

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э. БАУМАНА

С. И. М а с л е н н и к о в а

**РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ
ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ**

Пособие по выполнению домашних заданий
и подготовке к рубежному контролю.

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2010

ВВЕДЕНИЕ

Процесс перехода от одного энергетического состояния электрической цепи к другому называется переходным процессом. Переходный процесс вызывается коммутацией, т.е. мгновенным изменением параметров цепи, ее схемы или параметров источников энергии в схеме.

Переход от одного (докоммутационного) состояния к другому обычно происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени – времени переходного процесса. Это объясняется тем, что каждому состоянию цепи соответствует определенный запас электромагнитной энергии. Изменение же энергии в реактивных элементах не может происходить мгновенно, так как в этом случае мощность $p = \frac{dw}{dt}$, развиваемая в цепи, достигала бы бесконечно больших значений. Следовательно, не могут изменяться мгновенно и переменные, связанные с энергией. Следствием этих положений являются законы коммутации:

$$q(t_-) = q(t_+), \quad \psi(t_-) = \psi(t_+).$$

Для линейных цепей законы коммутации чаще записывают так:

$$u_C(t_-) = u_C(t_+), \quad i_L(t_-) = i_L(t_+).$$

Цель анализа переходных процессов в электрических цепях – определение временных законов изменения токов или напряжений на заданных участках цепи в переходном режиме.

Для расчета переходных процессов во временной области используются два метода: классический метод и метод интегралов наложения. Классический метод рекомендуется применять для анализа цепей, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями не выше третьего порядка, при действии в схеме постоянных или гармонических источников энергии. Метод интегралов наложения – при действии источников произвольной формы.

Раздел 1. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Расчет переходных процессов классическим методом сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, составленных на основании законов Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений. Эта система приводится к неоднородному дифференциальному уравнению n -го порядка, общее решение которого

$$y(t) = y_{\text{частн.}}(t) + y_{\text{общ.}}(t),$$

где $y_{\text{частн.}}(t)$ - частное решение неоднородного дифференциального уравнения, $y_{\text{общ.}}(t)$ - общее решение однородного уравнения.

Здесь под $y(t)$ понимается любой искомый ток или напряжение. Частное решение неоднородного уравнения определяется видом функции, стоящей в правой части уравнения, и поэтому называется вынужденной составляющей $y_{\text{вын.}}(t)$. Для цепей с постоянными или периодическими напряжениями (токами) источников энергии вынужденное решение совпадает с установившимися значениями искомых функций. Общее решение однородного уравнения описывает электромагнитный процесс, происходящий в схеме без воздействия внешних источников, и называется свободной составляющей $y_{\text{св.}}(t)$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение однородного уравнения ищется в виде

$$y_{\text{св.}}(t) = \sum_{s=1}^n A_s \ell^{p_s t},$$

где A_s - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий; p_s - корни характеристического уравнения.

Основными составляющими расчета $y(t)$ являются: определение начальных условий, вынужденной составляющей, корней характеристического уравнения, постоянных интегрирования. Более подробно остановимся на определении начальных условий и корней характеристического уравнения.

1.1.ОПРЕДЕЛЕНЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Независимые начальные условия определяются законами коммутации, которые для линейных цепей можно записать в виде

$$u_C(0_+) = u_C(0_-), \quad i_L(0_+) = i_L(0_-).$$

Здесь учитывается, что обычно момент коммутации совмещают с началом отсчета, то есть полагают $t_k = 0$.

Значения остальных токов и напряжений до и после коммутации в общем случае не одинаковы:

$$i_C(0_+) \neq i_C(0_-), u_L(0_+) \neq u_L(0_-),$$

$$\frac{du_C}{dt}(0_+) \neq \frac{du_C}{dt}, \frac{di_L}{dt}(0_+) \neq \frac{di_L}{dt}(0_-) \text{ и т.д.}$$

Их значения в момент времени $t = 0_+$ определяются независимыми начальными условиями, характером (видом) коммутации и другими факторами. Поэтому они получили название зависимых начальных условий.

Порядок расчета

1. Определяем независимые начальные условия.

Для схемы до коммутации, находящейся в установившемся режиме, находят мгновенные значения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях, после чего подставляют в выражения для $u_C(t)$ и $i_L(t)$ значение времени $t = 0_-$. В соответствии с законами коммутации $u_C(0_-) = u_C(0_+)$, $i_L(0_-) = i_L(0_+)$.

2. Для схемы, полученной после коммутации, составляем систему уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений. Подставив в эти уравнения время $t = 0_+$ и найденные значения $u_C(0_+)$ и $i_L(0_+)$, определяем зависимые начальные условия. При составлении уравнений контуры необходимо выбирать таким образом, чтобы можно было использовать уже найденные независимые начальные условия.

Пример 1.1.

Для схемы рис. 1.1 определить значения всех токов и напряжений, а также их производных для моментов времени $t = 0_-$, $t = 0_+$, ∞ , если $E = 30 \text{ В}$, $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ Гн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$.

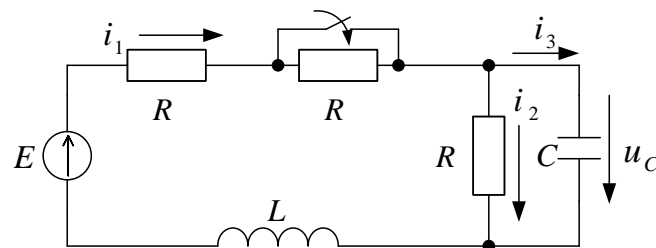


Рис. 1.1

Решение

Рассчитаем схему до коммутации, находящуюся в установившемся режиме, и определим значения токов и напряжений. Так как в заданной схеме действует постоянный источник ЭДС, то все токи и напряжения будут постоянными величинами. На рис. 1.2 представлена расчетная схема для $t < 0$.

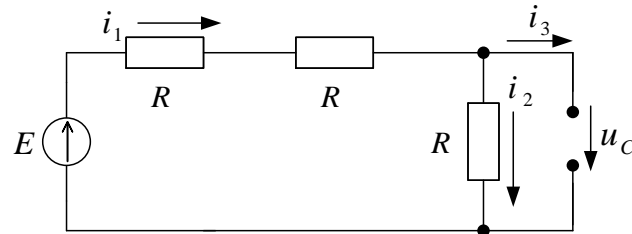


Рис. 1.2

Имеем:

$$i_1(0_-) = \frac{E}{3R} = 1 \text{ A}, \quad i_2(0_-) = \frac{E}{3R} = 1 \text{ A}, \quad i_3(0_-) = 0.$$

$$u_L(0_-) = 0, \quad u_C(0_-) = i_2(0_-)R = \frac{E}{3R}R = 10 \text{ B},$$

$$\frac{di_1}{dt}(0_-) = \frac{u_L(0_-)}{L} = 0, \quad \frac{du_C}{dt}(0_-) = \frac{i_3(0_-)}{C} = 0.$$

В соответствии с законами коммутации

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 10 \text{ B}, \quad i_1(0_-) = i_1(0_+) = 1 \text{ A}.$$

Для схемы, полученной после коммутации (сопротивление R закорочено), составим уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений:

$$E = Ri_1 + u_C + u_L, \quad 0 = u_C - Ri_2, \quad i_1 = i_2 + i_3.$$

Откуда при $t = 0_+$ получим:

$$E = Ri_1(0_+) + u_C(0_+) + u_L(0_+),$$

$$0 = u_C(0_+) - Ri_2(0_+),$$

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+).$$

Следовательно,

$$u_L(0_+) = E - R i_1(0_+) - u_C(0_+) = 10 \text{ В}, \quad \frac{di_1}{dt}(0_+) = \frac{u_L(0_+)}{L} = 1000 \frac{\text{А}}{\text{с}},$$

$$i_2(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R} = 1 \text{ А}, \quad i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = 0, \quad \frac{du_C}{dt}(0_+) = \frac{i_3(0_+)}{C} = 0.$$

Примечание.

