Kamil Kaniera *247689*

Krzysztof Purgat *247771*

Rok akademicki *2023/24*

Wtorek,10:30

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie *5 - Aproksymacja*

Opis rozwiązania

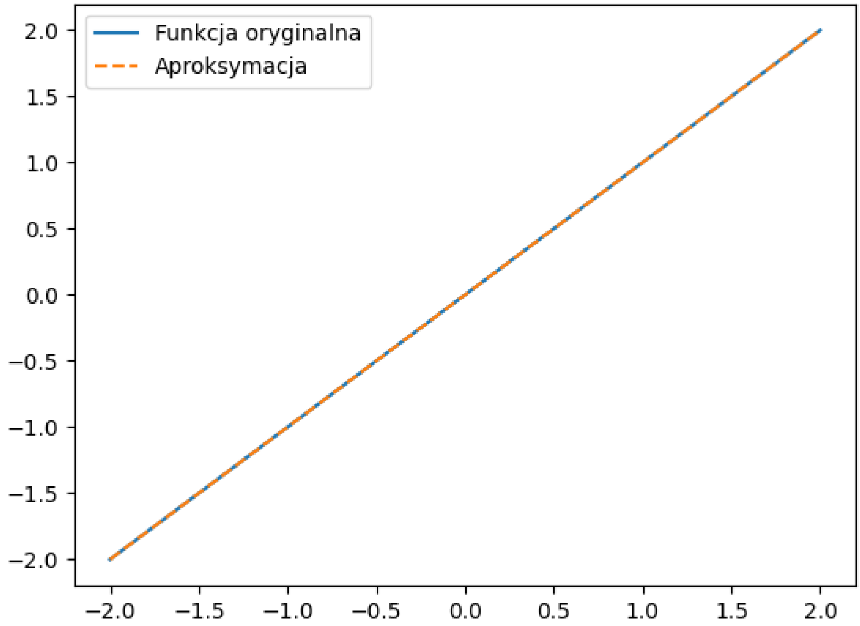
Celem tego zadania było zaimplementowanie metody aproksymacji opartej o wielomiany Hermite'a.

Dla wybranej przez użytkownika funkcji, przedziału, stopnia wielomianu aproksymującego i liczby węzłów algorytm realizujący to zadanie można zapisać w następujących krokach:

1. Dla każdego stopnia i od 0 do n
   a. Obliczamy iloczyn skalarny funkcji aproksymowanej $f(x)$ i wielomianu Hermite'a $H_i(x)$
   b. Obliczamy iloczyn skalarny dwóch wielomianów Hermite'a $H_i(x)$
   c. Dzielimy pierwszy iloczyn przez drugi, aby uzyskać współczynnik aproksymacyjny c_i
2. Konstruujemy wielomian aproksymacyjny za pomocą tablicy wyznaczonych współczynników
3. Obliczamy błąd aproksymacji poprzez różnicę między wartościami funkcji oryginalnej $f(x)$ a wartościami wyznaczonego wielomianu

