

Metody Numeryczne

Aproksymacja profilu wysokościowego

1. Wstęp

Celem projektu była implementacja dwóch metod interpolacji Lagrange'a oraz Funkcjami sklejanymi, które zostały omówione na wykładzie. Do implementacji wykorzystałem język python wraz z najpotrzebniejszymi bibliotekami: matplotlib do rysowania wykresów oraz pandas do wczytywania plików csv. W celu realizacji projektu konieczna była implementacja operacji na macierzach. Szczególnie konieczna była implementacja faktoryzacja LU wraz z pivotingiem. Jako inspiracja posłużyłem się umieszczonym na Enauczaniu przykładem.

2. Profile wysokościowe

Jako dane wykorzystałem 3 pliki dostępne do pobrania na portalu Enauczanie:

1. SpacerniakGdansk.csv - teren o raczej płaskiej strukturze, z licznymi uskokami.
2. WielkiKanionKolorado.csv - teren z wgłębieniem zawierającym liczne uskoki.
3. MountEverest.csv - najwyższy szczyt ziemi, struktura o stałym charakterze.

3. Metoda Lagrange'a

Stabilna i łatwa metoda w implementacji. Jej działanie opiera się na przybliżaniu wielomianem stopnia n po podaniu $n + 1$ węzłów. Niestety kosztem swojej prostoty ma jedną zasadniczą wadę o której przekonamy się w późniejszym czasie.

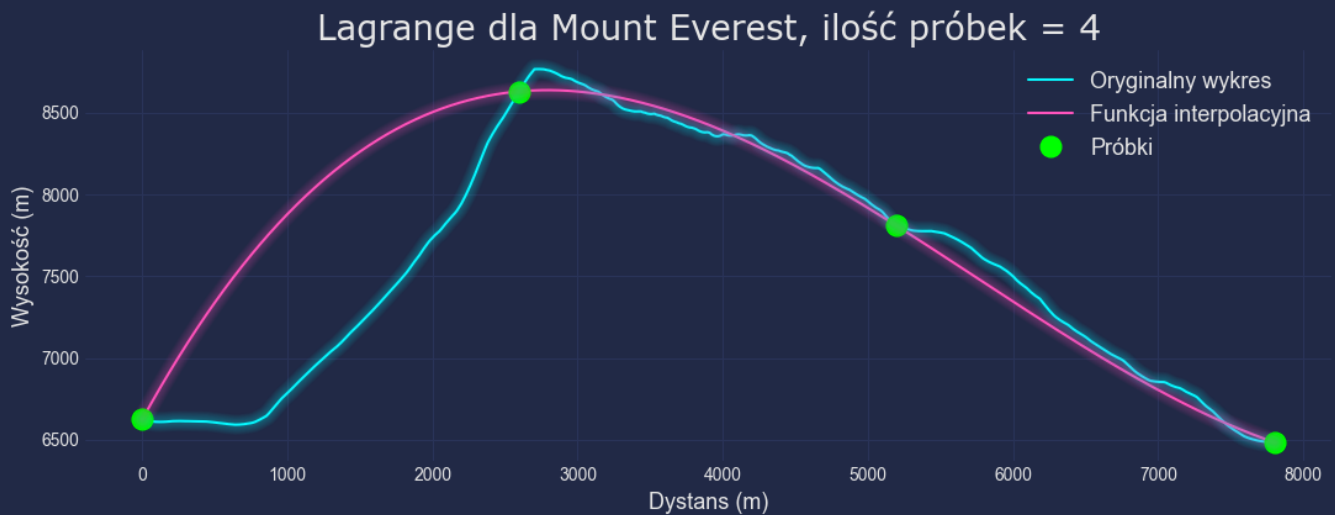
Do interpolowania funkcji przekazuję 3 parametry:

- Próbki x
- Próbki y
- punkt w którym chcę interpolować funkcję

Po wszystkim funkcja zwraca interpolowaną wartość y .