Если требуется определить, например, значение $\frac{di_2}{dt}(0_+)$, то уравнения следует составлять таким образом, чтобы можно было обойтись без определения вторых производных.

Например, если используется левый контур, то для определения $\frac{di_2}{dt}(0_+)$ потребуется найти $\frac{d^2 i_1}{dt^2}(0_+)$, продифференцировав уравнение $E = R i_1 + u_C + L \frac{di_1}{dt}$. $0 = \frac{di_1}{dt} + L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R \frac{di_2}{dt}$.

Уравнение $0 = u_C - R i_2$ позволяет легко определить зависимые начальные условия:

$$\frac{di_2}{dt}(0_+) = \frac{1}{R} \frac{du_C}{dt}(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{dt} = 0.$$

При расчете тока $i_3(t)$ его производная по времени в момент времени $t = 0_+$ равна:

$$\frac{di_C}{dt}(0_+) = \frac{di_1}{dt}(0_+) - \frac{di_2}{dt}(0_+) = 1000 \frac{\text{А}}{\text{с}}.$$

Вынужденную составляющую токов определим при $t = \infty$ для схемы (рис. 1.3).

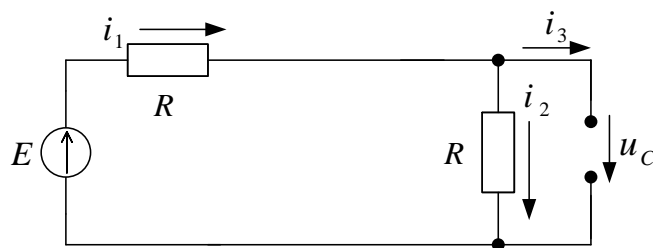


Рис. 1.3

$$i_{1\text{вст}} = \frac{E}{2R} = 1.5 \text{ А}, \quad i_{2\text{вст}} = \frac{E}{2R} = 1.5 \text{ А}, \quad i_{C\text{вст}} = 0,$$

$$u_{C\text{вст}} = i_2 R = 15 \text{ В}, \quad u_{L\text{вст}} = 0.$$

Пример 1.2.

Для схемы рис. 1.4 найти независимые и зависимые начальные условия, если дано:

$$J = 2 \text{ A}, E = 50 \text{ B}, R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}, L = 0.01 \text{ Гн}, C = 10 \text{ мкФ}.$$

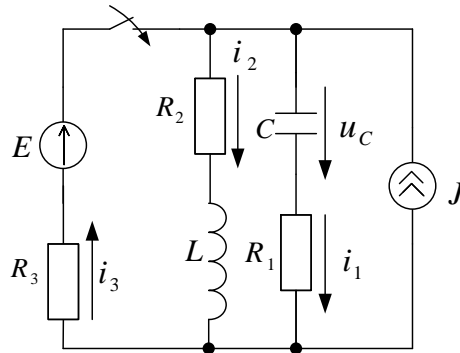


Рис. 1.4

Решение

Рассчитаем токи и напряжения в схеме до коммутации и определим независимые начальные условия, учитывая, что

$$i_1(0_-) = 0, u_L(0_-) = 0, i_3(0_-) = 0.$$

Следовательно,

$$i_2(0_-) = J = 2 \text{ A} = i_2(0_+), u_C(0_-) = i_2(0_-)R_2 = 20 \text{ B} = u_C(0_+).$$

Для схемы после коммутации составим систему уравнений по законам Кирхгофа для момента времени $t = 0_+$:

$$J + i_3(0_+) = i_1(0_+) + i_2(0_+),$$

$$E = i_3(0_+)R_3 + u_C(0_+) + i_1(0_+)R_1,$$

$$E = i_3(0_+)R_3 + u_L(0_+) + i_2(0_+)R_2.$$

Из первого уравнения получим: $i_3(0_+) = i_1(0_+)$.

Подставив это соотношение во второе уравнение, определим значение тока $i_3(0_+)$: $i_3(0_+) = 1.5 \text{ A}$, $i_1(0_+) = i_3(0_+) = 1.5 \text{ A}$.

Значение производной $\frac{du_C}{dt}(0_+)$ рассчитаем по соотношению

$$\frac{du_C}{dt}(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C} = \frac{i_1(0_+)}{C} = 15000 \frac{\text{B}}{\text{с}}.$$

Значение $u_L(0_+)$ найдем из третьего уравнения:

$$u_L(0_+) = E - i_3(0_+)R_3 - i_2(0_+)R_2 = 15 \text{ B}.$$

1.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Расчет переходных процессов классическим методом требует определения корней характеристического уравнения. Характеристическое уравнение наиболее просто можно получить методом входного сопротивления из равенства $Z_{\text{вх}}(p) = 0$.

Для чего:

1) составляем схему для свободных токов. Для этого в схеме, полученной после коммутации, все источники энергии заменяем их внутренними сопротивлениями (внутреннее сопротивление идеального источника ЭДС равно нулю, внутреннее сопротивление идеального источника тока равно бесконечности), а элементы R, L, C – сопротивлениями, равными соответственно $R, pL, 1/pC$;

2) если в составленной схеме нет короткозамкнутых ветвей, то размыкаем любую ветвь, определяем входное сопротивление со стороны разомкнутой ветви и приравниваем его нулю $Z_{\text{вх}}(p) = 0$. Для упрощения алгебраических преобразований следует размыкать ветвь с наибольшим числом элементов, отдавая при этом предпочтение ветви с сопротивлением $1/pC$.

Если в схеме для свободных токов есть короткозамкнутая ветвь, то размыкаем ту ветвь, в которой рассчитываем переходный ток. В цепях с магнитосвязанными индуктивностями для определения входного сопротивления следует в схеме для свободных токов предварительно устранить магнитную связь.

Число корней характеристического уравнения равно степени характеристического уравнения и не может превышать числа накопителей электромагнитной энергии. Число корней (или порядок уравнения) можно определить без составления этого уравнения по упрощенной схеме, которая получается после замены идеальных последовательно или параллельно соединенных индуктивностей или емкостей соответственно. Тогда порядок характеристического уравнения равен числу основных независимых начальных условий $i_L(0), u_C(0)$ в послекоммутационной схеме после максимального ее упрощения (пример 1.4).

Пример 1.3.

Для схем рис. 1.5а, 1.6а, 1.7а составить характеристические уравнения.

