M3201 Culture scientifique et traitement de l'information

R. HUEZ

IUT Troyes - Dept MMI

2019-2020

Sommaire

Syllabus

Description du cours

- les CM
  - CM1 : les matrices, présentation et premières transformations > **Audiovisuel**
  - CM2 : les transformations, rotations, en 3D, et la résolution d'équations
- les TD (exercices)
  - TD1 : calcul matriciel simple (additions, multiplications, ...),
  - TD2 : multiplications, transformations
  - TD3 : déterminant, résolution d'équations,.
- les TP (1TP=2 séances de 1.5h=3h00)
  - Travail sous **Scilab** et sous Windows impérativement,
  - TP1 : Transformations matricielles,
  - TP2 : Manipulations en fausse et vraie 3D,
- l'examen : de type QCM (copies personnalisées), sans calculatrice avec le CM polycopié autorisé.

Côté pratique

Les CM, TD et TP sont sur : Bureau virtuel/Moodle/DUT MMI/M3201/...

Les TP

- Le PC banalisé ou votre propre ordinateur (PC ou Mac avec virtualisation et Windows d'installé)
- Sur votre PC : installer Scilab avant de venir en TP (logiciel gratuit)

L'examen

- vous photocopiez le cours, possible 4 slides/page,
- arriver 5min à l'avance

L'évaluation

Le DS

- **niveau progressif**, de simple (idem TD) à difficile,
- l'évaluation portera sur votre **capacité de réflexion**,
- le cours est autorisé et sans calculatrice,
- les questions sont à **points négatifs**, 0 si on ne répond pas, 1pt si c'est bon, de -0.2 à -0.5 si c'est faux.

Les TP

- assez faciles, côté applicatif des maths, **on évalue l'implication pas la réflexion**,
- durée de : 3h (2*1.5h), on rend néanmoins la copie après chaque séance,
- les questions ne sont pas à points négatifs, **0 si c'est faux**,
- TP personnalisés : archive avec tous les énoncés, ils sont classés par groupe puis ordre alphabétique.

$$\boxed{\text{Note finale} = \frac{\text{moyenne des DS} + \text{moyenne des TP}}{2}}$$

Vous êtes en contrôle continu, en cas d'absence au DS rattrapage ou contrôle oral dans mon bureau, absence en TP, justifié alors note non pénalisante et non justifié, pas de rattrapage.

Sommaire

Définition et propriétés

Aperçu

HISTORIQUE depuis l'Antiquité

- II siècle av JC : des tableaux de nombres pour résoudre des équations
- mater > matrix > matrice
- 1850 : règles du calcul matriciel

EXEMPLE On appelle matrice un tableau rectangulaire de nombres écrit entre crochets.

matrice 4*2	matrice carrée 3*3	matrice identité d'ordre 3
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$	$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
matrice ligne	**matrice colonne**	**matrice carrée 4*4**
$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$	$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Définition

- On appelle A, une matrice à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$.
- **$a_{i,j}$ correspond au terme situé ligne i et colonne j**
- On dit que A est une matrice de dimension $n * p$ ou **(n,p)**
- Si n=m, alors on dit que A est une matrice carrée d'ordre n
- La matrice s'écrit en majuscule, les éléments en minuscule, on met des crochets

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

Chaque élément est caractérisé :

- $a_{1,1}$: l'élément de la 1^{ere} ligne, 1^{ere} colonne
- ...

DIFFÉRENTS TYPES

- matrice nulle A : tous les $a_{i,j} = 0$
- matrice ligne B : de dimension (1,n)
- matrice colonne C : de dimension (m,1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3.2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 \\ 85 \\ -23.1 \end{bmatrix}$$

Vue d'ensemble

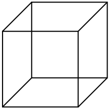
On peut avoir :

- des scalaires, c'est un simple nombre, $A = 3$
- des vecteurs, c'est une suite de nombres, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3.2 & 6 & 1.7 & -4 \end{bmatrix}$
- des matrices, c'est de la 2D, un tableau, $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

POUR ALLER PLUS LOIN

Une matrice peut représenter une image N&B ou en niveaux de gris. Pour représenter une image couleur, il faut 3 couleurs, donc une somme de 3 matrices.

- Quand on a plus que 2 dimensions : tenseurs, algèbre multilinéaire, espace vectoriel, multivecteur
- Tenseur de dimension 3 : 3 indices à la place de 2 : $a_{m,n,p}$, cela se représente par un cube
- Tenseur de dimension 5 : 5 indices à la place de 2 : $a_{m,n,p,q,r}$, des objets à 5 dimensions, pas évident à voir ? ?



