2 Rappels : relations d'équivalence

Soit E un ensemble et $\sim$ une relation sur E.

Définition 1 (relation d'équivalence)
Une relation d'équivalence $\sim$ vérifie les propriétés suivantes sur E :
- $\sim$ réfléxive : $\forall x \in E, x \sim x$
- $\sim$ symétrique
- $\sim$ transitive

Définition 2 (classe d'équivalence)
Soit $x \in E$. L'ensemble $\tilde{x} = \{y \in E, x \sim y\}$ est la classe d'équivalence de x.

Définition 3 (partition)
Une partition d'un ensemble E est définie par :
- $\biguplus_{i \in I} X_i = X$
- $\forall i \in I, X_i \neq \emptyset$
- $\forall i,j \in I, i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j \neq \emptyset$

Lemme 4
Soient $x,y \in E$. On a :

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y$$

Démonstration. tkt □

Théorème 5 (parition formée par les classes d'équivalence)
L'ensemble des classes d'équivalences sous $\sim$ forme une parition de E.

Démonstration. □

Définition 6 (ensemble quotient)
TODOf

<application canonique>

3 Anneaux

3.1 Remarques

Définition 7 (anneau quotient)
Soient A un anneau et I un idéal bilatère (idéal à gauche et à droite) de A. On définit la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ suivante :

$$\forall x, y \in A, x\mathscr{R}y \iff x - y \in I$$

On dit aussi alors que x et y sont congrus modulo I : $x \equiv y \mod I$
On peut munir l'ensemble quotient A/I (càd l'ensemble des classes d'équivalence sur A) des lois induites par I :

$$\begin{array}{rccc} + : & t & \longrightarrow & a \\ & e & \longmapsto & f \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \cdot : & t & \longrightarrow & a \\ & e & \longmapsto & f \end{array}$$

A/I est muni d'une structure d'anneau.

3.2 Idéaux

Définition 8 (idéal d'un anneau)
Soit A un anneau. Un sous-ensemble $I \subseteq A$ est un idéal de A si :
- $(I, +)$ est un sous groupe de $(A, +)$
- $\forall a \in A, \forall b \in I, ab = ba \in I$

<lien avec les noyeaux de morphismes etc>

Définition 9 (idéal premier)
Soit A un anneau, I un idéal de A, I est premier si et seulement si l'anneau A/I est intègre. Cela revient au même d'imposer :
- $A \neq I$
- $\forall a, b \in A, ab \in I \implies a \in I$ ou $b \in I$

Définition 10 (idéal maximal)
Un idéal I de A est dit maximal si $I \neq A$ et si pour tout idéal J de A tel que $I \subseteq J$ et $J \neq A$, on a $J = I$. (I est l'élément maximal pour l'inclusion)

Proposition 11
Soit I un idéal de A. On a donc :

$$I \text{ maximal} \iff A/I \text{ est un corps} \implies A/I \text{ intègre} \iff I \text{ premier}$$