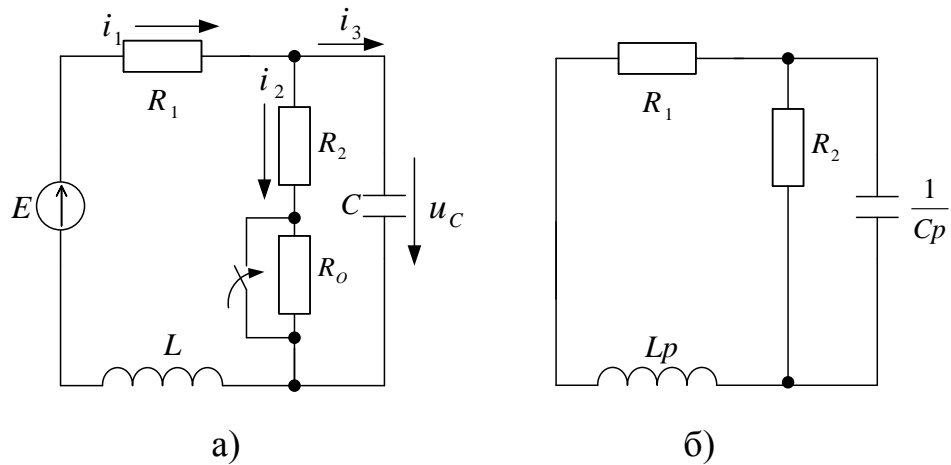


Рис. 1.5

Решение

После коммутации составляем схему для свободных токов (рис.1.5б). Размыкаем любую ветвь (например, R-Lp) и определяем входное сопротивление схемы

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{Cp} + \frac{R_2(R_1 + Lp)}{R_2 + R_1 + Lp}.$$

Приравняв его нулю, получим характеристическое уравнение

$$R_2 L C p^2 + (R_1 R_2 C + L) p + R_1 + R_2 = 0.$$

Это же характеристическое уравнение можно получить, разомкнув другие ветви.

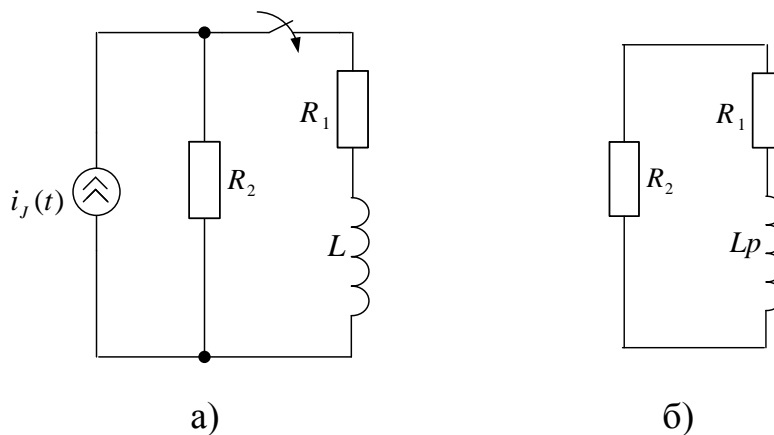


Рис. 1.6

Схеме рис. 1.6а соответствует схема для свободных токов рис. 1.6б и характеристическое уравнение $Z_{\text{вх}}(p) = R_1 + R_2 + Lp = 0$.

Схеме рис. 1.7а соответствует схема для свободных токов рис. 1.7б. В этой схеме средняя и правая ветви замкнуты накоротко, т.е. схема состоит из двух электрически независимых контуров (рис. 1.7в,г).

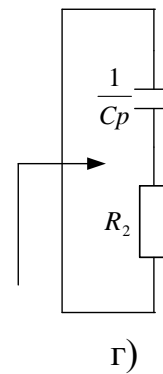
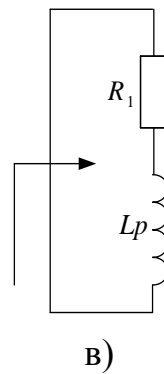
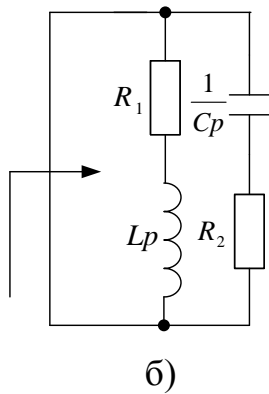
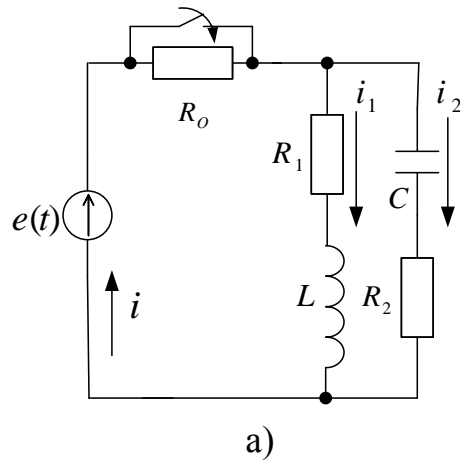


Рис. 1.7

Для схемы рис. 1.7в $Z_{1\text{ex}}(p) = R_1 + Lp = 0$, $p_1 = -\frac{R_1}{L}$.

Для схемы рис. 1.7г $Z_{2\text{ex}}(p) = R_2 + \frac{1}{Cp} = 0$, $p_2 = -\frac{1}{R_2 C}$.

Таким образом, степень характеристического уравнения в каждом контуре равна 1.

При размыкании левой ветви (рис. 1.7б)

$$Z_{\text{ex}}(p) = \frac{(R_1 + Lp)(R_2 + \frac{1}{Cp})}{R_1 + Lp + R_2 + \frac{1}{Cp}} = 0.$$

Из этого уравнения получим два корня $p_1 = -\frac{R_1}{L}$, $p_2 = -\frac{1}{Cp}$.

Это объясняется тем, что $i_{\text{св}} = i_{1\text{св}} + i_{2\text{св}}$.

Пример 1.4.

Для схемы рис. 1.8а определить число корней характеристического уравнения, не составляя самого уравнения.

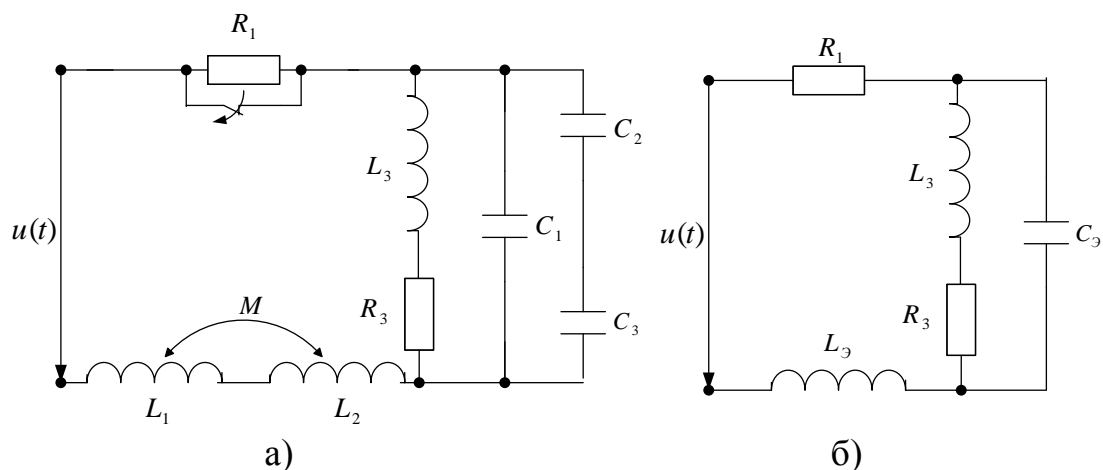


Рис. 1.8

Схему рис. 1.8а приведем после коммутации к схеме рис. 1.8б, в которой $L_3 = L_1 + L_2 \pm 2M$, $C_3 = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$.

Так как схема рис. 1.8б имеет три основных независимых начальных условия $i_{L3}(0)$, $i_{L3}(0)$, $u_{C3}(0)$, то порядок характеристического уравнения равен трем.

1.3 ПОРЯДОК РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Перед началом расчета необходимо указать на схеме стрелками положительные направления токов и напряжений в схеме.

1. Рассчитываем схему до коммутации в установившемся режиме и определяем независимые начальные условия. Это единственный этап расчета, в котором используется схема до коммутации. Все остальные этапы расчета проводятся для схемы после коммутации.