Matrices particulières

MATRICE IDENTITÉ

Matrice carrée de dimension (n, n), qui a des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs, elle est notée I_n.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

MATRICE DIAGONALE

Matrice carrée dont tous les termes sont nuls sauf ceux de sa diagonale.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

MATRICE TRANSPOSÉE

On intervertit les lignes et colonnes de A, de sorte que le terme $a_{i,j}$ de A devienne le terme $a_{j,i}$ de A^t.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

Sommaire

Opérations

Addition, soustraction

ADDITION

L'addition se fait terme à terme avec les matrices **de même dimension**. Soient A et B deux matrices de même dimension $m * n$, on définit la matrice somme $C = A + B$ comme étant la matrice de dimension $m * n$ obtenue en ajoutant terme à terme les éléments de A et de B.

SOUSTRACTION

Le principe est identique

PROPRIÉTÉS

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $k * (A + B) = k * A + k * B$ avec k un scalaire

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$,

Addition

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+6 \\ 1+8 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Soustraction

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 2-3 & 3-6 \\ 1-8 & 4-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplication par un scalaire

$$E = k * A = 3 * \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

Multiplication

DÉFINITION

Soit A une matrice de dimension (m, n) et B une matrice de dimension (n, p).

Le produit $C = A * B$ sera alors la matrice de dimension (m, p) dans laquelle le terme $c_{i,j}$ situé à la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de la matrice $C = A * B$ sera obtenu en effectuant le produit entre la i^{eme} ligne de la matrice A et la j^{eme} colonne de la matrice B.

La 1^{re} ligne fois la 1^{re} colonne est égale à l'élément situé en 1^{re} ligne, 1^{re} colonne, donc est égal à $c_{1,1}$, et ainsi de suite.

Il faut donc que la longueur d'une ligne de A soit égale à la longueur d'une colonne de B.

MULTIPLICATION POSSIBLE

Pour savoir si on peut multiplier 2 matrices, on écrit leur taille, il faut que la valeur du milieu soit identique, on retire cette valeur, on obtient la taille du résultat

- A de taille (m, n) et B de taille (n, p), soit $(m, n) * (n, p)$
- la valeur du milieu est identique :n
- on retire n, il reste (m, p) ce sera la taille du résultat

Exemple

Principe : Ligne*Colonne

- $1^{\text{ère}}$ ligne * $1^{\text{ère}}$ colonne : $1*5+2*7$
- $1^{\text{ère}}$ ligne * $2^{\text{ème}}$ colonne : $1*6+2*8$
- ...
- dernière ligne * dernière colonne

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1*5+2*7 & 1*6+2*8\\ 3*5+4*7 & 3*6+4*8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{bmatrix}$$

Savoir si on peut multiplier 2 matrices :

- $(2,\mathbf{2})*(\mathbf{2},2)=(2,2) \Rightarrow$ matrice de 2 lignes et de 2 colonnes (cas ci-contre)
- $(2,\mathbf{3})*(\mathbf{3},5)=(2,5) \Rightarrow$ matrice de 2 lignes et de 5 colonnes
- $(5,\mathbf{6})*(\mathbf{6},1)=(5,1) \Rightarrow$ matrice de 5 lignes et de 1 colonne
- $(5,\mathbf{4})*(\mathbf{3},1) \Rightarrow$ Impossible

Propriétés

- Le produit de deux matrices (s'il existe) n'est pas commutatif. Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n
- **$A * B \neq B * A$ en général**
- $A * B = 0$ n'implique pas nécessairement $A = 0$ ou $B = 0$
- $A * B = A * C$ n'implique pas nécessairement $B = C$
- Le résultat du produit d'une matrice carrée par une matrice identité de même ordre est la matrice $I_n * A = A * I_n = A$
- Transposée : $(A^t)^t = A$ et $(A + B)^t = A^t + B^t$
- Puissance d'une matrice : $A^2 = A * A$ et $A^3 = A * A * A = A * A^2$

Exemple où $A * B \neq B * A$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 13 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B * A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$$

Sommaire

Transformations

Transformations

Les transformations sont les suivantes :

- Déplacements
- Homothéties/changement d'échelles
- Rotations

OBJECTIFS Représenter les changements d'espaces de coordonnées et manipuler les points dans l'espace et dans l'image.

- Utiliser une notation et une méthode de calcul générique et valable pour toutes les transformations : géométrie homogène
- Étudier les différentes transformations en 2D puis en 3D

PRINCIPE Chaque figure est dans un plan, abscisse X et ordonnée Y.

