Metody statystyczne - zestaw 1

1. Mając do dyspozycji generator liczb pseudolosowych o rozkładzie jednorodnym $U[0,1]$, wygeneruj liczby z rozkładu:

1. jednorodnego na przedziale $[a,b]$.
2. wykładniczego $p(x) = \begin{cases} 0\,,\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}\,,\ x \geq 0 \end{cases}$ (metoda odwracania dystrybuanty)
3. normalnego $N(0,1)$ (metoda Boxa-Mullera)

W każdym przypadku wygeneruj histogram zmiennej losowej x i porównaj go z analitycznym wzorem.

- *Metoda odwracania dystrybuanty - proszę policzyć dystrybuantę rozkładów z puntów 1 i 2, a następnie ją odwrócić. Wynik jest następujący: dla rozkładu jednorodnego* $F^{-1}(x) = (b-a)x+a$*, a dla rozkładu eksponencjalnego* $F^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-x}$*. Jeśli u są losowane z rozkładu jednorodnego* $U(0,1)$*, to* $F^{-1}(u)$ *będą losowane z rozkładu o dystrybuancie F. Proszę więc wygenerować odpowiednio dużo* $F^{-1}(u)$*, narysować ich rozkład (unormowany histogram) i porównać z analitycznym wzorem.*
- *Metoda Box–Mullera: okazuje się, że jeżeli zmienne* u_1*,* u_2 *są losowane z rozkładu jednorodnego, to zmienne* $y_1 = \sqrt{-2\ln u_1}\sin(2\pi u_2)$ *oraz* $y_2 = \sqrt{-2\ln u_1}\cos(2\pi u_2)$ *są losowane z rozkładu normalnego* $\mathcal{N}(0,1)$*. Proszę wykonać histogram dla jednej z tych funkcji i porównać go z analitycznym wzorem.*

2. Przypomnienie z wykładu - „Ruina gracza”. Gracz A wygrywa kolejkę gry z prawdopodbieństwem p i przegrywa z prawdopodobieństwem q ($p+q=1$, $0 < p,q < 1$). Znajdź prawdopodobieństwo, że gracz A zrujnuje się (to znaczy, że jego kapitał spadnie do zera), mając początkowo kapitał a. Gracz B posiada początkowo kapitał b. Rozważ przypadki $p \neq q$ oraz $p = q = \frac{1}{2}$.

Niech r_a^A *będzie prawdopodobieństwem ruiny gracza A przy kapitale początkowym* a*. Dla* $p \neq q$ *mamy:* $r_a^A = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^z} = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^b}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^z}$*. Dla* $p = q = \frac{1}{2}$ *mamy* $r_a^A = \frac{b}{z}$*.*

3. Wyrysuj wykres liczby wygranych i kapitału w funkcji numeru rozgrywki dla obu graczy. Powtórz ćwiczenie dla różnych p.

Propozycja implementacji:

- *Proszę zaimplementować funkcję "rzut", która jako argumenty przyjmuje prawdopodobieństwo p oraz kapitały graczy A i B. Funkcja powinna zwracać kapitał gracza A i B po jednym kroku gry (rzucie fałszywą monetą): z prawdopodobieństwem p powinna dodać 1 do kapitału gracza A i odjąć 1 od kapitału gracza B oraz z prawdopodobieństwem* $q = 1 - p$ *powinna dodać 1 do kapitału gracza B i odjąć 1 od kapitału gracza A.*

- *Proszę następnie napisać funkcję "gra", która jako argumenty przyjmuje p oraz kapitały początkowe graczy A i B. Funkcja "gra" powinna zawierać pętlę, która kończy się, gdy któryś z graczy się zrujnuje.*

- *Proszę przeprowadzić wiele gier (np. 200) - w każdej grze gracze dostają nowy kapitał a i b i grają do ruiny jednego z graczy, a następnie proszę wyrysować wykresy liczby wygranych oraz kapitału obu graczy w funkcji numeru rozgrywki (jeśli gracz wygrywa daną partię, to jego kapitał wzrasta, jeśli przegrywa, to kapitał maleje). Przykładowe parametry p: 0.1, 0.45, 0.5, 0.55, 0.9. Proszę wziąć równe kapitały początkowe (np. po 20).*

4. Wyrysuj rozkład prawdopodbieństwa ruiny gracza A w funkcji kapitału początkowego (rozważ przypadki $p \neq q$ oraz $p = q = \frac{1}{2}$). Porównaj rozkłady z wyliczonymi analitycznie.

W tym zadaniu chodzi o porównanie numeryki z analitycznymi wzorami z zad. 2. Propozycja implementacji dla zadanego p:

- *Proszę przyjąć stałe* $z = a + b$, *np.* $z = 100$.

- *Następnie, dla każdego możliwego zestawu (a,b), czyli (a=1, b=99), (a=2, b=98) itd., proszę znaleźć prawdopodobieństwo ruiny gracza A.*

- *Jak wyliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A? Proszę zasymulować wiele gier (np. 100 lub 1000) dla danego zestawu (a,b), prawdopodobieństwem ruiny będzie liczba przegranych gier przez liczbę wszystkich gier.*

Proszę powtórzyć te symulacje dla różnych p, podobnie jak w poprzednim zadaniu. Otrzymane wyniki proszę porównać ze wzorami analitycznymi (tzn. przedstawić je na jednym wykresie).

5. Wyrysuj histogram przedstawiający liczbę kolejek potrzebnych do ukończenia gry dla $p = \frac{1}{5}$, $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{4}{5}$.

W tym zadaniu wystarczy rozegrać wielokrotnie grę i kontrolować liczbę kolejek w danej grze. Propozycja implementacji:

- *Proszę napisać funkcję, która dla danego p oraz kapitałów początkowych rozgrywa grę oraz zwraca długość rozgrywki (ilość rzutów) - wystarczy zmodyfikować funkcje z wcześniejszych zadań.*

- *Proszę rozegrać wiele gier (np. 10000) oraz narysować histogram z czasów rozgrywki.*

Proszę powtórzyć zadanie dla różnych p, podobnie jak we wcześniejszych zadaniach.

6*. Korzystając z wyników zadania 5, wyrysuj rozkład średniej długości rozgrywki w zależności od p. Dla jakich wartości przewidywane jest maksimum?

7*. Wyrysuj rozkład kapitału gracza A po n rozgrywkach dla $n = 10$, $n = 0.5\bar{n}$, $n = 0.9\bar{n}$ ($\bar{n}$ jest średnią długością rozgrywki dla zadanych parametrów) oraz dla różnych $p = \frac{1}{5}$ lub $p = \frac{1}{2}$.

8. Wyrysuj rozkład prawdopodobieństwa ruiny gracza A w funkcji prawdopodobieństwa wygrania pojedynczej rozgrywki p. Przedstaw rysunki dla dużego i małego kapitału początkowego.

Zadanie podobne do zad. 4, ale tutaj mamy ustalone kapitały, a zmienną jest p.

9*. Powtórz zadania (3, 5, 8) dla trzech lub więcej graczy.