# Metody iteracyjne Halleya i quasi-Halleya do rozwiązywania równań nieliniowych

Kamil Michalak

Analiza Numeryczna (M) - Zadanie P2.2

## 1 Wstęp

### 1.1 Opis zadania

Zadanie polega na rozpatrzeniu dwóch metod iteracyjnych, służących do rozwiązywania równań nieliniowych.

Metody Halleya:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} f(x_k)},$$

oraz metody quasi-Halleya:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{2(x_k - x_{k-1}) f'(x_k)} f(x_k)}.$$

Należy wyprowadzić powyższe wzory korzystając ze wzoru na metodę Newtona, a także obliczyć rzędy zbieżności tych metod. Następnie wybrać kilka przykładowych funkcji i porównać obie metody w praktyce.

### 1.2 Dane techniczne

Wszystkie programy wykorzystywane w eksperymentach zaprogramowałem w języku Julia, w wersji 1.0.1. Do obliczeń wykorzystywałem liczby zmiennoprzecinkowe o precyzji 1024 (1024 bity na mantysę). Obliczenia przeprowadziłem na komputerze z procesorem Intel Core i5 i 8 GB pamięci RAM.

# 2 Wyprowadzenie wzorów

## 2.1 Metoda Halleya

Wzór na metodę Halleya wynika z rozwinięcia funkcji w szereg Taylora (z dokładnością do drugiego wyrazu).

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x - x_n)^2$$

Gdzie $x_n$ jest przybliżonym rozwiązaniem równania $f(x) = 0$. Celem jest znalezienie punktu $x_{n+1}$ który jest rozwiązaniem równania

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2$$

Wyciągając $(x_{n+1} - x_n)$ przed nawias z dwóch ostatnich składników Otrzymujemy

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)\left(f'(x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)\right)$$

Z czego wynika

$$x_{n+1} - x_n = -\left(f'(x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)\right)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}f(x_k)}$$

Uzyskaliśmy wzór na metodę Halleya.

Wzór ten możemy również uzyskać ze wzoru na metodę Newtona:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x)}{g'(x)}$$

podstawiając $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$.
Policzmy $g'(x)$.

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}\right)' = \frac{f'(x) * f'(x) - f(x) * \frac{1}{2\sqrt{f'(x)}} * f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{[f'(x)]^2 - \frac{1}{2}f(x)f''(x)}{f'(x)\sqrt{f'(x)}}$$

Podstawiając powyższe wzory do wzoru na metodę Newtona uzyskujemy:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{f(x_k)}{\sqrt{f'(x_k)}}}{\frac{[f'(x_k)]^2 - \frac{1}{2}f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)\sqrt{f'(x_k)}}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\sqrt{f'(x_k)}} * \frac{f'(x_k)\sqrt{f'(x_k)}}{[f'(x_k)]^2 - \frac{1}{2}f(x_k)f''(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - \frac{1}{2}f(x_k)f''(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}f(x_k)}$$

### 2.2 Metoda quasi-Halleya

Wyprowadzenie wzoru na metodę quasi-Halley ze wzoru na metodę Halleya jest bardzo podobne do wyprowadzenia wzoru na metodę siecznych ze wzoru na metodę Newtona. Aby uzyskać wzór na metodę siecznych zastępujemy $f'(x_k)$ w metodzie Newtona ilorazem różnicowym.

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Uzyskujemy w ten sposób metodę siecznych.

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Żeby uzyskać wzór na metodę quasi-Halleya zastępujemy $f''(x_k)$ w metodzie Halleya ilorazem różnicowym $f'$:

$$\frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Otrzymujemy:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{2(x_k - x_{k-1})f'(x_k)}f(x_k)}$$

## 3 Rzędy zbieżności metod

**Definicja 1.** *Niech ciąg $a_k$ będzie zbieżny do $g$. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste $p$ i $C$ ($C > 0$), że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C$$

*to $p$ nazywamy **wykładnikiem zbieżności** ciągu, a $C$ – **stałą asymptotyczną błędu**. Dla $p = 1$ oraz $0 < C < 1$ zbieżność jest **liniowa**, dla $p = 2$ – **kwadratowa**, dla $p = 3$ – **sześcienna***

### 3.1 Metoda Halleya

Metoda Halley ma zbieżność sześcienną, dowód jest następujący.

