1 Постановка задачи

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin{(x)} + \frac{2t}{t^2+1}, x \in [0, \pi], t \in [0, 10]$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \sin{(x)}, x \in [0, \pi]$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = \ln{(t^2+1)}, u(\pi, t) = \ln{(t^2+1)}, t \in [0, 10]$$

Точное решение

$$u(x, t) = \sin{(x)} + \ln{(t^2+1)}$$

2 Явная схема

Общий вид:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + g_i^j$$

Положим $a = 1$. Для поставленной задачи схема будет иметь вид:

$$u_i^{j+1} = \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \tau g_i^j + u_i^j,$$

где

$$g_i^j = \sin{(x_i)} + \frac{2t_j}{t_j^2+1}$$

Начальные и граничные условия:

$$u_i^0(x_i, 0) = \sin{(x_i)}, u_0^j(0, t_j) = \ln{(t_j^2+1)}, u_n^j(\pi, t_j) = \ln{(t_j^2+1)}$$

3 Неявная схема

Общий вид:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + g_i^j$$

Положим $a = 1$. Для поставленной задачи схема будет иметь вид:

$$\frac{\tau}{h^2}u_{i-1}^{j+1} - (\frac{2\tau}{h^2} + 1)u_i^{j+1} + \frac{\tau}{h^2}u_{i+1}^{j+1} = -u_i^j - \tau g_i^j,$$

где

$$g_i^j = \sin{(x_i)} + \frac{2t_j}{t_j^2+1}$$

Начальные и граничные условия:

$$u_i^0(x_i, 0) = \sin{(x_i)}, u_0^j(0, t_j) = \ln{(t_j^2+1)}, u_n^j(\pi, t_j) = \ln{(t_j^2+1)}$$

Матрица коэффициентов:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ln{(t_j^2+1)} \\
\frac{\tau}{h^2} & -(\frac{2\tau}{h^2}+1) & \frac{\tau}{h^2} & \dots & 0 & 0 & -u_1^j-\tau g_1^j \\
0 & \frac{\tau}{h^2} & -(\frac{2\tau}{h^2}+1) & \dots & 0 & 0 & -u_2^j-\tau g_2^j \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & -(\frac{2\tau}{h^2}+1) & \frac{\tau}{h^2} & -u_{n-1}^j-\tau g_{n-1}^j \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \ln{(t_j^2+1)}
\end{array}\right)$$

где

$$g_i^j=\sin{(x_i)}+\frac{2t_j}{t_j^2+1}$$

4 Схема Кранка-Никольсона

Общий вид:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{a^2}{2}(\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}+\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2})+g_i^j$$

Положим $a=1$. Для поставленной задачи схема будет иметь вид:

$$\frac{\tau}{2h^2}u_{i-1}^{j+1}-(1+\frac{\tau}{h^2})u_i^{j+1}+\frac{\tau}{2h^2}u_{i+1}^{j+1}=\frac{\tau}{2h^2}u_{i-1}^j-(1-\frac{\tau}{h^2})u_i^j-\frac{\tau}{2h^2}u_{i+1}^j-\tau g_i^j,$$

где

$$g_i^j=\sin{(x_i)}+\frac{2t_j}{t_j^2+1}$$

Начальные и граничные условия:

$$u_i^0(x_i,0)=\sin{(x_i)},u_0^j(0,t_j)=\ln{(t_j^2+1)},u_n^j(\pi,t_j)=\ln{(t_j^2+1)}$$

Матрица коэффициентов:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ln{(t_j^2+1)} \\
\frac{\tau}{2h^2} & -(\frac{\tau}{h^2}+1) & \frac{\tau}{2h^2} & \dots & 0 & 0 & \frac{\tau}{2h^2}u_0^j-(1-\frac{\tau}{h^2})u_1^j-\frac{\tau}{2h^2}u_2^j-\tau g_1^j \\
0 & \frac{\tau}{2h^2} & -(\frac{\tau}{h^2}+1) & \dots & 0 & 0 & \frac{\tau}{2h^2}u_1^j-(1-\frac{\tau}{h^2})u_2^j-\frac{\tau}{2h^2}u_3^j-\tau g_2^j \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & -(\frac{\tau}{h^2}+1) & \frac{\tau}{2h^2} & \frac{\tau}{2h^2}u_{n-2}^j-(1-\frac{\tau}{h^2})u_{n-1}^j-\frac{\tau}{2h^2}u_n^j-\tau g_{n-1}^j \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \ln{(t_j^2+1)}
\end{array}\right)$$

где

$$g_i^j=\sin{(x_i)}+\frac{2t_j}{t_j^2+1}$$

5 Результаты

Результаты представлены в файле Результаты.xlsx. В таблицах показана зависимость ошибки E от шагов h и τ.

$$E=\max{|u(x_i,t_j)-u_i^j|}, i=\overline{0,n}, j=\overline{0,m}.$$

Из результатов видно, что схема Кранка-Никольсона дает самые лучшие результаты. Результаты неявной схемы можно объяснить погрешностью промежуточных вычислений.