

Struktury Danych i Złożoność Obliczeniowa

Zadanie projektowe nr 1

Kamil Wojcieszak

Przeprowadzenie eksperymentu miało na celu zbadanie efektywności podstawowych operacji, takich jak wstawianie, wyszukiwanie i usuwanie, w kontekście trzech różnych struktur danych: tablicy z realokacją pamięci, listy dwukierunkowej i kopca maksymalnego. Implementacja tych struktur oraz przeprowadzenie testów odbyło się w języku C++. Badaną wielkością było asymptotyczne tempo wzrostu każdej z operacji, mierzone za pomocą notacji dużego O, co pozwoliło na dokładne określenie złożoności obliczeniowej każdej z nich.

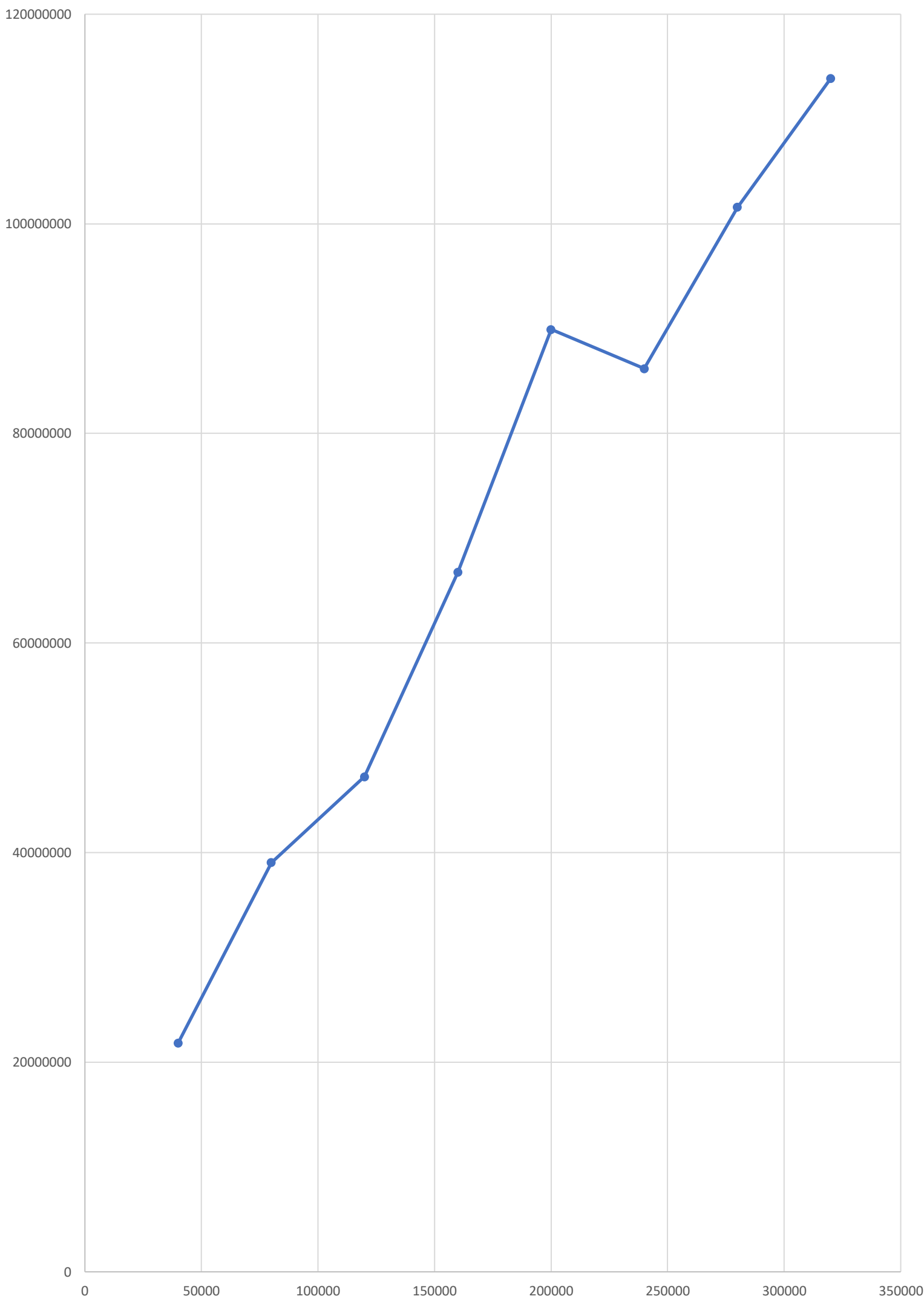
Wszystkie czasy na wykresach i tabelkach są w nanosekundach.

Przy dodawaniu usuwaniu i wyszukiwaniu operacje są zawsze powtarzane 100 razy.

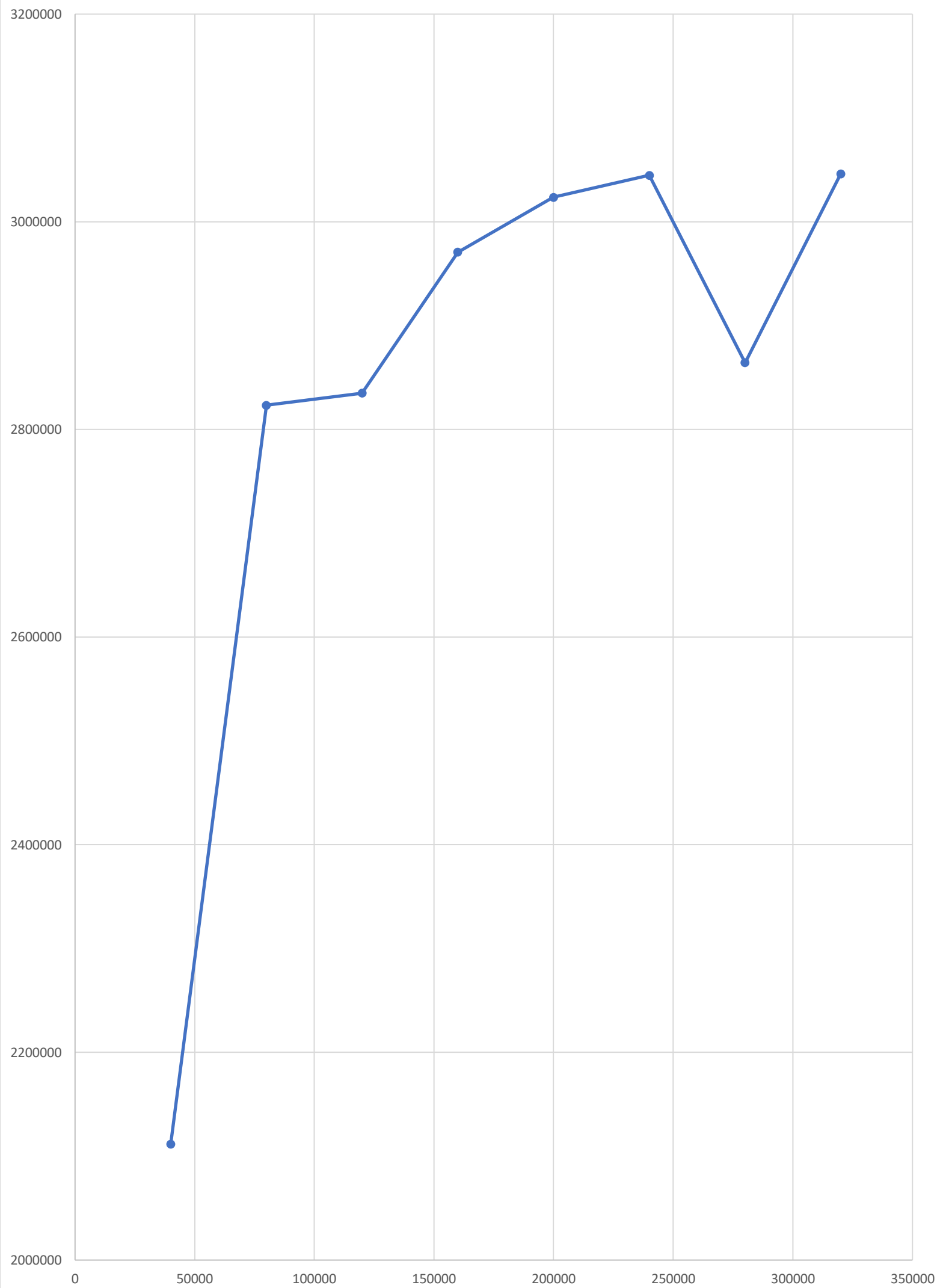
Dane zostały zebrane 10 razy przy każdym teście a wyniki na wykresach są z średnich.