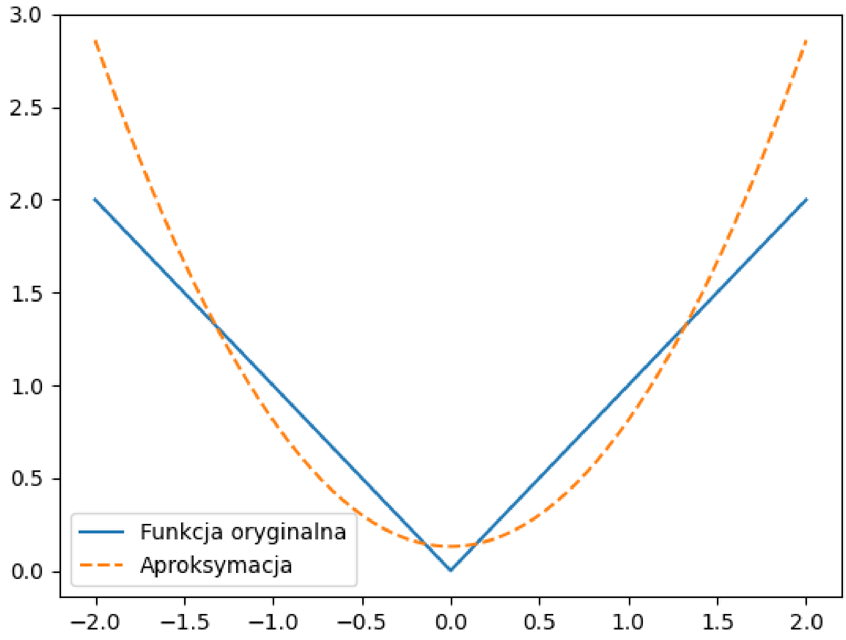
Wyniki

Funkcja	Przedział	Liczba węzłów
$f(x) = x$	$(-2; 2)$	5



Stopień wielomianu: 1
Wzór: $P(x) = 0{,}5 \cdot H_1(x)$
Błąd aproksymacji: $7.008230363444255 \cdot\ 10^{-33}$

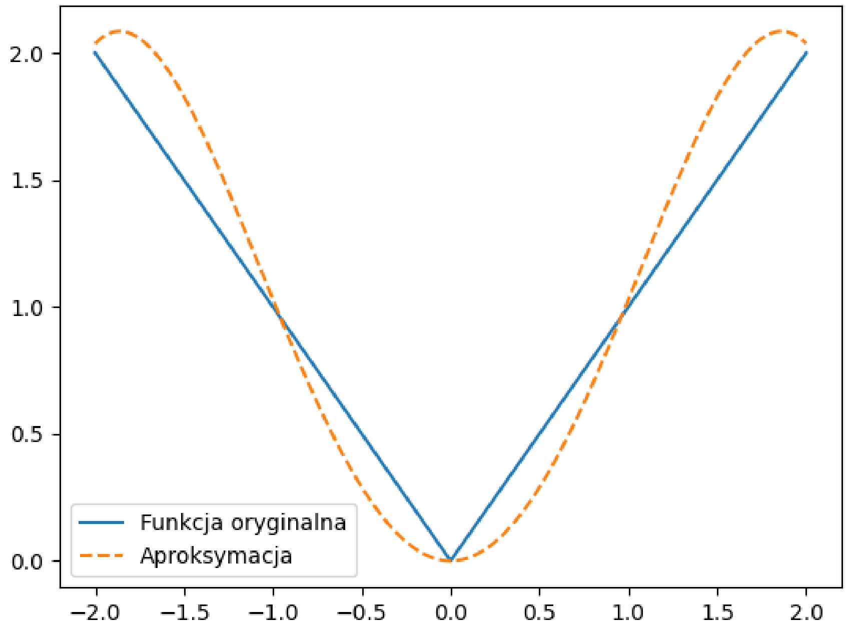
Funkcja	Przedział	Liczba węzłów
$f(x) = \|x\|$	$(-2; 2)$	5



Stopień wielomianu: 2

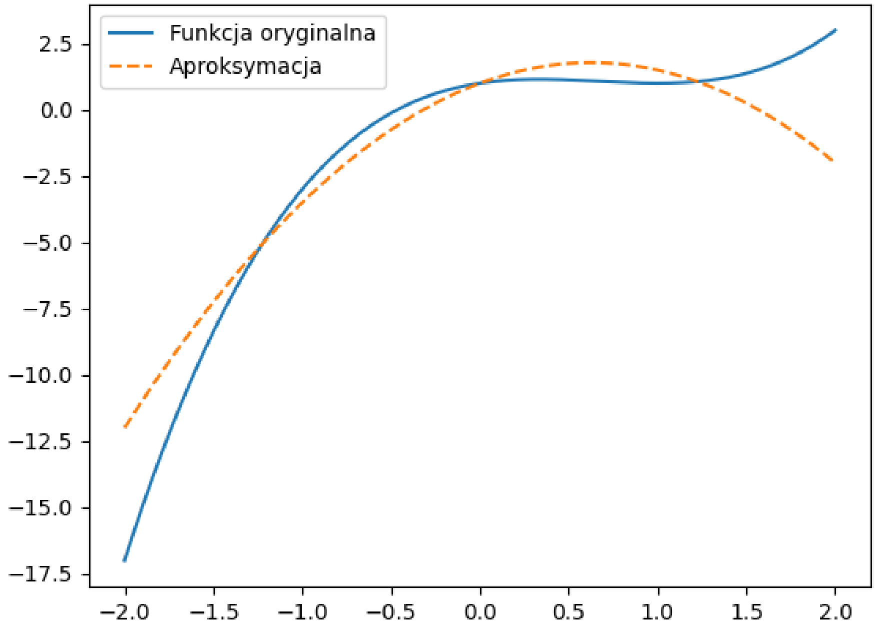
Wzór: $P(x) = 0.4712 \cdot H_0(x) + 0.1706 \cdot H_2(x)$

