Równanie Lagrange'a II rodzaju

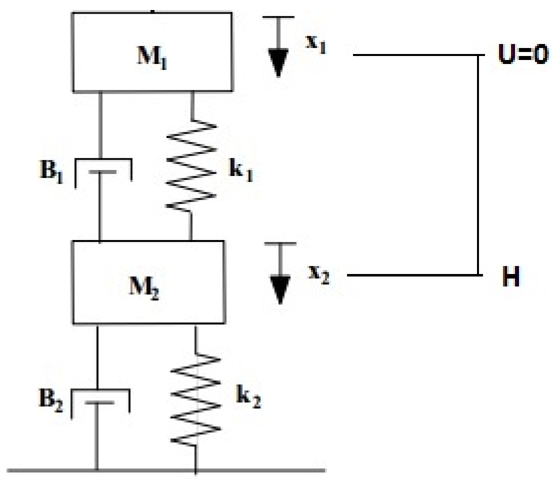
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{dq_i} = Q_i$$

$L = E - U$ - potencjał kinetyczny Lagrange'a
E- energia kinetyczna
U- enegria potencjalna
Q_i- siła uogólniona
$\dot{q}_i$- prędkość uogólniona
q_i- współrzędna uogólniona

Gdy w układach występuje rozpraszani energii, wyraża się je przez tzw. funkcję dyssypacji energii $D = b\dot{x}^2$. Równanie Lagrange'a przyjmuje wówczas postać:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Przykład 1



Rysunek 1. Dwie masy na sprężynie i tłumiku

Równania energii

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ U = -m_1 g x_1 - m_2 g(H + x_2) + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 + \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 \\ D = \frac{1}{2}b_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \end{cases}$$

Pochodne energii

I współrzędna x_1

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right] = m_1\ddot{x}_1 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -(-m_1 g + k_1(x_1 - x_2)) \\ \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases}$$

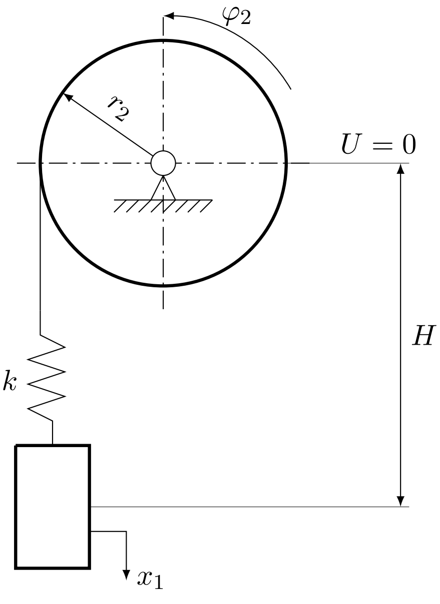
II współrzędna x_2

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right] = m_2\ddot{x}_2 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -(-m_2 g + k_2 x_2 - k_1(x_1 - x_2)) \\ \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = b_2\dot{x}_2 - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases}$$

Równania Lagrange'a

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 - m_1 g + k_1(x_1 - x_2) + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ \\ m_2\ddot{x}_2 - m_2 g + k_2 x_2 - k_1(x_1 - x_2) + b_2\dot{x}_2 - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \end{cases}$$

Przykład 2



Rysunek 2. Masa na krążku i sprężynie

J – moment bezwładności krążka

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}_2{}_2^2 \\ \\ U = -m_1 g(x_1 + H) + \frac{1}{2}k(\varphi_2 r_2 - x_1)^2 \end{cases}$$

Pochodne energii

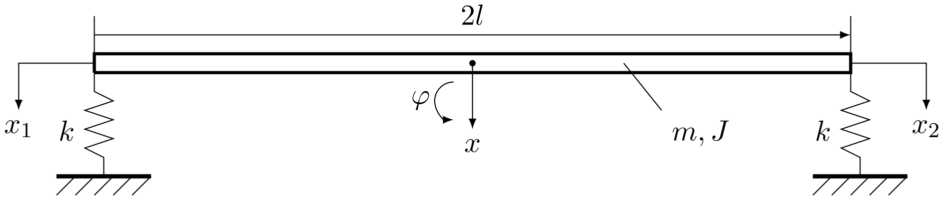
I współrzędna x_1 **II współrzędna φ_2**

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right] = m_1\ddot{x}_1 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -(-m_1 g - k(\varphi_2 r_2 - x_1)) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right] = \frac{1}{2}m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_2 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -(kr_2(\varphi_2 r_2 - x_1)) \end{cases}$$

Równania Lagrange'a

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 - m_1 g - k(\varphi_2 r_2 - x_1) = 0 \\ \\ \frac{1}{2}m_2 r_2^2\ddot{\varphi} + kr_2(\varphi r_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Przykład 3



Rysunek 3. Pręt na sprężynach

$x_1 = x + \varphi l$
$x_2 = x - \varphi l$
$x = x_1 + x_2$
wsp. uo. x, φ

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 \\ U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}k\left[(x+\varphi l)^2 + (x-\varphi l)^2\right] \end{cases}$$

Pochodne energii

I współrzędna φ_1 **II współrzędna ϕ_2**

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] = m\ddot{x} \\ \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -2kx \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right] = J\ddot{\varphi} \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \phi_2} = -2kl^2\varphi \end{cases}$$

Równania Lagrange'a

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2kx = 0 \\ \\ J\ddot{\varphi} + 2kl^2\varphi = 0 \end{cases}$$