TABLICA

Wczytywanie z pliku



Wyszukiwanie

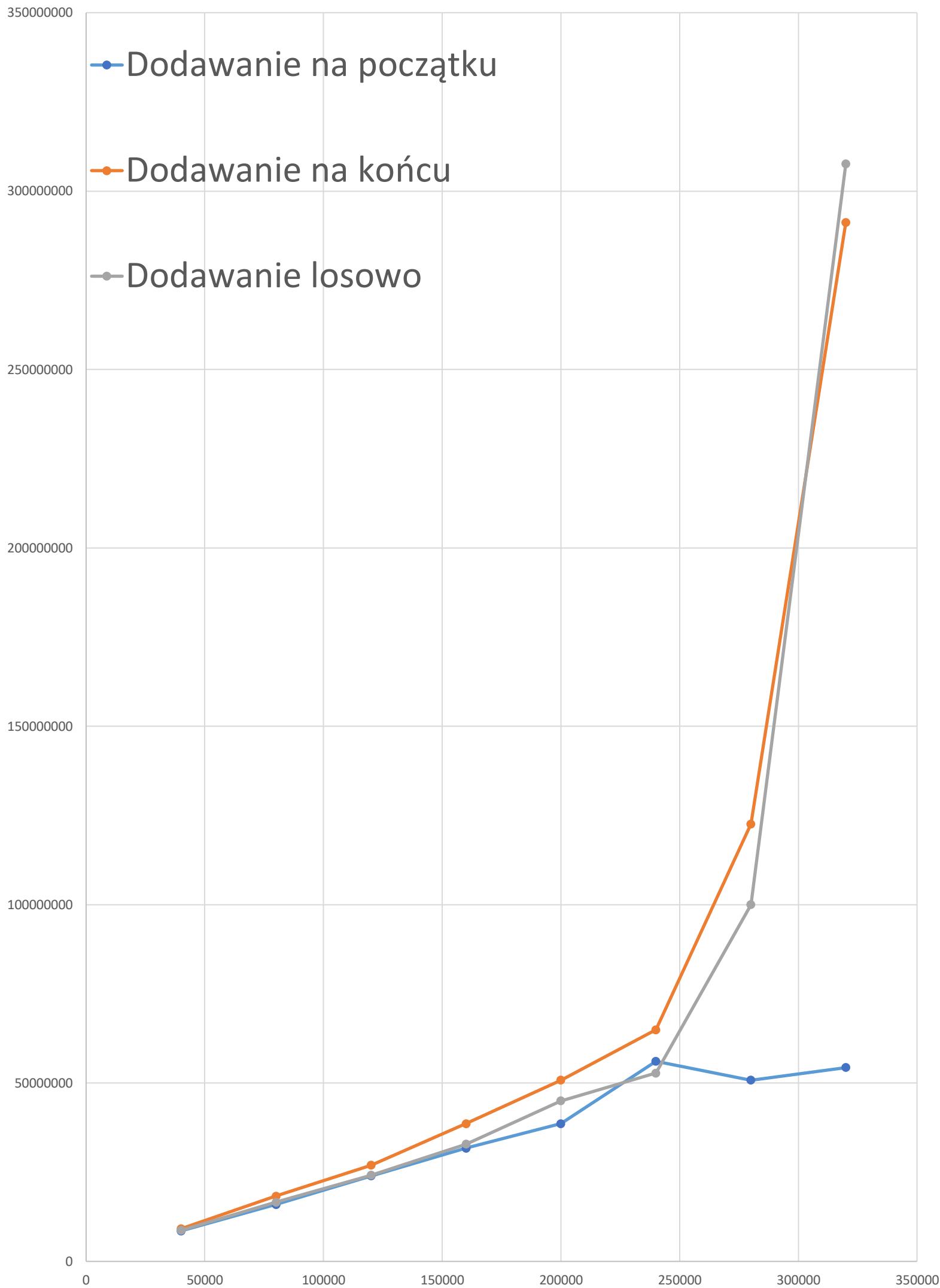


Dodawanie

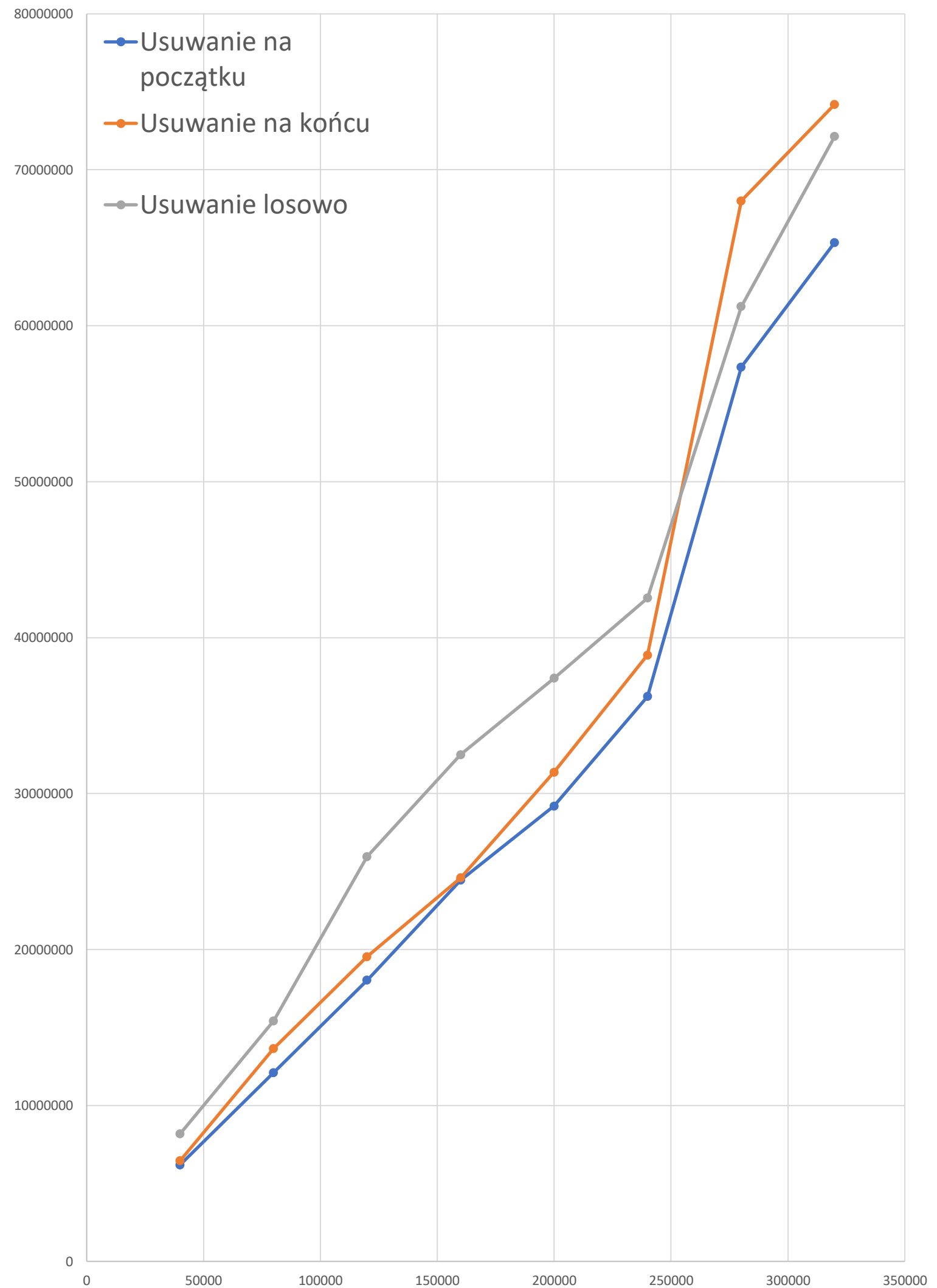
—● Dodawanie na początku

—● Dodawanie na końcu

—● Dodawanie losowo



Usuwanie



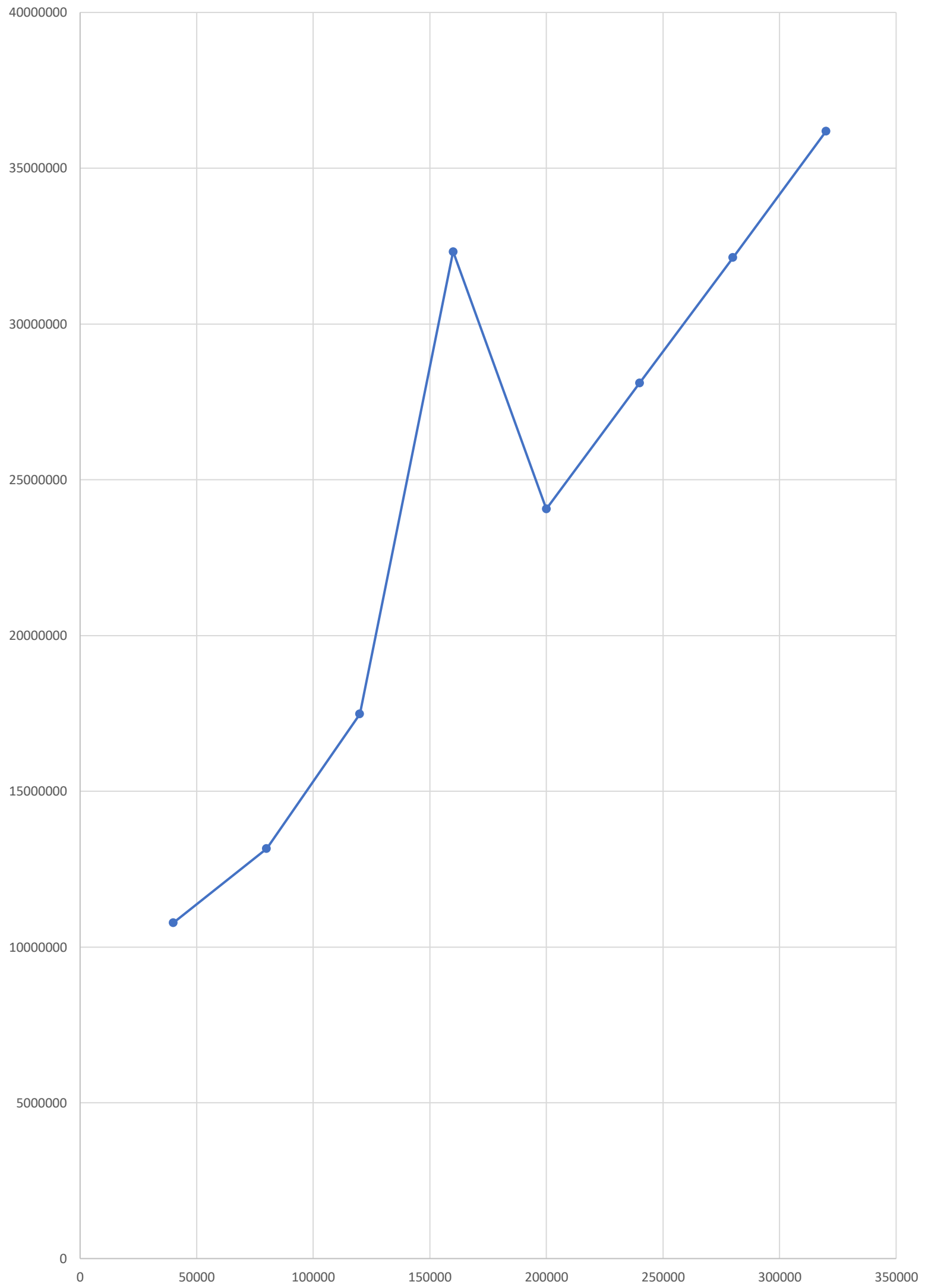
Wczytywanie z pliku										
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 Średnia
40000	19797900	17950400	18151800	31943500	21238400	20508900	21291200	21234900	25187700	21036200 21834090
80000	37088600	42438100	40539700	36911900	41850200	39282700	33562700	37278800	43601800	37990500 39054500
120000	58341800	46978000	46063100	47032700	45842000	45234100	47005800	45047800	46010100	44872000 47242740
160000	59580800	61493100	60405000	59326700	64293000	59242600	1,23E+08	60136300	59244000	60801300 66744030
200000	75185200	82821800	1E+08	1,05E+08	88692200	95140800	97677500	79098800	89545400	85258100 89923620
240000	86111700	86007300	85875000	85385500	85569500	85877900	86284700	86421300	87660500	86583300 86177670
280000	99659400	1,07E+08	1,01E+08	1,01E+08	1,02E+08	1,07E+08	99963200	99325900	99780600	99511400 1,02E+08
320000	1,13E+08	1,13E+08	1,13E+08	1,15E+08	1,13E+08	1,13E+08	1,14E+08	1,15E+08	1,13E+08	1,17E+08 1,14E+08
Dodawanie na początku										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 Średnia
40000;107	276700	919200	821900	784300	930100	1001500	719200	956500	941800	801700 815290
80000;159	1108300	1162100	894100	811200	888000	955600	867200	838400	801600	824200 915070
120000;23	1576500	1632300	1759100	1872900	1589000	1586600	1569200	1573300	1839300	1652500 1665070
160000;31	3071100	3219900	3378300	3116100	3369000	3105900	3083800	3432200	3031000	3100700 3190800
200000;38	6451800	6417400	6256100	6494600	6424100	6462000	6168000	6558600	6460500	6375700 6406880
240000;46	12418300	12741900	12808700	12526200	13140200	12593800	13015800	12475600	12926300	12606900 12725370
280000;49	25842800	25599800	25684700	25550100	25716100	25503400	25493300	25441300	25524500	25625200 25598120
320000;54	51057500	50653000	51510800	51037600	57501600	91399400	54509700	49630900	49271500	50768000 55734000
Usuwanie na początku										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 Średnia
40000	7599800	6058600	6032400	6036700	6044700	6022800	6084700	6021200	6038000	6027500 6196640
80000	12107000	12143600	12093400	12084700	12111900	12112700	12098300	12091600	12110100	12097700 12105100
120000	18046000	17861600	17859100	17887300	17880100	17886900	18036900	18564800	18263100	18043000 18032880
160000	24707600	23606200	23603900	25277400	27128700	25832000	23617300	23554900	23617000	23576400 24452140
200000	29191900	29168000	29186000	29190600	29170000	29167500	29168900	29215600	29161800	29374900 29199520
240000	37987800	35184100	34826500	34855000	35088900	40701100	35076200	34819400	36464600	37283100 36228670
280000	57207700	57295900	60898200	57199700	56740700	56758900	56804000	56973900	56775300	56897900 57355220
320000	65362400	66150200	69808700	64939700	64697000	64313100	64633000	64410800	64495600	64602800 65341330
Dodawanie na końcu										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 Średnia
40000	7989200	9685100	9111600	9102200	9175300	9188800	9143000	9214600	9691400	9205900 9150710
80000	18177800	18249900	18805900	18194500	18474300	18241200	18228400	18289000	18213300	18192500 18306680
120000	26741500	26763400	27076900	26854800	27184400	27018100	27069400	26818500	26733700	27075700 26933640
160000	35602000	35669700	35728900	35525300	38693600	39403800	43437900	40275200	41509100	40058500 38590340
200000	49679700	49571200	50856400	49766600	53085800	51614300	49994900	51183400	49643600	52490600 50788650
240000	54752200	80102400	56394500	63390100	56380700	56065200	61577000	55317400	59999000	1,05E+08 64922500
280000	1,19E+08	2,55E+08	1,94E+08	69282600	1,32E+08	1,2E+08	94822100	98611900	71771300	71622900 1,23E+08
320000	1,31E+08	1,8E+08	1,96E+08	2,17E+08	4,18E+08	5,49E+08	3,16E+08	3,04E+08	3,09E+08	2,92E+08 2,91E+08
Usuwanie na końcu										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 Średnia
40000	7258000	6210300	6425800	6158100	6749100	6251800	6354300	6344100	6211000	6673200 6463570
80000	13241000	13782500	14078800	13511900	16077500	14935000	13187600	12469700	12520100	12775200 13657930
120000	18669500	19613400	19817900	20054000	19899000	19873900	18949900	18172500	18548900	21797100 19539610
160000	24324200	25703500	23970300	24001300	24068300	24735800	24004800	25959100	24552600	24664800 24598470
200000	29887500	29508600	29934200	30720000	32851300	31212900	33958900	31677400	31789900	32150200 31369090
240000	41454000	38756000	41170700	38789000	37214700	38165800	37707400	37509100	39198700	38845900 38881130
280000	66072200	68621700	67276100	66916400	67125100	66239700	72989500	68698700	70313600	65791100 68004410
320000	74969900	74772900	71045900	75934800	75511500	76277800	80489700	73961200	73623100	65370500 74195730
Dodawanie losowo										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 Średnia
40000	9676800	10534600	8736800	8186200	8324000	8315300	8378400	8251300	8375400	8336600 8711540
80000	16707000	17082900	16445800	16441700	16320000	16599300	16627800	16616800	16458500	16678100 16597790
120000	24297000	24549300	24284000	24495500	24201300	24046800	23915400	23772300	23892300	23928400 24138230
160000	31982800	31685200	31225000	31355100	31224400	31726800	33900500	34936900	35168700	35272400 32847780
200000	44324400	44871400	44288400	44156000	44415600	47420300	45219900	45208800	44726200	45127400 44975840
240000	52284700	51853100	52867800	55668400	52447800	51935000	52057800	51832700	51476000	55473500 52789680
280000	59276200	59485400	56876800	58608700	61021000	57970500	55516200	1,03E+08	95479400	3,92E+08 99959050
320000	3,8E+08	42657700	64930100	2,73E+08	3,85E+08	3,14E+08	2,77E+08	5,74E+08	3,68E+08	3,98E+08 3,08E+08
Usuwanie losowo										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 Średnia
40000	7828800	7866300	7260400	7573000	7326700	7681400	7216500	10942300	9822000	8353700 8187110
80000	17639400	14818200	14488900	13945000	14543400	13756800	14374800	14763300	15452600	20498400 15428080
120000	22791500	26188000	22057400	23933700	24105500	26869200	28085200	27958200	29532200	28041800 25956270
160000	30791400	29365300	28909400	33606800	42945800	32911100	31945700	29278100	32536400	32732900 32502290
200000	36235900	35022100	33130000	34919800	38511400	40382700	38965200	44395700	38386900	34055900 37400560
240000	41074600	41264800	42470200	44211000	46802300	47113600	44552900	39404700	39015800	39549600 42545950
280000	60319500	61412900	60646900	61386800	60673400	60502400	59627400	65453700	60448300	61924400 61239570
320000	67618300	68435200	66876200	73368800	78525700	74656500	73651400	71331500	71394600	75566100 72142430
Wyszukiwanie										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 Średnia
40000	2192700	2014300	2010900	2112100	2081900	2138500	2287300	2185300	2064000	2031100 2111810
80000	2968400	2502000	2789900	2994100	3084600	2702000	2750200	3048900	3096400	2297200 2823370
120000	2578500	3108300	2685800	3040500	3284700	2659200	2500400	2891900	2602700	2998600 2835060
160000	3082700	3207900	2942500	2331600	2662200	3061700	3021400	3202400	2993300	3201800 2970750
200000	2986800	2692800	2961500	3545500	3026700	2524700	2745400	3362200	3393100	2997000 3023570
240000	3117100	3680200	3150300	2821200	2857500	2542300	2974000	2953400	3223300	3128700 3044810
280000	3025400	2714500	2925800	2873600	2213000	2769100	3226200	3291800	3072900	2529600 2864190
320000	3349500	2933200	3185100	2904300	3483400	2966800	3132000	3055100	2473900	2978200 3046150