Chaque point a 2 coordonnées qui vont être mises dans un vecteur de type $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Translation : $\vec{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$

Principe : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$

Pour chaque point, on calcule le résultat de la translation par le vecteur :

$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

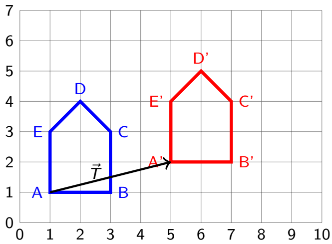
Point A' :

$\begin{bmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

On procède de la même manière pour les 5 points.

...

$\begin{bmatrix} x_{E'} \\ y_{E'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$



Homothétie : $H = \begin{bmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{bmatrix}$

On exploite le calcul matriciel et la multiplication :

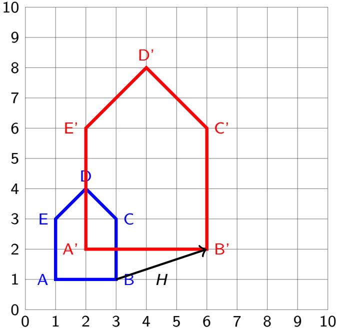
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = H * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

H_x est le facteur multicatif en largeur et H_y est le facteur multicatif en hauteur.
En développant :

$$\begin{matrix} x' = H_x * x + 0 * y \\ y' = 0 * x + H_y * y \end{matrix} \iff \begin{matrix} x' = H_x * x \\ y' = H_y * y \end{matrix}$$

Dans l'exemple $H_x = 2$ et $H_y = 2$
Pour chaque point, on calcule le résultat de l'homothétie par la matrice :

Exemple Point A' : $\begin{bmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*1+0*1 \\ 0*1+2*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$



Attention $H_x, H_y \in \mathbb{R}$
Ils peuvent donc être négatifs.

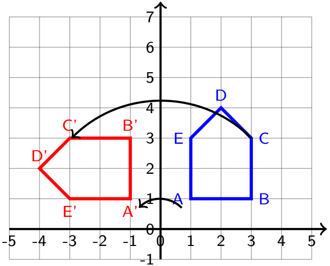
Rotation : $R = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Les valeurs de θ doivent être en radians.
Rappel x degrés exprimés en radians est $x.\frac{\pi}{180}$.
On notera que dans ce cas x' dépend de x et de y, de même pour y'.

Dans l'exemple, rotation de $+90$ degrés.

$$cos(\theta) = cos(90.\frac{\pi}{180}) = cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$
$$sin(\theta) = cos(90.\frac{\pi}{180}) = sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$
$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Pour chaque point, on calcule le résultat de l'homothétie par la matrice :

Point A' : $\begin{bmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 * 1 - 1 * 1 \\ 1 * 1 + 0 * 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Principe

Tout placer dans une matrice de taille 3*3

	Formulation classique	Formulation homogène
Translation	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$
Homothetie	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$
Rotation	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

Grâce aux coordonnées homogènes, toutes les transformations ont la même forme.

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = M * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ avec M la matrice de transformation.

- Les points de départ sont passés en coord. homogènes, on rajoute un 1.
  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$
- La matrice de transformation est passée en coord. homogènes, c'est une matrice I_3 où l'on rajoute la transformation, dans le cas de T, la transformation est rajoutée en haut à droite, dans les cas H et R, la transformation est rajoutée en haut à gauche.
  La dernière ligne de la matrice est toujours $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Les points de d'arrivée de coordonnées homogènes sont repassés en coord. classiques, afin de pouvoir les représenter dans le plan, on retire le 1
  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.
- Si dans le point d'arrivée, la valeur en bas n'est pas 1, on normalise.
  Exemple : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 5 \end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix} \frac{x'}{5} \\ \frac{y'}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$ d'où $\begin{bmatrix} \frac{x'}{5} \\ \frac{y'}{5} \end{bmatrix}$

Vérification

Translation $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

Si l'on développe : $\begin{matrix} x' = 1 * x + 0 * y + 1 * T_x \\ y' = 0 * x + 1 * y + 1 * T_y \\ 1 = 0 * x + 0 * y + 1 * 1 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \\ 1 = 1 \end{matrix}$

C'est bien la même opération qui a été effectuée avec la formulation classique.

Enchaînement

Comme les matrices T, H et R homogènes sont de même taille, il est possible d'enchaîner les opérations. On peut réaliser un déplacement suivi d'une homothétie puis d'une rotation.

Exemple :

- x, y un point de départ
- T une matrice de déplacement
- x', y' les coordonnées du point déplacé
- H une matrice de d'homothétie
- x'', y'' les coordonnées du point déplacé (en étant parti de x', y')

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = H * \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = H * \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = H * T * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Attention, l'ordre des opérations est l'inverse de l'ordre des multiplications :

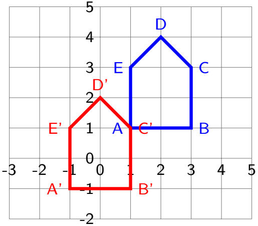
- On a la double transformation **Translation puis Homothétie :** $H * T$
- On a la double transformation **Homothétie puis Translation :** $T * H$

Exemple d'enchaînements

Déplacer la maison en (0,0) puis la faire tourner de 90 degrés à gauche.

