UNIVERSITE DE PARAKOU

École Nationale de Statistique, de Planification et de Démographie

Filière : Statistique appliquée

ANNÉE D'ÉTUDE : Master 1

Chaînes de Markov

Parakou, le 10 mai 2025

Année Académique : 2024-2025

Enseignante : Dr. Marie Reine A. KAKPO BAGAN
Email : reine7346@gmail.com

Table des matières

Chapitre 1

Introduction aux chaînes de Markov

Dans la modélisation d'un phénomène qui dépend du hasard, il y a lieu de prendre en compte l'évolution de ce dernier au cours du temps. La modélisation de l'observation d'un phénoméne se faisant avec de variables aléatoire ; ici il s'agira de le modéliser avec une famille de variables aléatoires, appelée processus stochastique.

1.1 Définition et Propríté de Markov

Définition 1.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et soit* $(E, \mathcal{F}')$ *un espace mesurable. On appelle processus stochastique, une famille* $(X_t)_{t\in T}$ *de variables aléatoires réelles, , définies sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $(E, \mathcal{F}')$.

L'espace $(E, \mathcal{F}')$ est appelé l'espace des états.

L'ensemble T représente le temps et la variable aléatoire X_t correspond á l'état du phénomène à l'instant t. Si l'ensemble T est :

- ▷ dénombrable, le processus stochastique est dit discret ; par exemple $T = \mathbb{N}$. On employera le terme chaîne et indexera la variable aléatoire par la lettre n.
- ▷ continu, le processus stochastique est dit continu ; par exemple $T = \mathbb{R}^+$. Nous indexons la variable aléatoire par la lettre t.

Définition 1.2 *Soit* $(X_t)_{t\in T}$ *un processus stochastique définies sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ¿* *avaleurs dans* $(E, \mathcal{F}')$. *Soit* $\omega \in \Omega$ *un évèment élémentaire. On appelle trajectoire du processus associée à* ω*, l'application*

$$T \longrightarrow E$$

$$t \longmapsto X_t(w)$$

Propriété 1.1 *(Propriété de Markov) Une suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n\geq 0}$ *définie sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, à valeurs dans un espace E discret est appelée chaîne de Markov si, pour tout* $n \geq 0$ *et pour toute suite* $(x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1})$ *d'éléments de E, telle que la probabilité* $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$*, on a*

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, ..., X_0 = x_0] = P[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n]$$

.

On dit que l'état x_{n+1} du processus à l'instant $n + 1$ ne dépend pas du déroulement passé, $x_0, ..., x_{n-1}$, mais seulement de l'état présent x_n

Exemple 1.1 *On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ indépendantes et de même loi, et Y_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendante des $(Y_n)_{n\geq 1}$. Posons*

$$\begin{cases} X_0 = Y_0 \\ \\ X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} Y_i, \ n \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

1.2 Probabilités et matrices de transition

Dans cette partie nous nous interèssons à la probabilité d'être dans un état y à l'instant t suivant sachant que l'on est dans un état x à l'instant présent.

Définition 1.3 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace E. On appelle probabilité de transition à l'instant $n \geq 0$ d'un état x à un état y, le nombre réel noté $p_n(x, y)$ telle que*

$$p_n(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y)|X_n = x).$$

Lorsque pour tout $n \geq 0$ et pour tout $(x, y) \in E^2$, $p_n(x, y)$ ne dépend pas de l'instant n, c'est - à - dire

$$\forall n \geq 0, \ \forall (x, y) \in E^2, \quad p_n(x, y) = p(x, y).$$

On dit que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est homogène.

Définition 1.4 *Étant donné une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un espace dénombrable $E = \{x_1, x_2, ...x_n\}$. On appelle matrice de transition associée à $(X_n)_{n\geq 0}$, la matrice P telle $P = (P_{i,j}) = p(x_i, x_j)$ et*

$$p(x_i, x_j) = \mathbb{P}(X_1 = x_j|X_0 = x_i).$$

Exemple 1.2 *En considérant la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de l'exemple 1.1, on suppose que Y_1 est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de loi et que $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p$ et que $P(Y_1 = -1) = 1 - p$ où $0 \leq p \leq 1$. Donner la matrice de transition de la chaîne .*

1.3 Matrice Stochastique

Définition 1.5 *On appelle matrice stochastique, toute matrice carré $P = (p(x, y))$, dont les lignes et les colonnes sont indexées par un ensemble d'états E dénombrable (fini ou infini), telle que toutes les lignes sont des probabilités.*

Propriété 1.2 *Soit $P = (p(x, y))$, une matrice Stochastique alors*

1. $\forall (x, y) \in E^2$, $p(x, y) \geq 0$
2. $\forall x \in E$, $\sum_{y\in E} p(x, y) = 1$

Proposition 1.1 *Soit $P = (p(x, y))$, une matrice stochastique alors pour tout $n \geq 0$, P^n une matrice stochastique.*

1.4 Graphe associé à une chaîne de Markov

Définition 1.6 *Soit une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un espace E, on appelle graphe de la chaîne , le graphe construit à partir de la matrice de transition tel que les sommets sont les états et les arêtes (orientées) représentent les transitions possibles d'un état vers un autre. Au dessus de chaque arête on écrit la probabilité de transition correspondante.*

Exemple 1.3 *Dessiner le graphe de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de l'exemple* 1.1.