- Wczytywanie z pliku i wyszukiwanie złożoność: $O(n)$ zgodnie z oczekiwaniami
- Dodawanie $O(n)$ zgodnie z oczekiwaniami. Przy dodawaniu losowym czas jest dłuższy
- Usuwanie złożoność: $O(n)$. Przy dodawaniu losowym nie widać by czas był dłuższy tak samo jak przy dodawaniu.

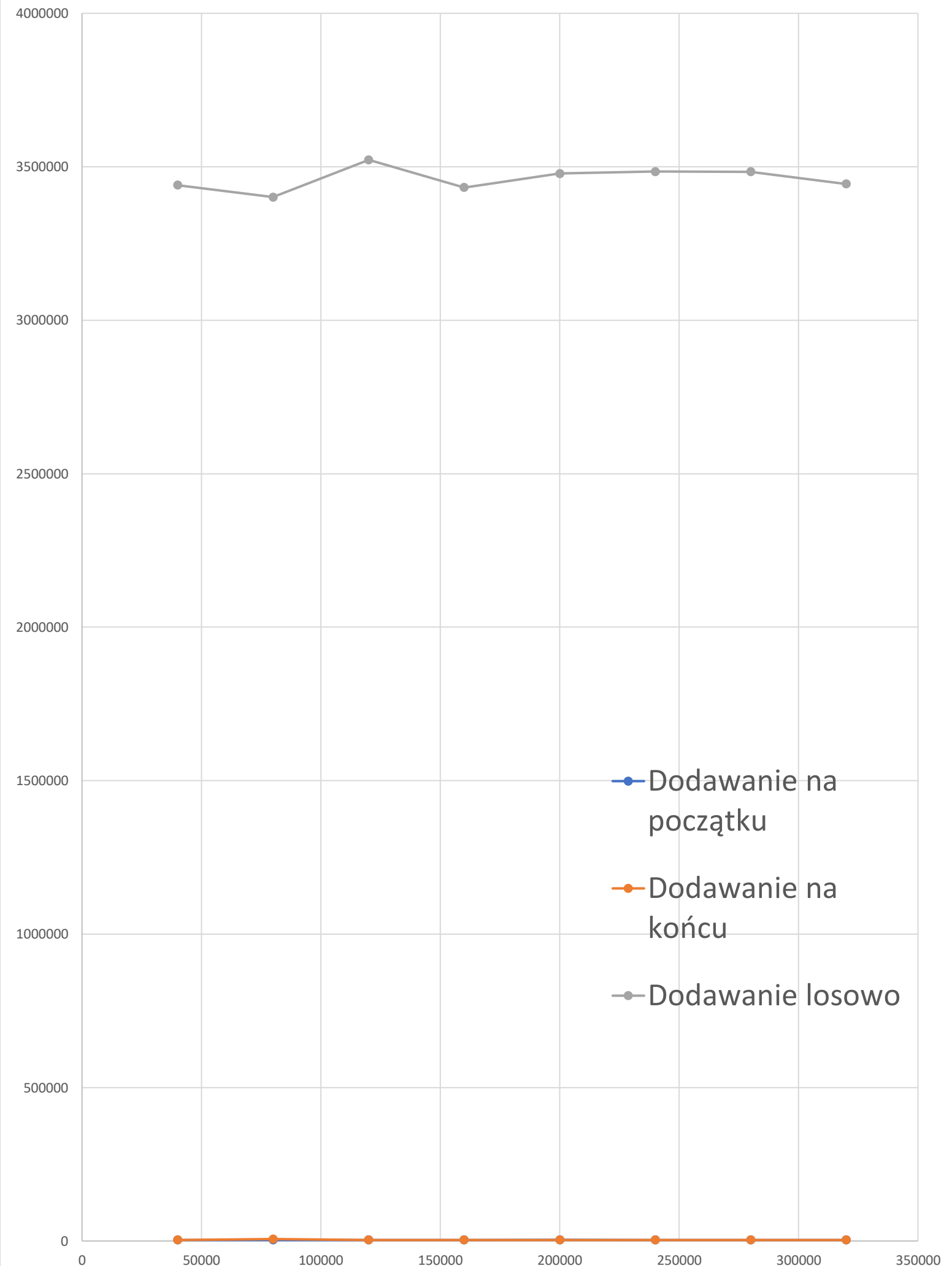
1. Przechowywanie danych o stałej liczbie elementów: Jeśli wiemy, że liczba elementów, które będziemy przechowywać, będzie stała i nie zmieni się w trakcie działania programu, tablica może być odpowiednią strukturą danych. Tablice są wydajne pod względem dostępu do elementów za pomocą indeksów, ponieważ umożliwiają bezpośredni dostęp do pamięci na podstawie indeksu.
2. Dostęp do elementów o stałym czasie: Dostęp do elementów tablicy odbywa się w stałym czasie, ponieważ tablice oferują bezpośredni dostęp do elementów na podstawie indeksów. Oznacza to, że można natychmiastowo uzyskać dostęp do dowolnego elementu tablicy, jeśli znamy jego indeks. Jest to przydatne, gdy potrzebujemy szybkiego dostępu do elementów.
3. Przechowywanie danych o jednorodnym typie: Tablice są idealne do przechowywania danych o jednorodnym typie, czyli elementów tego samego typu danych, takich jak liczby całkowite, zmiennoprzecinkowe lub napisy. Tablice pozwalają na kompaktowe przechowywanie danych i skuteczne wykorzystanie pamięci.
4. Iterowanie i przetwarzanie danych: Tablice ułatwiają iterację po wszystkich elementach za pomocą pętli, ponieważ elementy są przechowywane w kolejności, w jakiej zostały dodane. Można łatwo przetwarzać i modyfikować dane w tablicy, wykonując operacje na każdym elemencie.
5. Implementacja macierzy i wielowymiarowych struktur danych: Jeśli potrzebujemy przechowywać dane w formie macierzy lub innych wielowymiarowych struktur danych, tablice są przydatne. Można tworzyć tablice dwuwymiarowe, trójwymiarowe i więcej, aby przechowywać i manipulować danymi w wielowymiarowej przestrzeni.