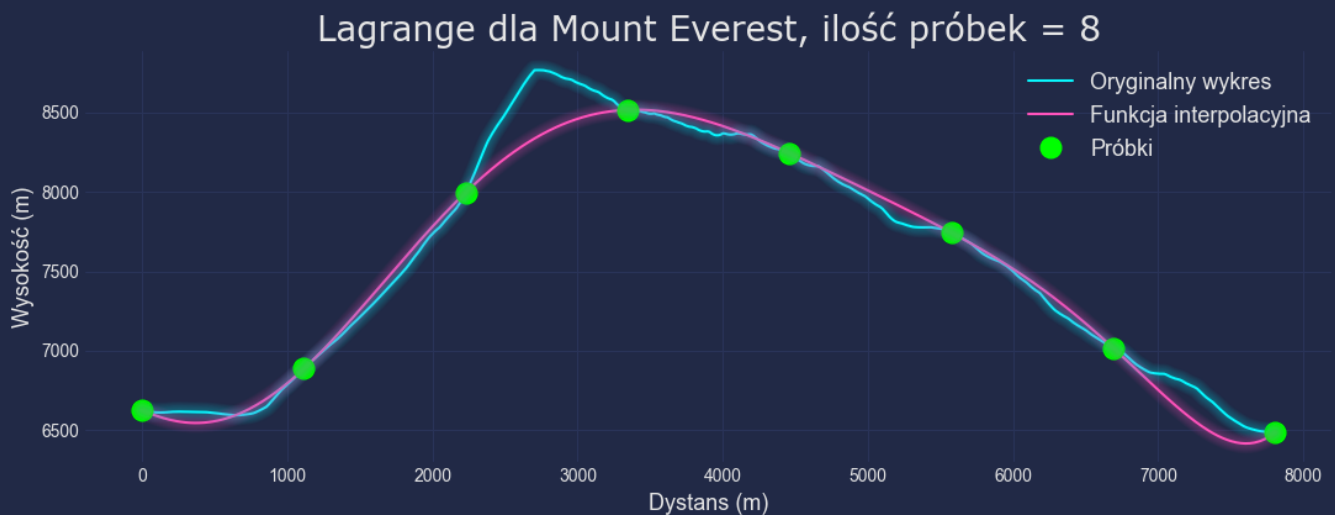
```
def lagrange_interpolation(xsmp1: [float], ysmp1: [float], xv: float) -> float:
    m = len(xsmp1)
    n = m - 1
    y = 0
    for i in range(n + 1):
        p = 1
        for j in [nr for nr in range(n + 1) if nr != i]:
            p *= (xv - xsmp1[j]) / (xsmp1[i] - xsmp1[j])
        y += p * ysmp1[i]
    return y
```

1. Wpływ liczby punktów węzłowych na wyniki jest najlepiej widoczny dla Mount Everest.



wyk. 4 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 4 równo odległych próbek z pliku MountEverest.csv

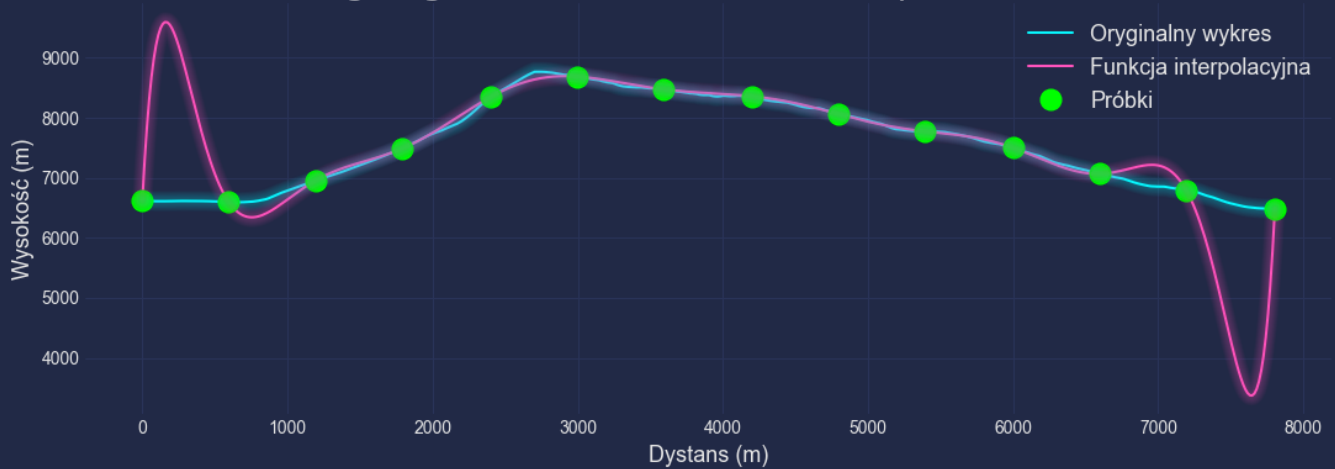
Mimo, że jesteśmy w stanie oszacować charakterystykę terenu niewiele ona nam na tym etapie jeszcze mówi. W celu większej dokładności zwiększamy ilość węzłów.



wyk. 5 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 8 równo odległych próbek z pliku MountEverest.csv

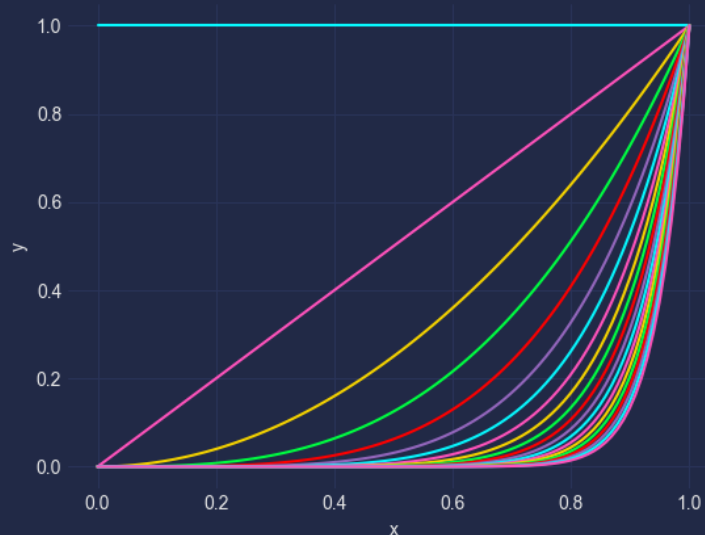
Mimo niezbyt wysokiej liczby węzłów dostajemy całkiem zadowalające przybliżenie, które w praktycznych zastosowaniach może okazać się dalej nieużyteczne.