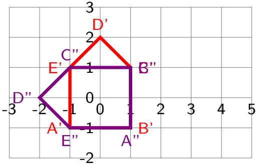
Le déplacement

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Puis la rotation

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$



On réalise $R * T$ (car T est réalisé en premier)

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a une seule opération à effectuer.

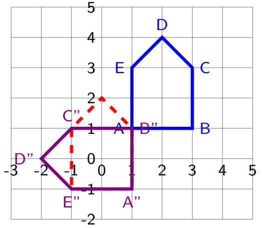
Détermination du point A" :

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0*1-1*1+2*1 \\ 1*1+0*1-2*1 \\ 0*1+0*1+1*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le point A" est aux coordonnées

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Translation et homothétie en 3 dimensions

Le principe est identique, on rajoute une dimension. Tout placer dans une matrice de taille 4*4 (la 3D et la coordonnée homogène).

Translation

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homothétie

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotation en 3 dimensions

La rotation peut s'effectuer selon 3 axes.

Rotation autour de l'axe des x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe des y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\theta) & 0 & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe des z

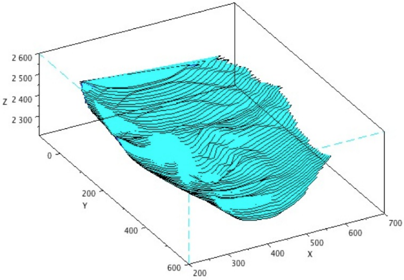
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

On remarquera que lorque l'on tourne autour de l'axe des x, les valeurs de la matrice permettant la rotation (*cos* et *sin*) ne sont pas situées sur la 1^{ere} ligne/colonne. Il en est de même pour y avec la 2^{nde} ligne/colonne et z avec la 3^{eme} ligne/colonne.

3D difficultés

Il faut

- être capable de se situer en 3D
- sur une image, ne pas sortir des valeurs maximales du plan 3D car les 3 coordonnées sont manipulées en même temps.
- La tête :
  1. centrer sur les 3 coordonnées par rapport au centre de gravité
  2. tourner la tête



tête en 3D

Sommaire

Résolution d'équation

Résolution d'équations

Résolution d'équation

- Je vais au supermarché et j'ai 5€, j'achète 5 pommes et 3 bananes
- le lendemain j'ai 9€ et je prends 4 pommes et 9 bananes.

On pose x le prix d'une pomme et y le prix d'une banane, mais quel est ce prix ?

La solution est de procéder par substitution, on exprime y en fonction de x dans une équation et on remplace ce y dans l'autre équation.

Résolution par substitution

On écrit le problème sous forme d'équation : $\begin{matrix} 5x + 3y = 5 \\ 4x + 9y = 9 \end{matrix}$

La 1^{ere} équation nous donne : $y = \dfrac{5 - 5x}{3}$

Donc en reportant dans la 2^{nde} équation, on obtient :$4x + 9 * \dfrac{5 - 5x}{3} = 9$

On essaie de de sortir x : $4x + 9 * \dfrac{5 - 5x}{3} = 9 \Leftrightarrow 4x = -6 + 15x \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{11} \simeq 0.55$

On reporte x dans une des équations pour obtenir y :

$$5x + 3y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5 - 5x}{3} = 5 * \frac{1 - \frac{6}{11}}{3} = \frac{25}{33} \simeq 0.76$$

La solution est : une pomme coûte 0.55 € et une banane 0.76 €.

Cette technique fonctionne pour 2 ou 3 objets et ensuite c'est presque impossible. Mais le calcul algébrique (ou matriciel) permet d'obtenir la solution facilement.

Problème posé avec 3 inconnues

Mathieu achète 3 bananes, 2 pommes et 1 orange pour 8€.

Thomas achète 1 banane, 2 pommes et 3 oranges pour 7€.

Laurent achète 2 bananes, 1 pomme et 4 oranges pour 6€.

On appelle cela **un système d'équations linéaires** car c'est des additions, on ajoute des éléments dans le chariot.

Il existe une technique pour résoudre des problèmes de ce type en utilisant l'écriture matricielle.

Résolution matricielle

POSER LE PROBLÈME :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} prix_{banane} \\ prix_{pomme} \\ prix_{orange} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A * x = y$$

On vérifie que cette écriture est conforme, par exemple sur la 1^{ere} ligne :

3 bananes + 2 pommes + 1 orange est égal à 8€, c'est exact.