LISTA

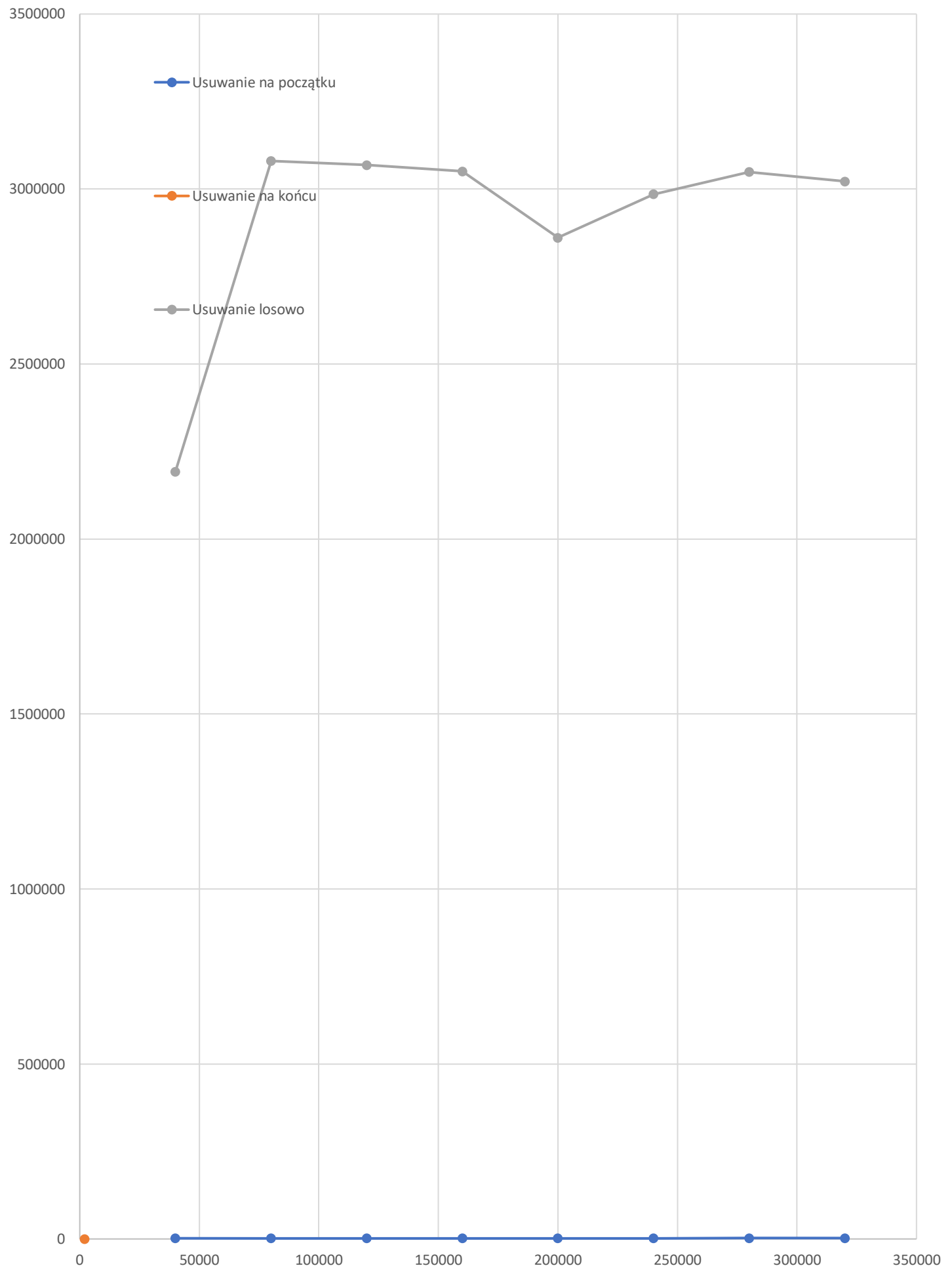
Wczytywanie z pliku



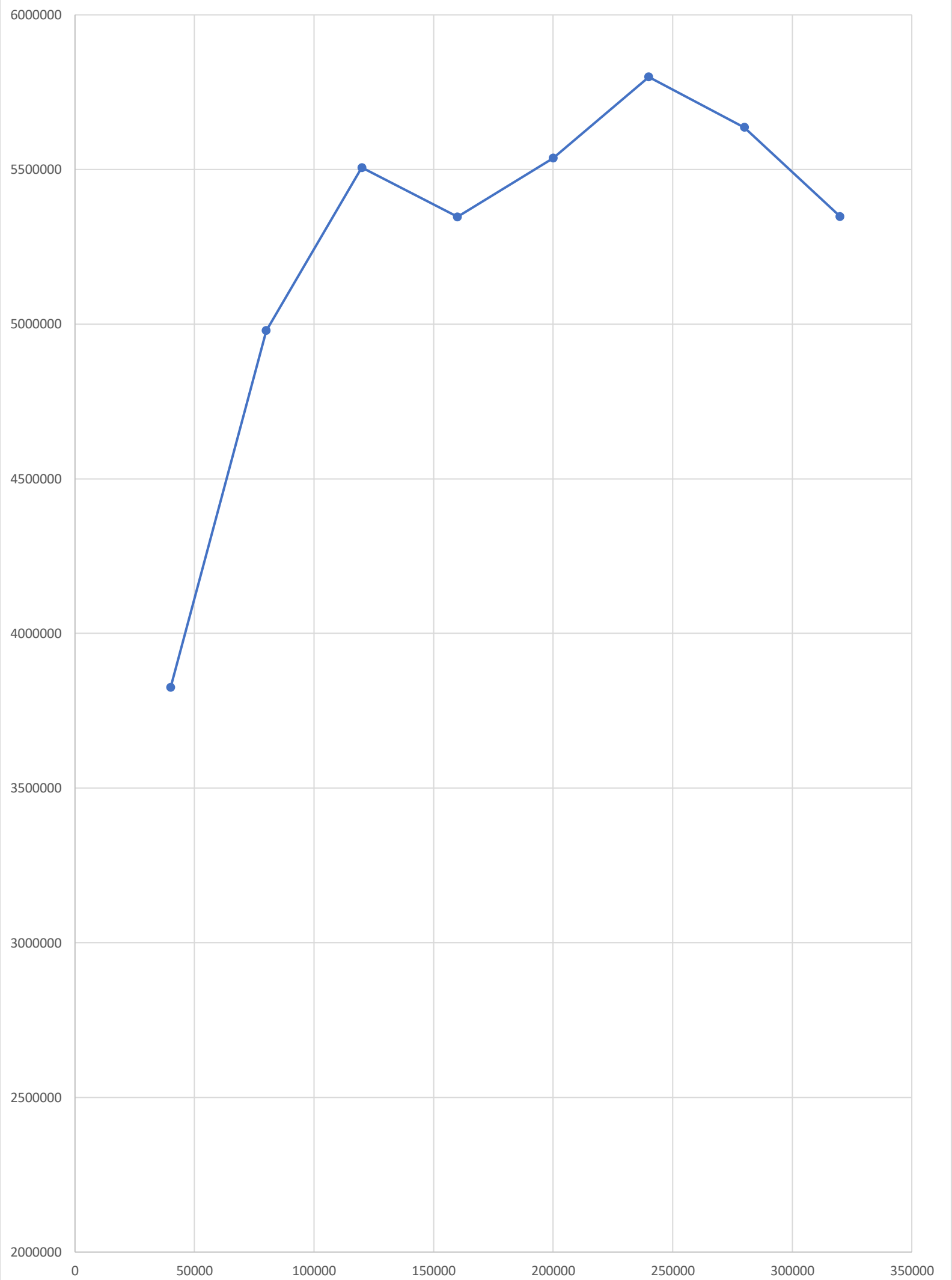
Dodawanie



Usuwanie



Wyszukiwanie



Wczytywanie z pliku											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	15678300	12202500	10632600	11072900	11227700	9918800	9741200	8856600	8551700	9898400	10778070
80000	11612500	13864700	14055800	11806700	14210800	13292600	12683700	13269000	14082800	12742000	13162060
120000	13623900	16374600	17614200	18740100	17550500	16537000	18237000	20982500	19071100	16125500	17485640
160000	18296700	19091200	25468800	21156200	20111100	20617000	20076300	20532600	1,33E+08	24599300	32321410
200000	21764200	23295900	24604000	23629600	23468100	25504100	26482500	24325100	23765800	23812100	24065140
240000	28994000	31755600	27673400	27372500	27553400	28373300	27252100	27063000	28159900	26869900	28106710
280000	32002000	33942500	33797700	31283300	31755600	31573600	31514800	32265300	31342000	31870600	32134740
320000	37055800	36376200	35063600	36323600	36273000	36094200	37181700	36223000	36126000	35213500	36193060
Dodawanie na początku											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	3200	3200	3100	3000	3100	3200	3100	3200	3200	3200	3150
80000	3200	3100	3100	3100	3100	3100	3200	3200	3200	3100	3140
120000	3100	3300	3300	3200	3200	3200	3200	3300	3300	3200	3230
160000	3300	3200	3200	3200	3300	3200	3300	3200	3300	3400	3260
200000	3300	9100	3100	3200	3100	3200	3100	3200	3200	3100	3760
240000	3400	3100	3100	3200	3200	3200	5200	3200	3200	3300	3410
280000	3100	3200	3200	3200	3100	3300	3200	3200	3200	3300	3200
320000	3300	3200	3200	3200	3200	3100	3100	3200	3200	3200	3190
Usuwanie na początku											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	2000	1900	1900	2000	2000	1900	2000	1900	2000	2000	1960
80000	2000	2000	2000	2000	2100	2000	1900	2000	2000	2000	2000
120000	2000	2000	2000	1900	2000	2000	2000	2000	2000	2000	1990
160000	2000	2000	2000	2000	2000	2300	2000	2000	2000	1900	2020
200000	2400	2100	2000	2000	2000	2000	2500	2000	2000	2100	2110
240000	2300	2000	2300	2100	2000	2000	2000	2900	2000	1900	2150
280000	2500	2900	2200	2100	2200	2600	2500	2100	2100	2100	2330
320000	2300	2500	2500	3600	2400	2600	2700	2500	2000	2300	2540
Dodawanie na końcu											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	3200	3300	3100	3000	3200	3200	3100	3300	3100	3100	3160
80000	11300	3200	8800	4000	10200	3200	8800	3100	8700	3100	6440
120000	3100	3100	3100	3200	3200	3200	3200	3100	3300	3100	3160
160000	3300	3200	3200	3300	3300	3200	3300	3200	3200	3100	3230
200000	3200	3300	3200	3300	3200	3200	3100	3200	3200	3100	3200
240000	3400	3200	3100	3200	3100	3200	3400	3900	3200	3300	3300
280000	3100	3100	3200	3100	3200	3100	3100	3100	3200	3100	3130
320000	3200	3100	3100	3100	3200	3200	3200	3100	3100	3100	3140
Usuwanie na końcu											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	1900	1800	3600	1700	1800	1800	1700	1800	1700	1800	1960
80000	1700	1800	1800	1700	1800	1800	1700	1800	1800	1800	1770
120000	1800	1900	1700	1800	1800	1900	1800	2200	1700	1800	1840
160000	1800	2100	1800	1800	1800	1900	1800	1900	1700	2100	1870
200000	3200	1800	1800	1800	1700	1800	1800	1800	2300	1800	1980
240000	1800	1900	1800	1700	1800	1800	1800	1700	1800	1800	1790
280000	1800	2400	1800	1900	1900	1700	1800	1800	1800	1800	1870
320000	1900	1700	1900	1700	1800	1800	1800	1800	1700	2300	1840
Dodawanie losowo											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	3506100	3436500	3475400	3561500	3050600	3405300	3824600	3414800	3273400	3454500	3440270
80000	2899700	3629600	3283000	3524000	3065400	3470600	3310000	3413100	3705100	3712400	3401290
120000	3362100	3811700	3799800	3179600	3183600	3467100	3794900	3707300	3586400	3331800	3522430
160000	3338700	3395700	3292900	3400700	2939700	3507800	3842900	3677200	3288400	3638900	3432290
200000	3889800	3285900	3502300	3837000	3252800	3321200	3209900	3436700	3655800	3389900	3478130
240000	3612800	3472200	3811600	3412200	3609500	3478100	3277300	3449100	3436200	3286200	3484520
280000	3272100	3437700	3299700	3838200	3528500	2892800	3763100	3781600	3479400	3545400	3483850
320000	3326500	3824600	3141100	3312100	3597400	3582000	3438000	3290800	3341900	3588800	3444320
Usuwanie losowo											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	2330400	2123300	2058600	1914500	2233200	2298800	2346000	2127800	2119000	2371100	2192270
80000	3520200	2615800	3032300	3055700	2684000	3131800	3573400	2676200	3028400	3483700	3080150
120000	3152500	3525800	2647100	3370700	3450400	2872700	2580000	3214600	2984600	2887600	3068600
160000	3291500	3180100	2953900	3315800	3005800	2674400	3115400	3100900	2956000	2910200	3050400
200000	2849800	2885200	3037000	2834100	2717200	2905700	2843800	2809800	2800600	2928700	2861190
240000	2926100	3045800	2944200	2726300	3294300	3199500	3085700	3111500	2515400	2999900	2984870
280000	3053400	2944000	3098100	3066500	3154700	2857100	3104300	3119600	2931500	3160500	3048970
320000	3142100	2861600	2720200	2988800	3125500	3111300	3200300	2733000	3359600	2974400	3021680
Wyszukiwanie											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	3614200	4669200	3558100	3892000	4172200	3496500	4175700	3542000	3850000	3285600	3825550
80000	4512500	5161900	4938000	4612500	4631500	5007700	4669800	5215000	5546900	5496000	4979180
120000	5802900	5570900	5013400	5244500	5994200	5177100	5063900	6813900	4734700	5646300	5506180
160000	5276600	5606800	5161700	5225000	6669800	5136900	5066700	4986500	5082600	5253100	5346570
200000	5704100	5686700	5255700	5019800	5425800	5690000	4720800	6311800	5938700	5610700	5536410
240000	5081200	5671400	4642400	5912000	6723100	6425600	5767200	6159600	5558000	6049100	5798960
280000	4584600	5432200	5965100	5851200	5083000	5627300	7016600	5309400	5755700	5737000	5636210
320000	5827500	5778600	5869600	5770400	3939600	5086600	5398800	5301700	4567500	5941400	5348170