Błąd aproksymacji: 0.0880194804655052

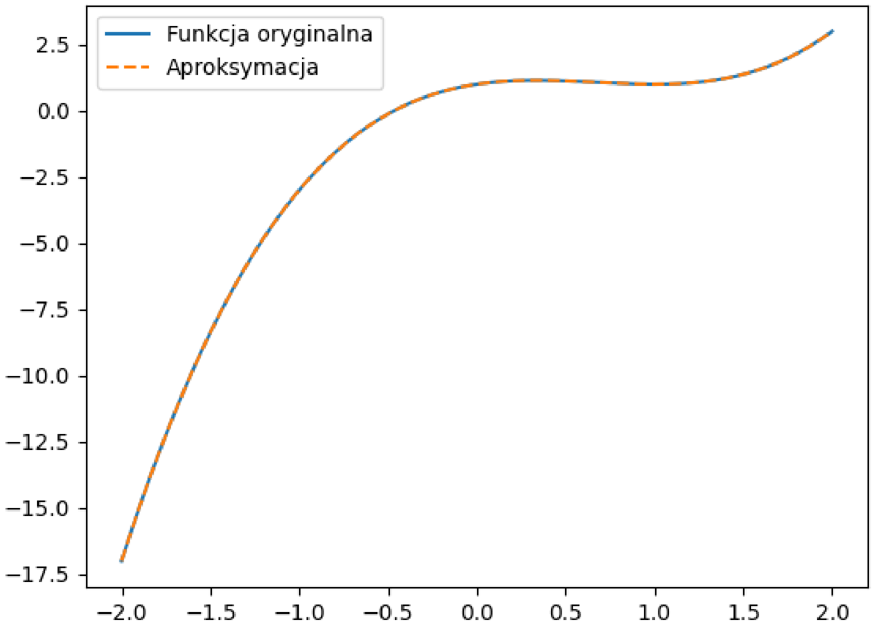


Stopień wielomianu: 4
Wzór: $P(x) = 0.4712 \cdot H_0(x) + 0.1706 \cdot\ H_2(x) - 0.0108 \cdot\ H_4(x)$
Błąd aproksymacji: $0.042612924127735 64$

Funkcja	Przedział	Liczba węzłów
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$	$(-2; 2)$	5



Stopień wielomianu: 2
Wzór: $P(x) = 1.25 \cdot H_1(x) - 0.5 \cdot H_2(x)$
Błąd aproksymacji: 2.565384355638853

