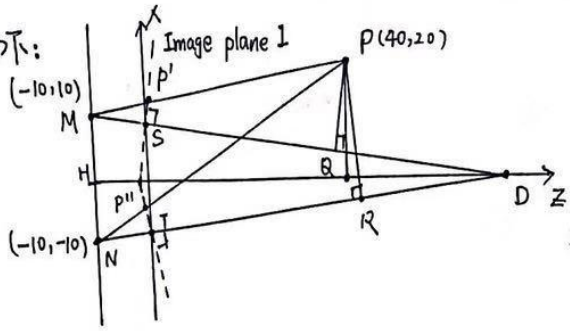
问题包 2. 解答部分.

1. 题干略，题图如下:



解: 首先，根据几何关系易得 $l_{PP'}: z-5x+60=0$，$l_{PP''}: 3z-5x-20=0$

$l_{MD}: z+10x-90=0$，$l_{ND}: z-10x-90=0$

倘若不进行极线校正，有 $U_L = P'S = \frac{15\sqrt{26}}{26}$，$U_R = P''T = \frac{25\sqrt{34}}{34}$，$f=\sqrt{101}$

视差 $d = \dfrac{\frac{25\sqrt{34}}{34} - \frac{15\sqrt{26}}{26}}{dx}$ (pixels)，但显然不可接受

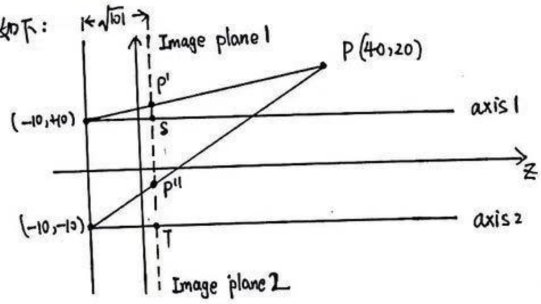
利用Bouguet 极线校正方法[1]

方法如下 1. 将右图像平面对于左图像平面的旋转矩阵分解成 Rl 和 Rr，叫做左右相机的合成旋转矩阵。

$Rl = R^{1/2}$，$Rr = R^{-1/2}$

2. 将左右相机各旋转一半，使得左右相机的光轴平行。观察可知，此时基线也与成像平面平行，极线校正已完成。

此时的图如下:

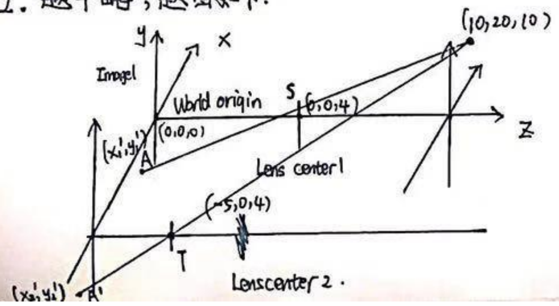


把成像平面 $z = \sqrt{101}-10$ 代入 $z-5x+60=0 \Rightarrow P'\left(\sqrt{101}-10, 10+\frac{\sqrt{101}}{50}\right)$

$3z-5x-20=0 \Rightarrow P''\left(\sqrt{101}-10, \frac{3}{5}\sqrt{101}-10\right)$

视差 $d = \dfrac{\overline{P''T} - \overline{P'S}}{dx} = \dfrac{\frac{3}{5}\sqrt{101} - \frac{\sqrt{101}}{50}}{dx} = \dfrac{\frac{29}{50}\sqrt{101}}{dx}$ (pixels) （dx需要靠相机标定才能得到）

2. 题干略，题图如下:



解：连接 S、T 和 A、A'，由几何关系可知 $\frac{\overline{ST}}{\overline{AA'}} = \frac{6}{10}$，$\overline{AA'} = \frac{25}{3}$

$$d = \frac{\overline{AA'} - 5}{dx} = \frac{\frac{10}{3}}{dx} \text{ (pixels)}$$ （dx需要靠相机标定得到）

Problem3

利用 3D 深度 Z 和视差之间的关系，在两基线 B_1 和 B_2 下，有 $\begin{cases} d_1 = x_l - x_r = f\dfrac{B_1}{Z} \\ d_2 = x_l^{'} - x_r^{'} = f\dfrac{B_2}{Z} \end{cases}$

假设在特征点匹配的时候，出现了相同的像素误差 dx。设造成的深度误差为 ΔZ，则有

$\Delta Z = fB_1\left(\dfrac{Z}{fB_1} - \dfrac{1}{\dfrac{fB_1}{Z} + dx}\right) = Z - \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z} + \dfrac{dx}{fB_1}}$。