1.5 Exercices

Exercice 1.1 *Soit une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un espace dénombrable $E = \{x_1, x_2, ...x_n\}$. Montrer que la matrice de transition associée à $(X_n)_{n\geq 0}$ est une matrice stochastique.*

Exercice 1.2 *Montrer que toute matrice stochastique admet une valeur propre égale à 1 et comme vecteur propre associé le vecteur, noté e, dont toutes les coordonnées sont égales à 1.*

Exercice 1.3 *Montrer que le produit de deux matrices stochastiques indexées par le même ensemble E est encore une matrice stochastique*

Exercice 1.4 *On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ indépendantes et de même loi, et Y_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendante des $(Y_n)_{n\geq 1}$. Posons*

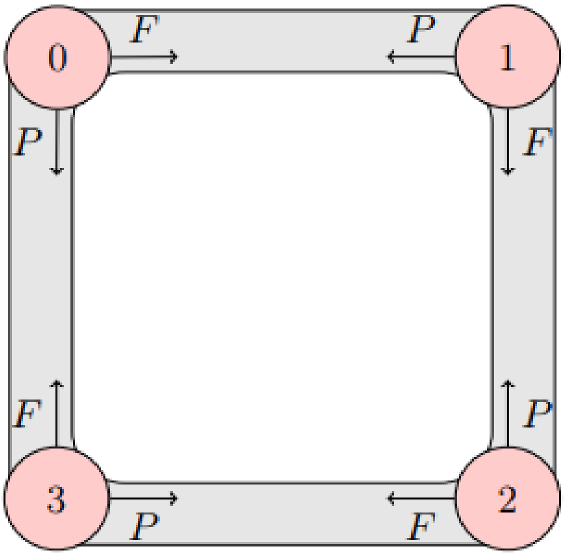
$$\begin{cases} X_0 = Y_0 \\ \\ X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1}) \; n \geq 0 \end{cases}$$

où f est application définie de $E \times E$ à valeurs dans E.
Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

Exercice 1.5 *(Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$)*
Considérons un fort carré pourvu d'un poste de garde à chaque coin. Une seule sentinelle est de garde ce jour-là. Elle a pour rôle de tromper l'ennemi et pour cela elle a l'ordre d'effectuer sa ronde de la manière aléatoire suivante :

Elle monte la garde 5 minutes dans un des quatre postes, puis elle tire à pile ou face une pièce équilibrée ; si elle tire pile, elle se rend au premier poste sur sa gauche et si elle tire face, elle se rend au premier poste sur sa droite. Elle y monte la garde 5 minutes et de nouveau elle tire à pile ou face le nouveau poste de garde et ainsi de suite.

Le parcours de la sentinelle peut être décrit à l'aide de la figure suivante :



Soit Y_0 le numéro du poste au départ, X_n le numéro du poste après n déplacements.

1. *Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.*
2. *Déterminer la matrice de transition associée à $(X_n)_{n\geq 0}$*
3. *Dessiner la graphe de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$.*

Exercice 1.6 *(Transmission d'un bit informatique) Un bit informatique (qu'il sera plus utile de modéliser par un -1/1 plutôt que 0/1) est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité p et le déforme en son contraire avec une probabilité 1-p, où $0 < p < 1$. Le bit d'entrée est modélisé par une variable aléatoire Y_0 indépendante des intermédiaires.*

1. *Modéliser cette situation par un processus stochastique $(X_n)_{n\geq 0}$ et montrer qu'il s'agit d'une chaîne de Markov.*
2. *Donner la matrice de transition et le graphe associé.*

Exercice 1.7 *Deux joueurs A et B disposent d'une fortune initiale de a et b euros respectivement, avec $a, b > 0$. Ils jouent au jeu de hasard suivant : la mise est de 1 euro par partie ; les parties sont indépendantes et à chacune d'entre elle le joueur A a une probabilité p de gagner (et donc 1 - p de perdre), avec $0 < p < 1$. Le jeu se déroule jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs.*

1. *Modéliser la fortune du premier joueur par un processus stochastique.*
2. *Montrer qu'il s'agit d'un echaîne de Markov.*
3. *Donner sa matrice de transition et le graphe associé.*

Chapitre 2

Dynamique des chaînes de Markov

Ce chapitre est dédié à la caractérisation d'une chaîne de Markov et à l'étude de son évolution dans le temps.

2.1 Caractérisation d'une chaîne de Markov

Définition 2.1 *Soit une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E, on appelle loi initiale de $(X_n)_{n\geq 0}$, la loi μ_0 de la variable aléatoire X_0 :*

$$\forall x \in E,\ \mu_0(x) = \mathbb{P}(X_0 = x).$$

Théorème 2.1 *Un processus $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov de loi initiale μ_0 et de matrice de transition $P = p(x,y),\ (x,y) \in E^2$ si et seulement si pour tout $(x_0, x_1, ..., x_n) \in E^{n+1}$ on a*

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) = \mu_0(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)...p(x_{n-1},x_n) \tag{2.1}$$

Preuve. Supposons que $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov de loi initiale μ_0 et de matrice de transition $P = p(x,y),\ (x,y) \in E^2$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0 ..., X_{n-1} = x_{n-1}) \\
&* \ \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}) \\
&= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \\
&* \ \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} | X_0 = x_0 ..., X_{n-2} = x_{n-2}) \\
&* \ \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_{n-2} = x_{n-2}) \\
&= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) * \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} | X_{n-2} = x_{n-2}) \\
&* \ \cdots * P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) * \mathbb{P}(X_0 = x_0) \\
&= \mu_0 * p(x_0, x_1) * p(x_1, x_2) * \cdots * p(x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