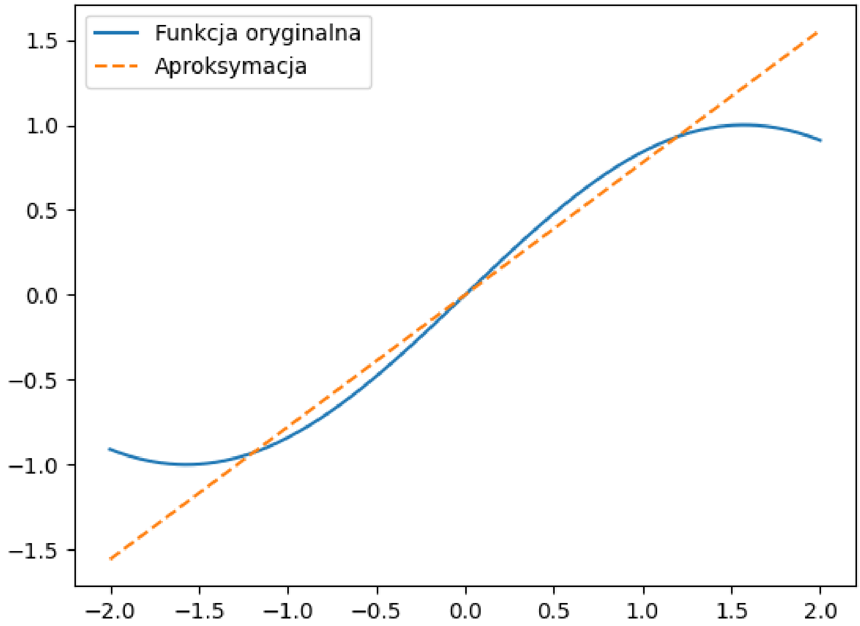


Stopień wielomianu: 3

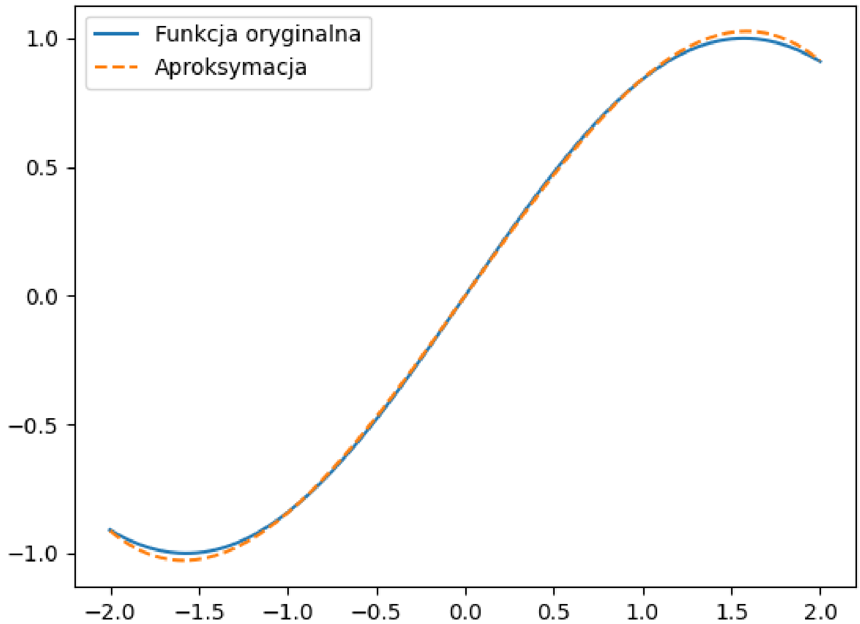
Wzór: $P(x) = 1.25 \cdot\ H_1(x) - 0.5 \cdot\ H_2(x) +\ 0.125 \cdot\ H_3(x)$

Błąd aproksymacji: $2.5529880823764316 \cdot 10^{-30}$

Funkcja	Przedział	Liczba węzłów
$f(x) = \sin(x)$	$(-2; 2)$	5



Stopień wielomianu: 1
Wzór: $P(x) = 0.3894 \cdot\ H_1(x)$
Błąd aproksymacji: 0.04732366571314377