2. Для $t \geq 0$ составляем характеристическое уравнение и определяем его корни.

3. Записываем уравнение для рассчитываемого тока или напряжения в виде $y(t) = y_{вын}(t) + y_{св}(t)$.

Рекомендуется проводить расчет для тока в индуктивности или напряжения на емкости, для которых известны независимые начальные условия, так как это упрощает нахождение постоянных интегрирования. Вид корней характеристического уравнения (см. п.2) позволяет определить вид свободной составляющей $y_{св}(t)$.

4. Для схемы после коммутации записываем систему дифференциальных уравнений для мгновенных значений токов и напряжений. Эта система уравнений позволяет определить вынужденные составляющие токов или напряжений (в общем случае) и зависимые начальные условия.

5. Пользуясь системой уравнений п.4, при $t = \infty$ определяем $y_{вын}(t)$ известными методами расчета установившихся режимов.

6. Подставляя в систему уравнений п.4, записанную для $t = 0_+$, найденные в п.1 независимые начальные условия, определяем зависимые начальные условия.

7. Пользуясь начальными условиями, находим постоянные интегрирования.

8. Записываем $y(t)$ в окончательном виде и строим график полученной временной функции.

9. Остальные токи и напряжения целесообразно искать, пользуясь системой уравнений п.4, причем напряжение на индуктивности и ток в емкости наиболее просто определяются из

соотношений $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, $i_C = C \frac{du_C}{dt}$.

Пример 1.5.

Для схемы рис. 1.9а определить законы изменения напряжения на емкости и токи в ветвях, если дано:

$E = 120 В$, $J = 4 А$, $R_1 = 10 Ом$, $R_2 = 30 Ом$, $L = 50 мГн$, $C = 500/3 мкФ$.

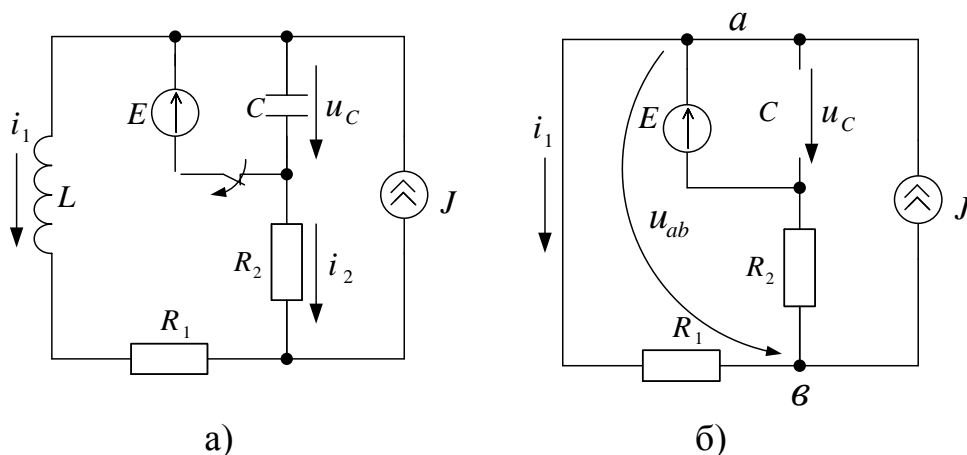


Рис. 1.9

Решение

1. Рассматриваем схему до коммутации (рис. 1.9б) и определяем ток в ветви с индуктивностью и напряжение на емкости для момента времени $t = 0_-$ из уравнений:

$$u_C(0_-) = E = 120 \text{ В},$$

$$u_{a6}(0_-) = \frac{Eg_2 + J}{g_1 + g_2} = 60 \text{ В},$$

$$i_1(0_-) = \frac{u_{a6}(0_-)}{R_1} = 6 \text{ А}.$$

В соответствии с законами коммутации получим:

$$u_C(0_-) = 120 \text{ В} = u_C(0_+), \quad i_1(0_-) = 6 \text{ А} = i_1(0_+).$$

2. Пользуясь схемой после коммутации для свободных токов (рис. 1.9в), составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$Lp + R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp} = 0,$$

$$LCp^2 + (R_1 + R_2)Cp + 1 = 0,$$

$$p_1 = -200 \frac{1}{c}, \quad p_2 = -600 \frac{1}{c}.$$

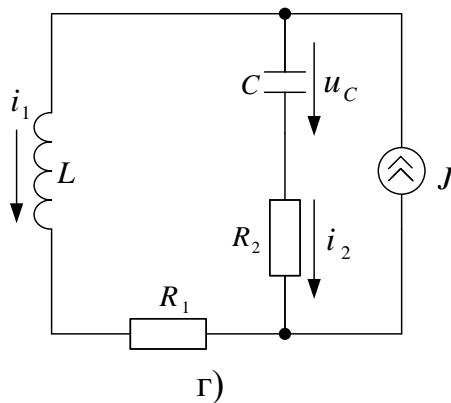
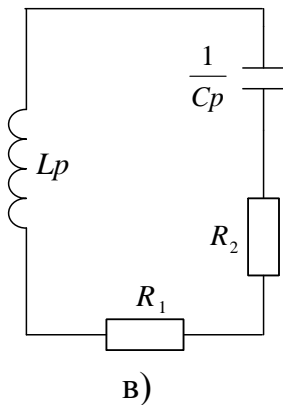


Рис. 1.9

3. Выбираем в качестве искомой функции напряжение на емкости (можно выбрать и ток в индуктивности):

$$u_C = u_{C_{\text{вын}}} + u_{C_{\text{св}}} = u_{C_{\text{вын}}} + A_1 e^{-200t} + A_2 e^{-600t}.$$

4. Для схемы после коммутации (рис. 1.9г) записываем систему независимых уравнений для мгновенных значений токов и напряжений:

$$J = i_1 + i_2,$$

$$L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 - R_2 i_2 - u_C = 0.$$

5. В установившемся режиме ($t = \infty$) ток $i_{2\text{вын}} = 0$, так как схема питается от источника постоянного тока. Следовательно,

$$i_{1\text{вын}} = J = 4 \text{ А}, \quad u_{L\text{вын}} = L \frac{di_{1\text{вын}}}{dt} = 0, \quad u_{C\text{вын}} = i_{1\text{вын}} R_1 = 40 \text{ В}.$$

6. При $t = 0_+$ имеем: $J = i_1(0_+) - i_2(0_+)$. Откуда определяем $i_2(0_+) = J - i_1(0_+) = -2 \text{ A}$ и $\frac{du_C}{dt}(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C} = \frac{i_2(0_+)}{C} = -1200 \frac{B}{c}$.

Примечание. Если расчет ведем для тока i_1 , то значение $\frac{di_1}{dt}(0_+)$ находим из уравнения

$$L \frac{di_1}{dt}(0_+) + R_1 i_1(0_+) - R_2 i_2(0_+) - u_C(0_+) = 0,$$

$$\frac{di_1}{dt}(0_+) = \frac{R_2 i_2(0_+) + u_C(0_+) - R_1 i_1(0_+)}{L} = 0.$$

7. Постоянные интегрирования определяем из системы уравнений

$$u_C = u_{C_{\text{вын}}} + u_{C_{\text{св}}} = 40 + A_1 \ell^{-200t} + A_2 \ell^{-600t},$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{du_{C_{\text{вын}}}}{dt} + \frac{du_{C_{\text{св}}}}{dt} = -200A_1 \ell^{-200t} - 600A_2 \ell^{-600t},$$

которая при $t = 0_+$ принимает вид:

$$u_C(0_+) = 120 = 40 + A_1 + A_2,$$

$$\frac{du_C}{dt}(0_+) = -12000 = -200A_1 - 600A_2.$$

Откуда находим значения постоянных интегрирования: $A_1 = 90$, $A_2 = -10$.

