*Fiche de TD d'Analyse*

## 2.4 Exercices

***Exercice* 2.3.** Pour $m \in \mathbb{N}$ on pose

$$x_m = \left(\frac{1}{1+m}, 1+e^{-m}\right)$$

**1.** Étudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
**2.** Étudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

***Exercice* 2.4.** Étudier l'existence et éventuellement la valeur de la limite en (0,0) pour les fonctions définies (sur le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ possible) par

$$f_1(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f_3(x,y) = \frac{xy}{x+y},$$

$$f_4(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_5(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \qquad f_6(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$f_7(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y), \qquad f_8(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad f_9(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

***Exercice* 2.5.** Les limites suivantes existent-elles :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y} \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \quad ?$$

***Exercice* 2.6.** Donner le domaine de définition des fonctions suivantes, puis déterminer si elles sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}^2$ :

$$f_1 : (x,y) \mapsto \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, \quad f_2 : (x,y) \mapsto \frac{y\sin(x+1)}{x^2-2x+1}, \quad f_3 : (x,y) \mapsto \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}.$$

***Exercice* 3.4.** Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées partielles en tout point des fonctions définies par

$$f_1(x,y) = e^x\cos(y), \quad f_2(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}, \quad f_3(x,y) = x^y \quad (\text{pour } x>0).$$

***Exercice* 1.15.** Soit $F$ une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $F$ est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $F$ qui converge vers un certain $l \in \mathbb{R}^n$ on a $l \in F$.

***Exercice* 1.16.** On appelle distance sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y, z \in E$ on a

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$ alors l'application $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur $E$.

***Exercice* 1.17.** Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

**1.** Montrer que $d$ définit une distance sur $\mathbb{R}^n$.
**2.** Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$.

partielles.

***Exercice* 3.3.** On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions

$$f_1 : (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}, \quad f_2 : (x, y) \mapsto y \in \mathbb{R}, \quad f_3 : (x, y) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que les fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$ admettent en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles par rapport à $x$ et à $y$, et les expliciter.

***Exercice* 3.9.** Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on note $f(x, y, z) = \big(2x(y + z^2), \cos(xyz)\big)$.

**1.** Donner la nature de chacun des objets suivants :

1. $f$
2. $\operatorname{Jac} f$
3. $\operatorname{Jac} f(1, 2, 3)$
4. $x \mapsto f(x, 5, 2)$
5. $d_{(0,0,0)} f$
6. $d_{(1,2,3)} f(1, 2, 3)$
7. $\nabla f$
8. $x \mapsto \partial_y f(x, 2, 4)$
9. $\partial_z f$

***Exercice* 3.11.** On admet pour le moment que les fonctions suivantes sont différentiables. Calculer leurs jacobiennes.

$$f_1 : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x^2 - z^2}{2}, \sin(x)\sin(y)\right), \quad f_2 : (x, y) \mapsto \left(xy, \frac{x^2}{2} + y^2, \ln\left(1 + x^2\right)\right).$$

***Exercice* 3.12.** Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$f(x) = \langle u(x), x \rangle ,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Étudier la différentiabilité de $f$ sur $\mathbb{R}^n$.

***Exercice* 3.13.** Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|$ (où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$) n'est pas différentiable en 0.



***Exercice* 3.14.** Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x)| \leqslant \|x\|_2^2 .$$

**1.** Montrer que $f$ est différentiable en 0 et donner sa différentielle.
**2.** Interpréter ce résultat géométriquement.
**3.** Mêmes questions en remplaçant $\|x\|_2^2$ par $\|x\|_1^2$ et $\|x\|_\infty^2$.

***Exercice* 3.15** (Existence des dérivées directionnelles n'implique pas non plus la continuité)**.** On considère l'application $f$ de la remarque 3.9.
**1.** Montrer que $f$ admet en (0,0) une dérivée selon tout vecteur et la calculer.
**2.** Montrer que $f$ n'est pas continue en 0.

Activer Windows

***Exercice* 4.1.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer en quels points la fonction $f$ est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $f$ est $C^1$.

***Exercice* 4.2.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x y^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Déterminer en quels points la fonction $f$ est continue, admet des dérivées partielles, est

***Exercice* 4.3.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \inf(x^2, y^2)$. Déterminer en quels points la fonction $f$ est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $f$ est $C^1$.

