Московский Государственный Университет

Отчет по задаче: «Построение минимального покрывающего дерева»

Камалов Руслан, гр.617

Москва, 2017

1. Постановка задачи

Дан взвешенный неориентированный граф G с n вершинами и m рёбрами. Требуется найти такое поддерево этого графа, которое бы соединяло все его вершины, и при этом обладало наименьшим возможным весом (т.е. суммой весов рёбер). Поддерево — это набор рёбер, соединяющих все вершины, причём из любой вершины можно добраться до любой другой ровно одним простым путём.

Такое поддерево называется минимальным остовным деревом или просто минимальным остовом.

В естественной постановке эта задача звучит следующим образом: есть n городов, и для каждой пары известна стоимость соединения их дорогой (либо известно, что соединить их нельзя). Требуется соединить все города так, чтобы можно было доехать из любого города в другой, а при этом стоимость прокладки дорог была бы минимальной.

2. Описание алгоритма

Искомый минимальный остов строится постепенно, добавлением в него рёбер по одному. Изначально остов полагается состоящим из единственной вершины, выбранной произвольно. Затем выбирается ребро минимального веса, исходящее из этой вершины, и добавляется в минимальный остов. После этого остов содержит уже две вершины, и теперь ищется и добавляется ребро минимального веса, имеющее один конец в одной из двух выбранных вершин, а другой — наоборот, во всех остальных, кроме этих двух. И так далее, т.е. всякий раз ищется минимальное по весу ребро, один конец которого — уже взятая в остов вершина, а другой конец — ещё не взятая, и это ребро добавляется в остов (если таких рёбер несколько, можно взять любое). Этот процесс повторяется до тех пор, пока остов не станет содержать все вершины. В итоге будет построен остов, являющийся минимальным.

Так представленный граф является полным, была выбрана версия алгоритма с асимптотикой $O(n^2)$ (алгоритм Прима для плотных графов, так как граф городов из условия является полным), где n – число вершин графа.

Для каждой ещё не выбранной будем хранить минимальное ребро, ведущее в уже выбранную вершину.

Тогда, чтобы на текущем шаге произвести выбор минимального ребра, надо просто просмотреть эти минимальные рёбра у каждой не выбранной ещё вершины — асимптотика составит $O(n)$.

Но теперь при добавлении в остов очередного ребра и вершины эти указатели надо пересчитывать. Заметим, что эти указатели могут только уменьшаться, т.е. у каждой не просмотренной ещё вершины надо либо оставить её указатель без изменения, либо присвоить ему вес ребра в только что добавленную вершину. Следовательно, эту фазу можно сделать также за $O(n)$.

Таким образом, мы получили вариант нахождения минимального остовного дерева с асимптотикой $O(n^2)$.

3. Инструкция по работе с программой

К коду на C++ прилагается exe-модуль, а также txt-файл в котором задан граф. Параметром запуска является имя файла, в котором хранится граф. Текстовый файл с графом приложен к письму.