Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математических методов прогнозирования

Отчёт по теме
Точная одномерная оптимизация

Выполнил студент 517 группы

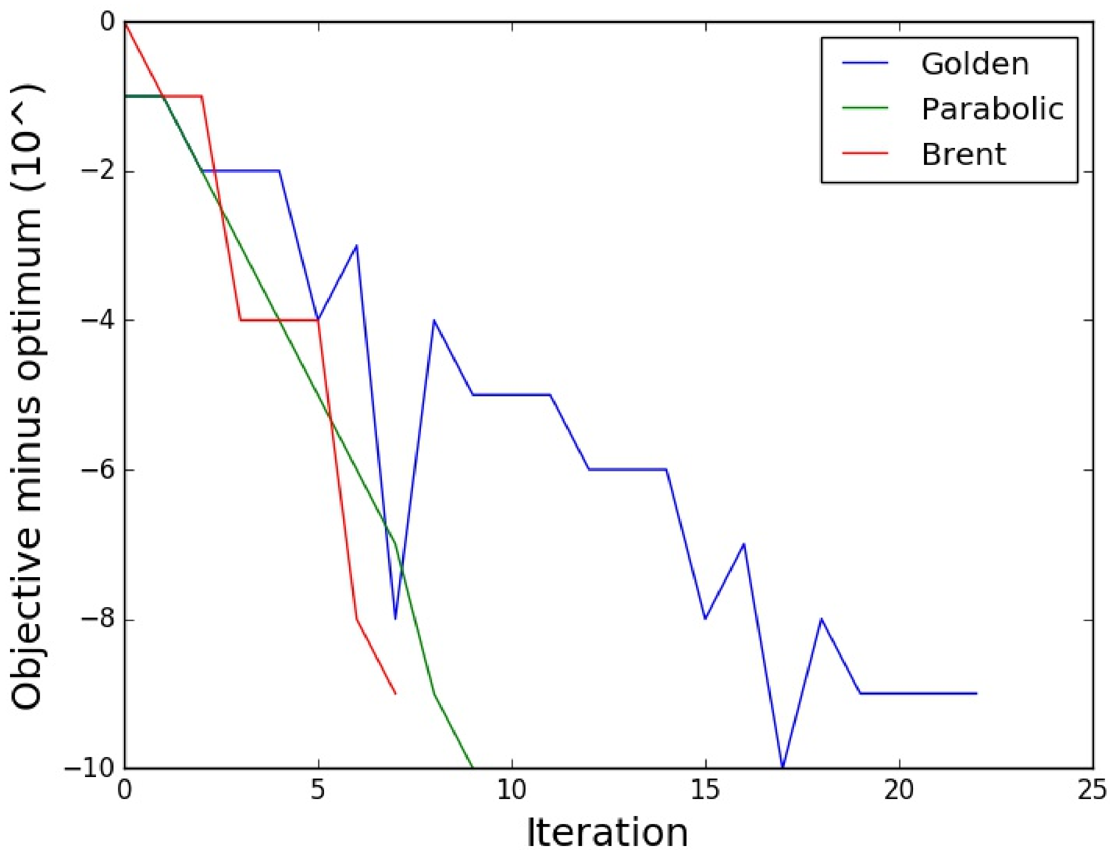
Камалов Руслан Рамилевич

Москва
2016

1 Алгоритмы оптимизации без производной

1.1 Тест 1

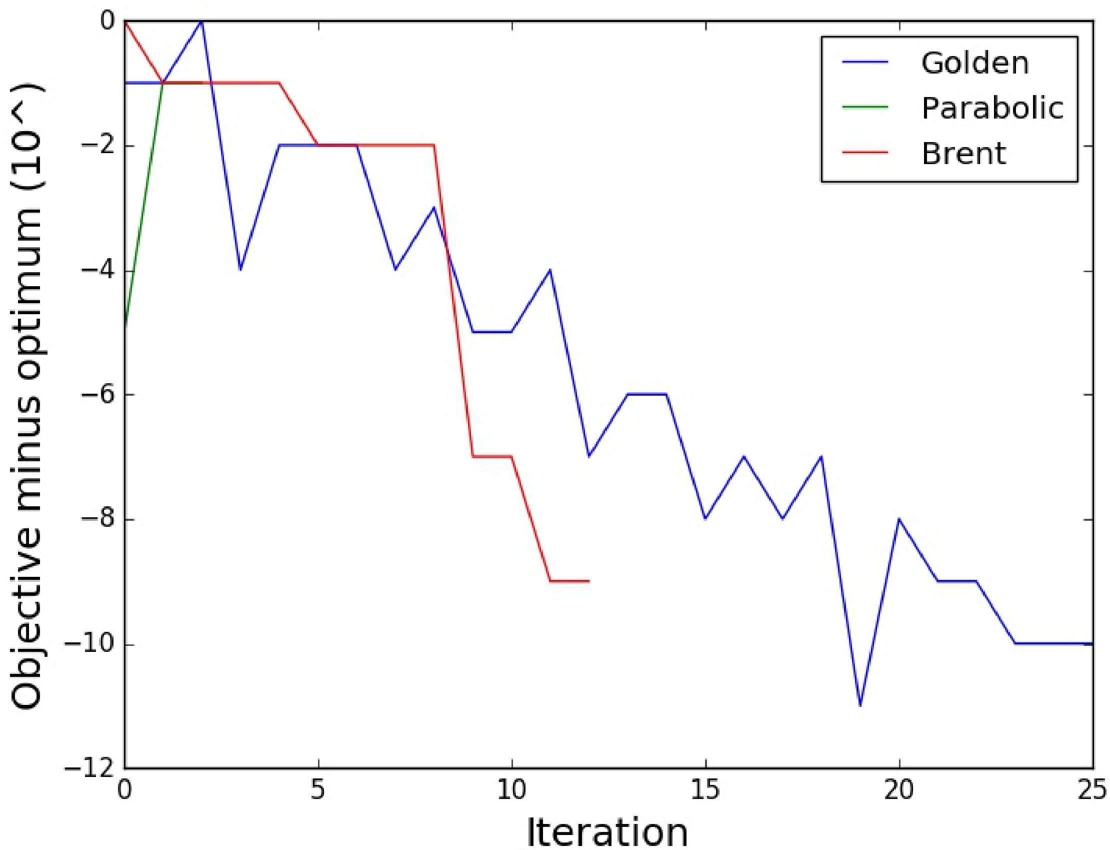
В качестве тестовой функции берется:
$f_1(x) = -5x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 2x + 1$ на интервале $[-0.5, 0.5]$
$\min(f_1) = -5.40596, \quad argmin(f_1) = 9.20624$
Результат работы методов:



Комментарий: Наилучший результат показали методы парабол и Брента так как исходная функция полином и хорошо приближается параболой

1.2 Тест 2

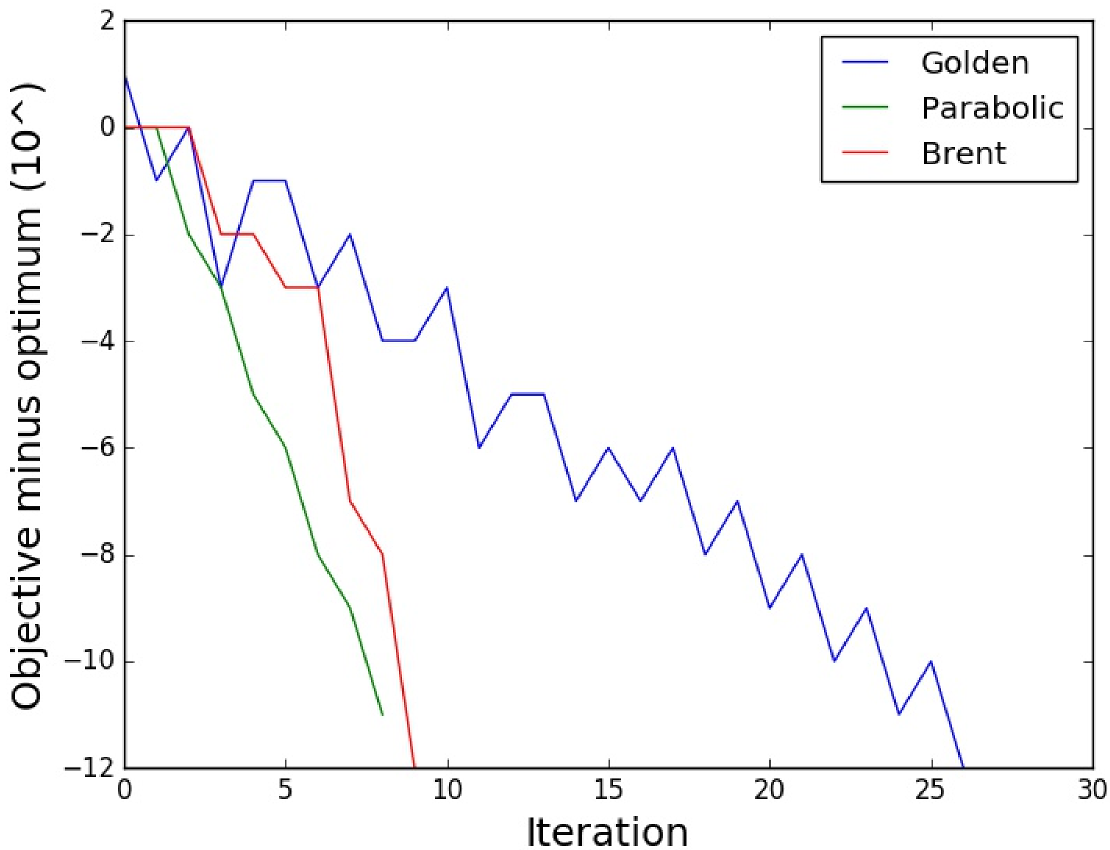
В качестве тестовой функции берется:
$f_2(x) = -\ln^2(x-2) + \ln^2(10-x) - x^{0.2}$ на интервале $[6, 9.9]$
$\min(f_2) = 0.897633, \quad argmin(f_2) = 0.10986$
Результат работы методов:



Комментарий: Метод парабол не смог с хорошей точностью найти оптимум, так как на каждой итерации выходил за пределы области определения функции. Метод золотого сечения нашел оптимум, но довольно медленно, так как не учитывал поведение функции вблизи оптимума. Лучший результат в этой задаче показал метод Брента, так как сочитает в себе и метод парабол и метод золотого сечения.