On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = y$. En dehors de cette droite la fonction $f$ est polynômiale donc de classe $C^1$ ($f(x,y)$ vaut $x^2$ sous cette droite et $y^2$ au dessus).

***Exercice* 4.4.** **1.** Montrer que si $f$ est une fonction contractante de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ alors l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.
**2.** On considère le système d'équations

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y), \quad y = \frac{1}{2}\cos(x-y).$$

Montrer que ce problème admet au plus une solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (N.B. : on verra au théorème 7.1 comment montrer que ce problème admet effectivement une solution).

***Exercice* 4.5.** Montrer qu'une application lipschitzienne est continue.

## 5.5 Exercices

***Exercice* 5.3.** Étudier sur $\mathbb{R}^2$ les extrema locaux et globaux des fonctions définies par

$$f_1 : (x,y) \mapsto x^4+y^4 \quad ; \quad f_2 : (x,y) \mapsto x^4-y^4 \quad ; \quad f_3 : (x,y) \mapsto x^4 \quad ; \quad f_4 : (x,y) \mapsto -(x^4+y^4).$$

***Exercice* 5.4.** Étudier les extrema locaux et globaux des fonctions définies par
- $f_1(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $\mathbb{R}^2$,
- $f_2(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ sur $\mathbb{R}^2$,
- $f_3(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,
- $f_4(x,y) = y^2 + x^2 + xy + 2x - 2y$ sur $\mathbb{R}^2$.

***Exercice* 5.5.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On admet (ou pas) que l'application

$$\phi : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que ce minimum est atteint au point $A^{-1}b$.

***Exercice* 5.6** (Contre-exemple pour le théorème de Schwarz). On considère l'application $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$



**1.** Étudier la continuité de $f$.
**2.** Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées premières et secondes de $f$.
**3.** Déterminer le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $f$ est $C^1$, $C^2$.

***Exercice* 5.7.** Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)\neq 0$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose $F(x,y)=f(x)f(y)$.
**1.** Montrer que $F$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
**2.** La fonction $F$ admet-elle un extremum local en (0,0) ?

***Exercice* 5.8.** Déterminer

$$\inf_{\substack{x>0\\ y>0}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy\right).$$



# 9.4 Exercices

## 9.4.1 Intégrales à paramètre

***Exercice* 9.1.** Montrer que l'intégrale $I_n=\int_1^{+\infty}\frac{1}{n^2+t^2}dt$ converge pour tout $n\in\mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

***Exercice* 9.2.** On définit deux fonctions $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par les formules

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad \text{et} \qquad g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt.$$

**1.** Montrer que $g$ est dérivable.
**2.** Montrer que la fonction $h(x)=g(x)+f^2(x)$ est constante.
**3.** En déduire que $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}/2$.

***Exercice* 9.6.** Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x+y$, $\quad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \geqslant x \geqslant 0,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$,
2. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}$, $\quad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3 > x > 1,\ y > 2,\ x+y < 5\}$,
3. $f(x,y) = \cos(xy)$, $\quad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2 \geqslant x \geqslant 1,\ 0 \leqslant xy \leqslant 2\}$,
4. $f(x,y) = x$, $\quad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0,\ x-y+1 \geqslant 0,\ x+2y-4 \leqslant 0\}$,
5. $f(x,y) = xy$, $\quad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ xy+x+y \leqslant 1\}$.

***Exercice* 9.7.** Calculer les aires des domaines suivants :
$D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4-x^3\}$,
$D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ -\sin x \leqslant y \leqslant \sin x\}$,
$D_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0,\ x-y+1 \geqslant 0,\ y \leqslant -x^2+2x+1\}$.

***Exercice* 9.8.** Soit $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1], y\in[0,1], x^2+y^2 \geqslant 1\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$.

***Exercice* 9.9.** On considère le domaine

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}.$$

Pour $z_o \in \mathbb{R}$, on définit le plan $P_{z_o} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = z_o\}$.
**1.** Pour quelles valeurs de $z_o$ l'intersection $P_{z_o}\cap D$ est-elle non-vide ?
**2.** Soit $z_o\in\mathbb{R}$ tel que $P_{z_o}\cap D$ est non-vide. Calculer $\iint_{P_{z_o}\cap D} x\,dx\,dy$.
**3.** Calculer $\iiint_D x\,dx\,dy\,dz$.

***Exercice* 9.10.** On note $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$. Calculer $\displaystyle\iiint_D \cos(x)\,dx\,dy\,dz$.