Cela peut s'écrire : $A * x = y$ avec A la matrice des quantités (ici une matrice (3,3), y les totaux ou tickets de caisse et x les prix unitaires.

Ce que l'on cherche c'est les prix unitaires, c'est à dire x, il faut inverser A.

$x = A^{-1} * y$

Pour un nombre, par exemple $A = 3$, l'inverse est $A^{-1} = \dfrac{1}{3}$, mais pour une matrice c'est plus compliqué ...

Inversion de matrice

Soit A une matrice, le calcul de son inverse A^{-1} demande :

1. la matrice A doit être carrée.
2. le déterminant : $\mid A \mid$
3. les mineurs $M_{i,j}$
4. les cofacteurs $\alpha_{i,j}$
5. l'adjointe $adj(A)$

Soit : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Rappel : a_{13} est l'élément de la 1^{ere} ligne et 3^{eme} colonne.

LE DÉTERMINANT

Le déterminant est un nombre qui donne certaines propriétés à la matrice comme la réponse à la question : est elle inversible, dans notre cas est ce que l'on peut trouver un prix aux objets.

Pour une matrice A de taille (2,2) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

On fait **un produit similaire à une croix** :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$$

Le déterminant s'écrit comme une valeur absolue : $|A|$

EXEMPLES

Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, alors $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 * 4 - 3 * 2 = 16 - 6 = +10$

Soit $|B| = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, alors $|B| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 * 4 - 3 * 2 = -6$

On remarquera que le déterminant peut être négatif

Déterminant d'une matrice (3,3) / Théorie

Pour une matrice de taille (3,3)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

On fait le calcul en ayant choisit des blocs à l'intérieur de la matrice selon le principe suivant : on choisit une ligne ou une colonne, ici on a 1 choix parmi 6, on choisit la 1^{ere} ligne.

$$|A| = (-1)^{i+j} * a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{i+j} * a_{12} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{i+j} * a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{i+j} * a_{11} * [a_{22} * a_{33} - a_{23} * a_{32}] + (-1)^{i+j} * a_{12} * [a_{21} * a_{33} - a_{31} * a_{23}] + (-1)^{i+j} * a_{13} * [a_{21} * a_{32} - a_{31} * a_{22}]$$

avec i le numéro de ligne et j le numéro de colonne, cela va correspondre à une alternance de 1 et de -1 en facteur devant les équations, similaire à un damier.

- a_{11} : 1^{ere} ligne et 1^{ere} colonne $\Rightarrow (-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1 \Rightarrow 1 * a_{11}$
- a_{12} : 1^{ere} ligne et 2^{nde} colonne $\Rightarrow (-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1 \Rightarrow -1 * a_{12}$
- a_{13} : 1^{ere} ligne et 3^{eme} colonne $\Rightarrow (-1)^{1+3} = (-1)^4 = 1 \Rightarrow 1 * a_{13}$

On prend chaque terme de la 1^{ere} ligne que l'on multiplie par le produit en croix correspondant.

Déterminant d'une matrice (3,3)

Représentation graphique des 3 parties à calculer et à assembler :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$= a_{11} * 1^{ere}$ croix $+ a_{12} * 2^{nde}$ croix $+ a_{13} * 3^{eme}$ croix

Représentation graphique des coefficients multiplicateurs :

$$\begin{bmatrix} +1 & \mathbf{-1} & +1 \\ \mathbf{-1} & +1 & \mathbf{-1} \\ +1 & \mathbf{-1} & +1 \end{bmatrix}$$

L'alternance de ± 1 correspond à

- $+1$ si la somme (ligne+colonne) est paire
- -1 si la somme (ligne+colonne) est impaire

Exemple, pour le terme a_{12}, je suis à la 1^{ere} ligne et 2^{nde} colonne, la somme fait 3 qui est un nombre impair, le coefficient sera -1.

Exemple

Soit : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, on choisit la 1^{ere} ligne : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$(+1) * \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1) * \begin{bmatrix} & 2 & \\ 0 & & 1 \\ 4 & & 0 \end{bmatrix} + (+1) * \begin{bmatrix} & & 3 \\ 0 & 2 & \\ 4 & 1 & \end{bmatrix}$$