1.3 Тест 3

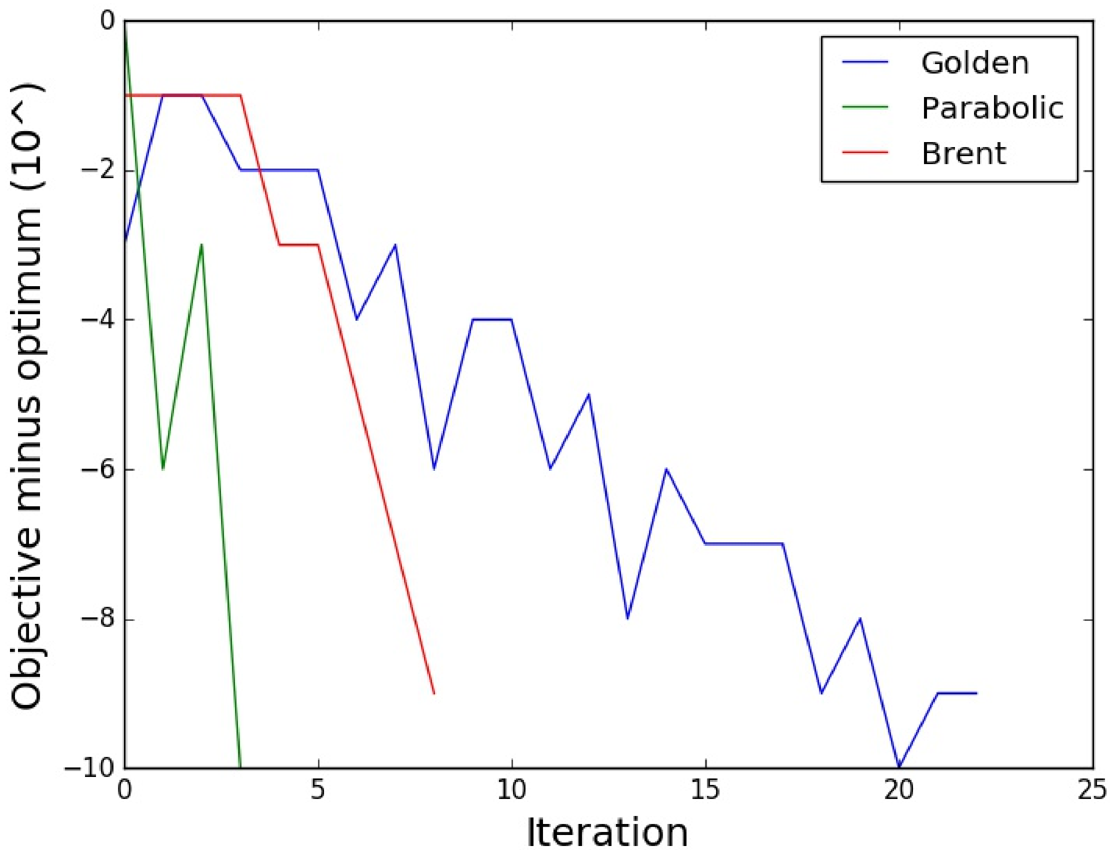
В качестве тестовой функции берется:
$f_3(x) = -3x\sin(0.75x) + \exp^{-2x}$ на интервале $[0, 2\pi]$
$\min(f_3) = -7.27436, \quad argmin(f_3) = 2.70648$
Результат работы методов:



Комментарий: Метод парабол и метод Брента показали приблизительно одинаковый результат. Метод Брента работал существенно дольше.

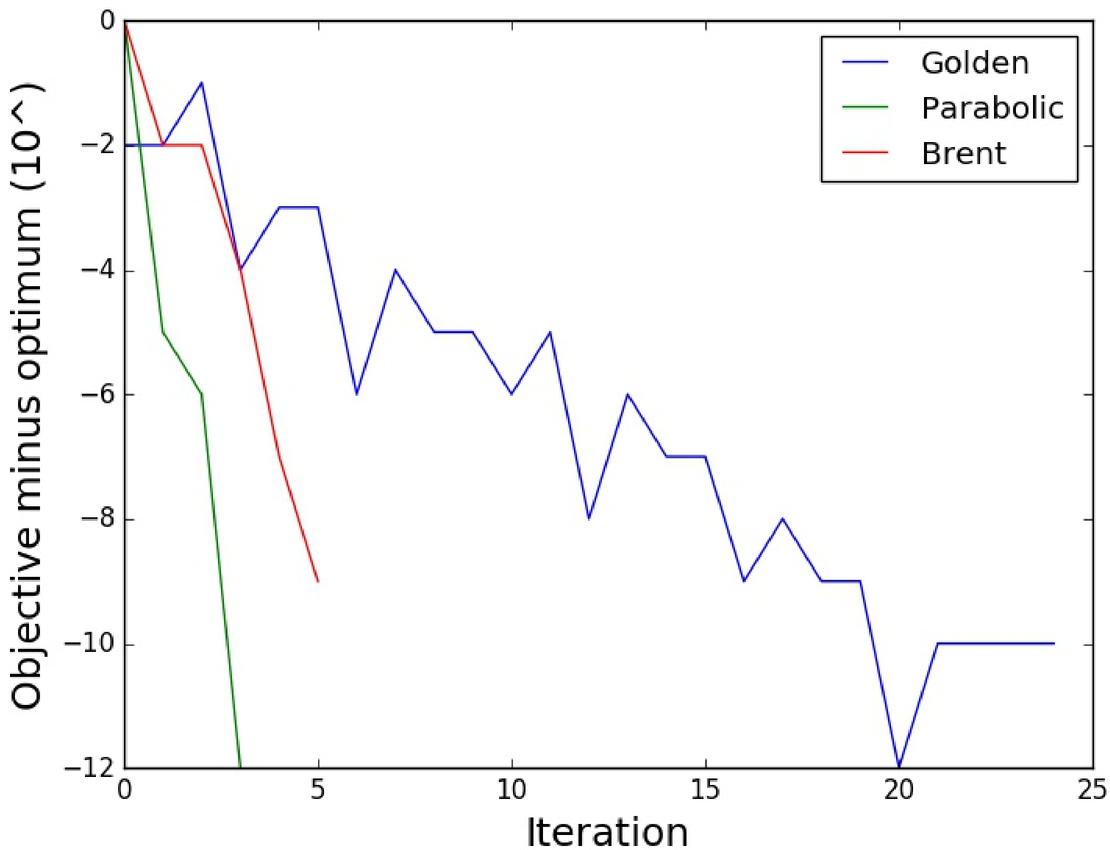
1.4 Тест 4

В качестве тестовой функции берется:
$f_4(x) = \exp^{3x} + 5\exp^{-2x}$ на интервале $[0, 1]$
$\min(f_4) = 5.14841, \quad argmin(f_4) = 2.12464$
Результат работы методов:



1.5 Тест 5

В качестве тестовой функции берется:
$f_5(x) = 0.2x\ln(x) + (x - 2.3)^2$ на интервале $[0.5, 2.5]$
$\min(f_5) = 0.35097, \quad argmin(f_5) = 0.24079$
Результат работы методов:



Выводы Исходя из графиков сходимости на каждой из пяти тестовых функций можно сделать вывод о сходимости методов:

- метод золотого сечения : **линейная**
- метод парабол : **квадратичная**
- метод Брента : **квадратичная**

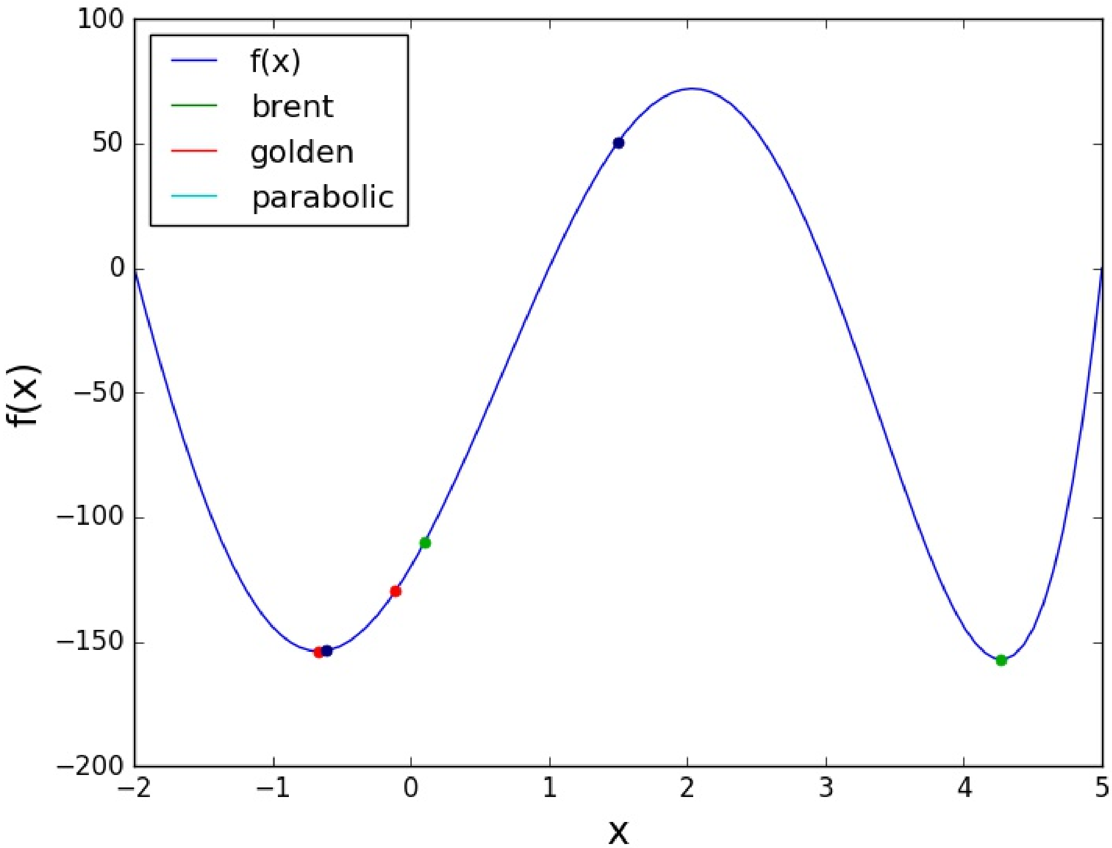
Метод золотого сечения гарантировано находит оптимум у одномодальной функции, но из-за уменьшения длины шага на каждой итерации в фиксированное число раз может работать довольно долго по сравнению с остальными методами.

Метод парабол довольно быстро находит оптимум функции из достаточно хорошего начального приближения.

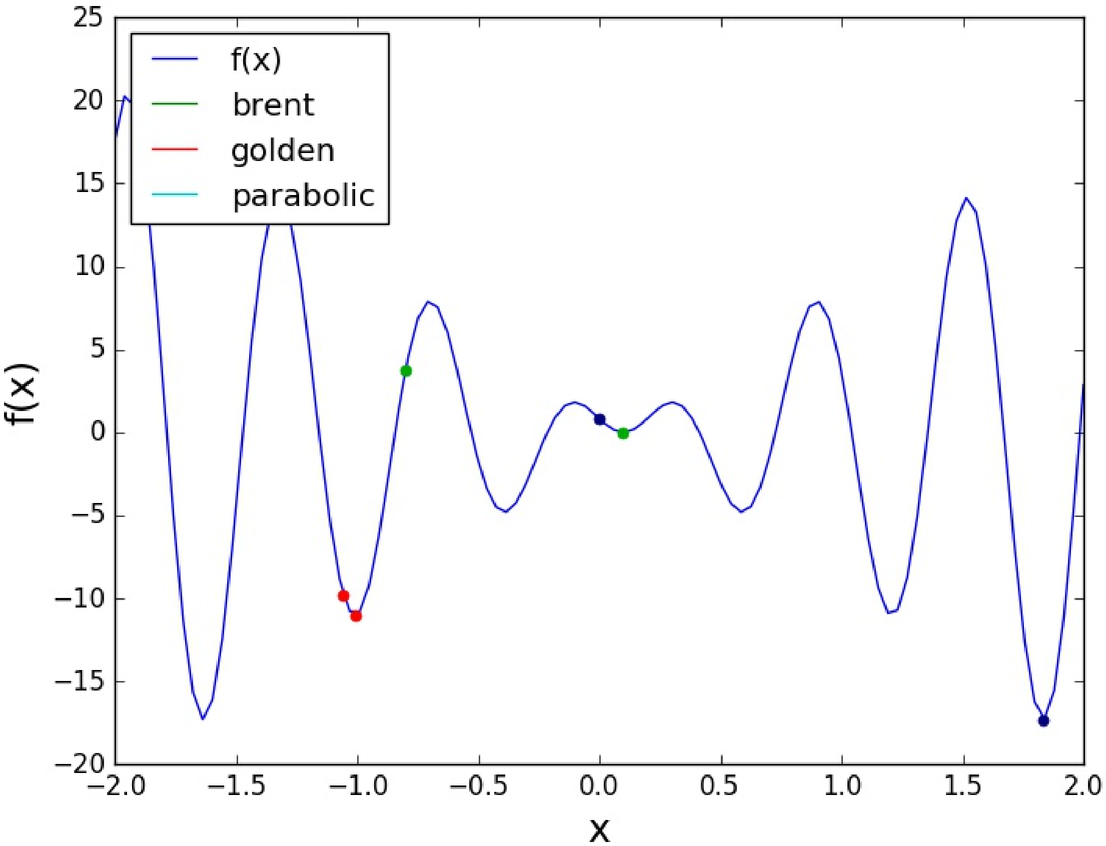
Метод Брента сочетает в себе оба предыдущих метода, поэтому работает довольно стабильно и быстро.

