Espaces vectoriels

Exercice 1.

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.
La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,2,2)$ et $v_3 = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $v_1 = (1,2,1,2,1)$, $v_2 = (2,1,2,1,2)$, $v_3 = (1,0,1,1,0)$ et $v_4 = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $v_1 = (2,4,3,-1,-2,1)$, $v_2 = (1,1,2,1,3,1)$ et $v_3 = (0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $v_1 = (2,1,3,-1,-4,-1)$, $v_2 = (-1,1,-2,2,-3,3)$ et $v_3 = (1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4)
Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
2. (e_1, e_3).
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.
4. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.
5. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u_1 = (1,2,3,4)$ et $u_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect(u_1, u_2)$? Et pour que $(x, 1,1, y) \in Vect(u_1, u_2)$?

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$, $v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$
Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$, $v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$
À quelle(s) condition(s) un vecteur $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ appartient-il au sous-espace engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 ? Définir ce sous-espace par une ou des équations.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et v_1, v_2, v_3 et v_4 une famille libre d'éléments de E, les familles suivantes sont-elles libres?

1. $(v_1 , 2v_2, v_3)$

2. (v_1, v_3)
3. $(v_1, v_1 + 2, v_4)$
4. $(3v_1 + v_3, v_3, v_2 + v_3)$.
5. $(2v_1 + v_2, v_1 - 3v_2, v_4, v_2 - v_1)$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$F = Vect((1,0,1,1), (-1,-2,3,-1), (-5,-3,1,5))$$
$$G = Vect\big((-1,-1,1,-1), (4,1,2,4)\big)$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

On suppose que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$sont-ils linéairement indépendants?
3. Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants?

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soient $a = (2,3,-1)$, $b = (1,-1,-2)$, $c = (3,7,0)$ et $d = (5,0,-7)$.

Soient $E = Vect(a, b)$ et $F = Vect(c, d)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E = F$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au sous-espace-vectoriel engendré par le système (u_1, u_2), où $u_1 = (1,-1,1,2)$ et $u_2 = (-1,2,3,1)$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soient $u_1 = (0,1,-2,1)$, $u_2 = (1,0,2,-1)$, $u_3 = (3,2,2,-1)$, $u_4 = (0,0,1,0)$ et $u_5 = (0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier votre réponse.

1. $Vect(u_1, u_2, u_3) = Vect\big((1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\big)$
2. $(1,1,0,0) \in Vect(u_1, u_2) \cap Vect(u_2, u_3, u_4)$.
3. $\dim\big(Vect(u_1, u_2) \cap Vect(u_2, u_3, u_4)\big) = 1$.
4. $Vect(u_1, u_2) + Vect(u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$.
5. $Vect(u_4, u_5)$ est un sous-espace vectoriel de supplémentaire $Vect(u_1, u_2, u_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $Vect(v_1, v_2)$ et $Vect(v_3)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour $Vect(v_1, v_3, v_4)$ et $Vect(v_2, v_5)$.
3. Même question pour $Vect(v_1, v_2)$ et $Vect(v_3, v_4, v_5)$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

1. Est-ce que le sous-ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$ de $\mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Est-ce que le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y^2 = 2x, z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soient $u_1=(1,-1,2)$, $u_2=(1,1,-1)$ et $u_3=(-1,-5,-7)$

Soit $E=Vect(u_1,u_2,u_3)$

Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$

1. Donner une base de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base de F.
4. Donner une base de $E\cap F$.

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Soient $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(2,-2,-1)$ et $u_3=(1,1,-1)$

Soient $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, y+z=0\}$ et $F=Vect(u_1,u_2)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E.
2. La famille (u_1,u_2,u_3) est-elle libre ? Est-ce que $u_3\in F$?
3. Est-ce que $u_3\in E$?
4. Donner une base de $E\cap F$.
5. Soit $u_4=(-1,7,5)$, est-ce que $u_4\in E$? est-ce que $u_4\in F$?

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Soit $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$

Soient $a=(1,-2,3)$ et $b=(2,1,-1)$ deux vecteurs. On pose $F=Vect(a,b)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $E\cap F$.
3. A-t-on $E\oplus F$?

