# Cours MP2I

Alexandre

## Table des matières

# 1 Notes

Nullstellensatz : (démo ?)

- Idéaux
- Algébriquement clos
- Bézout ?

Topologie de Zariski : ? ? ? ?

- Lemme de Zorn (AC)

Dimension : ?
Projectif/Affine : ?

# 2 Notions d'ensemble

## 2.1 Définitions

## 2.2 ZFC

**Définition 1 (ensemble inductif)**
Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On dit que $E$ est un ensemble inductif si pour tout sous-ensemble $F \subseteq E$ totalement ordonné, $F$ admet un majorant dans $E$.

On remarque alors que tout ensemble ordonné fini est inductif. Cependant ce n'est pas le cas d'ensemble comme $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$, on a bien $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{N}$ n'admet aucun majorant dans $\mathbb{Z}$.

**Théorème 2 (lemme de Zorn)**
Tout ensemble inductif admet un élément maximal.

**Théorème 3 (axiome du choix)**

**Remarque 4**
On a donc :

$$\text{lemme de Zorn} \Longleftrightarrow \text{axiome du choix}$$

<Pertinence de l'axiome du choix dans le cas d'un ensemble fini ?>
<TODO probleme 2 alain troesh>

## 2.3 Ensemble quotient

**Définition 5 (classe d'équivalence)**
Soit $R$ une relation d'équivalence sur un ensemble $E$. Soit $x \in E$, on considère la partie $\tilde{x}$ de $E$ définie par :

$$y \in \tilde{x} \Leftrightarrow xRy$$

C'est la classe d'équivalence de $x$

C'est l'ensemble des $y$ équivalent à $x$. Cette partie est non vide car $x \in \tilde{x}$.

**Définition 6 (partition)**

Une partition d'un ensemble E est définie par :

(a) l'union des classes d'équivalences donne $\biguplus_{x \in E} \tilde{x} = E$

(b) $\forall x \in E, \tilde{x} \neq \emptyset$

(c) $\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow \tilde{x} \cap \tilde{y} \neq \emptyset$

**Lemme 7**

Soient $x, y \in E$. On a :

$$x \sim y \iff \tilde{x} = \tilde{y}$$

On déduit que deux classes distinctes sont disjointes.

**Théorème 8 (parition formée par les classes d'équivalence)**

L'ensemble des classes d'équivalences sous $\sim$ forme une parition de $E$.

Les différentes classes d'équivalence des éléments de $E$ sont des parties $E$, non vides, disjointes, dont la réunion donne E (d'après la définition d'une partition).

**Définition 9 (ensemble quotient)**

L'ensemble des parties de $E$ dont les éléments sont des classes d'équivalence s'appelle l'ensemble quotient de $E$ par $R$, noté $E/R$

**Proposition 10 (application canonique)**

Si $R$ est une relation d'équivalence, l'application $\pi : E \longrightarrow E/R$ associe un élément $x$ de $E$ à sa classe d'équivalence.

Elle est surjective car chaque classe d'équivalence $F$ est non vide, tout élément de $F$ est envoyé par $\pi$ sur $F$ (donc on a : $\forall x \in F, \pi(x) = F$)

# 3 Propriétés des anneaux

## 3.1 Définitions

**Définition 11 (éléments associés)**

Soit $A$ un anneau intègre. Deux éléments $a$ et $b$ de $A$ sont dits associés si $a$ divise $b$ et si $b$ divise $a$.

Par exemple, si on se place dans $\mathbb{K}[X]$, deux polynomes associés sont égaux s'ils sont unitaire. <anneaux principaux>

## 3.2 Idéaux et anneau quotient

### 3.2.1 Définitions

**Définition 12 (idéal d'un anneau)**

Soit $A$ un anneau. Un sous-ensemble $I \subseteq A$ est un idéal de A si :

(a) $(I, +)$ est un sous groupe de $(A, +)$

(b) $\forall a \in A, \forall b \in I, ab = ba \in I$

**Définition 13 (idéal premier)**
Soit $A$ un anneau, $I$ un idéal de $A$, $I$ est premier si et seulement si l'anneau $A/I$ est intègre. Cela revient au même d'imposer :

— $A \neq I$

— $\forall a, b \in A, ab \in I \Longrightarrow a \in I$ ou $b \in I$

**Définition 14 (idéal maximal)**
Un idéal $I$ de $A$ est dit maximal si $I \neq A$ et si pour tout idéal $J$ de $A$ tel que $I \subseteq J$ et $J \neq A$, on a $J = I$. ($I$ est l'élément maximal pour l'inclusion)

### 3.2.2 Propositions

**Proposition 15**
Soit $I$ un idéal de $A$. On a donc :

$$I \text{ maximal} \Longleftrightarrow A/I \text{ est un corps} \Longrightarrow A/I \text{ intègre} \Longleftrightarrow I \text{ premier}$$

**Théorème 16 (lien idéaux et morphisme d'anneaux)**
Une partie $I$ d'un anneau $A$ est un idéal bilatère si et seulement si $I$ est le noyau d'un morphisme d'anneaux.