- Wczytywanie z pliku i wyszukiwanie złożoność: $O(n)$
- Dodawanie $O(1)$ zgodnie z oczekiwaniami.
- Usuwanie złożoność: $O(1)$.

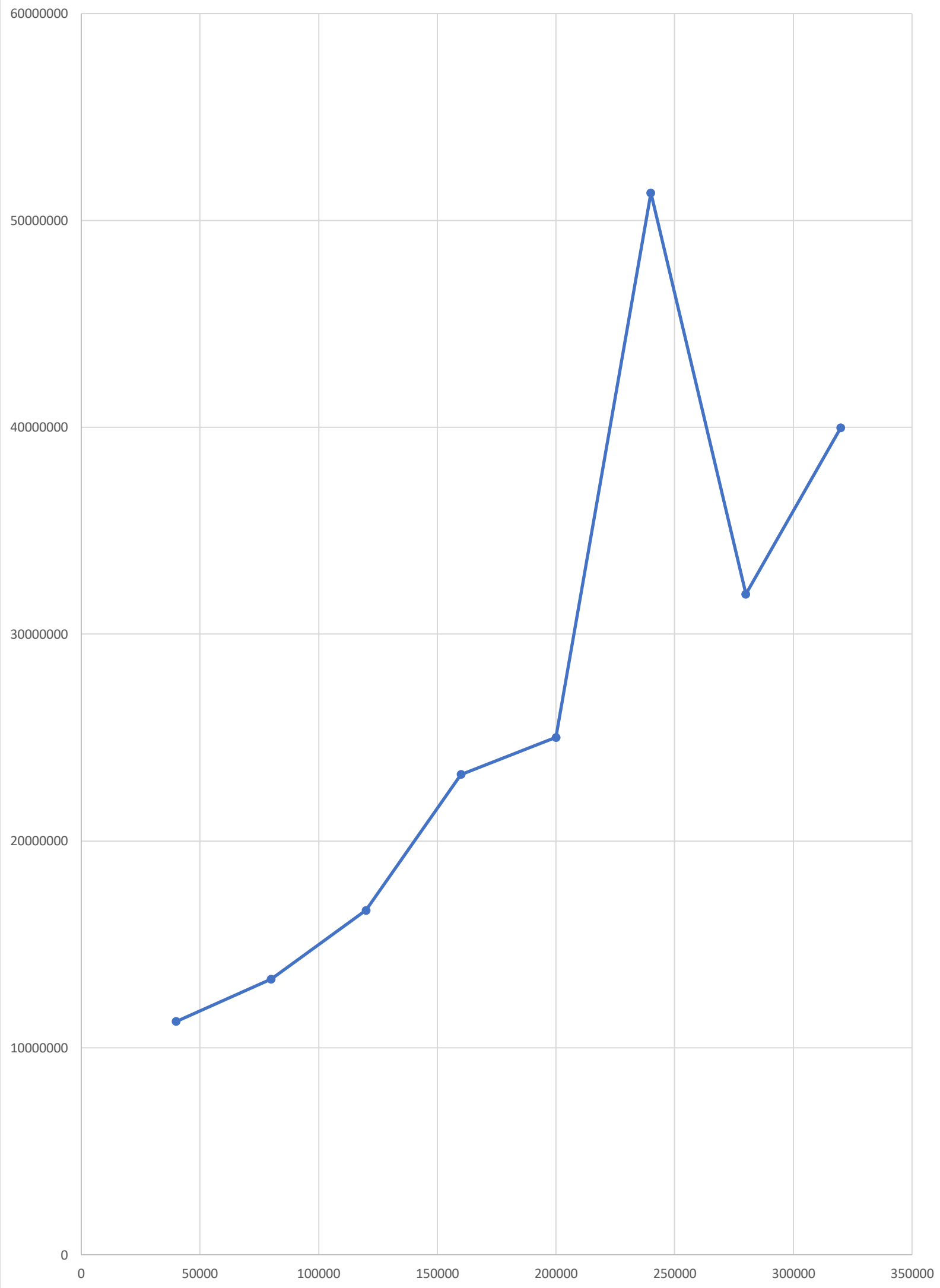
Przy dodawaniu i usuwaniu losowym czas jest liniowy. Wynika to z tego, że przy dodaniu wartości na początku lub na końcu nie musimy przechodzić przez listę. Natomiast jeśli indeks do dodania jest gdzieś w środku to nasz czas dodania to $O(n)$ ponieważ czas dostępu do n elementu to $O(n)$

Lista charakteryzuje się bardzo szybkim dodawaniem i usuwaniem natomiast dostęp do elementów ma złożoność $O(n)$ bo musimy przejść przez n wskaźników by dostać się do wybranego elementu. Zastosowania listy:

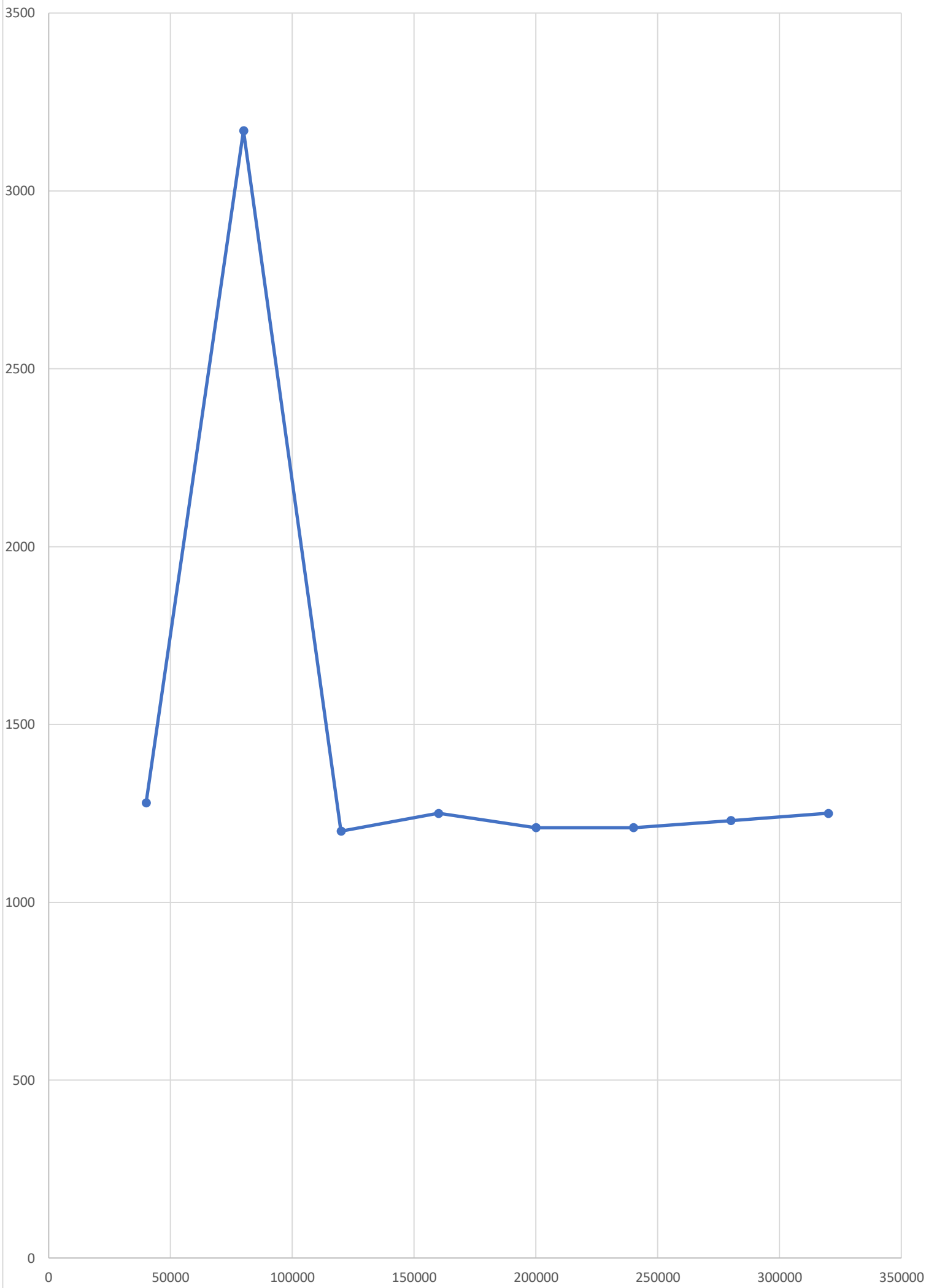
1. Przechowywanie kolekcji elementów: Listy są idealne do przechowywania i zarządzania kolekcjami elementów. Można przechowywać elementy o różnych typach danych w jednej liście, na przykład liczby, napisy, obiekty itp. Dzięki temu można przechowywać wiele elementów w jednym miejscu i łatwo nimi zarządzać.
2. Dynamiczne dodawanie i usuwanie elementów: Listy są dynamiczne, co oznacza, że można dodawać i usuwać elementy w trakcie działania programu. Możesz dodawać nowe elementy na koniec listy, usuwać elementy z listy na podstawie ich indeksów lub wartości. To przydatne, gdy nie znasz dokładnie liczby elementów, które będziesz przechowywać.
3. Przechowywanie elementów w określonej kolejności: Listy są uporządkowane, co oznacza, że elementy są przechowywane w kolejności, w jakiej zostały dodane. Możesz odwoływać się do elementów listy za pomocą ich indeksów, co ułatwia dostęp do konkretnych elementów i iterację po wszystkich elementach w określonym porządku.
4. Przetwarzanie i manipulacja danymi: Listy oferują wiele przydatnych metod do przetwarzania i manipulacji danymi. Możesz sortować listę, przeszukiwać elementy, wykonywać operacje matematyczne na elementach, łączyć i dzielić listy, filtrować elementy na podstawie określonych kryteriów itp.
5. Implementacja stosu lub kolejki: Listy można używać do implementacji struktur danych takich jak stosy (LIFO - Last-In, First-Out) lub kolejki (FIFO - First-In, First-Out). Możesz dodawać elementy na początek listy i usuwać je z początku (stos) lub dodawać elementy na koniec listy i usuwać je z początku (kolejka).