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soient $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y-2z=0 \text{ et } 2x-y-z=0\}$ et $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y-z=0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a=(1,1,1)$, $b=(1,0,1)$ et $c=(0,1,1)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b,c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a,b,c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.
6. Soit $u=(x,y,z)$, exprimer u dans la base $\{a,b,c\}$.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Soient $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R} | 2x+y-z=0 \text{ et } x+2y+z=0\}$ et $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | 2x-3y+z=0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a=(1,-1,1)$, $b=(-2,-1,1)$ et $c=(-1,0,2)$

1°) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2°) Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.

3°) Montrer que $\{b,c\}$ est une base de F.

4°) Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

5°) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

6°) Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (1,0,1)$, $b = (1,1,1)$ et $c = (0,2,1)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Soient $E = Vect(a, b, c, d)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$a = (2, -1, -1); \quad b = (-1,2,3); \quad c = (1,4,7); \quad d = (1,1,2)$$

1. Est-ce que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que (a, b) est une base de E.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E.
4. Compléter une base de E en une base de $\mathbb{R}^3$.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z - t = 0 \text{ et } x - 2y + 2z + t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$

On admettra que E est un espace vectoriel.

Et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x + 6y + 7z - t = 0\}$

Soient $a = (2,1,-1,2)$, $b = (1,1,-1,1)$, $c = (-1,-2,3,7)$ et $d = (4,4,-5,-3)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Première partie

1. Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E.
2. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième partie

3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer une base de F.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Troisième partie

6. Montrer que $F = Vect(b, c, d)$.
7. Soit $u = (x, y, z, t) \in F$, exprimer u comme une combinaison linéaire de b, c et d.

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0, x + 2y - z + t = 0, -x - y + 2z + 2t = 0\}$ et

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y + 4t = 0\}$

1. Donner une base de ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

3. Soit $a = (1,3,0,4) \in \mathbb{R}^4$ et on pose $G = Vect(a)$, a-t-on $G \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$

Soit $a = (1,2,-3)$, et $F = Vect(a)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de cet espace-vectoriel.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

   On justifiera la réponse.

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + x_3 = 0 \ \text{ et } \ x_2 + x_4 = 0\}$

Soient $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1,-1)$ et $u_3 = (1,0,1,0)$

Soit $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$

On admettra que E est un espace vectoriel.

1. Donner une base de E et en déduire sa dimension.
2. Déterminer une base de F.
3. Donner une (ou plusieurs) équation(s) qui caractérise(nt) F.
4. Donner une famille génératrice de $E + F$.
5. Montrer que : $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Soient $a = (1,1,1,1)$ et $b = (1,-1,1,-1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Soit $E = Vect(a, b)$.

Soient

$$F_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_1 + x_2 = 0\}$$
$$F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_2 + x_4 = 0 \ \text{ et } \ x_1 + x_3 = 0\}$$

On admettra que E, F_1 et F_2 sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base (c, d) de F_1.
2. Déterminer une base (e, f) de F_2
3. A-t-on $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^4$?
4. Montrer que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. A-t-on $E \oplus F_1 = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z - t = 0\}$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$ et $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, z = 3x, t = 4x\}$

1. Montrer que E, F et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donner une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
2. Déterminer $E + F$.
3. Montrer que $E \oplus H = \mathbb{R}^4$

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Soient $u_1 = (2,1,1)$, $u_2 = (1,2,-1)$, $u_3 = (1,1,0)$ et $u_4 = (1,-1,-2)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer une sous famille de (u_1, u_2, u_3, u_4) libre qui engendre $E = Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$, en déduire la dimension de E.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 = 0 \text{ et } x_3 - x_4 = 0\}$

On admettra que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de E.
2. Compléter cette base de E en une base de $\mathbb{R}^4$.

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Soient $a = (2, -1,1,2)$, $b = (2, -1,6,1)$ et $c = (6, -3,8,5)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, -7x + z + 5t = 0 \text{ et } x + y = 0\}$ et $F = Vect(a, b, c)$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de E et une base de F.
3. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ à 3 lignes et 3 colonnes.

Soit $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$.

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soient $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tout A, B et C réels montrer qu'il existe un unique polynôme de $R \in \mathbb{R}_2[X]$, tel que : $R(0) = A$, $R(1) = B$ et $R(2) = C$.

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

Soient $P_1 = X^3 + X^2 + X + 1$, $P_2 = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$, $P_3 = 3X^3 + X^2 + 4X + 2$ et $P_4 = 10X^3 + 4X^2 + 13X + 7$ quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$

1. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre ?
2. Donner une base de $Vect(P_1, P_2, P_3, P_4)$

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de E et en déduire sa dimension.

Allez à : Correction exercice 35