Lagrange dla Mount Everest, ilość próbek = 14



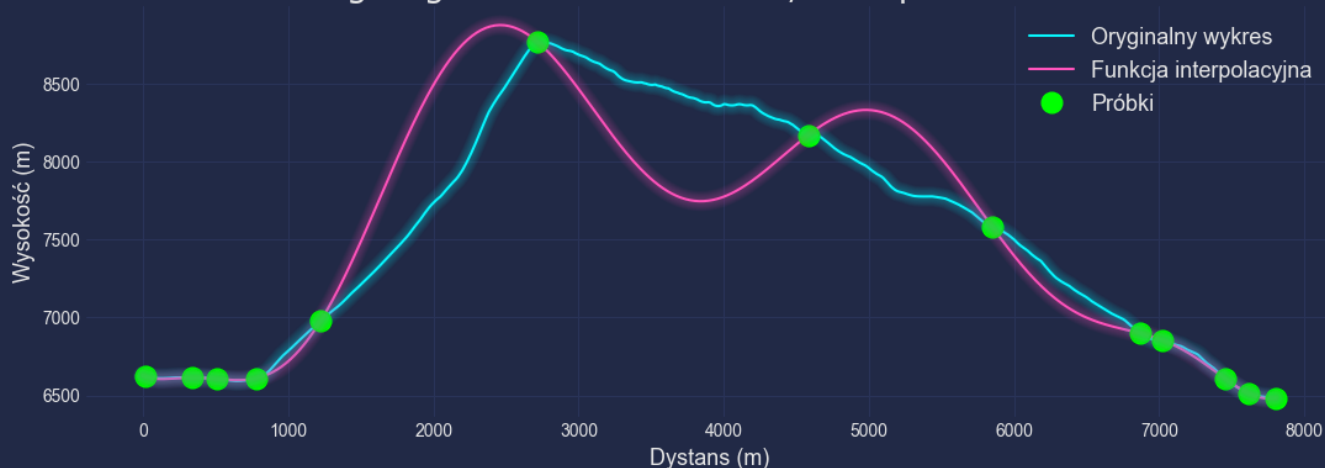
wyk. 6 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 14 równo odległych próbek z pliku MountEverest.csv

Zwiększając liczbę węzłów do 14 dostajemy bardzo dużą anomalię, która wyklucza użyteczność interpolacji. Wynika ona z efektu Rungego, na który narażona jest metoda Lagrange'a. Powodem jest interpolacja równoodległych węzłów z wykorzystaniem wielomianu wysokiego stopnia. Interpolacja ta wykorzystuje bazę funkcji x^n , która staje się podobna wraz ze wzrostem n .



2. Wpływ rozmieszczenia punktów węzłowych na wyniki. Z efektem Rungego można również walczyć zwiększając ilość węzłów na krańcach przedziału.

Lagrange dla Mount Everest, ilość próbek = 13



wyk. 2 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 13 losowo wybranych próbek z pliku MountEverest.csv

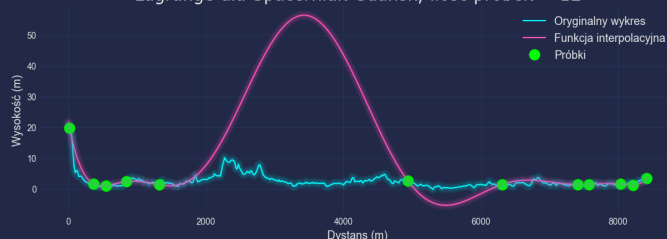
W tym przypadku dodatkowo postarałem się, aby najwyższy punkt przedziału również został uwzględniony jako węzeł. Jak możemy zauważyć mimo gorszej interpolacji w środku przedziału udało nam się zwalczyć efekt Rungego zagęszczając próbki na krańcach przedziału.

Lagrange dla Spacerniak Gdansk, ilość próbek = 14



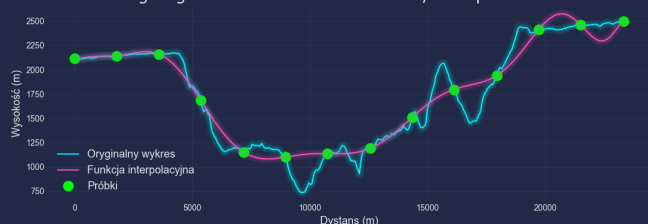
wyk. 9 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 14 równo odległych próbek z pliku SpacerniakGdansk.csv

Lagrange dla Spacerniak Gdansk, ilość próbek = 12



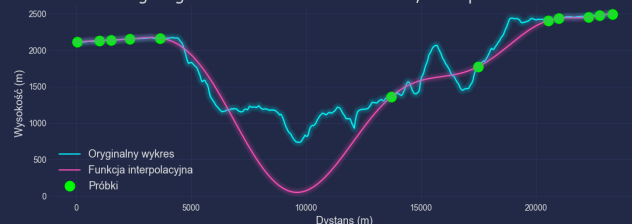
wyk. 3 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 12 losowo wybranych próbek z pliku SpacerniakGdansk.csv