Weźmy dowolną funkcję f. Załóżmy, że $f(g) = 0$, ale $f'(g) \neq 0$ oraz, że metoda Halleya jest zbieżna do $g$ dla pewnego punktu początkowego $x_0$. Załóżmy też, że trzecia pochodna f istnieje i jest ciągła w pewnym otoczeniu $g$ i, że $x_n$ znajduje się w tym otoczeniu. Wtedy ze wzoru Taylora mamy:

$$0 = f(g) = f(x_n) + f'(x_n)(g - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(g - x_n)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(g - x_n)^3$$

oraz

$$0 = f(g) = f(x_n) + f'(x_n)(g - x_n) + \frac{f''(\eta)}{2}(g - x_n)^2$$

Gdzie $\xi$ i $\eta$ są liczbami spomiędzy $a$ i $x_n$. Mnożąc pierwsze równanie przez $2f'(x_n)$ i odejmując drugie równanie pomnożone przez $f''(x_n)(a-x_n)$ otrzymujemy:

$$0 = 2f(x_n)f'(x_n) + 2[f'(x_n)]^2(g-x_n) + f'(x_n)f''(x_n)(g-x_n)^2 + \frac{f'(x_n)f'''(\xi)}{3}(g-x_n)^3$$
$$- f(x_n)f''(x_n)(g - x_n) - f'(x_n)f''(x_n)(g - x_n)^2 - \frac{f'(x_n)f''(\eta)}{2}(g - x_n)^3$$

$$0 = 2f(x_n)f'(x_n) + \Big(2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)\Big)(g-x_n) + \left(\frac{f'(x_n)f'''(\xi)}{3} - \frac{f''(x_n)f''(\eta)}{2}\right)(g-x_n)^3$$

Przerzucamy drugi składnik na lewą stronę i dzielimy przez $2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)$, otrzymujemy:

$$g - x_n = \frac{-2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} - \frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)f''(\eta)}{6(2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n))}(g - x_n)^3$$

Z czego wynika:

$$g - x_{n+1} = -\frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)f''(\eta)}{12[f'(x_n)]^2 - 6f(x_n)f''(x_n)}(g - x_n)^3$$

$$\frac{|x_{n+1} - g|}{|x_n - g|^3} = \left|\frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)f''(\eta)}{12[f'(x_n)]^2 - 6f(x_n)f''(x_n)}\right|$$

Licząc granicę przy $n \to \infty$ ($x_n \to g$) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - g|}{|x_n - g|^3} = \left|\frac{2f'(g)f'''(g) - 3f'(g)f''(g)}{12[f'(g)]^2}\right| = C$$

Co kończy dowód.

Metoda Halleya jest więc lepsza od metody Newtona, która ma zbieżność kwadratową.

### 3.2 Metoda quasi-Halleya

Metoda quasi-Halleya ma wykładnik zbieżności $1 + \sqrt{2} \leqslant p \leqslant 3$. Dowód w [1] (twierdzenie 3, str. 8).

## 4 Implementacja metod w Julii

Implementacja metod Halleya i quasi-Halleya wygląda następująco.

```
halley(f,f',f'',n,x0)
    x := x0
    for i = 0,1,...,n
        x := x - f(x) / (f'(x) - f''(x)/(2*f'(x)) * f(x))
    return x


quasi_halley(f,f',n,x0,x1)
    for i = 0,1,...,n
        x2 := x1 - f(x1) / (f'(x1)-
            (f'(x1)-f'(x0))/2*(x1-x0)*f'(x1)*f(x1))
        x0 := x1
        x1 := x2
    return x2
```

Zaimplementujmy również metody Newtona i siecznych w celach porównawczych.

```
newton(f,f',n,x0)
    x := x0
    for i = 0,1,...,n
        x = x - f(x)/f'(x)
    return x


secant(f,n,x0,x1)
    for i = 1,2,...,n
        x2 := x1 - f(x1)*(f(x1)-f(x0))/(x1-x0)
        x0 := x1
        x1 := x2
    return x2
```

# 5 Testy

W testach użyłem funkcji, których pierwiastki można obliczyć korzystając z funkcji bibliotecznych w języku Julia. W tabelach podałem liczbę dokładnych cyfr po przecinku uzyskanego wyniku, obliczoną ze wzoru:

$$n = \lfloor -\log_{10} \Delta x \rfloor$$

gdzie

$$\Delta x = \left| \frac{\bar{x} - x}{x} \right|$$

jest błędem względnym uzyskanego wyniku.