Supposons Maintenant que

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) = \mu_0(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)...p(x_{n-1},x_n)$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}|X_0=x_0,...,X_n=x_n) &= \frac{\mathbb{P}(X_0=x_0,...,X_n=x_n,X_{n+1}=x_{n+1})}{\mathbb{P}(X_0=x_0,...,X_n=x_n)} \\
&= \frac{\mu_0 * p(x_0,x_1) * p(x_1,x_2) * \cdots * p(x_n,x_{n+1})}{\mu_0 * p(x_0,x_1) * p(x_1,x_2) * \cdots * p(x_{n-1},x_n)} \\
&= p(x_n,x_{n+1})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n) &= \frac{\mathbb{P}(X_n=x_n,X_{n+1}=x_{n+1})}{\mathbb{P}(X_n=x_n)} \\
&= \frac{\sum_{x_0,...,x_{n-1}\in E}\mathbb{P}(X_0=x_0,...,X_n=x_n,X_{n+1}=x_{n+1})}{\sum_{x_0,...,x_{n-1}\in E}\mathbb{P}(X_0=x_0,...,X_n=x_n)} \\
&= \frac{\sum_{x_0,...,x_{n-1}\in E} p(x_n,x_{n+1}) * \mathbb{P}(X_0=x_0,...,X_n=x_n)}{\sum_{x_0,...,x_{n-1}\in E}\mathbb{P}(X_0=x_0,...,X_n=x_n)} \\
&= p(x_n,x_{n+1})
\end{aligned}$$

d'où $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de loi initiale μ_0 et de matrice de transition $P=p(x,y),\ (x,y)\in E^2$ ■

Corollaire 2.1 *La loi d'une chaîne de Markov est invariante par translation dans le temps. Autrement dit*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{m+n}=x_{m+n},...,X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n,...,X_0=x_0) &= \mathbb{P}(X_n=x_{m+n},...,X_1=x_{n+1}|X_0=x_n) \\
&= p(x_n,x_{n+1})...p(x_{n+m-1},x_{n+m})
\end{aligned}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{m+n}=x_{m+n},...,X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n,...,X_0=x_0) &= \frac{\mathbb{P}(X_{m+n}=x_{m+n},...,X_0=x_0)}{\mathbb{P}(X_n=x_n,...,X_0=x_0)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_0=x_0)p(x_0,x_1)...p(x_{m+n-1},x_{m+n})}{\mathbb{P}(X_0=x_0)p(x_0,x_1)...p(n_{n-1},x_n} \\
&= p(x_n,x_{n+1})...p(n_{m+n-1},x_{m+n})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n=x_{m+n},...,X_1=x_{n+1}|X_0=x_n) &= \frac{\mathbb{P}(X_n=x_{m+n},...,X_0=x_n)}{\mathbb{P}(X_0=x_n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_0=x_n)p(x_n,x_{n+1})...p(x_{m+n-1},x_{m+n})}{\mathbb{P}(X_0=x_n)} \\
&= p(x_n,x_{n+1})...p(x_{m+n-1},x_{m+n})
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.2 *Soit μ_0 une probabilité donnée sur un ensemble discret E et Soit P une matrice stochastique sur E, nous pouvons leur associer une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ dont les marginales sont données par* (2.1).

2.2 Transitions d'ordre n et loi à l'instant n

Définition 2.2 *Soit une chaîne de Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$ *à valeurs dans E de matrice de transition* $P = (p(x,y))\,,\ (x,y) \in E^2$.

On appelle loi marginale de $(X_n)_{n\geq 0}$ *(c'est - à - dire la loi à l'instant n), la loi* μ_n *de la variable* x_n *:*

$$\forall x \in E,\ \mu_n(x) = \mathbb{P}(X_n = x).$$

On appelle matrice de transition d'ordre n de $(X_n)_{n\geq 0}$ *la matrice* P^n *telle que*

$$P^n(x,y) = p^n(x,y) = \mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x),\ \textit{pour tout}\ (x,y) \in E^2$$

Propriété 2.1 *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une chaîne de Markov à valeurs dans E de loi initiale* μ_0 *et de matrice de transition* $P = p(x,y),\ (x,y) \in E^2$.

1. *Pour tout* $k \geq 0$ *et pour* $(x,y) \in E^2$, $\mathbb{P}(X_{n+k} = y|X_k = x) = p^n(x,y)$.
2. *Pour tout* $n \geq 0$*, la loi marginale* μ_n *est donnée par le produit matriciel :* ${}^t\mu_n = {}^t\mu_0 P^n$. *Autrement dit pour tout* $x \in E$*, on a* $\mu_n(x) = \sum_{y\in E} \mu_0(y)p^n(y,x)$.

Preuve.

— Pour tout $k \geq 0$ et pour $(x,y) \in E^2$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+k} = y|X_k = x) &= \sum_{x_{k+1},\dots,x_{n+k-1}\in E} \mathbb{P}(x_{n+k} = y, X_{n+k-1=x_{n+k-1}}, \dots\dots X_{k+1} = x_{k+1}|X_k = x) \\
&= \sum_{x_{k+1},\dots,x_{n+k-1}\in E} p(x,x_{k+1}) * \dots p(x_{n+k-1},y) \qquad (2.2) \\
&= p^n(x,y) \text{ d'après le corrolaire 2.1.}
\end{aligned}$$

— Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $y \in E$

$$\begin{aligned}
\mu_n(x) = \mathbb{P}(X_n = x) &= \sum_{y\in E} \mathbb{P}(X_n = x|X_0 = y) * \mathbb{P}(X_0 = y) \\
&= \sum_{y\in E} \mu_0(y) * p^n(y,x)
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2 *(Équations de Chapman-Kolmogorov)*
Soit une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ *à valeurs dans E de matrice de transition P. Alors toutes les matrices de transition d'ordre n+m,n et m satisfont :*

$$P^{n+m} = P^n P^m.$$

Autrement pour $(x,y) \in E^2$*, on a*

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = y|X_0 = x) = \sum_{z\in E} \mathbb{P}(X_n = z, X_0 = x)\mathbb{P}(X_m = y, X_0 = z)$$

Preuve. Exercice de maison ■

2.3 Exercice

Exercice 2.1 *On dispose dans une maison individuelle de deux systèmes de chauffage, l'un de base et l'autre d'appoint. On dira que l'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état 2 si les deux systèmes fonctionnent. Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste le lendemain avec probabilité 1/2 ; par contre si l'on est dans l'état 2, le lendemain la maison est chaude et l'on passe à l'état 1 avec probabilité 3/4.*

