Hjemmeopgavesæt 9 - Mark Rune Mortensen s174881

$$
s_1 = 8 \\
s_2 = 8 \\
s_3 = 1
$$

1)

a)

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 10 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \\
b = \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix}
$$

Ved at tage rangen af A kan man se at den er lig antal variable. Man kan også se på totalmatrix og rangen er antal variable + 1:

$$
T = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 17 \\ 0 & 6 & \frac{64}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{70}{3} \end{bmatrix}
$$

Her ses at ranged er 3 og at systemet derfor er overbestemt.

b)

$$
r_1 = 3x_1 - 6x_2 - 17 \\
r_2 = -2x_1 + 10x_2 - 10 \\
r_3 = x_1 + 10x_2 - 25
$$

Følgende r værdier findes hvis $(x_1, x_2) = (12, 0)$

$$
r_1 = 19 \\
r_2 = -34 \\
r_3 = -13
$$

RMS værdien er derfor:

$$
\sqrt{\frac{1}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)} = \sqrt{562}
$$

c)

Vi skal nu finde det mindste talsæt.
Først tranposer vi A

$$
A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 10 & 10 \end{bmatrix}
$$

Og derefter prikker vi A^T med $A|b$

$$A^T \cdot A|b = \begin{bmatrix} 3\cdot\ 3+(-2)(-2)+1\cdot\ 1 & 3(-6)+(-2)\cdot\ 10+1\cdot\ 10 & 3\cdot\ 17+(-2)\cdot\ 10+1\cdot\ 25 \\ (-6)\cdot\ 3+10(-2)+10\cdot\ 1 & (-6)(-6)+10\cdot\ 10+10\cdot\ 10 & (-6)\cdot\ 17+10\cdot\ 10+10\cdot\ 25 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot A|b = \begin{bmatrix} 14 & -28 & 56 \\ -28 & 236 & 248 \end{bmatrix}$$

Vi reducerer nu rækkerne med Gauss-Jordan:

$$R_1 = R_1 \cdot \frac{1}{14}$$
$$R_2 = R_2 + 28R_1$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 180 & 360 \end{bmatrix}$$
$$R_2 = R_2 \cdot \frac{1}{180}$$
$$R_1 = R_1 + 2R_2$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi kan nu tage og sætte $x = (8, 2)$
Vi prikker A med x og trækker b fra:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 3\cdot\ 8+(-6)\cdot\ 2 \\ (-2)\cdot\ 8+10\cdot\ 2 \\ 1\cdot\ 8+10\cdot\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x - b = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d)

Via den forrige opgave har vi nu vores residualer til at finde den mindste RMS:

$$\sqrt{\frac{1}{3}\left((-5)^2 + (-6)^2 + 3^2\right)} = \sqrt{\frac{70}{3}}$$

e)

```
A:=Matrix([[3,-6],[-2,(9+s3)],[1,(8+2*s3)]])
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 10 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

```
b:=Vector[column]([3*s3+14,10,5*s3+20])
```

$$b := \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix}$$

```
GaussianElimination(<A | b>) ;
```

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 17 \\ 0 & 6 & \frac{64}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{70}{3} \end{bmatrix}$$

```
GaussianElimination(A)
```

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
x1,x2:=12,0
```

$$x1, x2 := 12, 0$$

```
r1:=3*x1-6*x2-(3*s3+14)
```

$$r1 := 19$$

```
r2:=(-2)*x1+(9+s3)*x2-10
```

$$r2 := -34$$

```
r3:=x1+(8+2*s3)*x2-(5*s3+20)
```

$$r3 := -13$$

```
rms:=sqrt(1/3*(r1^2+r2^2+r3^2))
```

$$rms := \sqrt{562}$$

```
Tn:= Transpose(A).<A | b>
```

$$Tn := \begin{bmatrix} 14 & -28 & 56 \\ -28 & 236 & 248 \end{bmatrix}$$

```
ReducedRowEchelonForm(Tn)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
x := %[1..2 , 3]
```

$$x := \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
R:= A.x-b
```

$$R := \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
RMS := sqrt(1/3*(R[1]^2 + R[2]^2 + R[3]^2)) ;
```

$$RMS := \frac{\sqrt{210}}{3}$$