## 5.1 Funkcja $f(x) = x^2 - 2$

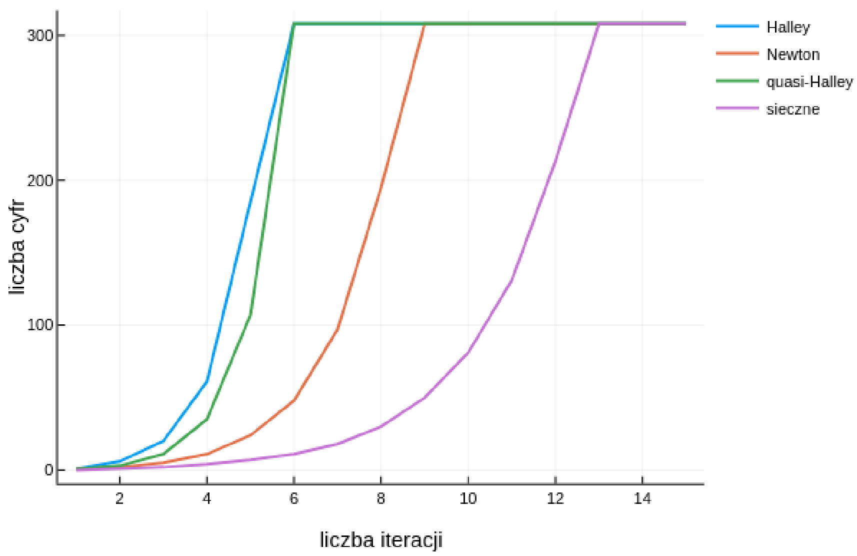
Dokładny pierwiastek obliczony za pomocą `sqrt(BigFloat(2.0))`

Porównanie metody Halleya i Newtona, $x_0 = 1.0$

| **k** | **Metoda Halleya** | **Metoda Newtona** |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 6 | 2 |
| 3 | 20 | 5 |
| 4 | 61 | 11 |
| 5 | 185 | 24 |
| 6 | 308 | 48 |
| 7 | 308 | 97 |
| 8 | 308 | 195 |
| 9 | 308 | 308 |
| 10 | 308 | 308 |
| 11 | 308 | 308 |
| 12 | 308 | 308 |
| 13 | 308 | 308 |
| 14 | 308 | 308 |
| 15 | 308 | 308 |

Porównanie metody quasi-Halleya i siecznych, $x_0 = 1.0$, $x_1 = 3.0$

| **k** | **Metoda quasi-Halleya** | **Metoda siecznych** |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 11 | 2 |
| 4 | 35 | 4 |
| 5 | 107 | 7 |
| 6 | 308 | 11 |
| 7 | 308 | 18 |
| 8 | 308 | 30 |
| 9 | 308 | 50 |
| 10 | 308 | 81 |
| 11 | 308 | 131 |
| 12 | 308 | 213 |
| 13 | 308 | 308 |
| 14 | 308 | 308 |
| 15 | 308 | 308 |

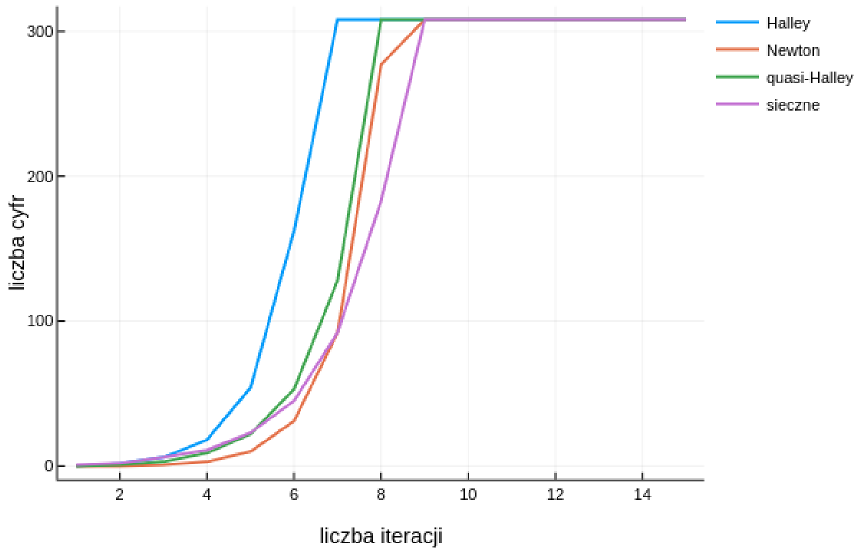



Rysunek 1: Wykres dokładności metod iteracyjnych dla funkcji $f(x) = x^2 - 2$

## 5.2 Funkcja $\sin x$

$\pi$ jest miejscem zerowym funkcji, można więc użyć wbudowanej stałej `pi` do sprawdzenia dokładności.