Lagrange dla Wielki Kanion Kolorado, ilość próbek = 14



wyk. 3 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 14 równo odległych próbek z pliku WielkiKanionKolorado.csv

Lagrange dla Wielki Kanion Kolorado, ilość próbek = 12



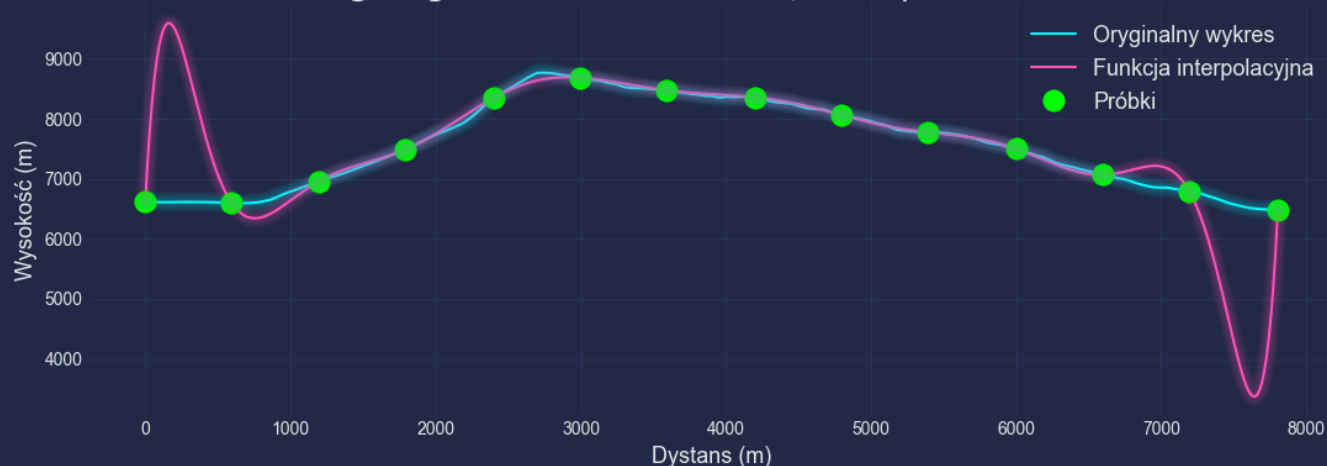
wyk. 1 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 12 losowo wybranych próbek z pliku WielkiKanionKolorado.csv

Tak samo efekt Rungego udało się zniwelować dla innych zestawów danych. Chociaż dla Kanionu Kolorado nie był on jeszcze tak widoczny udało się mimo wszystko zniwelować.

3. Wpływ charakteru trasy na wyniki.

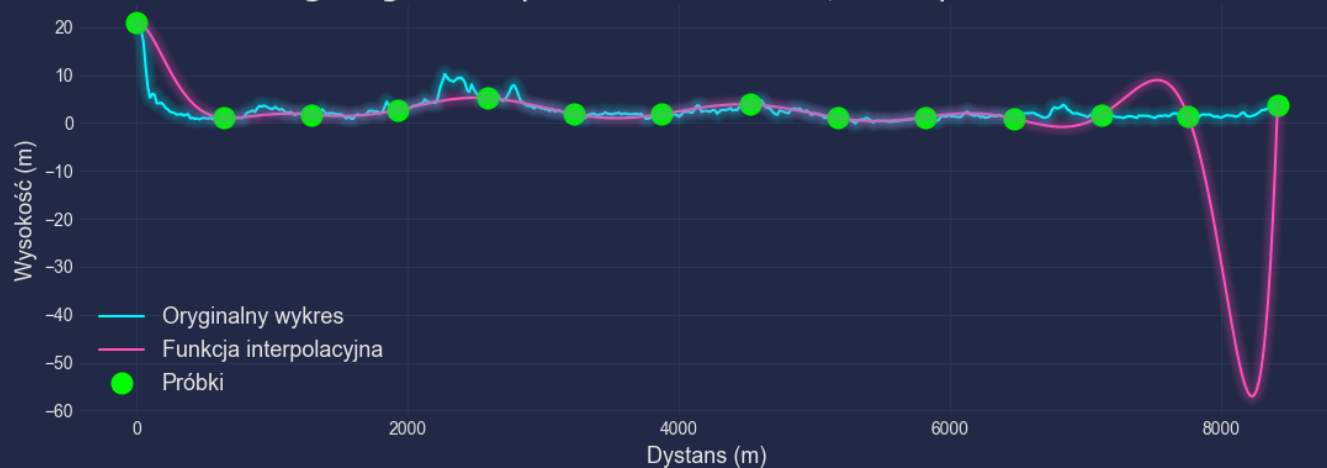
Metoda Lagrange'a lepiej interpoluje dla terenu, którego charakter jest równomierny. Weźmy jako przykład Mount Everest, gdzie funkcja w miarę równo rośnie, a następnie równo spada bez żadnych wariacji. W przeciwieństwie do kanionu, gdzie poza ogólną charakterystyką mamy częste wariacje, gdzie funkcja spada a następnie gwałtownie przez jakiś czas rośnie, żeby później spaść jeszcze niżej.

