Задания к занятию №5

1. Найти пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(x+3)-\ln x]$;

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(x+3)) \to \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x) \to \infty$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)\right) = \ln(1) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$;

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{d}{dx}(\ln(1+2x))}{\frac{d}{dx}(\arcsin(3x))}\right) =$$

$$\frac{2/(1+2x)}{3/\sqrt{1-9x^2}} = \frac{2\sqrt{1-9x^2}}{(1+2x)\cdot 3} = \frac{2\sqrt{1-9\cdot 0^2}}{3(1+2\cdot 0)}$$

$$= 2/3$$

3) $\lim\limits_{a \to 0} \frac{(x+a)^3 - x^3}{a}$

а) $\lim\limits_{a \to 0} \left((x+a)^3 - x^3 \right) = 0$

$\lim\limits_{a \to 0} = 0$

б) $\lim\limits_{a \to 0} \left(\frac{x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 - x^3}{a} \right) =$

$= \left(\frac{\cancel{a}(3x^2 + 3ax + a^2)}{\cancel{a}} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{a \to 0} (3x^2 + 3ax) + \lim\limits_{a \to 0} (a^2)$

$\Rightarrow \lim\limits_{a \to 0} (3x^2) + \lim\limits_{a \to 0} (3ax) +$

$+ \left(\lim\limits_{a \to 0} (a) \right)^2 =$

$$= 3x^2 + 3x \cdot \lim_{a \to 0}(a) + 0^2 =$$

$$= 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2 = 3x^2$$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x}$; $=$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{d}{dx}(1 - \cos 4x)}{\frac{d}{dx}(2x \cdot tg 2x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{4 \sin 4x}{\frac{\sin 4x + 4x}{\cos(2x)^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{d}{dx}\left(4\sin 4x \cdot \cos(2x)^2\right)}{\frac{d}{dx}\left(\sin 4x + 4x\right)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{16\cos 2x \cdot \cos 6x}{4\cos 4x + 4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\cos 2x \cdot \cos 6x}{\cos 4x + 1} =$$

$$= \frac{4\cos(2\cdot 0) \cdot \cos(6\cdot 0)}{\underbrace{\cos(4\cdot 0)}_{\cos(0)=1} + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)$

$$= \lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{\frac{a}{2}} \times \sin a\right) =$$

$$= \lim_{a\to 0}\left(\frac{2}{a} \cdot \sin a\right) =$$

$$= \lim_{a\to 0}\left(\frac{2\sin a}{a}\right) =$$

$$= 2 \cdot \lim_{a\to a}\left(\frac{\sin a}{a}\right) = 2 \times 1 = 2$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e \simeq 2{,}718$

$$7)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2} \Rightarrow$$

$$a)\ \lim_{x\to0}\left(1+x\sin x-1\right)=0$$

$$\lim_{x\to0} x^2=0$$

$$\delta)\ = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}\times\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\sqrt{1+x\sin x}-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x\cdot\sin x-1}{x^2\cdot\left(\sqrt{1+x\cdot\sin x}+1\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x\left(\sqrt{1+x\cdot\sin x}+1\right)}=\dfrac{1}{2}\\[2ex]\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x\left(\sqrt{1+x\cdot\sin x}+1\right)}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

2. Установить характер разрыва функции в точке x_0:

1) $f(x) = \frac{x^2-16}{x+4}, x_0 = -4$

$$f(x) = \frac{(x-4)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}} = x-4$$

f непрерывная

2) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x_0 = 0$

f прерывистая.
Имеет устранимый разрыв
в т. $x = 0$

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2}{x-1}, x_0 = 1;$

$\Rightarrow f(x) = tg^{-1}\left(\frac{2}{x} - 1\right)$

f прерывистая

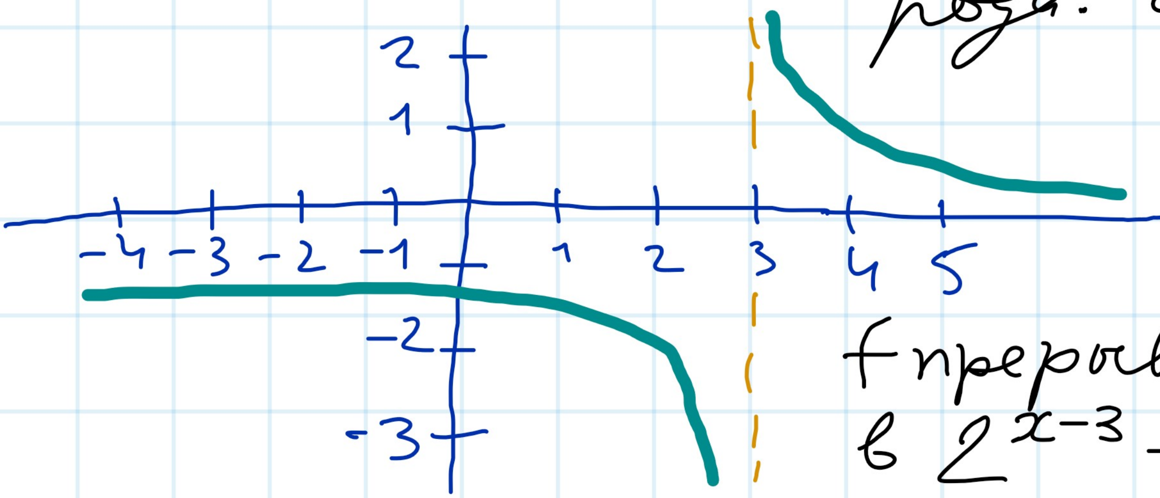
Т. разрыва $x = 0$ (скачок f)

f прерывается в: $\frac{2}{x}$ и $\frac{1}{x}$

2) $f(x) = \frac{1}{2^{x-3}-1}, x_0 = 3$

f прерывистая

Т. разрыва $x = 3$ (разрыв 2-го рода. бесконечный)



f прерывается в $2^{x-3}-1$