1.6 Результаты работы на многомодальных функциях

Тестовая многомодальная функция:
$f_1^*(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)(x-5)$ на интервале $[-2, 5]$
$\min(f_1^*) = -157.198, -153.9095, \quad Argmin(f_1^*) = 4.27149, -0.67594$
Результат работы методов:
для каждого метода помечена его стартовая точка и результат



Тестовая многомодальная функция:
$f_2^*(x) = 10(x-0.1)\sin(10(x-0.1))$ на интервале $[-2,2]$
$Argmin(f_2^*) = -1.00855, -0.39131, 0.1, 0.5913, 1.2085$
Результат работы методов:
для каждого метода помечена его стартовая точка и результат



О сходимости методов золотого сечения/Брента к точке локального максимума или седловой точке

Метода золотого сечения:

Допустим, что метод золотого сечения может сойтись к точке локального максимума или седловой точке, тогда на достаточно большой итерации сегмент поиска стянется в некоторую малую окрестность локального максимума или седловой точки, где искомая функция будет уже одномодальна. Тогда, допустим текущее приближение не является точкой локального максимума, если на каждой итерации будет получаться точка, значение в которой больше текущего, то последовательность этих точек будет сходится к локальному максимуму, на некоторой итерации процесс остановится из-за слишком маленького шага, приняв за ответ точку, не являющуюся точкой локального максимума, если же на каком-то шаге, получилась точка со значением меньше текущего, то приняв ее за новый конец сегмента, получим, что на новом сегменте функция уже монотонна. Следовательно, конечный ответ не может быть точкой локального максимума. Если же изначально текущее приближение являлось локальным максимумом, то выбирая на следующем шаге любую точку из текущего сегмента можно уменьшить значение функции и запустить предыдущую последовательность действий.

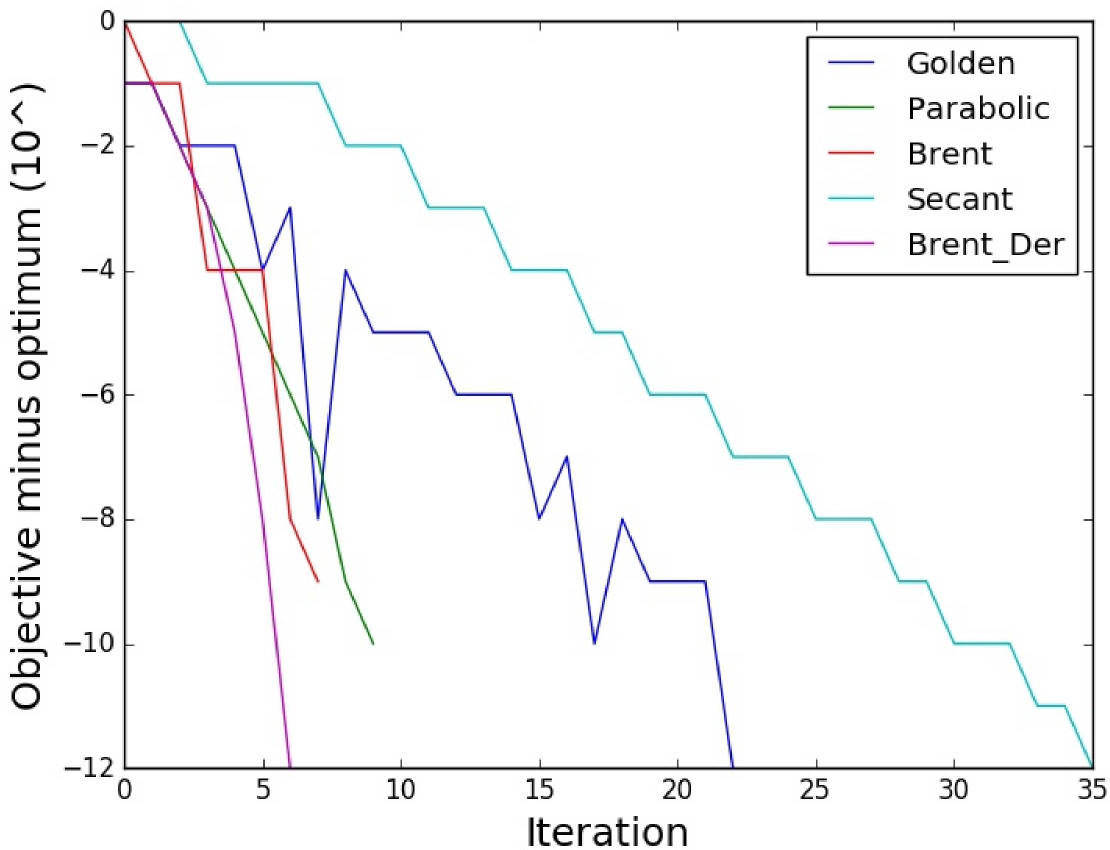
Метод Брента:

Допустим, что метод Брента может сойтись к точке локального максимума или седловой точке, тогда на достаточно большой итерации сегмент поиска стянется в некоторую малую окрестность локального максимума или седловой точки, где искомая функция будет уже одномодальна. Если текущее приближение является точкой локального максимума, то любая другая точка из сегмента может уменьшить значение функции. Далее аналогично методу золотого сечения либо текущее приближение в итоге станет ответом алгоритма либо в какой-то момент функция на текущем сегменте станет монотонной. Отсюда Метод Брента не может сойтись к локальному максимуму или седловой точке.

2 Алгоритмы оптимизации без производной

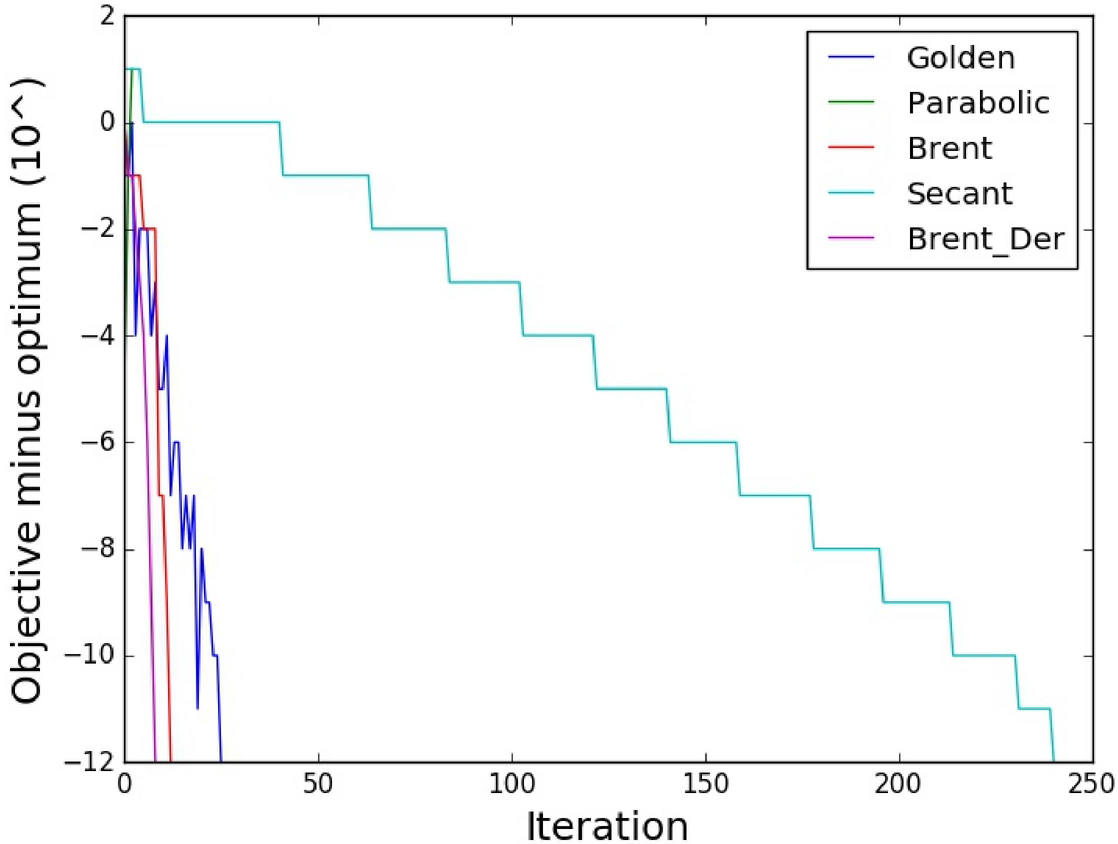
2.1 Тест 1

В качестве тестовой функции берется:
$f_1(x) = -5x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 2x + 1$ на интервале $[-0.5, 0.5]$
$\min(f_1) = -5.40596, \quad argmin(f_1) = 9.20624$
Результат работы методов:



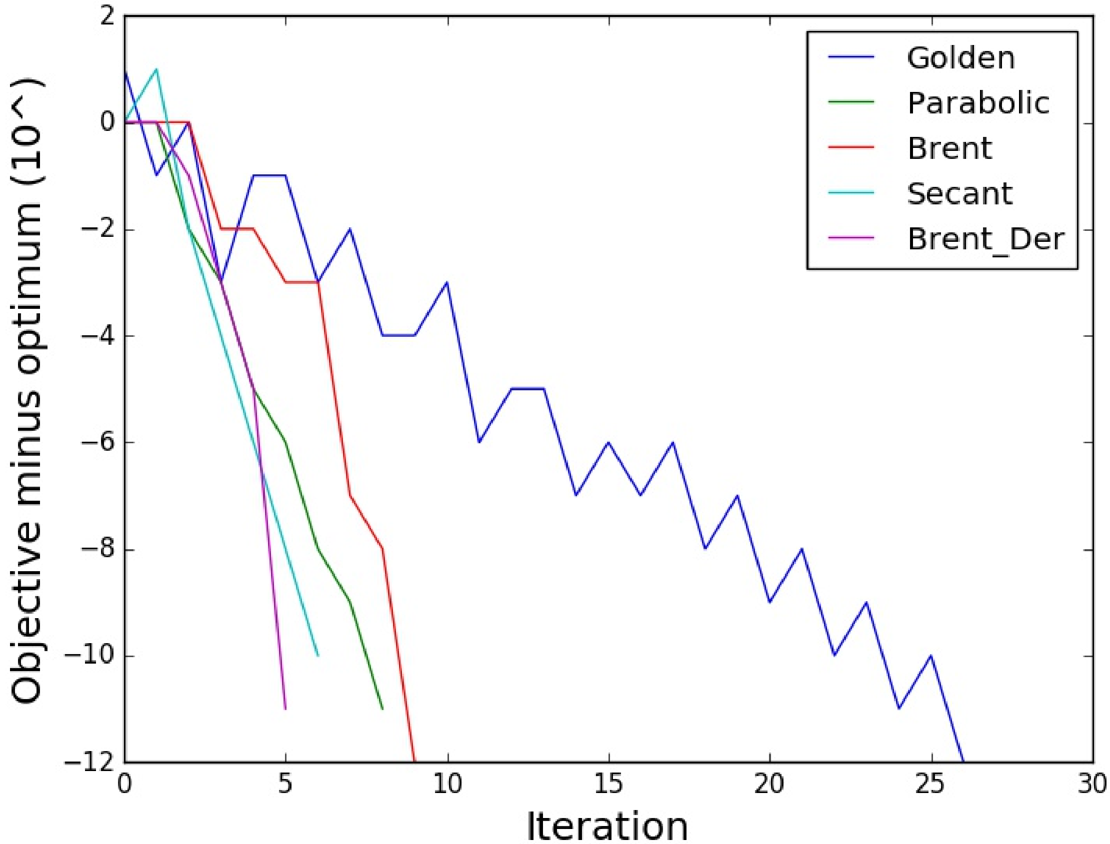
2.2 Тест 2

В качестве тестовой функции берется:
$f_2(x) = -\ln^2(x-2) + \ln^2(10-x) - x^{0.2}$ на интервале $[6, 9.9]$
$\min(f_2) = 0.897633, \quad argmin(f_2) = 0.10986$
Результат работы методов:



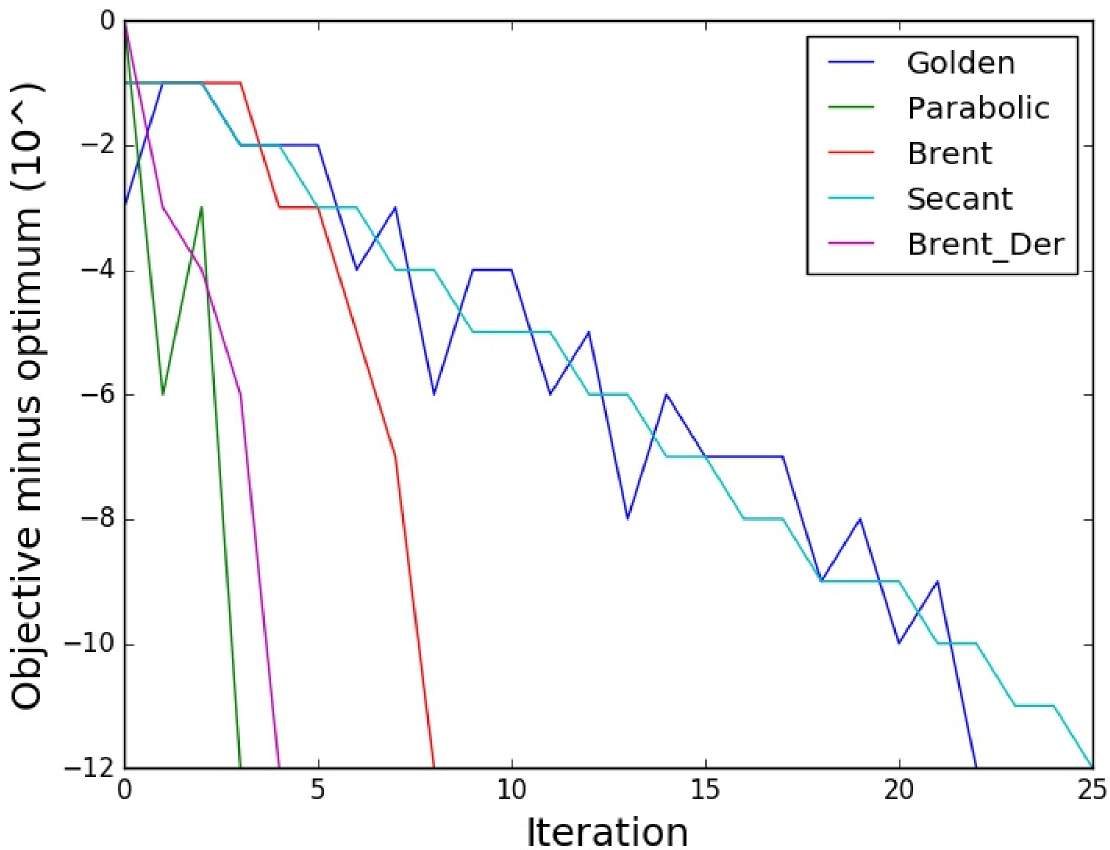
2.3 Тест 3

В качестве тестовой функции берется:
$f_3(x) = -3x\sin(0.75x) + \exp^{-2x}$ на интервале $[0, 2\pi]$
$\min(f_3) = -7.27436, \quad argmin(f_3) = 2.70648$
Результат работы методов:



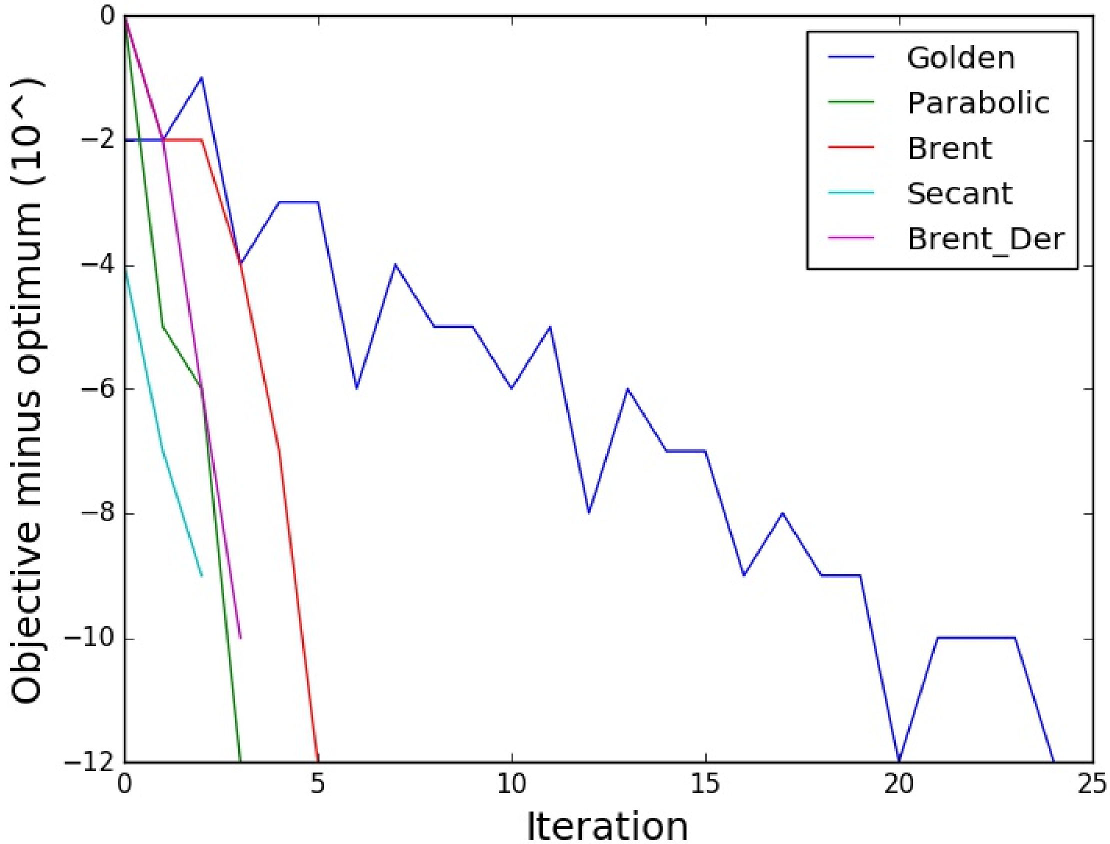
2.4 Тест 4

В качестве тестовой функции берется:
$f_4(x) = \exp^{3x} + 5\exp^{-2x}$ на интервале $[0, 1]$
$\min(f_4) = 5.14841, \quad argmin(f_4) = 2.12464$
Результат работы методов:



2.5 Тест 5

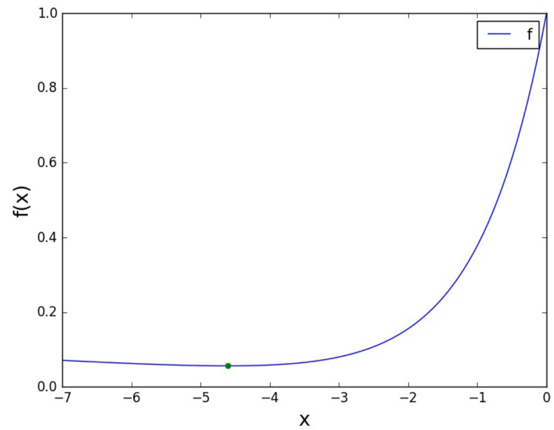
В качестве тестовой функции берется:
$f_5(x) = 0.2x\ln(x) + (x - 2.3)^2$ на интервале $[0.5, 2.5]$
$\min(f_5) = 0.35097, \quad argmin(f_5) = 0.24079$
Результат работы методов:



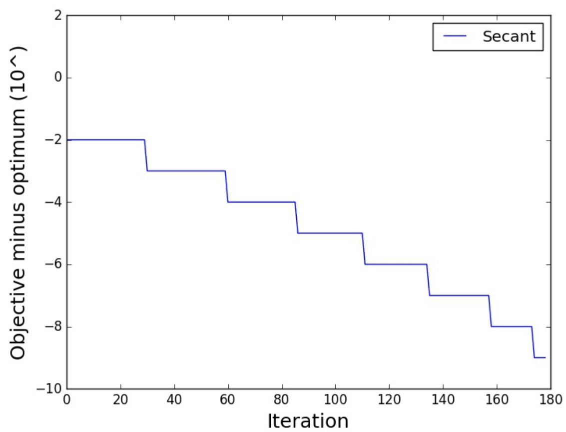
Выводы: Методы оптимизации, использующие информацию о производной оптимизируемой функции, могут ускорить процесс поиска оптимума. Метод Брента с производной показал наилучший результат среди остальных алгоритмов за счет своей гибкости шага и большего количества информации об оптимизируемой функции. Метод секущих показывает неплохой результат на функциях, у которых производная меняется не слишком медленно. Медленно изменяющая производная может существенно замедлить работу метода секущих, что иллюстрирует следующий пример.

2.6 Медленная сходимость метода секущих

В качестве тестовой функции берется:
$f(x) = \exp(x) - 0.01x$ на интервале $[-7, 0]$
$\min(f) = 0.05605, \quad argmin(f) = -4.6051$



Результат работы метода:



Значения производной функции $f(x)$ левее $argmin(f)$ меняются очень медленно и принимают значения близкие к нулю, а значение производной функции на правом конце отрезка $[-7, 0]$ заметно больше нуля. Поэтому на каждой итерации метода секущих текущее приближения точки оптимума меняется очень медленно, что приводить к долгой работе метода.