Lagrange dla Mount Everest, ilość próbek = 14



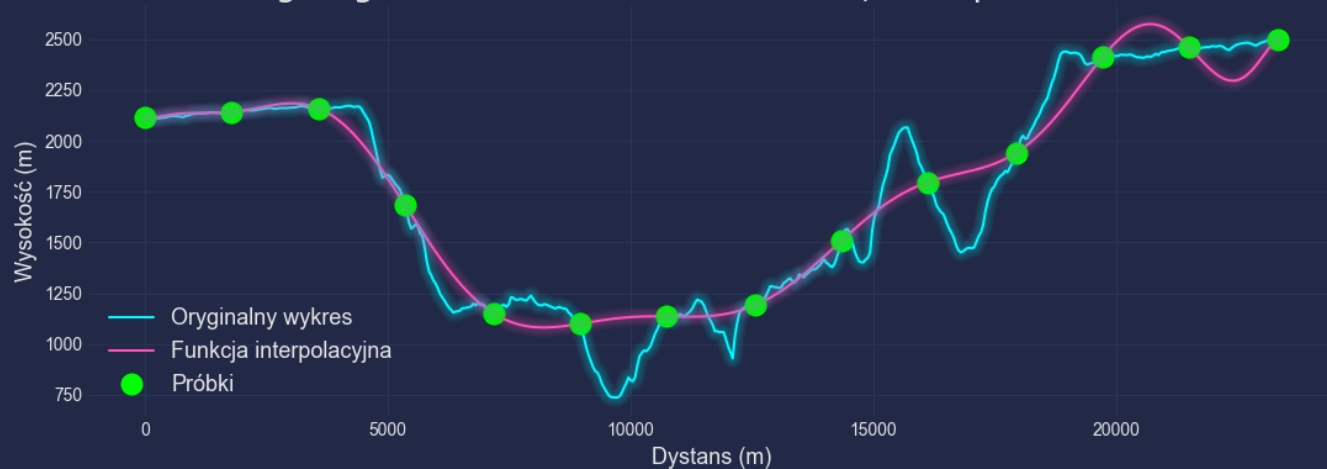
wyk. 6 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 14 równo odległych próbek z pliku MountEverest.csv

Lagrange dla Spacerniak Gdansk, ilość próbek = 14



wyk. 9 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 14 równo odległych próbek z pliku SpacerniakGdansk.csv

Lagrange dla Wielki Kanion Kolorado, ilość próbek = 14



wyk. 3 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 14 równo odległych próbek z pliku WielkiKanionKolorado.csv

4. Metoda funkcji sklejanych

Interpolacja lokalna używająca wielomianów niskiego stopnia, w tym przypadku trzeciego. W celu obliczenia interpolacji w przedziale x_0, x_1, x_2 tworzy się układ równań. Po rozwiązaniu $Ax=b$, otrzymujemy macierz x , która zawiera współczynniki funkcji trzeciego stopnia w obu przedziałach. W tym celu zaimplementowałem metodę faktoryzacji LU wraz z pivotingiem, który jest konieczny ze względu na zera na diagonalu, które służą jako mianownik. Po podziale funkcji na macierze górną i dolną rozwiązanie układu staje się proste. Otrzymane współczynniki możemy wykorzystać do obliczenia wartości w punktach.

Do obliczenia funkcji w danym przedziale przekazuję 3 parametry:

- Próbki x
- Próbki y
- Ilość interpolowanych punktów

Na sam koniec sklejam wartości z obu przedziałów i zwracam wynik.

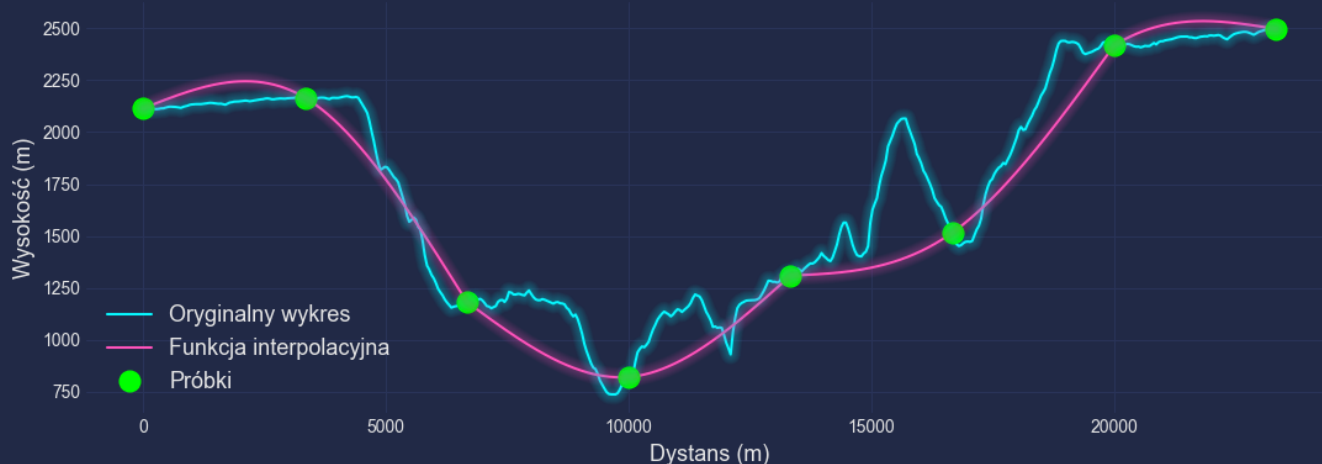
```
def spline(xsmp1: [float], ysmp1: [float], n):  
    coeff = get_coefficients(xsmp1, ysmp1)  
  
    x_0, y_0 = interpolate_spline_in_section(xsmp1[0], xsmp1[1], coeff[:4], n)  
    x_1, y_1 = interpolate_spline_in_section(xsmp1[1], xsmp1[2], coeff[4:], n)  
  
    return x_0 + x_1, y_0 + y_1
```