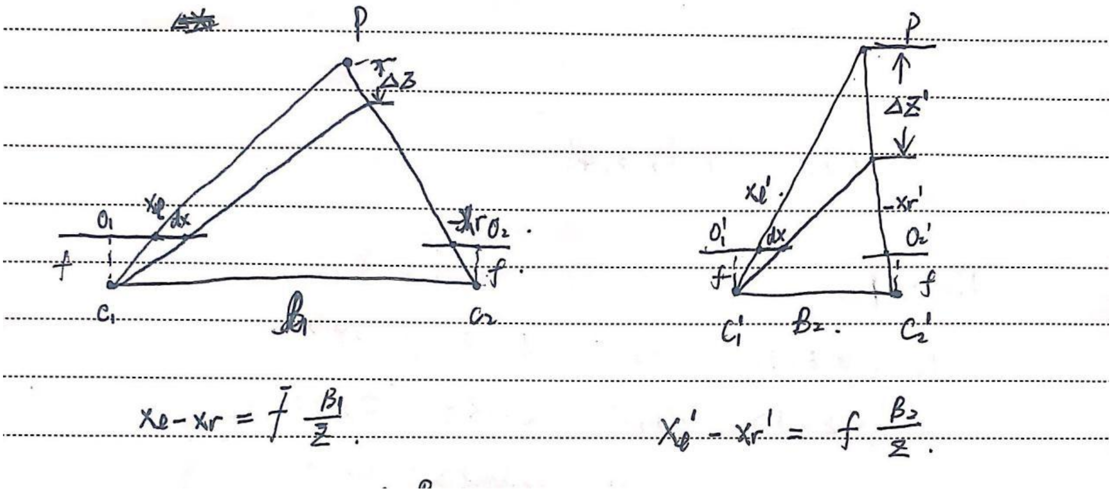


图 1 定性分析示意图

由于相同的像素误差 dx 是常数，两相机内参也不改变，可以把 ΔZ 写为关于基线 B 和距离 Z 的函数 $\Delta Z(B,Z) = Z - \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z} + \dfrac{C}{B}}$，其中 $C \equiv \dfrac{dx}{f}$

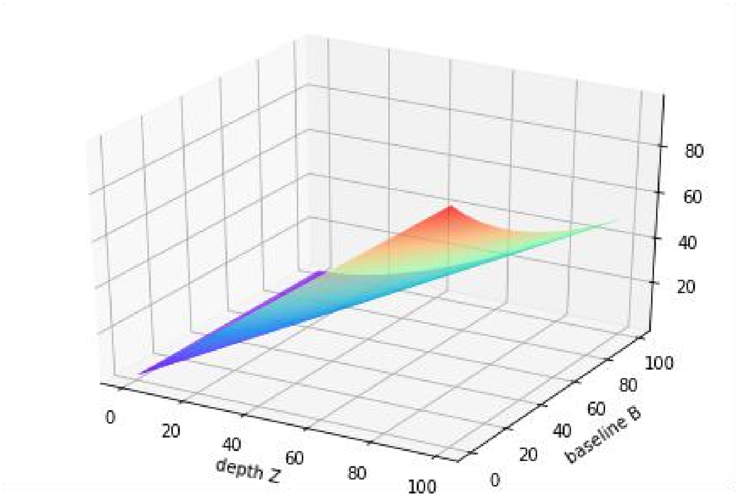


图 2 深度误差函数

分析函数性态可知，基线越短，误差越大；物体深度越深，误差越大。

4. 证明本征矩阵的一个奇异值为0，另外两个奇异值相等。

证：即证 EE^T 的特征值为 0，a，a

$E=[t]_\times R$ ， $E^T = R^T [t_m]_\times^T$，由于 R 为欧氏正交阵：有 $RR^T = I$.

$\therefore A = EE^T = [t]_\times RR^T [t_m]_\times^T = -[t]_\times^2$，展开后可得该矩阵的秩为2.

$R(A) = R(A-0E) = 2 = n-k \quad (n=3,\ k=1)$

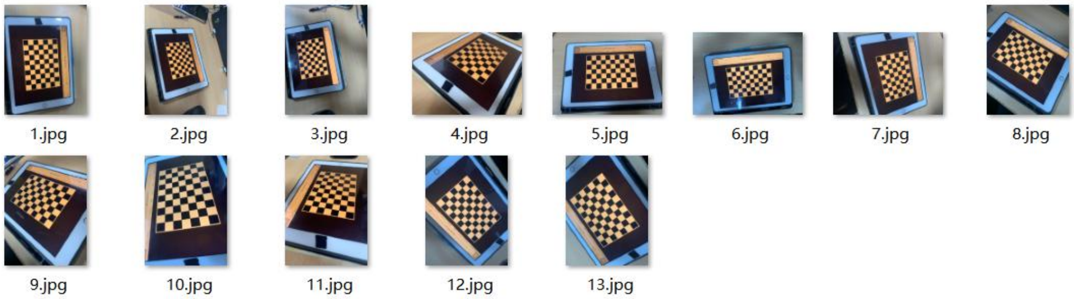
有其0特征值为单根。

由于A可以相似对角化，所以必须有3个线性无关的特征向量，还需要两个特征向量，所以存在另一个特征值(因为A为奇异矩阵所以不能有3个特征值)为二重根 对应两个线性无关的特征向量。

故得证。

Problem5

首先，得到多张标定板照片。



利用张正友标定法进行相机内参矩阵和畸变向量标定。

```
mtx:
 [[1.26806204e+05 0.00000000e+00 2.20188107e+03]
 [0.00000000e+00 5.61470734e+04 1.99806318e+03]
 [0.00000000e+00 0.00000000e+00 1.00000000e+00]]
dist:
 [[-2.89682065e+02  9.37242996e+04 -1.06037273e-02 -7.16517920e-01
   4.16254379e+04]]
```

图 3 拍摄的原图

由于 SIFT 特征子在 OpenCV3.5+后被移除，寻找有效的特征子难度较大，故我采用手动匹配两张拍摄图片中的特征点。利用特征点对计算出摄像机的本征矩阵。分解出两相机的外参后进行对极线矫正。

最终矫正的效果如图。

图 4 对极线矫正