KOPIEC

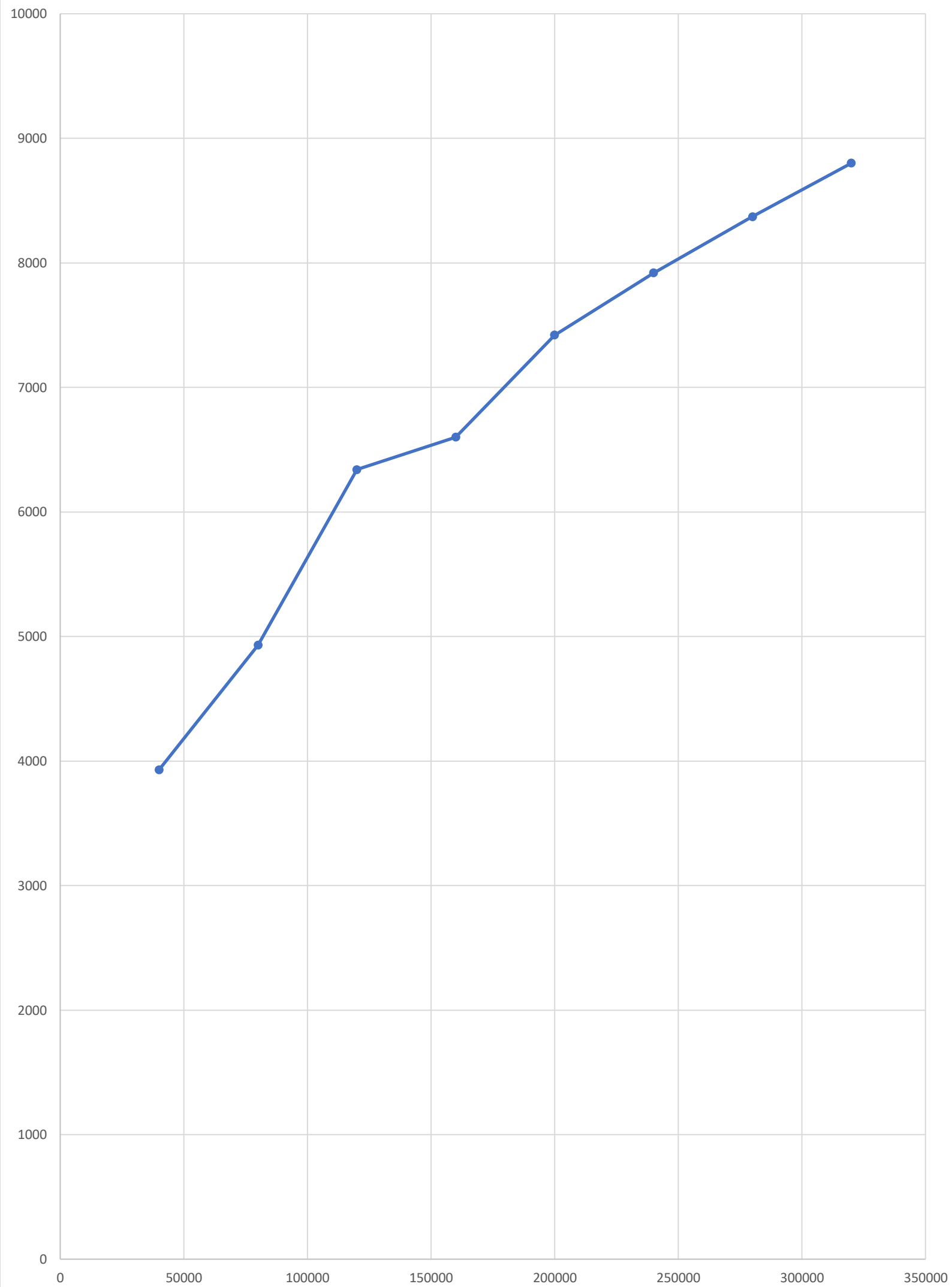
Wczytywanie z pliku



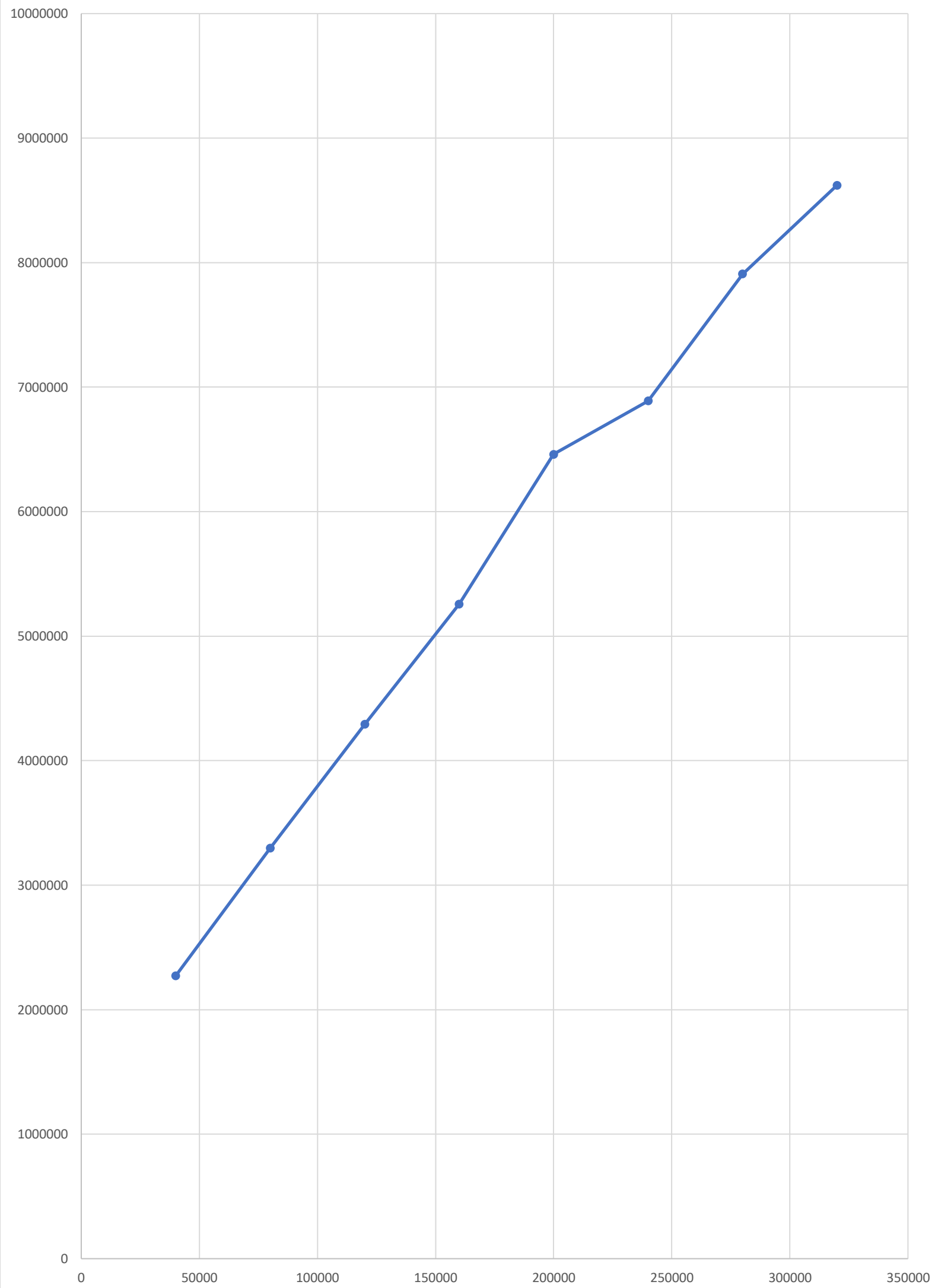
Dodawanie



Usuwanie



Wyszukiwanie



Wczytywanie z pliku

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	9374300	8418800	7984800	10893100	11959000	12197800	11586600	12265600	16260200	11789400	11272960
80000	13189300	14477400	15278600	13497600	13187700	12829600	12158900	13568300	11976100	13036600	13320010
120000	16675200	17118100	16516400	16176000	17231700	16345600	17288200	16294900	16211600	16624900	16648260
160000	20774400	20840900	21377900	20828100	21290800	27821400	21174900	22985000	31215100	23859500	23216800
200000	24159100	24724100	26286300	24489800	25751900	24321800	25713700	26394500	24096800	24100100	25003810
240000	2,56E+08	28459400	28446900	28461600	28660500	28290700	29356000	28059900	28996200	28200300	51335610
280000	32190400	32204900	32492800	31848900	31338600	32719500	31366000	31431300	32065300	31675400	31933310
320000	35732600	35285600	36607300	37083000	38949800	48861700	46380700	47899500	35544900	37472800	39981790

Dodawanie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	1700	1200	1200	1400	1100	1200	1200	1300	1300	1200	1280
80000	1300	1200	1200	20700	1100	1200	1200	1200	1200	1400	3170
120000	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200
160000	1300	1300	1200	1300	1200	1200	1200	1200	1300	1300	1250
200000	1200	1300	1200	1200	1100	1200	1300	1200	1200	1200	1210
240000	1300	1100	1200	1200	1200	1200	1200	1300	1100	1300	1210
280000	1100	1400	1200	1200	1400	1200	1200	1200	1200	1200	1230
320000	1200	1200	1200	1300	1200	1200	1200	1300	1200	1500	1250

Usuwanie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	4200	4100	3900	3900	3700	3900	3900	3900	3700	4100	3930
80000	4800	4900	5000	5100	4900	4800	4800	5200	5100	4700	4930
120000	8000	6000	6300	6000	6100	5800	6900	6200	6000	6100	6340
160000	6800	6700	6700	7000	6700	6600	6500	6200	6500	6300	6600
200000	7800	7400	7600	7600	7100	7400	7300	7400	7200	7400	7420
240000	7500	8200	7900	7500	8000	8100	8000	7900	7700	8400	7920
280000	8400	8200	8800	8400	8000	8200	8200	8500	8600	8400	8370
320000	8700	8800	8600	8800	8800	9000	8700	8900	8900	8800	8800

Wyszukiwanie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	2194100	2345900	2291800	2282200	2144700	2210000	2240300	2221400	2486800	2300000	2271720
80000	3183100	3418800	3408600	3114800	3825500	2971500	3236600	3052500	3454700	3307300	3297340
120000	3790500	4176600	4195200	4627400	4653800	4325800	4503200	4449400	3888200	4307300	4291740
160000	5347800	4699500	5512500	4835000	5137700	5102400	5713000	5611000	5164300	5452400	5257560
200000	6416400	6440000	8152500	6125200	6812300	6987400	5831800	5741000	6579200	5518000	6460380
240000	7348300	7084600	7027900	7007800	6492200	7380900	6925100	5609300	6962400	7053300	6889180
280000	8334400	8197100	7402700	7245300	8022100	6928400	8902900	7641100	8796100	7617300	7908740
320000	8537500	8694900	8609300	8162500	8227900	8751500	8622700	8532300	8626900	9454300	8621980