Soit X_n l'état du système au jour numéro n ; on admet que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

1. *Déterminer la matrice de transition et son graphe.*
2. *On pose $p_n = P[X_n = 1]$. Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}, puis exprimer p_n en fonction de p_0. Que vaut $\lim_{n\longrightarrow+\infty} p_n$?*
3. *On suppose que l'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant.*
4. *Montrer que si un jour on se retrouve dans l'état 1 avec probabilité 3/5 alors il en est de même les jours qui suivent.*

Exercice 2.2 *Un joueur fréquente 3 casinos numérotés 1, 2 et 3. Chaque jour il choisit l'un des deux casinos où il n'est pas allé la veille suivant une même probabilité 1/2. Le premier jour, jour 0, il choisit l'un des trois casinos selon une loi μ_0 sur $E = \{1, 2, 3\}$. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du casino fréquenté par le joueur le jour n. On admet que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.*

1. *Déterminer la matrice de transition P et le graphe de la chaîne de Markov.*
2. *Calculer les puissance P^n de la matrice P, puis $\lim_{n\longrightarrow+\infty} P^n$.*
3. *Calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}[X_n = x]$ pour $x \in 1, 2, 3$.*

Exercice 2.3 *On reprend l'Exercice 5.4 sur la marche aléatoire.*

1. *Calculer la probabilité $P^{(n)}(x, x)$ que le marcheur revienne en un point x au bout de n pas, sachant qu'il est parti de ce même point x.*
2. *Donner une formule exacte pour $\sum_{n\geq 0} P^n(x, x)$ pour tout $p \in]0, 1[$ et $p \neq 1/2$.*
3. *En utilisant la formule de Stirling, donner un équivalent $(n \sim +\infty)$ de $P^n(x, x)$ lorsque p =1/2 . Déduire que $\sum_{n\geq 0} P^n(x, x) = \infty$.*

Chapitre 3

Classification des États

3.1 Classes de communication

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace d'états E, de matrice de transition P.

Définition 3.1 *Soient x et y deux états. On dit que x conduit à y ou que y est accessible depuis x et on note $x \to y$, si :*

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad P^n(x, y) = \mathbb{P}(X_n = y | x_0 = x) > 0.$$

Cette relation signifie que à un certain temps n, partant de x nous avons une probabilité non nulle d'atteindre y .

On dit que x communique avec y,et on note $x \longleftrightarrow y$, si $x \to y$ et $y \to x$.

Proposition 3.1 *La relation de communication $\longleftrightarrow$ est une relation d'équivalence.*

Preuve. ■

Remarque 3.1.1 — *Les états E d'une chaîne de Markov peuvent être diviser en classes d'équivalence appelées classes irréductibles.*
— *Si E est réduit à une seule classe, la chaîne de Markov est dite irréductible.*

Définition 3.2 *Soient C et C' deux classes d'équivalences d'une chaîne de Markov .*

▷ *Une classe d'équivalence C' accessible depuis une classe C et on note $C \to C'$ si*

$$\forall (x, x') \in C \times C',\ x \to x'.$$

▷ *La relation*

$$\forall (x, x') \in C \times C',\ x \to x' \iff \exists (x, x') \in C \times C',\ x \to x'$$

est une relation d'équivalence.

▷ *Une classe d'équivalence C est dite fermée si C est une classe dont on ne peut pas sortir : pour tout $x \in C$ tels et pour tout entier naturel n*

$$\sum_{y \in C} p^n(x, y) = 1$$

▷ *Une classe fermée réduite à un point $C = \{x\}$ est appelée un état absorbant. Un état x est absorbant si et seulement si p(x, x) = 1.*

3.2 Période

Définition 3.3 *Soit E l'espace d'état d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ et soit $x \in E$. La période de l'état x, notée d(x), est le plus grand commun diviseur des entiers n tels que $P^n(x, x)$ soit strictement positif :*

$$d(x) = PGCD\left(\{n \geq 1 : p^n(x, x) > 0\}\right).$$

Lorsque $\{n \geq 1 : p^n(x, x) > 0\}$ est vide la période est nulle.

Théorème 3.1 *Si deux états communiquent alors ils ont méme période.*

Preuve.
Supposons que $s \longleftrightarrow y$. Alors $\exists\ n \in \mathbb{N}$, $p^n(x, y) > 0$ et $\exists\ m \in \mathbb{N}$, $p^n(y, x) > 0$. On a

$$p^{d(x)+n+m}(y, y) \geq p^m(y, x) * p^{d(x)}(x, x) * p^n(x, y) > 0$$

et

$$p^{n+m}(y, y) \geq p^m(y, x) * p^n(x, y)$$

donc d(y)/d(x). De manière analogue en permutant le place de x et y on obtient que d(x)/d(y). Par Suite d(x)=d(y)

■

Définition 3.4 — *La période d'une classe est la période de chacun de ses éléments.*
— *Une classe est dite apériodique si sa période est 1.*

3.3 Récurrence et transition

Cette section est dédiée à l'étude d' une seconde classification des états en tenant compte du type de comportement de la chaîne.

Dans toute cette section,$(X_n)_{n\geq 0}$ désignera une chaîne de Markov à valeurs dans un espace E, de matrice de transition P.

Pour un état $x \in E$ tel que $\mathbb{P}(X_0 = x) > 0$, on notera $\mathbb{P}_x$ la probabilité conditionnelle sachant $\{X_0 = x\}$.

