

Applications linéaires, matrices, déterminants

Exercice 1.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$.

Allez à : [Correction exercice 1](#)

Exercice 2.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 2z)$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\beta' = (f_1, f_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base et la dimension de $\ker(f)$ et une base et la dimension de $\text{Im}(f)$.

Allez à : [Correction exercice 2](#)

Exercice 3.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(\text{Im}(f))$.
3. Donner une base de $\text{Im}(f)$.

Allez à : [Correction exercice 3](#)

Exercice 4.

On considère l'application $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$$

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Montrer que h est ni injective ni surjective.
3. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Allez à : [Correction exercice 4](#)

Exercice 5.

Soit f l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3)$$

Et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
3. Calculer une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.

Allez à : [Correction exercice 5](#)

Exercice 6.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(\operatorname{Im}(f))$.

3. Donner une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Allez à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = \operatorname{Vect}(a)$, déterminer un vecteur qui convient.
2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$
 - a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$
 - b. En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

On pourra utiliser une autre méthode.

3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\operatorname{Im}(f)$.
4. A-t-on $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Allez à : [Correction exercice 7](#)

Exercice 8.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3; \quad u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3; \quad u(e_3) = 3f_1 - f_3 \quad \text{et} \quad u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3$$

1. Déterminer l'image par u dans vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et sa dimension de $\ker(u)$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(u)$ et sa dimension.

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9.

Soit $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4)$$

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

1. Donner une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
2. Donner une base (La plus simple possible) de $\operatorname{Im}(u)$ et sa dimension.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}^4$?
4. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 , en donner une base et sa dimension.
5. A-t-on $\ker(u) \oplus E = \mathbb{R}^4$?

Allez à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10.

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Soit $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ qui, à un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ associe le vecteur $u(x) \in \mathbb{R}^4$ défini par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4, -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

On admettra que u est une application linéaire.

1. Déterminer une base du noyau de u .
2. Déterminer une base de l'image de u .
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\operatorname{Im}(u)$.

Allez à : [Correction exercice 10](#)

Exercice 11.

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont l'image de la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$f(e_1) = -7e_1 - 6e_2$$

$$f(e_2) = 8e_1 + 7e_2$$

$$f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3$$

1. Pour tout vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ déterminer $f \circ f(x)$.
2. En déduire que f est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer f^{-1} .

Allez à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. A-t-on $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$?

Allez à : [Correction exercice 12](#)

Exercice 13.

Soit l'application $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

Allez à : [Correction exercice 13](#)

Exercice 14.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$?

Allez à : [Correction exercice 14](#)

Exercice 15.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$u(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3; \quad u(e_2) = e_2 - 3e_3; \quad u(e_3) = -2e_2 + 2e_3$$

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur.
Déterminer l'image par u du vecteur x . (Calculer $u(x)$).
2. Soient $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = 2x\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$
Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer une base de E et une base de F .
4. Y a-t-il $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Allez à : [Correction exercice 15](#)

Exercice 16.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$$f(e_1) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3), f(e_2) = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) \text{ et } f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$$

Soient $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$ et $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1} et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1 .
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1} \cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2 = f \circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Allez à : [Correction exercice 16](#)

Exercice 17.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3

Soient

$$a = \frac{1}{3}(2, -2, 1); b = \frac{1}{3}(2, 1, -2); c = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$$

Soit $\beta' = (a, b, c)$

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 définie par :

$$u(e_1) = 3e_1 + e_2 - e_3$$

$$u(e_2) = e_1 + 7e_2$$

$$u(e_3) = -e_1 - e_3$$

1. Montrer que β' est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, calculer $u(x)$.
3. Montrer que :

$$u(a) = 3a - 3c$$

$$u(b) = 3b + 3c$$

$$u(c) = -3a + 3b + 3c$$

Allez à : [Correction exercice 17](#)

Exercice 18.

Soit p l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 qui à tout vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$p(u) = (2x + y + 2z, y, -x - y - z)$$

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 . On note $p^2 = p \circ p$.

1. Montrer que p est une application linéaire.
2. Calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$ et $p(e_3)$, puis $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$, que peut-on en déduire sur $p^2(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$?
3. Donner une base de $\text{Im}(p)$ et une base de $\ker(p - \text{Id})$, montrer que ces deux espaces vectoriels sont égaux.
4. Montrer que $\ker(p) \oplus \text{Im}(p) = \mathbb{R}^3$

Allez à : [Correction exercice 18](#)

Exercice 19.