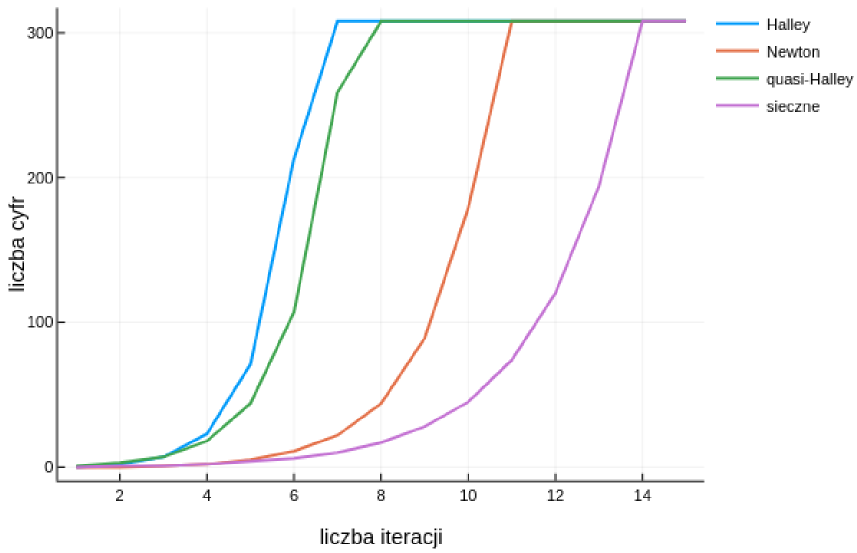
$x_0 = 2.0$, $x_1 = 4.0$




Rysunek 2: Wykres dokładności metod iteracyjnych dla funkcji $\sin x$

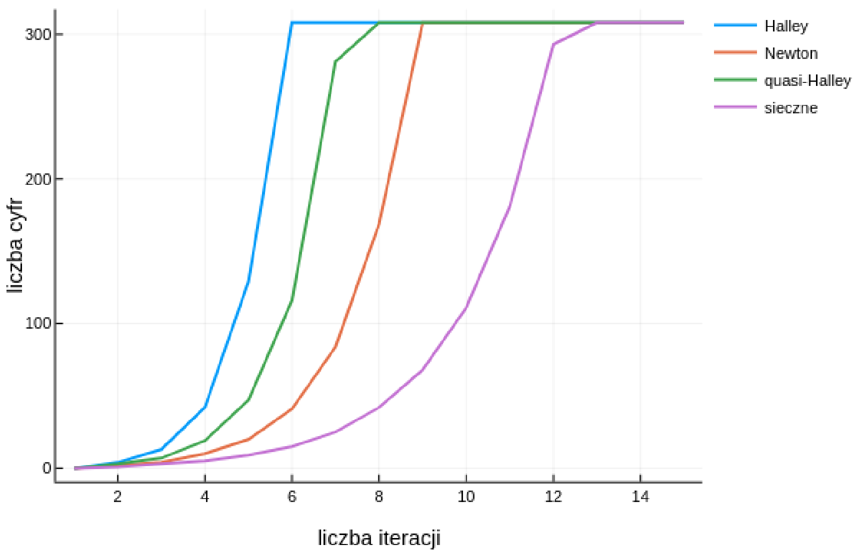
## 5.3 Funkcja $f(x) = x^3 - 8$

$x_0 = 1.0, x_1 = 3.0$




Rysunek 3: Wykres dokładności metod iteracyjnych dla funkcji $f(x) = x^3 - 8$

### 5.4 Funkcja $f(x) = \sqrt{x} - 3$




Rysunek 4: Wykres dokładności metod iteracyjnych dla funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 3$

# 6 Wnioski

Metody iteracyjne Halleya i quasi-Halleya to metody iteracyjne pozwalające szybko znajdować pierwiastki funkcji. Mają lepszą zbieżność od metod Newtona i siecznych, co udowodniłem i sprawdziłem doświadczalnie. Są również proste w implementacji. Jedyną ich wadą w porówaniu z metodami Newtona i siecznych jest to, że wymagają policzenia większej ilości pochodnych, co w pewnych przypadkach może stanowić problem. Warto je stosować do funkcji, których pierwsza i druga pochodna nie jest bardzo trudna do policzenia.

# 7 Źródła


1. A. Ben-Israel, "Newton's Method with Modified Functions", Contemporary Mathematics 204 (1997), 39–50.

2. Omar Ismael Elhasadi "Newton's and Halley's methods for real polynomials"