Définition 3.5 *Soit $x \in E$ un état. Le temps d'atteinte de x, noté T_x, est le premier instant o`u x est visité aprés le départ. Par convention, le temps d'atteinte est infini si nous n'atteignons jamais x :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ T_x(\omega) = \begin{cases} \inf\{n > 0, X_n(\omega) = x\} \text{ si un tel entier existes} \\ \\ +\infty \quad \text{si non} \end{cases}$$

Si la chaîne part de l'état x lui-même, nous employons plutôt le terme de temps de retour.

Définition 3.6 *Un état $x \in E$ est dit récurent si*

$$\mathbb{P}_x\left(T_x < +\infty\right) = 1.$$

Autrement dit un état est récurrent si nous sommes sûr d'y revenir. Il est dit transitoire si

$$\mathbb{P}_x\left(T_x = \infty\right) > 0.$$

Autrement dit il est transitoire s'il existe une probabilité non nulle de ne jamais y revenir.

3.3.1 Critères de récurrence/transition

Définition 3.7 *Soit un état x . Le nombre de visites en x est une variable aléatoire N_x définie par :*

$$N_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{X_n = x\}}.$$

On appelle le noyau de Green, le noyau potentiel ou simplement la fonction de Green la fonction G définie par

$$G(x,y) = \mathbb{E}_x(N_y).$$

Lemme 3.1 *Soient x et y deux états on a :*

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n(x,y)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \mathbb{E}_x(N_y) = \mathbb{E}_x(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{X_n=y\}}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x(I_{\{X_n=y\}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n(x,y) \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2 *Les Assertions suivantes sont équivalentes*

(1) Un état x est dit récurent si $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1$.
(2) $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$.
(3) $G(x,x) = \infty$.

De manière analogue, les Assertions suivantes sont équivalentes

(1) Un état x est dit récurent si $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) < 1$.
(2) $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 0$.
(3) $G(x,x) < \infty$ et $G(x,x) = \frac{1}{\mathbb{P}_x(T_x=\infty)}$

Dans ce cas, la loi conditionnelle de N_x sachant que l'on part de $X_0 = x$ est une loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}_x(T_x = \infty)$.

Preuve. La démonstration de ce théorème s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 3.2 *Pour tout $(x,y) \in E^2$ on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_x(N_y \geq n+1) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)\, \mathbb{P}_x(N_y \geq n), \tag{3.1}$$

$$G(x,y) = \delta_{\{x=y\}} + \mathbb{P}_x(T_y < \infty)\, G(y,y) \tag{3.2}$$

■

3.3.2 Classes récurrentes/transitoires

Proposition 3.2 *Soient deux états x et y qui communiquent, alors x et y sont soit tous les deux récurrents soit tous les deux transitoires.*

Preuve. Supposons que $s \longleftrightarrow y$. Alors $\exists\ n \in \mathbb{N}$, $p^n(x,y) > 0$ et $\exists\ m \in \mathbb{N}$, $p^n(y,x) > 0$. Pour tout $k \geq n+m$ on a

$$p^k(x,x) \geq p^n(y,x) * p^{k-n-m}(x,x) * p^m(y,x) > 0$$

et

$$p^k(y,y) \geq p^m(y,x) * p^{k-n-m}(y,y) p^n(x,y).$$

Donc les série de termes généraux $p^k(y,y)$ et $p^k(y,y)$ convergent et divergent en même temps, d'où le résultat.

■

Définition 3.8 *Une classe d'équivalence est dite récurrente, (respectivement transitoire), si un de ses sommets est récurrent, (respectivement transitoire).*

Proposition 3.3 *Une classe récurrente est fermée, autrement dit, la probabilité de sortir d'une classe récurrente est nulle.*

Preuve. Soit C une classe récurrente. Supposons que C ouverte.

Si C est ouverte alors il existe $x \in C$ tel que $x \longrightarrow y$ et $y \notin C$.

$$x \longrightarrow y \iff \mathbb{P}_x(T_y < \infty) > 0$$

et puisque $y \notin C$ alors pour tout $z \in C$, $y \not\longrightarrow z$. Par suite

$$\mathbb{P}_x(T_x = \infty) \geq \mathbb{P}_x(T_y < \infty) > 0.$$

On en déduit que x est transitoire. Ce qui contredit l'appartenance de x à C. ■

Proposition 3.4 *Toute classe fermée et de cardinal fini est récurrente.*

Preuve. Soit C une classe fermée de cardinal finie. Supposons que $\forall x \in C$, x est transitoire.

Si x est transitoire, d'après le Théorème 3.2, $G(x,x) < \infty$. Soit $y \in C$, on a $y \longrightarrow x$ et donc $\mathbb{P}_y(T_x < \infty) < 1$. En utilisant l'égalité 3.2 on a : $G(y,x) < \infty$ et par suite $\sum_{x \in E} G(y,x) < \infty$ car C est de cardinal fini.

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in E} G(y,x) &= \sum_{x \in E} \sum_{n=1}^{+\infty} p^n(y,x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{x \in E} p^n(y,x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 1, \quad \text{car C étant fermé , } \sum_{x \in E} p^n(y,x) = 1 \\
&= \infty, \text{ absurde car } \sum_{x \in E} G(y,x) < \infty.
\end{aligned}$$

Donc il existe un état $x \in C$ tel que x soit récurent d'où C est récurent ■

Corollaire 3.1 *Une chaîne de Markov définie sur un espace d'états fini admet au moins un état récurrent.*

Preuve. Exercice de maison ■

3.4 Exercices

Exercice 3.1 *Soit x et y deux états d'une chaîne de Markov. Montrer que :*

1. *Si $x \not\longrightarrow y$ alors G(x,y)=0.*
2. *Si $x \longrightarrow y$ et y est transitoire alors, alors $G(x, y) < \infty$.*
3. *Si $x \longrightarrow y$ et y est récurent alors, alors $G(x, y) = \infty$.*
4. *La fonction de Green vérifie*

$$G = PG + I \iff \forall (x, y) \in E^2, \quad G(x, y) = \sum_{z \in E} p(x, z)g(z, y) + \delta_{\{x=y\}}.$$

Exercice 3.2 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Tracer le graphe de cette chaîne.
2. Déterminer la ou les composantes irréductibles de cette chaîne.
3. Quels sont les états transitoires ?
4. On suppose que $X_0 = 1$. Quelle est la probabilité qu'on ne repasse jamais par 1 ?
5. Quelle est la probabilité pour qu'on repasse pour la première fois en 1 à l'instant n ?
6. Quelle est l'espérance du temps de premier retour en 1 ?