Soit E un espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f \circ f = \text{Id}_E$.

On pose $E_1 = \ker(f - \text{Id}_E)$ et $E_2 = \ker(f + \text{Id}_E)$

1. Soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
2. Pour tout $x \in E$ écrire $x = \frac{f(x)+x}{2} - \frac{f(x)-x}{2}$ et montrer que $E_1 \oplus E_2 = E$
3. On suppose que E est de dimension finie et que $f \neq \pm \text{Id}_E$. Soit (v_1, v_2, \dots, v_n) une base de E telle que : $E_1 = \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$ et $E_2 = \text{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$ calculer $f(v_i)$ dans la base (v_1, v_2, \dots, v_n) .

Allez à : [Correction exercice 19](#)

Exercice 20.

Soit $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^2 tel que $u(e_1) = e_1 + e_2$ et tel que $\dim(\ker(u)) = 1$

1. Déterminer $u(e_2)$ en fonction d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ en fonction de a .
3. Déterminer une base du noyau de $\ker(u)$.

Allez à : [Correction exercice 20](#)

Exercice 21.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f . En déduire la dimension de $\text{im}(f)$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Allez à : [Correction exercice 21](#)

Exercice 22.

Soit u l'application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$u(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer les dimensions de $\text{Im}(u)$ et de $\ker(u)$.

Allez à : [Correction exercice 22](#)

Exercice 23.

Soit u une application linéaire de E dans E , E étant un espace vectoriel de dimension n avec n pair.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

- (a) $u^2 = O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n = 2 \dim(\text{Im}(u))$
- (b) $\text{Im}(u) = \ker(u)$

Allez à : [Correction exercice 23](#)

Exercice 24.

Question de cours

Soit u une application linéaire de E vers E .

Montrer que : u est injective si et seulement si $\ker(u) = \{0_E\}$.

Allez à : [Correction exercice 24](#)

Exercice 25.

Soit $u: E \rightarrow E$ une application linéaire et λ un réel.

1. Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{id}_E)$. Calculer $u(x)$ pour $x \in E_\lambda$
Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E , montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Si $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$

Allez à : [Correction exercice 25](#)

Exercice 26.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et p

Soit $u: E \rightarrow F$ une application linéaire

1. Montrer que si $n < p$ alors u n'est pas surjective.
2. Montrer que si $n > p$ alors u n'est pas injective.

Allez à : [Correction exercice 26](#)

Exercice 27.

Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire

Montrer que :

$$\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = f(\ker(f^2))$$

Allez à : [Correction exercice 27](#)

Exercice 28.

Soient f et g deux endomorphisme de \mathbb{R}^n . Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f)$$

Allez à : [Correction exercice 28](#)

Exercice 29.

Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel.

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Im}(u)$.

Allez à : [Correction exercice 29](#)

Exercice 30.

Soit u un endomorphisme de E , un espace vectoriel.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $\ker(u) \cap \operatorname{im}(u) = \{0_E\}$
- (ii) $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Allez à : [Correction exercice 30](#)

Exercice 31.

Soit $u: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de \mathbb{R}^q .

1. $p = 3, q = 2$
 $u(e_1) = f_1 + 2f_2, u(e_2) = 2f_1 - f_2$ et $u(e_3) = -f_1 + f_2$
 - a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u .
 - b) Déterminer la matrice de u de la base \underline{e} dans la base \underline{f} .
 - c) Déterminer le noyau et l'image de u .
2. $p = 3$ et $q = 3$, dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$
 $u(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3, u(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3$ et $u(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$
 - a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u .
 - b) Déterminer la matrice de u de la base \underline{e} dans la base \underline{e} .
 - c) Déterminer le noyau et l'image de u .

Allez à : [Correction exercice 31](#)

Exercice 32.

Soit $u: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de \mathbb{R}^q .

1. $p = 2, q = 3$

$$A = \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2)$ par u .
 - Déterminer l'image de la base \underline{e} (c'est-à-dire $u(e_1)$ et $u(e_2)$).
 - Déterminer le noyau et l'image de u .
2. $p = 4, q = 4$, dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$

$$A = \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

- Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ par u .
- Déterminer l'image de la base \underline{e} (c'est-à-dire $u(e_1), u(e_2), u(e_3)$ et $u(e_4)$).
- Déterminer le noyau et l'image de u .

Allez à : [Correction exercice 32](#)

Exercice 33.

Soit $u: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de \mathbb{R}^q .