$$|A| = (+1) * 1 * (2 * 0 - 1 * 1) + (-1) * 2 * (0 * 0 - 1 * 4) + (+1) * 3 * (0 * 1 - 4 * 2)$$

$$|A| = -1 + 8 - 24 = -17$$

Propriétés des déterminants

- PROPRIÉTÉ 1 Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant sont nuls alors $|A| = 0$
- PROPRIÉTÉ 2 $|A^t| = |A|$
- PROPRIÉTÉ 3 Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, le signe du déterminant est changé.
- PROPRIÉTÉ 4 Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) est multiplié par un scalaire k, le déterminant est multiplié par k.
- PROPRIÉTÉ 5 Si $|A|$ et $|B|$ sont deux matrices carrées d'ordre n, alors : $|A.B| = |A|.|B|$
- PROPRIÉTÉ 6 **Si aux éléments d'une ligne (ou colonne) on ajoute k fois les éléments correspondants d'une autre ligne (ou colonne), la valeur du déterminant reste inchangée.**
- PROPRIÉTÉ 7 Si $|A| = 0$, alors la matrice est dite **singulière**, elle ne sera pas inversible.

ASTUCE UTILISATION DE LA PROPRIÉTÉ 6

Si la matrice B est obtenue à partir de A en ajoutant à la i^{eme} ligne (resp. colonne) le produit d'un scalaire par une autre ligne (resp. colonne), alors $|B| = |A|$.

On essaie de faire apparaître un maximum de 0 sur une ligne ou une colonne. Attention, il faut que la ligne (ou colonne) modifiée reste à la même place.

Soit : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, alors $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

On réalise : $ligne\ 3 - (4 * ligne\ 1) \rightarrow ligne\ 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 - 4*1 & 1 - 4*2 & 0 - 4*3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & -7 & -12 \end{vmatrix}$$

Et l'on choisit la 1^{ere} colonne pour calculer le déterminant, car il y a 2 valeurs 0.

$$|A| = 0.. + 0.. + (+1) * 1 * (2 * (-12) - 1 * (-7)) = -17$$

Même résultat que précédemment $|A| = -17$.

Calcul de déterminant, encore

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Faire apparaître 2 valeurs 0 sur la 2^{nde} ligne.

Une des solutions : $colonne2 = colonne2 - 2 * (colonne3)$

On obtient : $A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

On utilise la 2^{nde} ligne pour calculer le déterminant

$|A| = (-1) * 1 * (1 * 1 - 4 * (-4)) = -17$ encore le même résultat.

★ Attention, la ligne (ou colonne) sur laquelle on agit ne doit pas avoir de coefficient multiplicateur (sinon utiliser la propriété 4), et le résultat doit être replacé sur la même ligne (ou colonne).

MATRICES DE GRANDE TAILLE

On peut calculer le déterminant de grandes matrices.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -1 * 1 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

Et si l'on choisit la 2^{nde} ligne :

$$|A| = -1 * (-2) * (1 * (-3) - 1 * 3) = -12$$

LE PIVOT DE GAUSS

On utilise des permutations de façon à obtenir une matrice triangulaire, alors le déterminant sera la multiplication des termes diagonaux.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -3 \end{vmatrix} = 1 * 1 * (-3) = -3$$

C'est une matrice triangulaire supérieure.

MINEURS M , un mineur est un sous déterminant

Dans la cas d'une matrice (3,3), pour chaque valeur de la matrice, on calcul le déterminant de la matrice composée des éléments qui ne sont pas sur la ligne et la colonne de la valeur désirée.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{, pour } a_{11} : M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} * a_{33} - a_{32} * a_{23}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{, pour } a_{23} : M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{32} - a_{12} * a_{31}$$

Il faut effectuer ce type d'opération pour les 9 valeurs de A.

On obtient : $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$

On notera que pour calculer le déterminant $|A|$, on a calculé 3 mineurs sur les 9.

COFACTEURS α , idem Mineurs sauf le signe

Ils sont définis comme suit : $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$

La matrice des cofacteurs de A est :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}.M_{11} & (-1)^{1+2}.M_{12} & (-1)^{1+3}.M_{13} \\ (-1)^{2+1}.M_{21} & (-1)^{2+2}.M_{22} & (-1)^{2+3}.M_{23} \\ (-1)^{3+1}.M_{31} & (-1)^{3+2}.M_{32} & (-1)^{3+3}.M_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

Les cofacteurs sont égaux aux mineurs, sauf le signe.

ADJOINTE , idem cofacteurs dont on inverse lignes et colonnes.

Cofacteurs de A $= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ Adjointe de A $= \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$

INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE , c'est l'adjointe divisée par le déterminant

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Les calculs d'inverse de matrice ne sont pas compliqués, il faut procéder par ordre et être rigoureux.

REMARQUE Les matrices dont le déterminant :

- $|A| = 0$ sont non-inversibles (il faudrait diviser par 0),
- $|A| = \pm 1$ ont des matrices inverses composées de nombres entiers.