8. Окончательно получим закон изменения напряжения на емкости

$$u_C(t) = 40 + 90\ell^{-200t} - 10\ell^{-600t}.$$

9. Покажем, как определять остальные переменные:

$$i_2 = i_C = C \frac{du_C}{dt} = -3\ell^{-200t} + \ell^{-600t},$$

$$i_1 = J - i_2 = 4 + 3\ell^{-200t} - \ell^{-600t},$$

$$u_L = L \frac{di_1}{dt} = -30\ell^{-200t} + 30\ell^{-600t}.$$

Пример 1.6.

Для схемы рис. 1.10 определить закон изменения напряжения на емкости, если дано:

$$E = 120 \text{ В}, R_1 = R_2 = R_0 = 10 \text{ Ом}, L = 0.1 \text{ Гн}, C = 100 \text{ мкФ}.$$

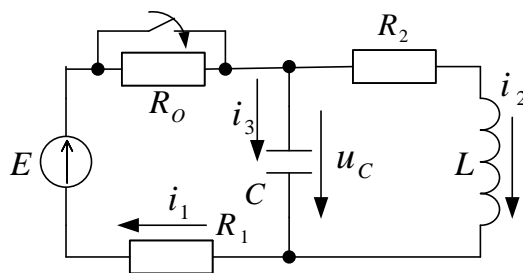


Рис. 1.10

Решение

1. Так как цепь подключена к источнику постоянного напряжения, то в установившемся режиме до коммутации индуктивность имеет нулевое сопротивление, а емкость – бесконечно большое. Поэтому

$$i_3(0_-) = 0, u_L(0_-) = 0, i_1(0_-) = \frac{E}{R_0 + R_1 + R_2} = 4 \text{ A},$$

$$i_2(0_-) = \frac{E}{R_0 + R_1 + R_2} = 4 \text{ A}, u_C(0_-) = i_2(0_-)R_2 = 40 \text{ B}.$$

В соответствии с законами коммутации имеем

$$i_2(0_-) = 4 \text{ A} = i_2(0_+), u_C(0_-) = 40 \text{ B} = u_C(0_+).$$

2.Корни характеристического уравнения

$$Z_{\text{ex}}(p) = \frac{1}{Cp} + \frac{R_1(R_2 + Lp)}{R_1 + R_2 + Lp} = 0 \text{ равны } p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}} = -100 \pm j100.$$

При комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения решение ищем в виде:

$$u_C(t) = u_{\text{свн}} + (A_1 \cos \omega_{\text{св}} t + A_2 \sin \omega_{\text{св}} t) e^{-\delta t}.$$

3. Используя уравнения для схемы после коммутации, определим требуемое для нахождения постоянных интегрирования

значение производной $\frac{du_C}{dt}(0_+)$:

$$E = i_1(0_+)R_1 + u_C(0_+) \rightarrow i_1(0_+) = 8 \text{ A},$$

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+) \rightarrow i_3(0_+) = 4 \text{ A},$$

$$\frac{du_C}{dt}(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C} = \frac{i_3(0_+)}{C} = 4000 \frac{\text{A}}{\text{с}}.$$

4. В установившемся режиме при $t = \infty$ вынужденная составляющая напряжения на емкости равна

$$u_{\text{свн}} = i_{2\text{свн}} R_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2 = 60 \text{ B}.$$

5. Определим постоянные интегрирования, используя найденные начальные условия $u_C(0_+), \frac{du_C}{dt}(0_+)$. Для чего в систему уравнений

$$u_C = 60 + (A_1 \cos 100t + A_2 \sin 100t)e^{-100t},$$

$$\frac{du_C}{dt} = (A_1 100 \sin 100t + A_2 100 \cos 100t)e^{-100t} +$$

$$+ (A_1 \cos 100t + A_2 \sin 100t)(-100)e^{-100t}.$$

для $t = 0_+$ подставим их значения:

$$u_C(0_+) = 40 = 60 + A_1,$$

$$\frac{du_C}{dt}(0_+) = 4000 = A_2 \cdot 100 - A_1 \cdot 100.$$

Откуда: $A_1 = -20, A_2 = 20$.

Ответ:

$$u_C(t) = 60 + (20 \sin 100t - 20 \cos 100t)e^{-100t} =$$

$$= 60 + 20\sqrt{2} \sin(100t - \frac{\pi}{4})e^{-100t}.$$

Пример 1.7.

Рассчитать все токи в схеме рис. 1.11а, если дано:

$E = 120 \text{ В}, R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}, L_1 = L_2 = 0.2 \text{ Гн}, M = 0.1 \text{ Гн}.$

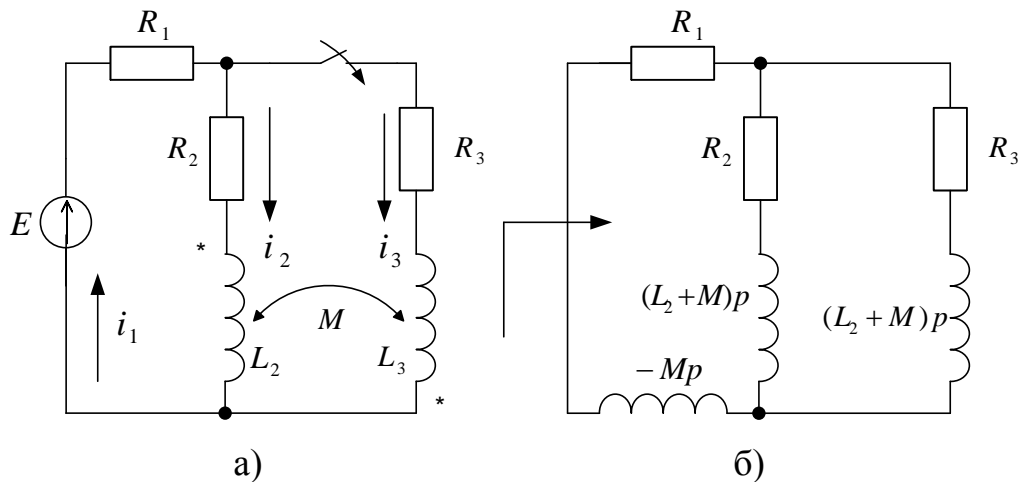


Рис. 1.11

Решение

1. Определим независимые начальные условия из схемы до коммутации $i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 6 \text{ А} = i_2(0_+), i_3(0_-) = 0 = i_3(0_+).$

2. Методом входного сопротивления составляем характеристическое уравнение, устранив предварительно магнитную связь (рис. 1.11б):

$$Z(p) = R_1 - Mp + \frac{[R_2 + (L_2 + M)p][R_3 + (L_3 + M)p]}{R_2 + (L_2 + M)p + R_3 + (L_3 + M)p} = 0,$$

$$0.03p^2 + 10p + 300 = 0, \quad p_1 = -\frac{100}{3} \frac{1}{c}, \quad p_2 = -300 \frac{1}{c}.$$

3. Выражение для тока i_2 запишем в виде

$$i_2 = i_{2\text{вын}} + i_{2\text{св}} = i_{2\text{вын}} + A_1 \ell^{-\frac{100}{3}t} + A_2 \ell^{-300t}.$$

4. Так как $R_2 = R_3$, то вынужденная составляющая тока равна

$$i_{2\text{вын}} = \frac{E}{2(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3})} = 4 \text{ A}.$$

5. Составим систему уравнений по законам Кирхгофа для послекоммутационной схемы:

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_3}{dt} = E,$$

$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_3}{dt} - i_3 R_3 - L_3 \frac{di_3}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0,$$