Exercice 3.3 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\{1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Dessiner le graphe correspondant.*
2. *Classer les états de la chaîne.*
3. *Quelle est la probabilité que la chaîne issue de 2 soit absorbée en 4 ?*
4. *Quel est le temps moyen d'absorption de la chaîne issue de 2 ?*

Exercice 3.4 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3\}$ de matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.*
2. *Combien y a-t-il de composantes irréductibles ?*
3. *Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 2)$, $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 2)$.*

Exercice 3.5 *On suppose qu'un trait est gouverné par deux gènes, qui peuvent être de deux types, G et g. On suppose que G est dominant (c'est-à-dire que c'est lui qui s'exprime si la paire est Gg) et g récessif. L'état Gg est appelé hybride, l'état GG dominant, l'état gg récessif.*

1. *Un éleveur adopte la stratégie suivante : à chaque fois, il apparie l'individu de la n-ième génération avec un hybride.*
   Modéliser la situation par une chaîne de Markov, et classer les états.
2. *Un éleveur adopte la stratégie suivante : à chaque fois, il apparie l'individu de la n-ième génération avec un dominant*
   Modéliser la situation par une chaîne de Markov, et classer les états.

Exercice 3.6 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3\}$ de matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

1. *Dessiner le graphe associé à cette chaîne de Markov et classifier les états.*
2. *Calculer la fonction de Green pour toutes les paires de points $(x, y) \in E^2$.*
   Déduire la probabilité de ne jamais revenir en 3 sachant que l'on est parti de 3.

Chapitre 4

Mesures stationnaires

Ce chapitre est dédier à l'étude des mesures particulières pour les chaînes de Markov. Il s'agit des mesures stationnaires. Elles sont utilisées dans l'étude de l' équilibre et du comportement en temps long des chaînes.

Dans tout le chapitre $(X_n)_{n\geq 0}$ désigne une chaîne de Markov définie sur un espace des états E et de matrice de transition $P = (\mathbb{P}(x,y))$.

4.1 Mesures stationnaires et réversibles

Définition 4.1 *Soit μ une mesure positive sur E, telle que $\mu(x) < \infty$ pour tout $x \in E$ et $\mu(x) \neq 0$. On dit que μ est une mesure invariante ou stationnaire si :*

$$\forall y \in E, \quad \mu(y) = \sum_{x\in E} \mu(x)p(x,y).$$

•Si $\mu(E) = \sum_{x\in E} \mu(x) < \infty$, on peut associer à μ une unique probabilité π telle que μ et π soient proportionnelles :

$$\forall x \in E, \quad \pi(x) = \frac{\mu(x)}{\mu(E)}.$$

•Si μ est une mesure stationnaire alors, pour tout $n \geq 0$,

$${}^t\mu = {}^t\mu P^n \iff \forall y \in E, \quad \mu(x) = \sum_{x\in E} \mu(x)p^n(x,y).$$

En particulier si la loi initiale π_0 est stationnaire, alors la π_n loi à l'instant n, est égale à la loi initiale :

$${}^t\pi_0 = {}^t\pi_0 P^n = {}^t\pi_n \iff \forall y \in E, \quad \mathbb{P}(X_0 = y) = \mathbb{P}(X_n = y).$$

Proposition 4.1 *Si la loi initiale est stationnaire, alors la chaîne ne de Markov est stationnaire. Pour tout $(x_0, ..., x_n) \in E^{n+1}$, on a*

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbb{P}(X_n = x_0, ..., X_{n+k} = x_k) = \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_k = x_k)$$

Preuve. Supposons que la loi initiale est stationnaire. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = x_0, ..., X_{n+k} = x_k) &= \mathbb{P}(X_n = x_0)p(x_0, x_1)...p(x_{k-1}, x_k) \\
&= \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_k = x_k) \quad \text{car } \pi_0 \text{ est sationnaire} \\
&= \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_k = x_k)
\end{aligned}$$

■

Définition 4.2 *Soit μ une mesure positive sur E, telle que $\mu(x) < \infty$ pour tout $x \in E$ et $\mu(x) \neq 0$. On dit que μ est une réversible si :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \mu(x)p(x, y) = \mu(y))p(y, x).$$

Proposition 4.2 *Toute mesure réversible est stationnaire*

Preuve. Supposition qu'une mesure μ est réversible alors pour tout $(x, y) \in E^2$ on a

$$\mu(x)p(x, y) = \mu(y))p(y, x).$$

et donc

$$\sum_{y \in E} \mu(y))p(y, x) = \sum_{y \in E} \mu(x)p(x, y) = \mu(x) \sum_{y \in E})p(y, x) = \mu(x).$$

D'où le résultat. ■

Proposition 4.3 *Si la loi initiale π_0 est réversible, alors pour tout $n \geq 0$,*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \mathbb{P}\left[X_n = y | X_{n+1} = x\right] = P\left[X_{n+1} = y | X_n = x\right]$$