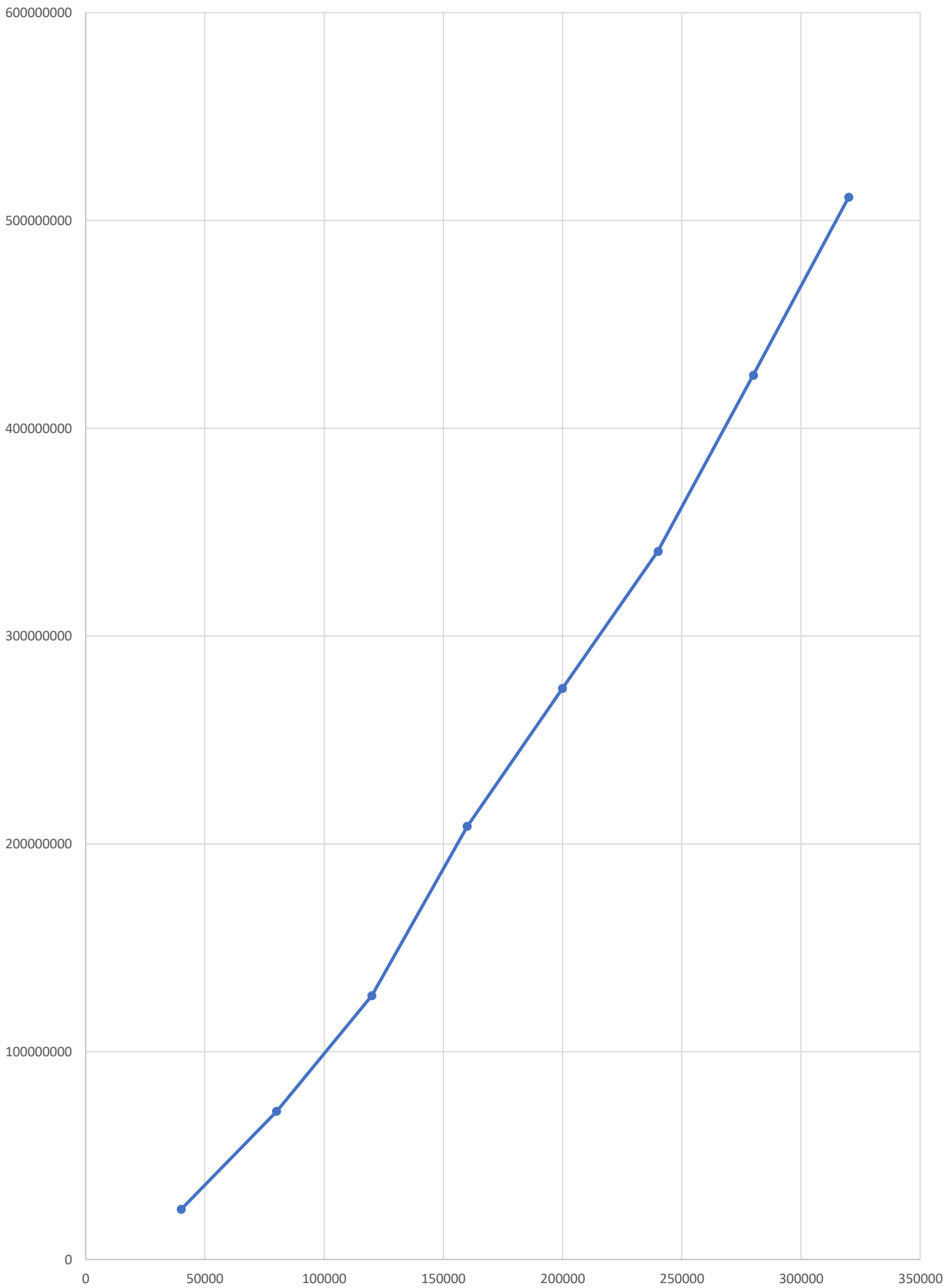
- Wczytywanie z pliku i wyszukiwanie złożoność: $O(n)$
- Dodawanie $O(1)$
- Usuwanie $O(\log n)$

Kopiec charakteryzuje się bardzo szybkim dodawaniem i dość szybkim usuwaniem natomiast plusem jest natychmiastowy dostęp do maksymalnego elementu. Zastosowania kopca:

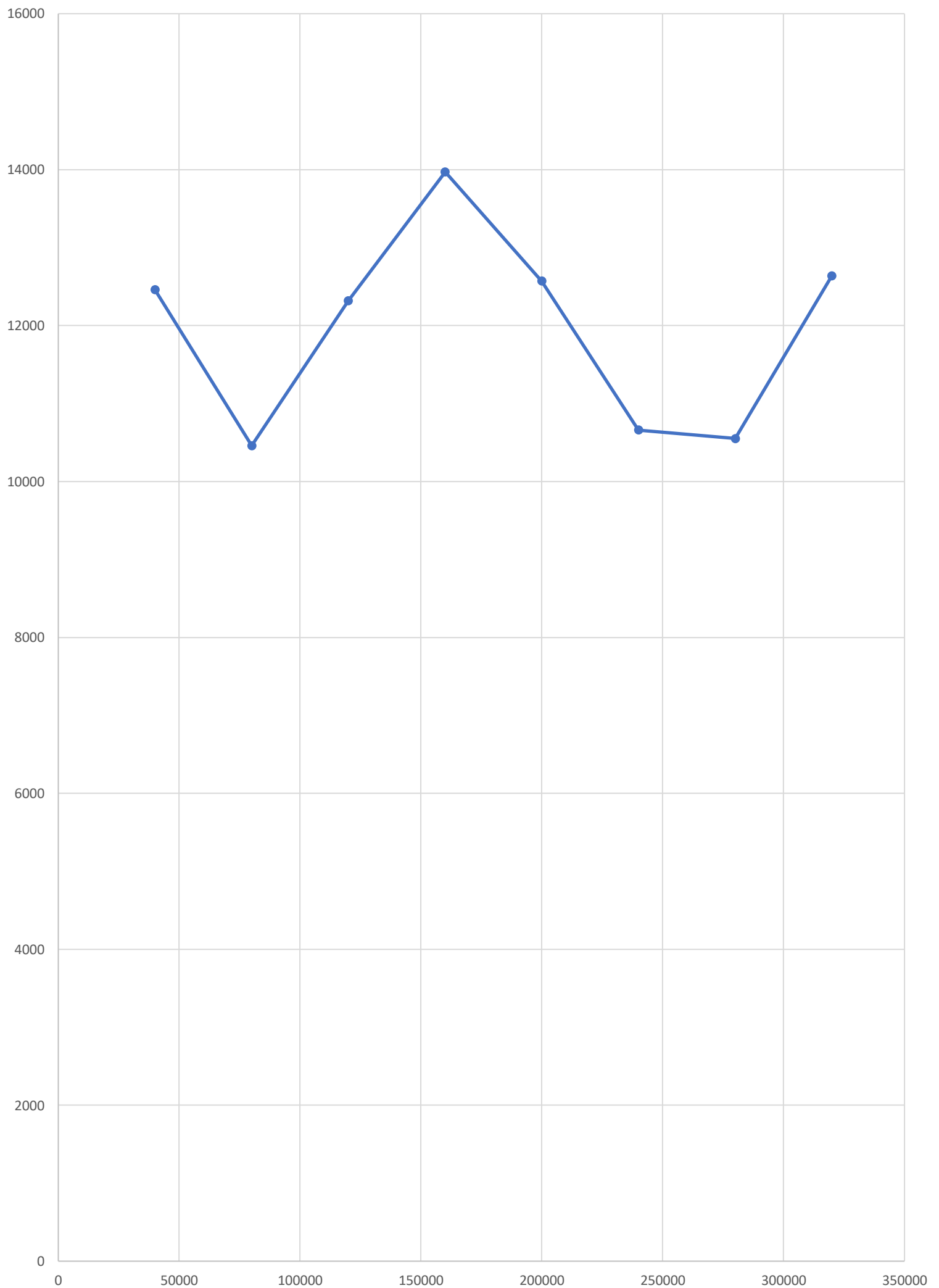
1. Sortowanie: Kopce często są używane do sortowania danych w czasie liniowym. Najczęściej stosuje się kopce binarne, takie jak kopiec maksymalny (max-heap) lub kopiec minimalny (min-heap), w zależności od tego, czy sortujemy dane w kolejności rosnącej czy malejącej. Algorytmy sortowania oparte na kopcu, takie jak HeapSort, oferują wydajne sortowanie danych.
2. Wyszukiwanie z najwyższym/pierwszym priorytetem: Kopiec może być używany do przechowywania elementów w taki sposób, że element o najwyższym (w przypadku kopca maksymalnego) lub najniższym (w przypadku kopca minimalnego) priorytecie jest zawsze dostępny w czasie $O(1)$. Jest to przydatne, gdy trzeba szybko odszukać element z najwyższym priorytetem, na przykład w algorytmach planowania zadań.
3. Implementacja kolejki priorytetowej: Kolejka priorytetowa jest strukturą danych, w której elementy mają przypisane priorytety, a element o najwyższym priorytecie jest pobierany jako pierwszy. Kopiec może być wykorzystany do implementacji kolejki priorytetowej, ponieważ zapewnia efektywny dostęp do elementu o najwyższym/najniższym priorytecie oraz efektywne dodawanie i usuwanie elementów z kolejki.
4. Algorytmy grafowe: Kopiec często znajduje zastosowanie w algorytmach grafowych, takich jak algorytmy najkrótszej ścieżki (np. algorytm Dijkstry). Kopiec może być używany do przechowywania wierzchołków grafu w kolejności względem ich odległości od źródła, co pozwala na wydajne znajdowanie i aktualizowanie najkrótszych ścieżek.
5. Eliminacja elementów skrajnych: Kopiec może być przydatny, gdy trzeba szybko znaleźć i usunąć elementy skrajne (największe lub najmniejsze) z dużego zbioru danych. Dzięki organizacji danych w kopcu, można efektywnie odnaleźć i usunąć element o największej/najmniejszej wartości.