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

При $t = 0_+$ имеем:

$$i_1(0_+) R_1 + i_2(0_+) R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}(0_+) - M \frac{di_3}{dt}(0_+) = E,$$

$$i_2(0_+) R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}(0_+) - M \frac{di_3}{dt}(0_+) - i_3(0_+) R_3 - L_3 \frac{di_3}{dt}(0_+) + M \frac{di_2}{dt}(0_+) = 0,$$

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+).$$

Учитывая, что $i_3(0_+) = 0$, $i_2(0_+) = 6 \text{ A}$, получим:

$$i_1(0_+) = 6 \text{ A}, \quad \frac{di_2}{dt}(0_+) = 200 \frac{\text{A}}{c}, \quad \frac{di_3}{dt}(0_+) = 400 \frac{\text{A}}{c}.$$

6. Постоянные интегрирования определяются из следующей системы уравнений:

$$i_2 = 4 + A_1 \ell^{-\frac{100}{3}t} + A_2 \ell^{-300t},$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{100}{3} A_1 \ell^{-\frac{100}{3}t} - 300 A_2 \ell^{-300t}.$$

При $t = 0_+$

$$i_2(0_+) = 6 = 4 + A_1 + A_2,$$

$$\frac{di_2}{dt}(0_+) = 200 = -\frac{100}{3}A_1 - 300A_2.$$

Откуда $A_1=3, A_2=-1$.

7. Окончательно получим

$$i_2 = 4 + 3\ell^{-\frac{100}{3}t} - 1\ell^{-300t}.$$

8. Ток i_3 рассчитываем аналогично:

$$i_3 = 4 - 3\ell^{-\frac{100}{3}t} - 1\ell^{-300t}.$$

9. Ток $i_1 = i_2 + i_3$.

Примечание.

В зависимости от вида корней характеристического уравнения функция $y(t)$ имеет различный вид.

Пусть $i(t)$ изменяется по закону: $i(t) = 5 - 3 \cdot \ell^{-100t} + 4 \cdot \ell^{-200t}$.

Построим его график по составляющим $i(t)$ (рис. 1.12), причем по расчету $i(0_+)=2$ А.

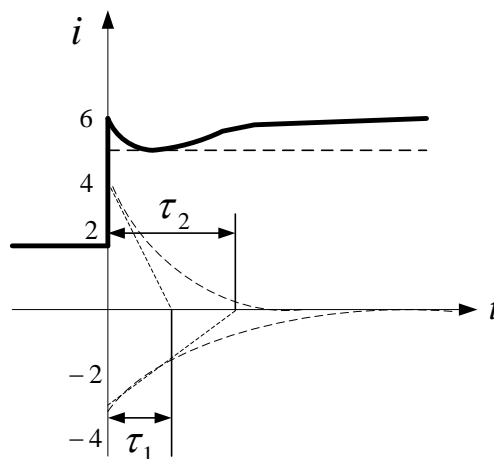


Рис. 1.12

При построении графика учтено, что: 1) при $t=0_+$ ток $i(0_+)=6$ А (ток в момент коммутации изменился скачком от 2 А до 6 А); вторая экспонента затухает в два раза быстрее, чем первая; 3)

$\frac{di}{dt}(0_+) = -500$ А/с. Это значение и его знак определяют поведение тока в момент времени $t=0_+$.

Пусть ток $i_L(t)$ изменяется по закону: $i_L(t) = 5 \sin 400t \cdot e^{-100t}$.
График тока представлен на рис. 1.13.

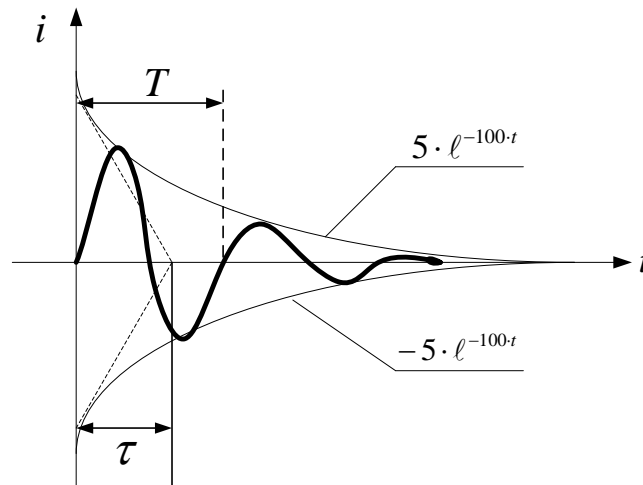


Рис. 1.13

При построении графика учтено, что: 1) $i_L(0_+) = 0$; 2) по результатам расчета $\frac{di_L}{dt}(0_+) = +2500 \frac{A}{c}$; 3) период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{cs}} = 0,0157 c - 15,7 \text{ мс}, \text{ постоянная времени цепи равна}$$

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{100} c = 0,01 \text{ мс}.$$

Раздел 2. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛОВ НАЛОЖЕНИЯ

Этот метод основан на сочетании расчета переходных процессов при постоянных источниках и принципа суперпозиции. При этом предполагается, что в схеме действует только один внешний источник сигнала.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕХОДНОЙ И ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИК ЦЕПИ

Переходная характеристика цепи $h(t)$ – это отношение реакции этой цепи при нулевых начальных условиях на ступенчатое воздействие к величине воздействия, при этом в цепи отсутствуют внутренние источники энергии.

Обозначим входное воздействие $f_1(t)$, а выходное - $f_2(t)$. Тогда переходная характеристика цепи равна

$$h(t) = \frac{f_2(t)}{f_1}.$$

Так как обычно входное воздействие является единичным ступенчатым воздействием, то переходная характеристика цепи $h(t)$ численно равна реакции цепи на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях.

$$h(t) = \frac{f_2(t)}{1}.$$

Размерность $h(t)$ равна отношению размерности отклика к размерности воздействия, поэтому переходная характеристика может иметь размерность сопротивления, проводимости или быть безразмерной.

Например, если откликом является ток, а воздействием ЭДС ($1B$), то переходная характеристика является переходной проводимостью и имеет размерность Сименс.

Примечание. Условимся нижний индекс переходной характеристики цепи выбирать соответствующим искомому отклику. Так, если требуется рассчитать, например, напряжение на емкости, то переходная характеристика обозначается $h_{u_c}(t)$, а если, например, ток $i_3(t)$, то $h_{i_3}(t)$.

Импульсная характеристика $k(t)$ численно равна реакции цепи на единичное импульсное воздействие.

Обычно при расчете классическим методом импульсную характеристику определяют как производную от переходной характеристики $k(t) = h'(t)$.

Пример 2.1.

Для схемы рис. 2.1 рассчитать переходную характеристику для напряжения на емкости и тока в неразветвленной части схемы i_1 , если на входе схемы действует источник напряжения, а параметры схемы следующие: $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 400 \text{ Ом}$, $C = 125 \text{ мкФ}$.