*Démonstration.* TODO □

**Proposition 17 (anneau quotient)**
Soit $I$ un idéal bilatère d'un anneau $A$. La relation d'équivalence $R$ définie par :

$$\forall x, y \in A,\ x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x - y \in I$$

est compatible avec la structure d'anneau de $A$ et l'ensemble quotient $A/R$ aussi noté $A/I$ est muni d'une structure d'anneau.

On peut munir l'ensemble quotient $A/I$ (càd l'ensemble des classes d'équivalence sur A) des lois induites par I :

$$+ : \begin{array}{ccc} t & \longrightarrow & a \\ e & \longmapsto & f \end{array} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{array}{ccc} t & \longrightarrow & a \\ e & \longmapsto & f \end{array}$$

<idéaux d'un anneau qotient>
<image d'un idéal est un idéal par un morphisme ?>
<noyeau morphisme idéal ?>

**Lemme 18**
Soit $A$ un anneau, $A$ est un corps si et seulement si on a :

(1) $A \neq \{0\}$

(2) les seuls idéaux de $A$ sont $\{0\}$ et $A$

*Démonstration.* TODO □

**Théorème 19 (Krull)**
Soit $I$ un idéal de $A$, $I \neq A$, il existe un idéal maximal de $A$ contenant $I$.

*Démonstration.* Se montre à l'aide du théorème de Zorn, à voir. □

## 3.3 Propriétés remaquables

### 3.3.1 Théoreme d'isomorphisme

**Théorème 20 (théoreme d'isomorphisme)**
Soient $A$ et $B$ deux anneaux et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneau. On pose $I = \ker f$. Soit $J$ un idéal de $A$ contenu dans $I$ et $\pi : A \longrightarrow A/J$ la projection canonique. Alors on a :

(a) il existe une unique morphisme $\overline{f} : A/J \longrightarrow B$ tel que $f = \overline{f} \circ \pi$ (on dit que $f$ se factorise par $A/J$)

(b) $\overline{f}$ est injectif si et seulement si $J = I$

(c) $\overline{f}$ est surjectif si et seulement $f$ l'est aussi

En particulier on a $\mathrm{Im}\, f \simeq A/\ker f$.

### 3.3.2 Opérations sur les idéaux

### 3.3.3 Algèbres

## 3.4 Types d'anneaux

### 3.4.1 Anneaux noethériens

On rappelle qu'on idéal $I$ d'un anneau $A$ est dit de type fini s'il est engendré par un nombre fini d'éléments.

**Définition 21 (anneau noethérien)**
Un anneau noethérien est un anneau qui vérifie l'une des trois propriété équivalentes suivantes :

(1) tout idéal de $A$ est de type fini

(2) toute suite croissante $(I_n)_n$ d'idéaux de $A$ est stationnaire

(3) tout ensemble non vide d'idéaux de $A$ a un élément maximal pour l'inclusion

*Démonstration.*
(1) $\Rightarrow$ (2) : On défini une suite $(I_n)_n$ croissante et on pose $I = \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $I \subseteq I_N$. On a par définition de $I$ : $I_N \subseteq I$. Donc $I = I_n$
(2) $\Rightarrow$ (3) : TODO
(3) $\Rightarrow$ (1) : Pas compris

□

**Théorème 22 (Hilbert)**
Si $A$ est noethérien, $A[X]$ est noethérien.

**Corollaire 23**
Si $A$ est noethérien, $A[X_1, \ldots, X_n]$ est noethérien.

### 3.4.2 Anneaux factoriels

La notion d'anneau factoriel généralsie la propriété de décomposition unique en facteurs premiers dans $\mathbb{Z}$. Il faut noter que toutes les propriétés de $\mathbb{Z}$ ne s'y applique pas forcément.

**Définition 24**
Soit $A$ un anneau. L'anneau $A$ est factoriel s'il vérifie ces trois propriétés :

(1) $A$ est intégre (il n'a pas de diviseur de zéro)

(2) tout élément $a$ non nul de $A$ s'écrit $a = up_1 \dots p_r$ avec $u \in A^\times$ et $p_1, \dots, p_r$ irréductible dans $A$

(3) cette décomposition est unique, à permutation près et à des inversibles près : si $a = up_1 \dots p_r = vq_1 \dots q_s$, alors $r = s$ et il existe $\sigma \in \mathscr{S}_r$ tel que $p_i$ et $q_{\sigma(i)}$ soient associé

### 3.4.3 Anneaux intégralement clos