Obliczanie samej wartości funkcji w określonym punkcie przyjmuje postać

```
y = coeff[0] + coeff[1] * xdiff + coeff[2] * xdiff ** 2 + coeff[3] * xdiff ** 3
```


1. Wpływ liczby punktów węzłowych na wyniki w tym przypadku najlepiej obrazują kanion oraz spacerniak, gdzie tereny mają chaotyczną naturę.

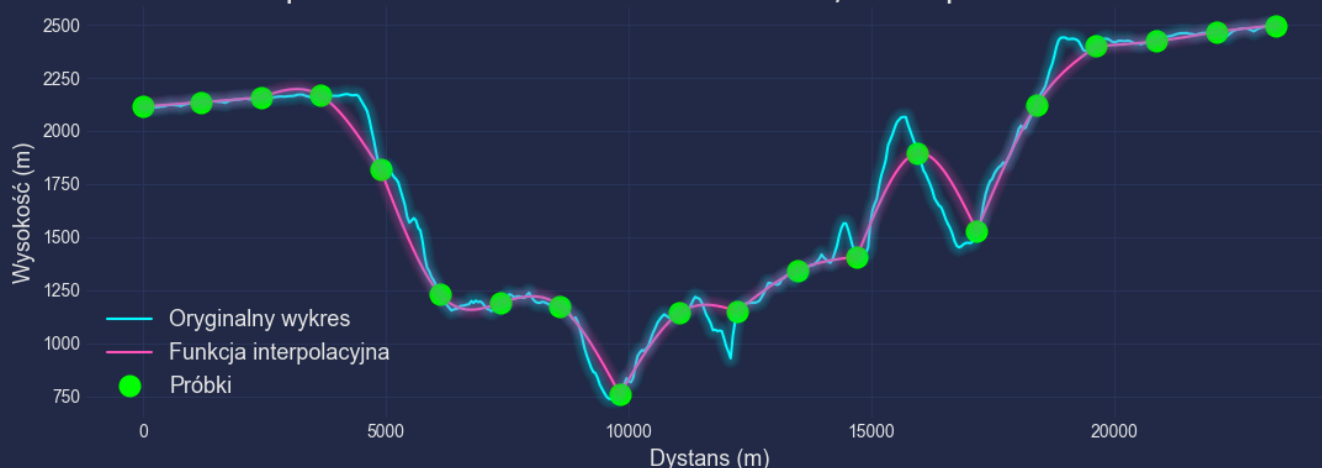
Spline dla Wielki Kanion Kolorado, ilość próbek = 8



wyk. 10 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 8 równo odległych próbek z pliku WielkiKanionKolorado.csv

Jak widzimy interpolacja dla tak małej liczby punktów nie jest wcale lepsza od Lagrange'a.

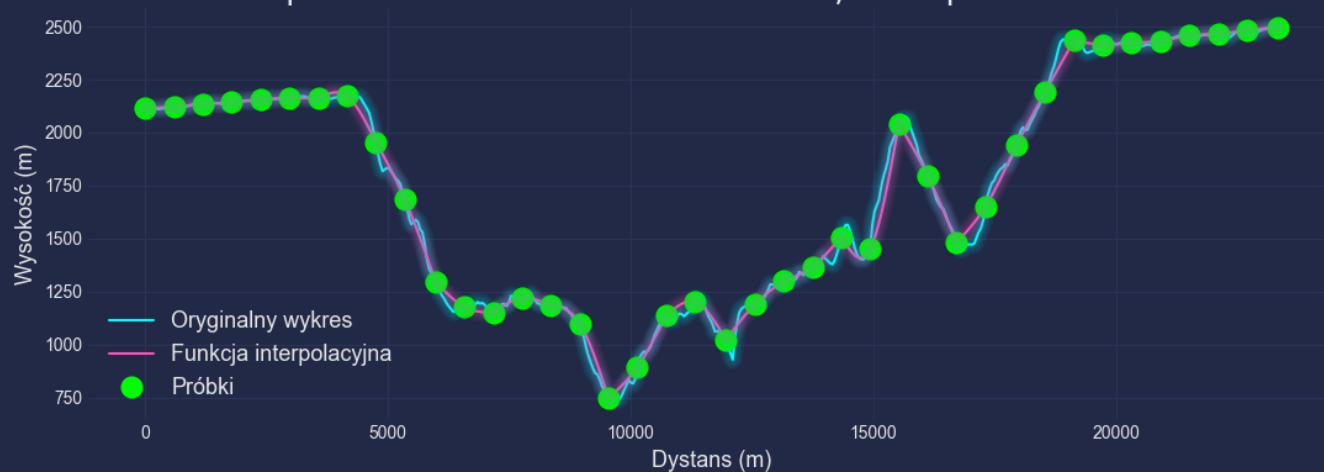
Spline dla Wielki Kanion Kolorado, ilość próbek = 20