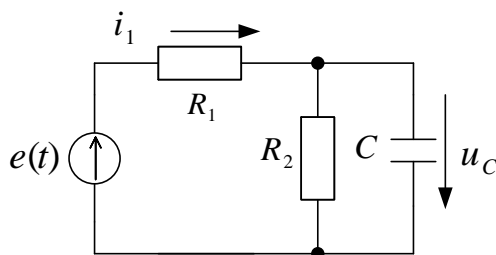


Рис. 2.1

Решение

Полагая, что схема подключается к источнику напряжения $1B$ (рис. 2.2), рассчитываем u_C и i_1 классическим методом:

$$u_C(t) = u_{C_{вын}} + u_{C_{св}} = u_{C_{вын}} + A \cdot \ell^{pt}.$$

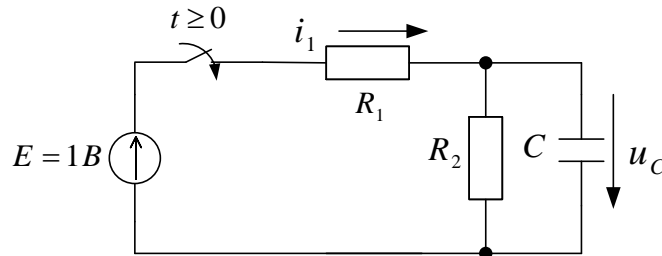


Рис. 2.2

Для определения значения p составляем характеристическое уравнение

$$Z_{ex}(p) = \frac{1}{Cp} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0, \quad \text{откуда} \quad p = -100 \frac{1}{c}.$$

Вынужденная составляющая напряжения u_C равна

$$u_{C_{вын}} = \frac{E = 1B}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = 0.8 \text{ B}.$$

Учитывая, что $u_C(0_-) = 0 = u_C(0_+)$, определим постоянную интегрирования A :

$$u_C(0_+) = 0 = 0.8 + A \rightarrow A = -0.8.$$

Следовательно,

$$u_C(t) = 0.8 - 0.8 \cdot \ell^{-100t}.$$

Ток i_1 можно найти аналогично, можно из уравнения

$$E = i_1 R_1 + u_C \rightarrow i_1(t) = 0.02 + 0.08 \ell^{-100t}.$$

Переходные характеристики для напряжения на емкости и тока i_1 равны соответственно

$$h_{u_C}(t) = u_{u_C}(t) \cdot 1(t) = [0.8 - 0.8 \cdot \ell^{-100t}] \cdot 1(t),$$

$$h_{i_1}(t) = i_{i_1}(t) \cdot 1(t) = [0.02 + 0.08 \cdot \ell^{-100t}] \cdot 1(t).$$

Причем, переходная характеристика для напряжения на емкости является безразмерной функцией, а переходная характеристика для тока имеет размерность Сименс.

В выражениях для переходных и импульсных характеристик единичная функция играет роль ключа.

Пример 2.2.

Для схемы (рис. 2.3) определить переходную и импульсную характеристики цепи по напряжению при $R=10 \text{ Ом}$ и $L=0.1 \text{ Гн}$.

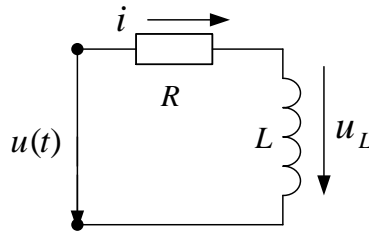


Рис. 2.3

Решение

Переходную характеристику рассчитываем, полагая, что схема подключается к источнику постоянного напряжения $1B$, причем начальные условия нулевые, т.е. $i_L(0) = 0$.

$$i_L(t) = i_{L_{\text{вын}}} + i_{L_{\text{св}}} = \frac{1}{R} + A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = 0.1 + A \cdot e^{-100t}.$$

При $t = 0_+$ $i_L(0_+) = 0 = 0.1 + A$. Откуда $A = -0.1$.

Следовательно,

$$i_L(t) = 0.1 - 0.1 \cdot e^{-100t}, \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt} = 1 \cdot e^{-100t}, \quad h_{u_L}(t) = 1 \cdot e^{-100t} \cdot 1(t).$$

Импульсную характеристику просто определить путем дифференцирования переходной характеристики.

2.2. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ НАЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

В зависимости от того, какая характеристика цепи (переходная или импульсная) используется для расчета переходного процесса при произвольных воздействиях, интегралы наложения имеют различные формы записи. Одной из форм интегралов наложения с использованием переходной характеристики, получившей большое распространение в электротехнике, является интеграл Дюамеля.

Обозначили входное воздействие через $f_1(t)$, а выходной сигнал (отклик) через $f_2(t)$. Для случая, когда $f_1(t)$ является непрерывной функцией при всех t , за исключением точки $t=0$, где $f_1(t)$ может иметь разрыв первого рода, т.е. $f_1(0) \neq 0$, интеграл Дюамеля имеет вид:

$$\begin{aligned}
f_2(t) &= f_1(0)h(t) + \int_0^t f_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau = f_1(0)h(t) + \int_0^t f_1'(t-\tau)h(\tau)d\tau = \\
&= f_1(t)h(0) + \int_0^t f_1(\tau)h'(t-\tau)d\tau = f_1(t)h(0) + \int_0^t f_1(t-\tau)h'(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

С помощью интеграла Дюамеля можно определить реакцию цепи на входное воздействие и в случае, если входное воздействие описывается кусочно-непрерывной функцией, имеющей конечное число разрывов первого рода. В этом случае интервал интегрирования следует разбить на несколько интервалов в соответствии с интервалами непрерывности воздействия $f_I(t)$ и учесть при этом реакцию цепи на конечные скачки воздействия $f_I(t)$ в точках разрыва.

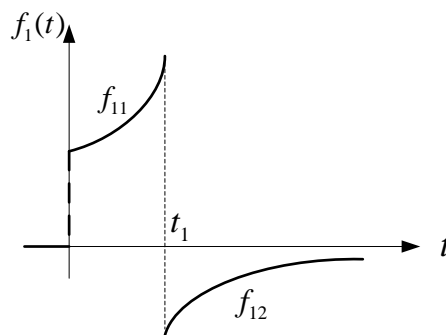


Рис. 2.4

Например, если воздействие $f_I(t)$ имеет вид рис. 2.4, то решение записывают для каждого интервала:

$$0 \leq t < t_1$$

$$f_2(t) = \int_0^t f_{I1}'(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

$$t \geq t_1$$

$$f_2(t) = \int_0^{t_1} f_{I1}'(\tau)h(t-\tau)d\tau + [f_{I1}(t_{1-}) - f_{I2}(t_{1+})]h(t-t_1) + \int_{t_1}^t f_{I2}'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Примечание. Так как расчет переходных процессов с использованием интеграла Дюамеля проводится по интервалам, то в выражении переходной характеристики цепи множитель $I(t)$ отсутствует.

Порядок расчета

1. Определяем переходные и (или) импульсные характеристики цепи.
2. Проводим расчет, используя интеграл Дюамеля.

Пример 2.3.

Для схемы рис. 2.5 определить закон изменения тока в цепи, если входное напряжение изменяется по закону рис. 2.6. При этом $U = 10 \text{ В}$, $t_1 = 0.001 \text{ с}$, $R = 10 \text{ Ом}$, $C = 100 \text{ мкФ}$.

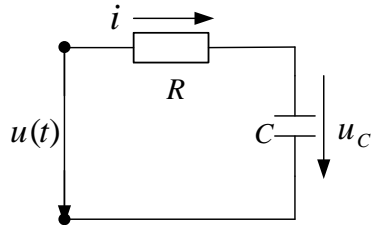


Рис. 2.5

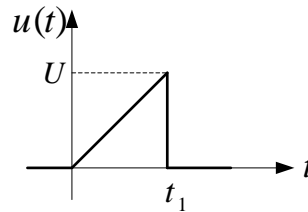


Рис. 2.6

Решение

1. Определяем переходную характеристику $h_i(t)$. Для чего рассчитываем классическим методом напряжение на емкости, считая, что схема с нулевыми начальными условиями (речь идет о независимых начальных условиях, т.е. в данном случае о напряжении на емкости) подключается к источнику постоянного напряжения 1 В.