Preuve. Supposons que la loi initiale π_0 est réversible . Alors π_0 est stationnaire. Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $(x, y) \in E^2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[X_n = y | X_{n+1} = x\right] &= \frac{\mathbb{P}\left[X_n = y, X_{n+1} = x\right]}{\mathbb{P}\left[X_{n+1} = x\right]} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[X_{n+1} = x | X_n = y\right]\mathbb{P}\left[X_n = y\right]}{\mathbb{P}\left[X_{n+1} = x\right]} \quad \text{d'après le Théorème de Bayes} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[X_{n+1} = x | X_n = y\right]\mathbb{P}\left[X_0 = y\right]}{\mathbb{P}\left[X_0 = x\right]} \quad \text{car } \pi_0 \text{ est stationnaire} \\
&= \frac{p(y, x)\mathbb{P}\left[X_0 = y\right]}{\mathbb{P}\left[X_0 = x\right]} \\
&= \frac{p(y, x)\mathbb{P}\left[X_0 = x\right]}{\mathbb{P}\left[X_0 = x\right]} \\
&= \mathbb{P}\left[X_{n+1} = y | X_n = x\right] \text{car } \pi_0 \text{ est irréversible}
\end{aligned}$$

■

4.2 Existence

Ici il s'agit d'établir l'existence d'une mesure invariante pour chaîne de Markov irréductible et récurrente. Si la chaîne n'est pas irréductible, des résultats analogues s'appliquent à la chaîne restreinte à chacune des classes irréductible rï¿½currentes.

Théorème 4.1 *Si la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ est irréductible et récurrente, alors la mesure $_x$ définie pour tout $y \in E$ par :*

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=1}^{T_x} \mathbb{I}_{\{X_n=y\}}\right)$$

est stationnaire et strictement positive.

Preuve. Pour tout $y \in E$ on a :

$$\begin{aligned}\mu_x(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=1}^{T_x} \mathbb{I}_{\{X_n=y\}}\right) &= \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{T_x\geq n\}}\mathbb{I}_{\{X_n=y\}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}_x\left(\mathbb{I}_{\{\{T_x\geq n\}\cap\{X_n=y\}\}}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}_x\left(T_x \geq n, X_n = y\right).\end{aligned}$$

Pour n=1, $\mathbb{P}_x\left(T_x \geq n, X_n = y\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = y|X_0 = x\right) = p(x,y)$.
Pour $n \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left(T_x \geq n, X_n = y\right) &= \mathbb{P}\left(X_n = y, X_{n-1} \neq x, ..., X_1 \neq x\right)\\ &= \sum_{z\in E-\{x\}} \mathbb{P}\left(X_n = y, X_{n-1} = z, ..., X_1 \neq x\right)\\ &= \sum_{z\in E-\{x\}} \mathbb{P}\left(X_n = y|X_{n-1} = z, ..., X_1 \neq x\right)\mathbb{P}\left(X_{n-1} = z, ..., X_1 \neq x\right)\\ &= \sum_{z\in E-\{x\}} \mathbb{P}\left(X_n = y|X_{n-1} = z\right)\mathbb{P}\left(X_{n-1} = z, ..., X_1 \neq x\right)\\ &= \sum_{z\in E-\{x\}} p(z,y)\mathbb{P}\left(X_{n-1} = z, ..., X_1 \neq x\right)\\ &= \sum_{z\in E-\{x\}} p(z,y)\mathbb{P}_x\left(T_x \geq n-1, X_{n-1} = z\right).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mu_x(y) &= p(x,y) + \sum_{n\geq 2}\sum_{z\in E-\{x\}} p(z,y)\mathbb{P}_x\left(T_x \geq n-1, X_{n-1} = z\right)\\ &= p(x,y) + \sum_{z\in E-\{x\}} p(z,y)\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}_x\left(T_x \geq n, X_n = z\right)\\ &= p(x,y) + \sum_{z\in E-\{x\}} p(z,y)\mu_x(z)\\ &= \sum_{z\in E} p(z,y)\mu_x(z), \quad \text{car} \quad \mu_x(x) = 1.\end{aligned}$$

Ce qui prouve que la mesureμ_x est stationnaire. Par ailleurs puis que la chaîne de Markov est irréductible alors $x \longleftrightarrow y$. Il existe donc $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p^n(x, y) > 0$ et $p^m(y, x) > 0$. On a

$$\mu_x(x) = \sum_{z \in E} \mu_x(z) p^m(z, x) \geq \mu_x(y) p^m(y, x)$$

donc

$$\mu_x(y) = \frac{\mu_x(x)}{p^m(y, x)} = \frac{1}{p^m(y, x)} < \infty.$$

On a $\mu_x(y) = \sum_{z \in E} \mu_x(z) p^m(z, y) \geq \mu_x(x) p^n(x, y) = p^n(x, y) > 0$. Ce qui montre que la mesure μ est positive. ■

4.3 Unicité

Théorème 4.2 *Si la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 1}$ est irréductible et récurrente. Alors, la mesure stationnaire définie dans le théorème 4.1 est unique à une constante multiplicative près.*

Preuve.

Lemme 4.3.1 *Soit une chaîe de Markov irréductible et récurrente. Si une mesure positive μ satisfait,*

$$\forall x \in E, \quad \mu(x) \geq ({}^t\mu P)(x),$$

alors μ est une mesure stationnaire.

En effet, pour tout $y \in E$ et pour tout $n \geq 0$, posons

$$\mu_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \left({}^t\mu - {}^t\mu P\right) P^k(y).$$

On a

$$\mu_{n+1}(y) - \mu_n(y) = \sum_{x \in E} \left(\mu(x) - \left({}^t\mu P\right)(x)\right) P^k(x, y) \geq 0.$$

Donc la suite μ_n est croissante. De plus pour tout $y \in E$

$$\mu_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \left({}^t\mu - \left({}^t\mu P\right)\right) P^k(y) = \sum_{k=0}^{n} \left(\left({}^t\mu P\right)(y) - \left({}^t\mu P^{k+1}\right)(y)\right) = \mu(y) - \left({}^t\mu P^{n+1}\right)(y) \leq \mu(y).$$

Alors μ_n est bornée donc convergente. Elle converge vers

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left({}^t\mu - {}^t\mu P\right) P^k(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{x \in E} \left(\mu - {}^t\mu P\right)(x) P^k(x, y)\right) = \sum_{x \in E} \left(\left(\mu - {}^t\mu P\right)(x) \sum_{k=0}^{+\infty} P^k(x, y)\right)$$

Corollaire 4.1 *Soit une chaîne de Markov et μ et η deux mesures satisfaisant la condition de stationnarité, alors le minimum $\mu \wedge \eta$ des deux mesures défini pour tout $x \in E$ par :*

$$\mu \wedge \eta(x) = \min(\mu(x), \eta(x)),$$

est encore une mesure stationnaire .