1. $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

(On admet que u est une application linéaire).

- Déterminer l'image de la base \underline{e} (c'est-à-dire $u(e_1), u(e_2)$, et $u(e_3)$).
 - Déterminer la matrice de u de la base \underline{e} dans la base \underline{e} .
 - Déterminer le noyau et l'image de u .
2. $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2)$$

(On admet que u est une application linéaire).

- Déterminer l'image de la base \underline{e} (c'est-à-dire $u(e_1), u(e_2)$, et $u(e_3)$).
- Déterminer la matrice de u de la base \underline{e} dans la base \underline{e} .
- Déterminer le noyau et l'image de u .

Allez à : [Correction exercice 33](#)

Exercice 34.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

- Déterminer une base du noyau de f .
- Déterminer une base de l'image de f . Quel est le rang de A ?

Allez à : [Correction exercice 34](#)

Exercice 35.

Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allez à : [Correction exercice 35](#)

Exercice 36.

Soit la matrice A de définie par : $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1} .
2. En déduire A^n , pour tout n entier.

Allez à : [Correction exercice 36](#)

Exercice 37.

Soit A la matrice de définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 .
2. Trouver un polynôme P de degré 2 tel que $P(A) = 0$.
3. En déduire A^{-1} .
4. Retrouver A^{-1} par une autre méthode.

Allez à : [Correction exercice 37](#)

Exercice 38.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3 . Calculer $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2 , A et I .
3. Exprimer A^4 en fonction de A^2 , A et I .

Allez à : [Correction exercice 38](#)

Exercice 39.

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A - 2I)^3$, puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de I , A et de A^2 .

Allez à : [Correction exercice 39](#)

Exercice 40.

A tout nombre réel t on associe la matrice : $M(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) & \text{sh}(t) \\ \text{sh}(t) & \text{ch}(t) \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit des matrices $M(t_1)$ et $M(t_2)$, où t_1 et t_2 sont deux réels quelconques.
2. Montrer que $M(t)$ est inversible, et déterminer $M^{-1}(t)$.

Allez à : [Correction exercice 40](#)

Exercice 41.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3

Soit $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 dont on donnera une base a .
2. Soient $b = (0,1,1)$ et $c = (1,1,2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Calculer $u(b)$ et $u(c)$.

3. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
4. Déterminer la matrice de passage P de β à β' .
5. Calculer P^{-1} .
6. Déterminer la matrice D de u dans la base β' .
7. Donner la relation entre A, P et D .

Allez à : [Correction exercice 41](#)

Exercice 42.

Soit f une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par : $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ et $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer la matrice A de f dans la base β .
3.
 - a) Déterminer le noyau et l'image de f .
 - b) En déduire que f est inversible.
 - c) Déterminer f^{-1} dans la base β , en déduire A^{-1} .
4. Montrer que $A = RH$.

Où H est la matrice d'une homothétie dont on donnera le rapport et R est la matrice d'une rotation dont on donnera l'angle.

Soient $a = e_1 + e_2$ et $b = e_1 - e_2$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . On pose $\beta' = (a, b)$.

5. Montrer que $\beta' = (a, b)$ est une base de \mathbb{R}^2 .
6. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
7. Déterminer la matrice de f dans la base β' .

Allez à : [Correction exercice 42](#)

Exercice 43.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de passage P de β à β' . Calculer P^{-1} .
3. Déterminer la matrice R de u dans la base β' .
4.
 - a) Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R
 - b) Calculer R^4
 - c) En déduire les valeurs de A^{4n} .

Allez à : [Correction exercice 43](#)

Exercice 44.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit u une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$$

$$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$$

$$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.

- Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E .
- Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Donner une base (b, c) de F .
- Montrer que $\beta' = (a, b, u(b))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
- Déterminer la matrice R de u dans la base β' .

Allez à : [Correction exercice 44](#)

Exercice 45.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit u l'application linéaire qui a un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$$

- Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
- Déterminer une base (a, b) de $\ker(u - Id)$.
- Donner un vecteur c tel que $\ker(u) = \text{vect}(c)$.
- Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer la matrice D de u dans la base β' .
- Montrer que $\text{Im}(u) = \ker(u - Id)$.
- Montrer que $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

Allez à : [Correction exercice 45](#)

Exercice 46.