В результате расчета получим $u_C(t) = 1 - 1 \cdot e^{-1000t}$.

Ток в схеме равен $i(t) = 0.1 \cdot e^{-1000t}$.

Следовательно, ему соответствует переходная характеристика

$$h_i(t) = 0.1 \cdot e^{-1000t}.$$

2. Так как входное воздействие является разрывной функцией, то решение проводим по интервалам:

$$0 \leq t < t_1$$

$$\begin{aligned} i(t) &= u(0)h_i(t) + \int_0^t u'(\tau)h_i(t-\tau)d\tau = \int_0^t k \cdot 0.1 \cdot e^{-1000(t-\tau)}d\tau = \\ &= \frac{10^3}{10^3} \cdot e^{-1000t} \cdot e^{1000\tau} \Big|_0^t = 1 - e^{-1000t}. \end{aligned}$$

При интегрировании учтено, что входное напряжение изменяется по линейному закону $u(t) = kt$, где $k = 1000$.

$$\begin{aligned}
t &\geq t_1 \\
i(t) &= \int_0^{t_1} u'(\tau) h_i(t-\tau) d\tau + \Delta u h_i(t-t_1) = \ell^{-1000\alpha} \cdot \ell^{1000\tau} \Big|_0^{t_1} - 10 \cdot 0.1 \cdot \ell^{-1000\alpha(t-t_1)} = \\
&= \ell^{-1000\alpha} \cdot (\ell^1 - 1) - \ell^{-1000\alpha} \cdot \ell^1 = -\ell^{-1000\alpha}.
\end{aligned}$$

На рис .2.7 представлен график рассчитанного отклика.

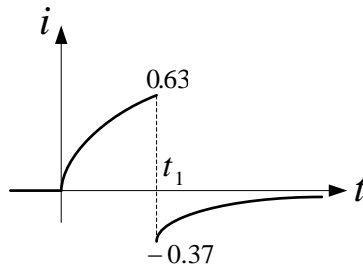


Рис. 2.7

Примечание. Следует обратить внимание на то, что напряжение на емкости не может менять скачком при любом изменении входного воздействия. В то время как ток в емкости может меняться скачком, если скачком меняется входное воздействие, причем, величина скачка тока определяется величиной скачка входного напряжения так же, как и момент времени, в который этот скачок происходит. В рассматриваемом примере входное напряжение уменьшается на 10 В , следовательно, скачок тока равен -1 А . Это же значение получим, рассчитав $i(t_{1+}) - i(t_{1-}) = -0.37 - 0.63 = -1\text{ А}$.

Пример 2.4.

Схема рис. 2.3 подключается к напряжению рис. 2.8. Рассчитать закон изменения тока в схеме и напряжения на индуктивности, если $U = 10\text{ В}$, $t_1 = 0.01\text{ с}$, $R = 10\text{ Ом}$, $L = 0.1\text{ Гн}$.

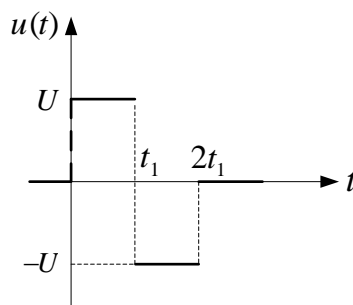


Рис. 2.8

Решение

1. Переходные характеристики были рассчитаны в примере 2.2, они равны $h_i(t) = 0.1 - 0.1 \cdot e^{-100t}$, $h_{u_L}(t) = 1 \cdot e^{-100t}$.

2. Так как входное воздействие является разрывной функцией, то решение проводим для каждого интервала:

$$0 \leq t < t_1$$

$$u_L(t) = u(0)h_{u_L}(t) + \int_0^t u'(\tau)h_{u_L}(t-\tau)d\tau = 10 \cdot e^{-100t},$$

$$i(t) = 1 - 1 \cdot e^{-100t}.$$

При интегрировании учтено, что непрерывная часть входного напряжения $u(t) = U$, $u'(t) = 0$.

$$t_1 \leq t < t_2$$

Так как и на втором и третьем интервалах $u'(t) = 0$, то опустим в записи интеграла Дюамеля соответствующие слагаемые.

$$\begin{aligned} u_L(t) &= u(0)h_{u_L}(t) + \Delta u(t_1)h_{u_L}(t-t_1) = 10 \cdot e^{-100t} - 20 \cdot e^{-100(t-t_1)} = \\ &= -44 \cdot e^{-100t}, \end{aligned}$$

$$i(t) = -1 + 4.4 \cdot e^{-100t}.$$

$$t \geq t_2$$

$$\begin{aligned} u_L(t) &= u(0)h_{u_L}(t) + \Delta u(t_1)h_{u_L}(t-t_1) + \Delta u(t_2)h_{u_L}(t-t_2) = \\ &= 10 \cdot e^{-100t} - 20 \cdot e^{-100(t-t_1)} + 10 \cdot e^{-100(t-t_2)} = \\ &= 30 \cdot e^{-100t}, \end{aligned}$$

$$i(t) = -3 \cdot e^{-100t}.$$

На рис. 2.9 представлены графики рассчитанных откликов.

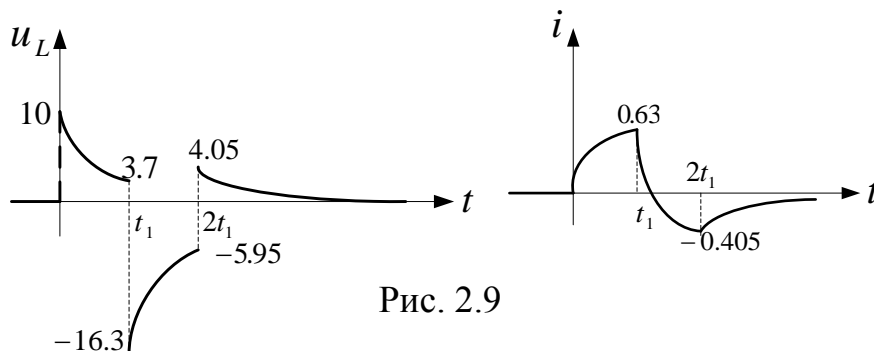


Рис. 2.9

Проверка правильности расчета проводится так же, как в предыдущем примере. Необходимо только учесть, что в этой схеме скачком не может меняться ток в индуктивности, а напряжение на индуктивности может.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое переходной процесс?
2. В чём суть классического метода расчёта переходных процессов?
3. Как определяются вынужденная и свободная составляющие искомой функции?
4. От чего зависит вид вынужденной и свободной составляющих искомой функции?
5. Что такое независимые и зависимые начальные условия и как они определяются? Для какого момента времени и для какой схемы?
6. Как составляется характеристическое уравнение методом входного сопротивления? От чего зависит порядок характеристического уравнения?
7. Как определяется длительность переходного процесса?
8. Что такое переходная и импульсная характеристики цепи?
9. Как рассчитываются переходные и импульсные характеристики? При каких начальных условиях? Какую размерность они имеют?
10. Как связаны между собой переходная и импульсная характеристики?
11. В чём заключается особенность расчёта переходных процессов при произвольных входных воздействиях методом интегралов Дюамеля?
12. Как можно проверить правильность расчёта методом интегралов Дюамеля?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 2000. 576с.
2. Кузовкин В.А. Теоретическая электротехника. – М.: Логос, 2002. 480с.
3. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. – М.: Высшая школа, 1990. 364с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	стр.2
Раздел 1. Классический метод расчета переходных процессов....	3
Раздел 2. Расчет переходных процессов при произвольных входных воздействиях с использованием интегралов наложения...	22
Контрольные вопросы.....	27
Литература.....	27