Preuve en exercice de maison

Lemme 4.1 *Soit une chaîne de Markov irréductible et récurrente et μ une mesure stationnaire non identiquement nulle. Alors μ est une mesure strictement positive.*

En effet, si μ une mesure stationnaire non identiquement nulle alors $\exists x \in E$ tel que $\mu(x) > 0$.
Supposons qu'il existe $y \in E$ tel que $\mu(y) = 0$.
Puisque la chaîne de Markov irréductible alors $x \longrightarrow y$. c'est - à -dire : $\exists n > 0$ tel que $p^n(x,y) > 0$. Par suite

$$0 = \mu(y) = \sum_{z \in E} \mu(z) p^n(z,y) \geq \mu(x) p^n(x,y) > 0.$$

■

Démonstration du Théorème :

Corollaire 4.2 *Soit une chaîne de Markov irréductible et récurrente. Alors,*

- *soit, pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x(T_x) < \infty$ et il existe une unique probabilité stationnaire π donnée par*
$$\forall x \in E, \quad \pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}.$$
- *soit, pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x(T_x) = \infty$ et toute mesure stationnaire a une masse totale. infinie.*

Preuve. Si une chaîne de Markov irréductible et récurrente alors d'après les Théorèmes 4.1 et 4.2, il existe ùne constante près une mesure positive stationnaire de la forme de μ_x pour tout x fixé dans E. Cette mesure est de masse finie ou non.
• Si elle est de masse fini on a

$$\begin{aligned}
\mu_x(E) = \sum_{y \in E} \mu_x(y) &= \sum_{y \in E} \mathbb{E}_x \left(\sum_{n=1}^{T_x} \mathbb{I}_{\{X_n = y\}} \right) \\
&= \mathbb{E}_x \left(\sum_{y \in E} \sum_{n=1}^{T_x} \mathbb{I}_{\{X_n = y\}} \right) \\
&= \mathbb{E}_x \left(\sum_{n=1}^{T_x} \sum_{y \in E} \mathbb{I}_{\{X_n = y\}} \right) = \mathbb{E}_x \left(\sum_{n=1}^{T_x} 1 \right) = \mathbb{E}_x(T_x) < \infty.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\pi(x) = \frac{\mu_x(x)}{\mu_x(E)} = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}$$

• Si non $\mu_x(E) = \mathbb{E}_x(T_x) = \infty$ ■

Définition 4.3 *Soit une chaîne de Markov et x un état récurrent. Alors x est dit récurrent positif si $\mathbb{E}_x(T_x) < \infty$, il est dit récurrent nul $\mathbb{E}_x(T_x) = \infty$.*

Proposition 4.4 *Soient x et y deux états récurrents qui communiquent. Alors ils sont tous les deux soit récurrents positifs, soit récurrents nuls.*

Preuve. Preuve en exercice ■

Définition 4.4 *Une classe d'équivalence récurrente est dite récurrente positive si un de ses états est récurrent positif ; elle est dite récurrente nulle sinon.*

4.4 Caractérisation des chaînes de Markov récurrentes positives

Proposition 4.5 *Une chaîne de Markov irréductible est récurrente positive si et seulement si elle admet une probabilité stationnaire. En particulier, toute chaîne de Markov irréductible définie sur un espace d'états de cardinal fini est récurrente positive.*

Preuve. contenu... ■

4.5 Convergence vers l'équilibre

Dans cette section nous nous intéressons à ce qui se passe si la loi initiale n'est pas la probabilité stationnaire.

Théorème 4.3 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique. Alors pour tout état $x \in E$ et toute loi initiale $_0$,*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \pi(x),$$

où π est la probabilité stationnaire de la chaîne.

4.6 Exercice

Exercice 4.1 *Soit (X_n) une chaîne de Markov à valeurs dans l'ensemble $E = \{1, 2\}$ et de matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

1. *Classifier les états de cette chaîne.*
2. *Déterminer la probabilité stationnaire.*
3. *Déduis- en l'espérance du temps de retour dans l'état 1 sachant qu'elle est partie de l'état 1*

Exercice 4.2 *Reprend les Exercices 2.1 (dépenses énergétiques) et 2.2 (Casino/marche aléatoire sur Z/3Z).. Sans calculer les puissances n-ième de la matrice de transition, déterminer la limite de la loi à l'instant n de la chaîne de Markov associée à chacun de ces deux exemples.*

Exercice 4.3 *Soit (X_n) une chaîne de Markov à valeurs dans l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$, de loi μ et de matrice de transition*

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que la chaîne est irréductible.*
2. *Calculer la probabilité invariante πde cette chaîne.*
3. *Calculer Q^n et vérifier que Q^n converge vers une matrice dont toutes les lignes sont éegales à π*

Exercice 4.4 *Soit (X_n) une chaîne de Markov à valeurs dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2\}$ et de matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & 1-q \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Classifier les états de cette chaîne.*
2. *Justifie que (X_n) admet une probabilité stationnaire π et la déterminer.*
3. *Déduis- en l'espérance du temps de retour dans l'état 0 sachant qu'elle est partie de l'état 0*