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ par

$$u(x) = (-10x_1 + 3x_2 + 15x_3, -2x_1 + 3x_3, -6x_1 + 2x_2 + 9x_3)$$

- Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer la dimension du noyau et de l'image de u . On donnera un vecteur directeur a de $\ker(u)$.
- A-t-on $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$?
- Déterminer un vecteur b tel que $a = u(b)$.
- Montrer que $E_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , déterminer un vecteur directeur de E_{-1} que l'on notera c .
- Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer la matrice A' de u dans la base β' et donner la relation reliant A et A' .

Allez à : [Correction exercice 46](#)

Exercice 47.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice par rapport à la base β est : $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\beta' = (a, b, c, d)$ une famille de \mathbb{R}^4 définie par :

$$a = e_1 - e_2, b = e_1 - e_2 - e_3, c = 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4 \text{ et } d = -e_1 + 2e_2$$

- Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
- Calculer $f(a), f(b), f(c)$ et $f(d)$ et les exprimer dans la base $\beta' = (a, b, c, d)$.
- Déterminer la matrice de f dans la base β' .

Allez à : [Correction exercice 47](#)

Exercice 48.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$a = (-1, 1, 0, -1)$, $b = (1, -2, -1, 1)$, $c = (-2, 3, 1, -1)$ et $d = (2, -1, 0, 1)$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
2. Donner la matrice de passage P de β à β' . Calculer P^{-1} .
3. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base β' .
4. Déterminer la matrice T de u dans la base β' .
5. Calculer $N = T + I$, puis N^4 et en déduire $(A + I)^4$.

Allez à : [Correction exercice 48](#)

Exercice 49.

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique, $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Soient a, b, c et d quatre vecteurs

$a = -2e_1 - e_2 - e_3 - e_4$; $b = e_2 - e_4$; $c = 2e_1 + e_3 + e_4$; $d = 3e_1 + e_3 + 2e_4$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
2. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base $\beta' = (a, b, c, d)$
3. En déduire la matrice D de u dans la base β' .
4. Déterminer la matrice P de passage de β à β' .
5. Calculer P^{-1} .
6. Calculer $P^{-1}AP$.

Allez à : [Correction exercice 49](#)

Exercice 50.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $a = e_1 + e_2 + e_3$, $b = e_1$, $c = u(b)$ et $d = u^2(b)$.

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
2. Donner la matrice de passage P de β à β' . Calculer P^{-1} .
3. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base β' .
4. Déterminer la matrice N de u dans la base β' .
5. Calculer N^4 et en déduire A^4 .
6. Donner une base de $\ker(u)$
7. Donner une base de $\text{Im}(u)$.

Allez à : [Correction exercice 50](#)

Exercice 51.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a non nul tel que $\ker(u) = \text{vect}(a)$
2. Déterminer un vecteur b tel que $a = u(b)$
3. Déterminer un vecteur c tel que $u(c) = -c$
4. Soit $d = (-1, 0, 0, -1)$, montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4
5. Calculer $u(d)$ dans la base β' .
6. Déterminer la matrice T de u dans β' .
7. Quel est le rang de A .
8. Soit $f = 2e_1 - e_2 - e_3 + e_4 = (2, -1, -1, 1)$
Calculer $u(f)$, $u^2(f)$, $u^3(f)$ et on admettra que $\beta'' = (f, u(f), u^2(f), u^3(f))$ est une base de \mathbb{R}^4
9. Calculer $u^4(f)$ et montrer que $u^4(f) = -2u^3(f) - u^2(f)$
En déduire la matrice C de u dans la base β'' .
10. Montrer que C et T sont deux matrices semblables (c'est-à-dire qu'il existe une matrice R , inversible, telle que $T = R^{-1}CR$)

Allez à : [Correction exercice 51](#)

Exercice 52.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4

Soit u l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Donner une base (a, b) de $\ker(u)$.
2. Donner un vecteur c qui engendre $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = x\}$
3. Déterminer un vecteur $d \in \ker((u - id)^2)$ et $d \notin \ker(u - id)$, on pourra calculer $(A - I)^2$, en déduire que d vérifie $u(d) = \lambda c + d$, où λ est un réel qui dépendra du vecteur d que vous avez choisi.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
5. Déterminer la matrice T de u dans la base β' . (en fonction de λ)

Allez à : [Correction exercice 52](#)

Exercice 53.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base β est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a qui engendre le noyau de u .
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
3. Trouver un vecteur directeur b de E_{-1} . Déterminer une base (c, d) de E_1 .
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
5. Déterminer la matrice de u dans la base β' .

Allez à : [Correction exercice 53](#)