wyk. 11 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 20 równo odległych próbek z pliku WielkiKanionKolorado.csv

Jednak wraz ze wzrostem węzłów ujawnia przewaga metody funkcji sklepanych. Jest ona odporna na efekt Rungego, gdyż nie operuje na wielomianach wysokiego stopnia.

Spline dla Wielki Kanion Kolorado, ilość próbek = 40



wyk. 12 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 40 równo odległych próbek z pliku WielkiKanionKolorado.csv

Wraz ze wzrostem liczby węzłów drastycznie rośnie dokładność interpolacji nawet dla tak chaotycznych terenów jak kanion.

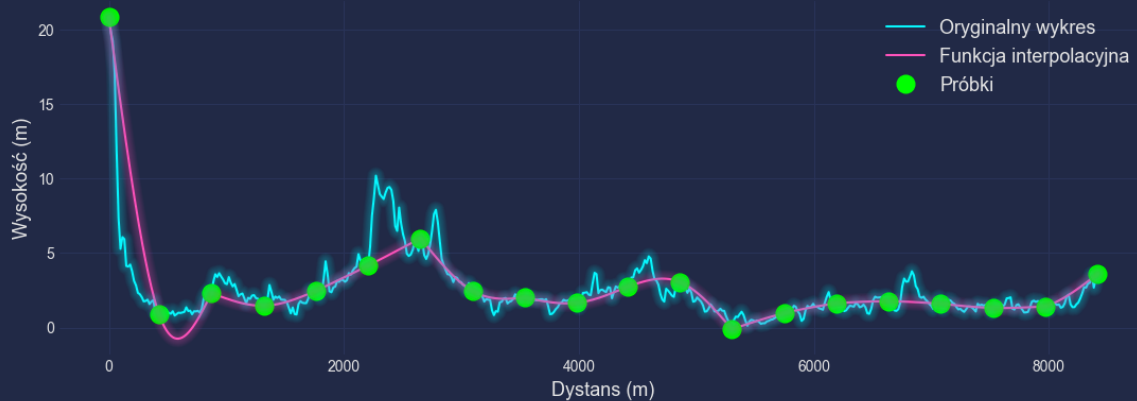
Podobną sytuację możemy zaobserwować dla gdańskiego spacerniaka, który mimo małych, ale częstych wahań jest trudny do interpolowania.

Spline dla Spacerniak Gdansk, ilość próbek = 8



wyk. 16 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 8 równo odległych próbek z pliku SpacerniakGdansk.csv

Spline dla Spacerniak Gdansk, ilość próbek = 20



wyk. 17 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 20 równo odległych próbek z pliku SpacerniakGdansk.csv

Spline dla Spacerniak Gdansk, ilość próbek = 40

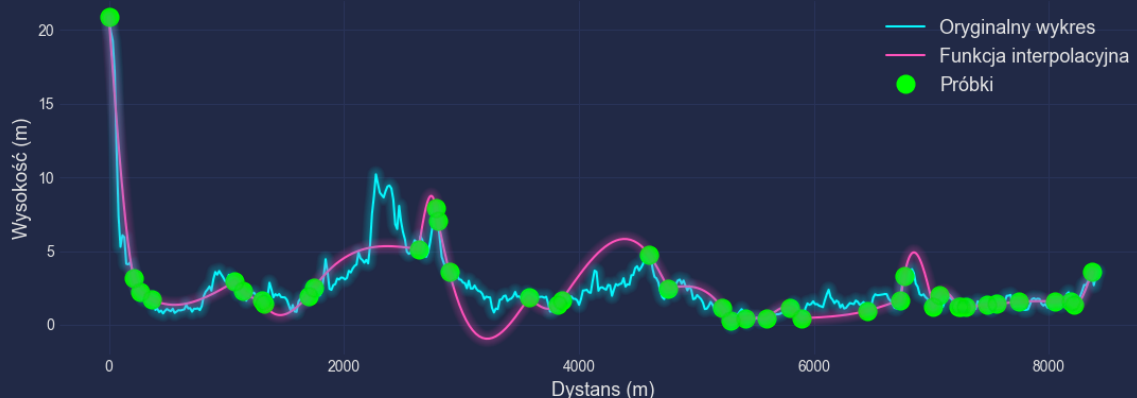


wyk. 18 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 40 równo odległych próbek z pliku SpacerniakGdansk.csv