DRZEWO

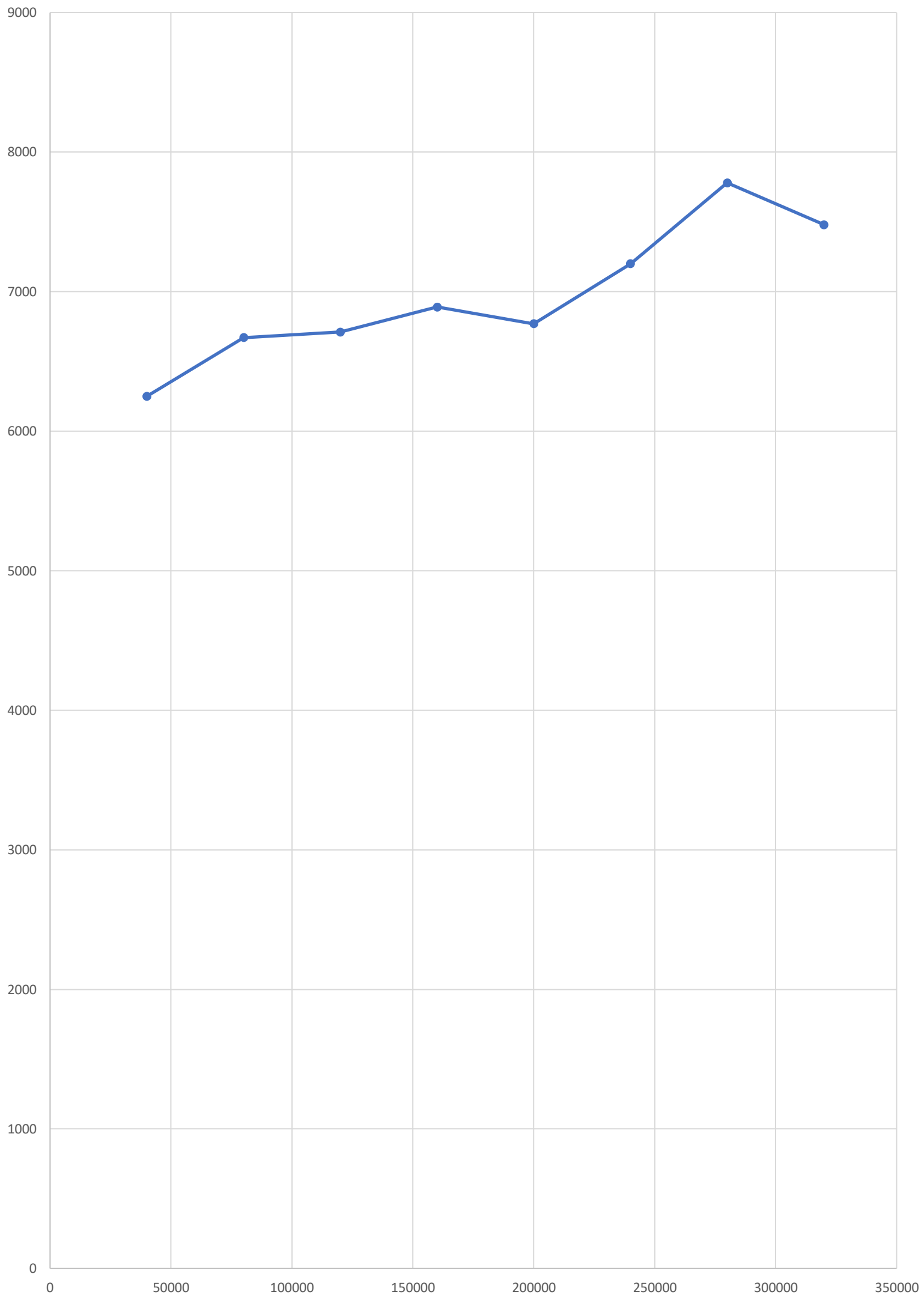
Wczytywanie z pliku



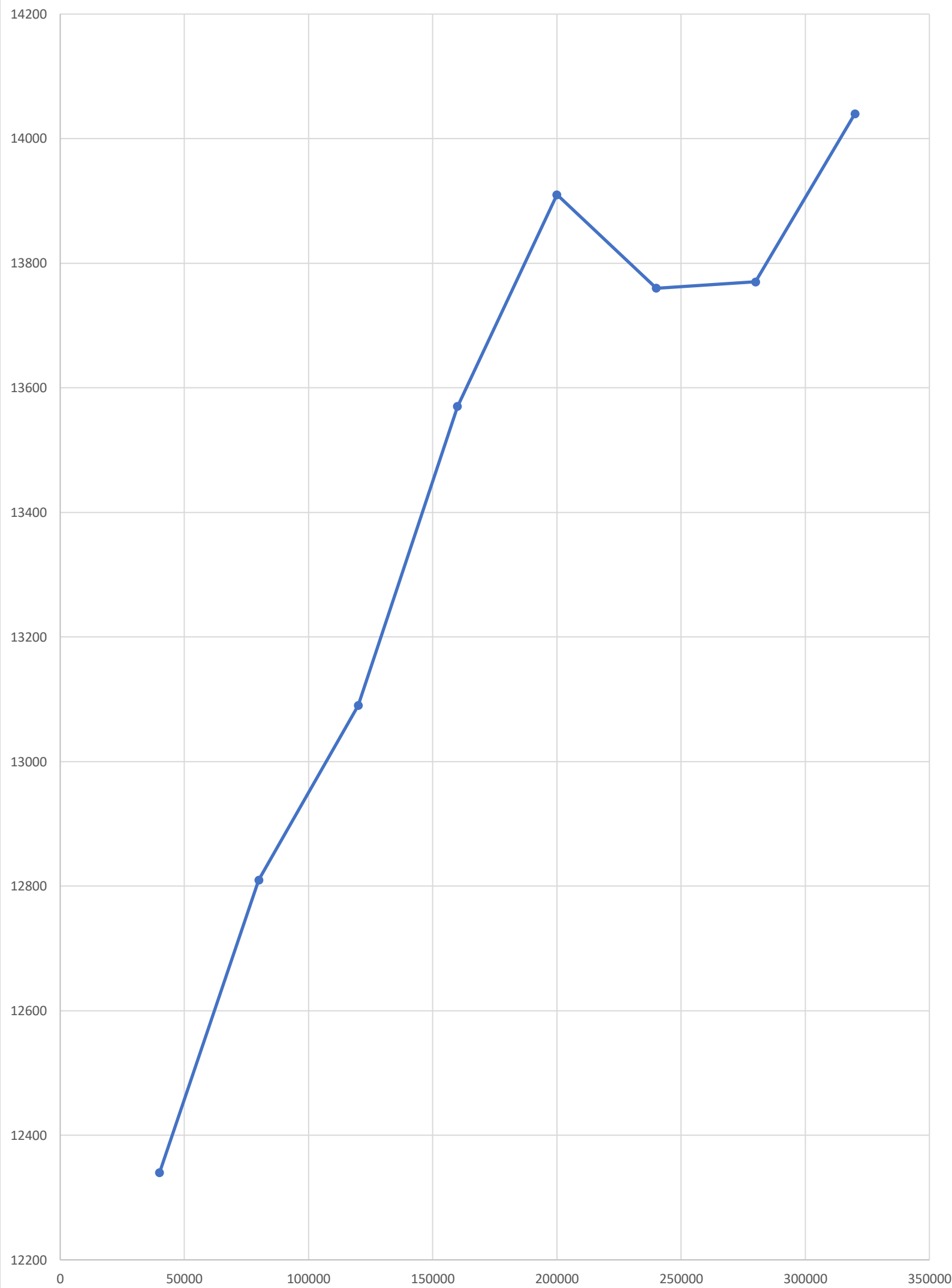
Dodawanie



Usuwanie



Wyszukiwanie



Wczytywanie z pliku

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	15160200	19046500	21131600	23357000	22388400	24583100	26729000	27796400	29901000	30704700	24079790
80000	61210300	62430000	63617900	65906100	66338900	71228900	72949600	87099000	80011000	82207900	71299960
120000	1,09E+08	1,17E+08	1,22E+08	1,23E+08	1,37E+08	1,22E+08	1,24E+08	1,27E+08	1,34E+08	1,55E+08	1,27E+08
160000	2,01E+08	1,87E+08	1,93E+08	1,85E+08	2,21E+08	2,25E+08	1,96E+08	1,98E+08	1,95E+08	2,84E+08	2,08E+08
200000	2,64E+08	2,65E+08	2,72E+08	2,83E+08	2,57E+08	2,54E+08	2,62E+08	2,63E+08	3,69E+08	2,61E+08	2,75E+08
240000	3,3E+08	3,29E+08	3,16E+08	3,4E+08	3,2E+08	3,43E+08	3,62E+08	3,35E+08	3,75E+08	3,58E+08	3,41E+08
280000	4,08E+08	4,67E+08	4,65E+08	4,32E+08	4,01E+08	4,22E+08	4,29E+08	4,23E+08	4,15E+08	3,95E+08	4,26E+08
320000	4,83E+08	4,86E+08	4,83E+08	5,02E+08	5E+08	6,13E+08	5,08E+08	5,14E+08	4,96E+08	5,27E+08	5,11E+08

Dodawanie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	30000	10300	10500	11000	10400	9800	9100	10600	11500	11400	12460
80000	9800	9500	11000	11700	12400	10400	9200	9600	9800	11200	10460
120000	11000	10400	10000	9600	9800	11400	10200	30600	10300	9900	12320
160000	9100	31500	11600	11000	10000	10500	10700	10000	8600	26700	13970
200000	10400	11100	9600	10800	9900	9600	32200	11400	11400	9300	12570
240000	10700	11900	9700	9900	12800	10500	10300	10000	10000	10800	10660
280000	10400	9500	12000	9800	11100	10100	11700	11600	9500	9800	10550
320000	10700	9600	10800	10300	10600	32400	10600	11400	9800	10200	12640

Usuwanie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	7100	5800	6500	6400	6500	6300	5800	5900	6000	6200	6250
80000	6600	6700	7500	6900	6800	6400	6900	6500	5700	6700	6670
120000	6700	6100	7100	6300	6500	6900	6500	7300	7400	6300	6710
160000	7200	6800	6700	7200	6800	6900	6800	6800	7100	6600	6890
200000	6700	7300	6200	7200	6200	7000	6900	7000	7000	6200	6770
240000	7100	7300	7500	7700	6600	6900	7200	7500	7400	6800	7200
280000	10400	7400	6800	7400	8000	8500	6700	7900	7000	7700	7780
320000	7300	7600	6900	7500	7200	7500	8000	7500	7700	7600	7480

Wyszukiwanie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Średnia
40000	12500	11900	12100	12600	12300	11800	12400	12500	12600	12700	12340
80000	12800	13200	12700	12900	12600	13000	12400	12300	13200	13000	12810
120000	13300	12600	13100	12900	13900	13600	12800	13000	12700	13000	13090
160000	12800	13200	13400	13500	13000	13600	15800	13300	13900	13200	13570
200000	14100	14200	13900	13700	13500	14000	14400	13600	13700	14000	13910
240000	13700	14000	13600	14200	14000	13000	14000	13600	13800	13700	13760
280000	14300	13900	14300	14100	13000	13900	13100	13300	13800	14000	13770
320000	14300	14100	14000	14100	13600	13900	14900	14000	13400	14100	14040

Teoretyczne wyniki:

Wczytywanie: $O(n \log n)$

Wyszukiwanie: $O(\log n)$

Dodawanie: $O(\log n)$

Usuwanie: $O(\log n)$

Zastosowania drzew:

1. Przechowywanie uporządkowanych danych: Drzewa czerwono-czarne są często używane do przechowywania danych w uporządkowany sposób. Drzewo to utrzymuje porządek elementów, dzięki czemu można szybko wykonywać operacje takie jak wyszukiwanie, wstawianie i usuwanie w czasie $O(\log n)$, gdzie n to liczba elementów w drzewie.
2. Implementacja słownika lub zbioru: Drzewa czerwono-czarne są powszechnie używane do implementacji struktur danych, takich jak słowniki (mapy) i zbiory. Pozwalają na efektywne wyszukiwanie, dodawanie i usuwanie elementów na podstawie klucza. Dzięki zrównoważeniu drzewa czerwono-czarnego, operacje te mają stały czas działania.
3. Wyszukiwanie przedziałów: Drzewa czerwono-czarne są przydatne do wykonywania operacji związanych z przedziałami, takich jak znajdowanie wszystkich przedziałów nachodzących na dany przedział, znajdowanie najmniejszego lub największego przedziału itp. Mogą być stosowane w problemach związanych z harmonogramowaniem, planowaniem zadań i innymi dziedzinami.
4. Struktury danych dla baz danych: Drzewa czerwono-czarne znajdują zastosowanie w implementacji indeksów i struktur danych w bazach danych. Mogą przyspieszyć operacje wyszukiwania i sortowania danych w bazie danych, umożliwiając efektywne przeszukiwanie, filtrowanie i sortowanie rekordów.
5. Algorytmy optymalizacji: Drzewa czerwono-czarne są wykorzystywane w wielu algorytmach optymalizacji, takich jak algorytmy szukania optymalnych dróg, minimalnych drzew rozpinających, optymalnego układania przedmiotów itp. Ich równoważenie i szybkość operacji przeszukiwania czynią je przydatnym narzędziem w tych dziedzinach.