On avait à résoudre le problème suivant :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} prix_{banane} \\ prix_{pomme} \\ prix_{orange} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A * x = y$$

Il faut déterminer A^{-1}, $A * x = y \Leftrightarrow A^{-1} * A * x = A^{-1} * y \Leftrightarrow x = A^{-1} * y$

A$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, on obtient $|A| = 16$, on calcule : $M = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 7 & 10 & -1 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -7 & 10 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adjointe} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 2 & 10 & -8 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 2 & 10 & -8 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

On en déduit la solution : $x = A^{-1} * y$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} prix_{banane} \\ prix_{pomme} \\ prix_{orange} \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 2 & 10 & -8 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9375 \\ 2.375 \\ 0.4375 \end{bmatrix}$$

Cela signifie :

- une banane coûte 0.94 €
- une pomme coûte 2.37 €
- une orange coûte 0.44 €

Ce type de calcul est réalisable sur des centaines d'éléments, c'est un travail qu'un ordinateur peut facilement réaliser.

Sommaire

L'algorithme de Google

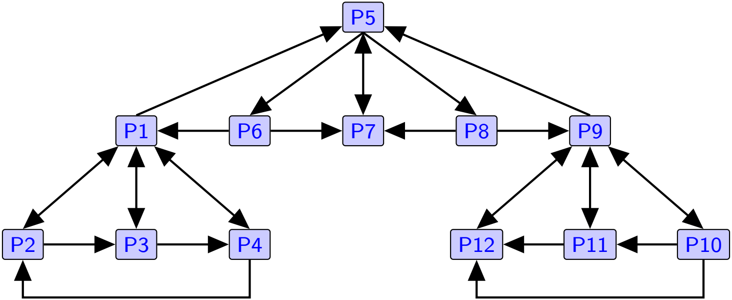
Principe

Analyse du fonctionnement de Google, sa technique pour trouver la page la plus pertinente.

On choisit un mot, par exemple *Asterix*, on va constater que Google trie les résultats. Sa technique est la suivante :

1. trouver le mot *Asterix* sur l'ensemble des pages,
2. déterminer les liens entre toutes les pages (quelques millions),
3. exploiter le calcul matriciel pour obtenir la page la plus pertinente.

Soit l'exemple suivant :



Liens possibles entre 12 pages sur Internet

Nous constatons que :

- la page 5 sert de référence commune aux pages 1, 6, 7, 8, 9,
- la page 1 sert de référence commune aux pages 2, 3, 4,
- la page 9 sert de référence commune aux pages 10, 11, 12

On soupçonne que le page P5 est la plus pertinente.

$\Rightarrow$ **Trouver une méthode de calcul** sur ce graphe où P5 est la première.

Le comptage naif

Si une page reçoit beaucoup de liens, alors elle est importante.

Ainsi on définit la mesure d'importance m_i de la page Pi comme :

le nombre des **liens $j \to i$ reçus par Pi**

Pour chaque page, compter le nombre de pages pointant vers elle.

n˚page	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m_i	**4**	2	2	2	3	1	3	1	**4**	1	2	3

On voit que ce comptage naïf est trop facile à manipuler en ajoutant des pages sans intérêt recommandant une page quelconque.

La page $P5$ ne ressort pas comme pertinente.

Le comptage pondéré

Certaines pages émettent beaucoup de liens, il faut les prendre en compte de façon plus faible.

Nous partageons donc le vote de la page Pj en l_j parts égales, où l_j dénote le nombre de liens émis.

Ainsi on définit : $m_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{l_j}$

Autrement dit, m_i compte le nombre de **Votes pondérés** pour la page Pi.

Pour la page P5 :

1. P1 vote pour P5 mais aussi pour P2, P3 et P4,
2. P1 vote pour 4 pages dont P5, donc P1 contribue à $\frac{1}{4}$ pour P5
3. il faut effectuer ce calcul pour toutes les pages pointant vers P5 donc P1 ($\frac{1}{4}$), P7 ($\frac{1}{1}$) et P9 ($\frac{1}{4}$),
4. puis effectuer la somme, on obtient 1.75

n˚page	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12
m_i	2	0.75	0.75	0.75	**1.75**	...						

La page P5 n'est toujours pas identifée comme la plus importante.

Du comptage récursif à la chaine de Markov

PRINCIPE

On mélange les 2 techniques précédentes, on multiplie chaque fraction par le poids de chaque page.

Ainsi on définit : $\boxed{m_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{l_j} * m_j}$

Ici le poids du vote $j \to i$ est proportionnel au poids m_j de la page émettrice. C'est facile à formuler mais moins évident à calculer, c'est un système récursif, par exemple, pour avoir le poids de la page P5, donc m_5, il faut m_9, qui demande m_8 qui demande m_5 ?