2. Wpływ rozmieszczenia punktów węzłowych na wyniki.

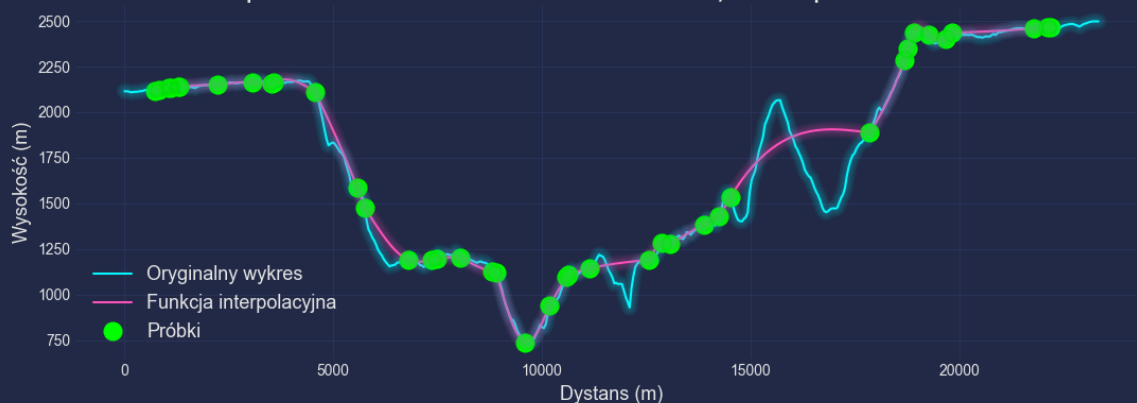
Porównajmy więc zachowanie interpolacji, dla różnych typów terenu.

Spline dla Spacerniak Gdansk, ilość próbek = 40



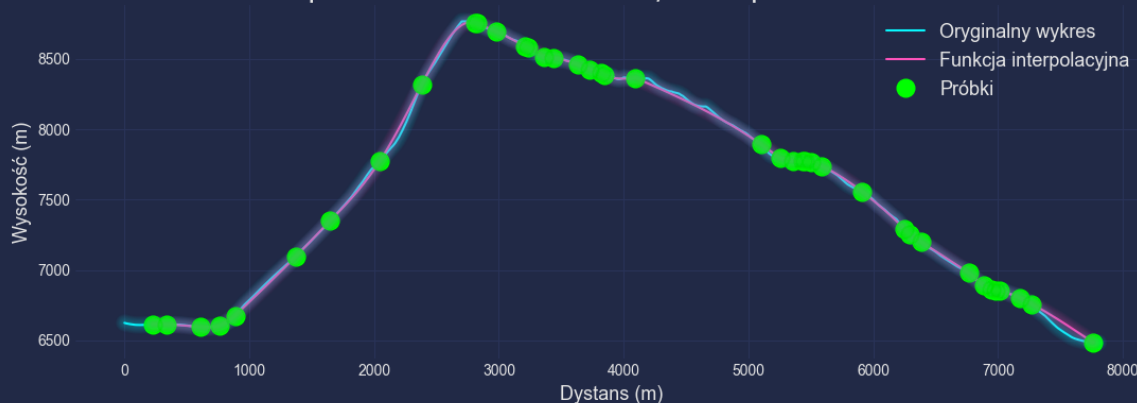
wyk. 30 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 40 losowo wybranych próbek z pliku SpacerniakGdansk.csv

Spline dla Wielki Kanion Kolorado, ilość próbek = 40



wyk. 26 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 40 losowo wybranych próbek z pliku WielkiKanionKolorado.csv

Spline dla Mount Everest, ilość próbek = 40



wyk. 28 prezentuje przeprowadzenie interpolacji metodą Lagrange'a dla 40 losowo wybranych próbek z pliku MountEverest.csv

Bazując na moich własnych odczuciach w przypadku tej metody równomierne rozmieszczenie punktów sprawdzi się o wiele lepiej niż losowe lub skupione na krańcach bądź środku przedziału. Taki dobór węzłów sprawdzi się jedynie w sytuacji, gdy mamy teren o takim samym nachyleniu przez kilka węzłów. Jeśli więc dysponujemy równo rozmieszczonymi próbkami powinniśmy z nich skorzystać.

3. Wpływ charakteru trasy na wyniki.

To co można stwierdzić na podstawie umieszczonych poprzednio wykresów, charakter trasy nie ma tutaj większego znaczenia jeśli dobierzemy odpowiednio dużą ilość węzłów. Pewne jest, że dla trasy bez żadnych anomalii interpolacja przebiegnie sprawniej i będzie wymagana mniejsza ilość punktów.

5. Wnioski

Na podstawie wykresów możemy wysunąć istotne wnioski. Porównując obie metody, zdecydowanie lepiej wypadła interpolacja funkcjami sklejanymi mimo większego zapotrzebowania na zasoby jakimi są pamięć lub też czas obliczeń. Jednak w praktyce zalecałbym korzystanie właśnie z tej metody, gdyż jest ona odporna na efekt Rungego wraz ze wzrostem kolejnych węzłów. Jest trudniejsza w implementacji i wymaga skorzystania z faktoryzacji LU wraz z pivotingiem, żeby zapobiec dzieleniu przez 0.