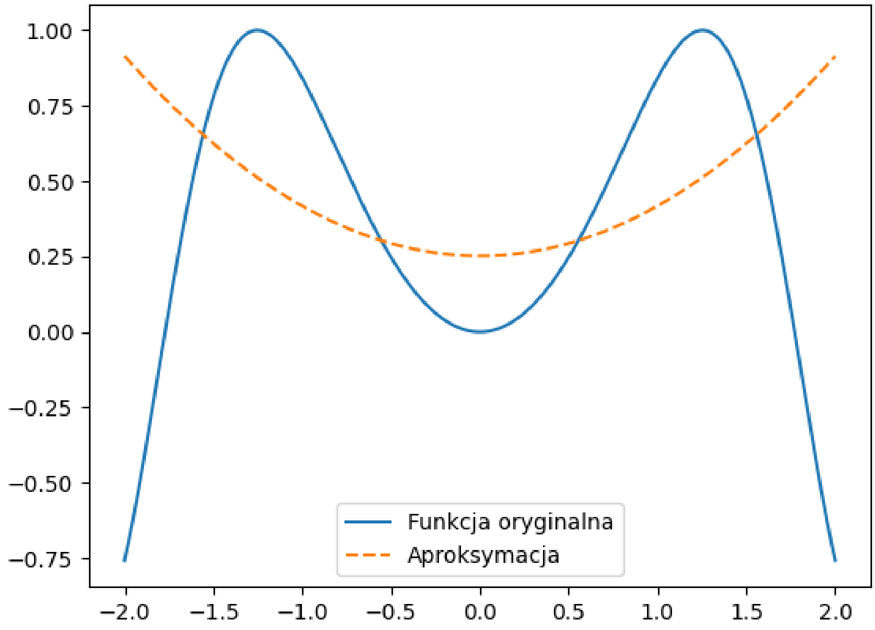


Stopień wielomianu: 3

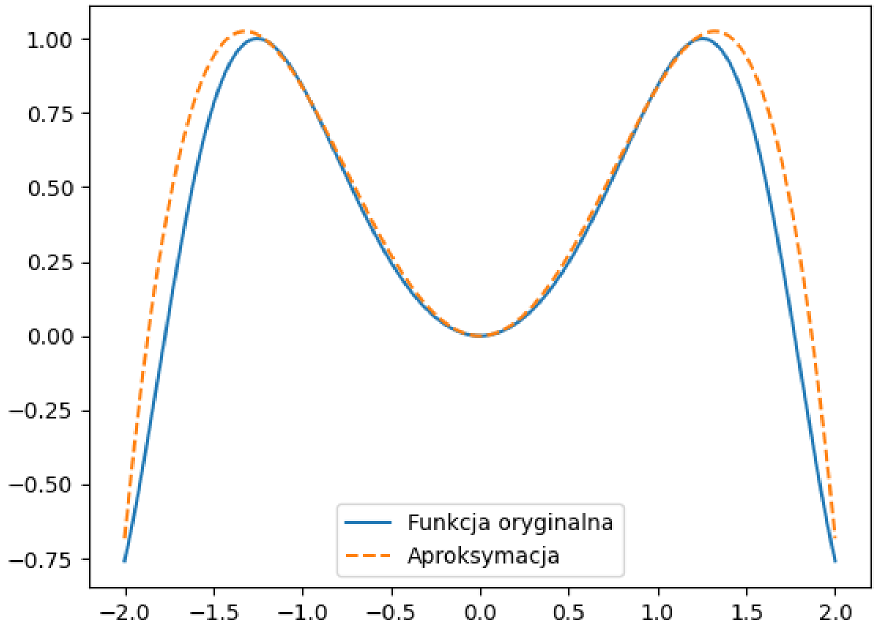
Wzór: $P(x) = 0.3894 \cdot\ H_1(x) - 0.0161 \cdot\ H_3(x)$

Błąd aproksymacji: 0.00022075444468712621

Funkcja	Przedział	Liczba węzłów
$f(x) = \sin{(x^2)}$	$(-2; 2)$	5



Stopień wielomianu: 2
Wzór: $P(x) = 0.3349 \cdot\ H_0(x) + 0.0414 \cdot\ H_2(x)$
Błąd aproksymacji: 0.27417403433978965



Stopień wielomianu: 4
Wzór: $P(x) = 0.3349 \cdot\ H_0(x) + 0.0414 \cdot\ H_2(x) - 0.0210 \cdot\ H_4(x)$
Błąd aproksymacji: 0.022838396502483333

Wnioski

- Aproksymacja funkcji za pomocą wielomianów Hermite'a okazała się skuteczna, szczególnie dla funkcji o bardziej regularnych kształtach, takich jak funkcja liniowa czy wielomianowa.
- Przy odpowiednim doborze stopnia wielomianu, metoda ta jest w stanie dobrze odwzorować oryginalną funkcję na zadanym przedziale.
- Dokładność aproksymacji znacząco zależy od stopnia wielomianu. Wysoki stopień pozwala na dokładniejsze odwzorowanie funkcji, ale zwiększa również złożoność obliczeniową.
- Na wynik aproksymacji może również wpłynąć rozmiar przedziału, dlatego przy jego doborze, warto wziąć pod uwagę charakterystykę funkcji