Mathématiquement, c'est un système de n équations à n inconnues.

`LA MATRICE P` Pour automatiser le processus, on résume le réseau en la matrice P suivante, où :

- chaque colonne représente la page de départ,
- et chaque ligne la page d'arrivée.

Remarquons :

- la somme des éléments de chaque colonne de P est égale à 1,
- chaque élément de la matrice est positif ou nul.

Les matrices ayant ces deux propriétés sont très spéciales, elles sont nommées matrice de transition de la chaîne de Markov.

- colonne $\rightarrow$ départ
- ligne $\rightarrow$ arrivée

Matrice P de transition de la chaine de Markov												
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12
P1	-	1/2	1/2	1/2		1/2						
P2	1/4			1/2								
P3	1/4	1/2										
P4	1/4		1/2									
P5	1/4						1		1/4			
P6					**1/3**							
P7					**1/3**	1/2		1/2				
P8					**1/3**							
P9								1/2		1/3	1	1
P10									1/4			
P11									1/4	1/3		
P12									1/4	1/3		

La colonne $P5$ a **3 flèches qui partent vers** $P6, P7, P8$.

La solution par élévation à la puissance

On peut démontrer que l'élévation à la puissance de P (environ P^{50}) va tendre vers la solution. Plus exactement :

- chaque colonne va être identique,
- la somme dans une colonne fait 1,
- le nombre obtenu dans une ligne correspond au poids (son importance) de la page,
- le tri des lignes du plus grand nombre au plus petit donne la solution par ordre d'importance.

On remarque que pour 5 ou 20, toutes les colonnes ne sont pas encore identiques, pour 50, les valeurs sont identiques.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,375	0,25	0,25	0,25	0,1667	0	0	0	0	0	0	0
2	0,125	0,125	0,375	0,125	0	0,125	0	0	0	0	0	0
3	0,125	0,125	0,125	0,375	0	0,125	0	0	0	0	0	0
4	0,125	0,375	0,125	0,125	0	0,125	0	0	0	0	0	0
5	0	0,125	0,125	0,125	0,3333	0,625	0	0,625	0	0,0833	0,25	0,25
6	0,0833	0	0	0	0	0	0,3333	0	0,0833	0	0	0
7	0,0833	0	0	0	0,3333	0	0,3333	0	0,0833	0	0	0
8	0,0833	0	0	0	0	0	0,3333	0	0,0833	0	0	0
9	0	0	0	0	0,1667	0	0	0	0,5833	0,6667	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0,125	0	0,0833	0,25	0,25
11	0	0	0	0	0	0	0	0,125	0,0833	0,0833	0,25	0,25
12	0	0	0	0	0	0	0	0,125	0,0833	0,0833	0,25	0,25

P^2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,127	0,1272	0,1272	0,1272	0,1262	0,1266	0,1262	0,1258	0,1255	0,1253	0,1254	0,1254
2	0,0636	0,0637	0,0637	0,0637	0,0631	0,0634	0,0631	0,0628	0,0626	0,0625	0,0626	0,0626
3	0,0636	0,0637	0,0637	0,0637	0,0631	0,0634	0,0631	0,0628	0,0626	0,0625	0,0626	0,0626
4	0,0636	0,0637	0,0637	0,0637	0,0631	0,0634	0,0631	0,0628	0,0626	0,0625	0,0626	0,0626
5	0,1893	0,1892	0,1892	0,1892	0,1895	0,1894	0,1895	0,1896	0,1897	0,1897	0,1897	0,1897
6	0,0631	0,0631	0,0631	0,0631	0,0632	0,0631	0,0632	0,0632	0,0632	0,0632	0,0632	0,0632
7	0,1262	0,1261	0,1261	0,1261	0,1263	0,1263	0,1263	0,1264	0,1265	0,1265	0,1265	0,1265
8	0,0631	0,0631	0,0631	0,0631	0,0632	0,0631	0,0632	0,0632	0,0632	0,0632	0,0632	0,0632
9	0,1255	0,1253	0,1253	0,1253	0,1265	0,126	0,1265	0,1269	0,1272	0,1274	0,1273	0,1273
10	0,0314	0,0313	0,0313	0,0313	0,0316	0,0315	0,0316	0,0317	0,0318	0,0319	0,0319	0,0319
11	0,0418	0,0417	0,0417	0,0417	0,0422	0,042	0,0422	0,0423	0,0424	0,0425	0,0425	0,0425
12	0,0418	0,0417	0,0417	0,0417	0,0422	0,042	0,0422	0,0423	0,0424	0,0425	0,0425	0,0425

P^{50}

La solution est : ligne 5 $\rightarrow$ 0.18 est la valeur la plus élevée

P5 est la page pertinente