Obliczanie wartości funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$ i $\operatorname{arc\,ctg} x$

Kamil Michalak

Analiza Numeryczna (M) - Zadanie P1.10

1 Wstęp

1.1 Treść zadania

Wykorzystując jedynie podstawowe działania arytmetyczne $(+, -, x, /)$, zaproponuj efektywne sposoby wyznaczania wartości funkcji $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ i $g(x) = \operatorname{arc\,ctg} x$ z dokładnością bliską dokładności maszynowej. Opracowane algorytmy porównaj z funkcjami bibliotecznymi.

1.2 Sposoby rozwiązania

Najoczywistszym rozwiązaniem wydaje się być rozwinięcie skorzystanie z Twierdzenia funkcji w szereg. Znamy wartość tych funkcji w zerze więc możemy znaleźć szereg potęgowy tych funkcji i policzyć ich wartości wykorzystując pewną liczbą początkowych składników szeregu.

1.3 Dane techniczne

Wszystkie programy wykorzystywane w ekseperymentach zaprogramowałem w języku Julia, w wersji 1.0.1. Do obliczeń wykorzystywałem liczby zmiennoprzecinkowe o precyzji 1024 (1024 bity na mantysę). Obliczenia przeprowadziłem na komputerze z procesorem Intel Core i5 i 8 GB pamięci RAM.

2 Rozwinięcie funkcji w szereg Maclaurina

Twierdzenie 1 (Taylora)**.** *Jeśli funkcja f ma n pochodnych w otoczeniu punktu a,wówczas dla każdego punktu z tego otoczenia spełniony jest wzór*

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_{n+1}(x)$$

Gdzie $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$

Dla a = 0 otrzymujemy szereg Maclaurina.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}() + R_{n+1}(x)$$

Rozwinięcie funkcji $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Policzmy szereg Maclaurina dla funkcji $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Wykorzystamy do tego funkcję $h(x) = \frac{1}{1-x}$, a następnie w miejsce x wstawimy $-x^2$.

$$h'(x) = \frac{1}{(x-1)^2},\ h''(x) = -\frac{2}{(x-1)^3},\ h'''(x) = \frac{3*2}{(x-1)^4}$$

$$h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(x-1)^{n+1}}$$

Stąd

$$h^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(-1)^{n+1}} = n!$$

Szereg Maclaurina funkcji h jest więc równy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Podstawiając $-x^2$ w miejsce x otrzymujemy szereg funkcji $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Teraz, żeby obliczyć szereg funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$, posłużymy się twierdzeniem o całkowaniu szeregu potęgowego.

Twierdzenie 2 (O całkowaniu szeregu potęgowego)**.** *Niech* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *będzie szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności R (przy czym* $0 < R < \infty$*) i niech S(x) oznacza sumę tego szeregu dla* $x \in (-R, R)$*:* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$*, Wówczas dla każdego* $x \in (-R, R)$ *zachodzi równość*

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}x^{n+1},$$

którą zapisujemy również w postaci

$$\int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int \frac{1}{1+x^2} dx + C$$

więc

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arc\,tg} t|_0^x = \operatorname{arc\,tg} x$$

zatem z twierdzenia o całkowaniu szeregu potęgowego

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Ten szereg jest zbieżny dla $x \in (-1, 1)$, więc umożliwi nam obliczenie wartości funkcji tylko w tym przedziale.
Nie możemy liczyć kolejnych wyrazów szeregu nieskończoność, dlatego zamienimy wzór na

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

i sprawdzimy jego dokładność dla różnych wartości k

Rozwinięcie funkcji $g(x) = \operatorname{arc\,ctg} x$

Wiemy, że $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$, więc $\operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x$.
Zatem nasz wzór będzie miał postać:

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$$

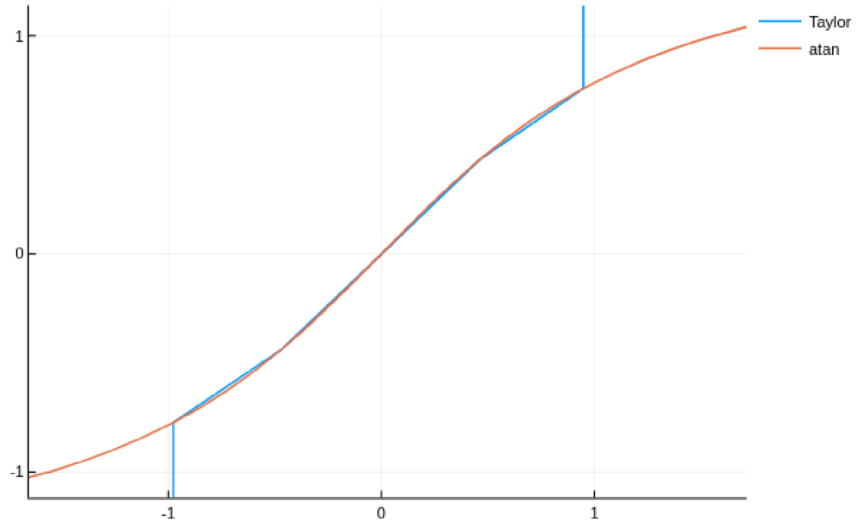
3 Implementacja szeregu Maclaurina w Julii

3.1 funkcja arctg(x)

Poniższy program wylicza $\operatorname{arc\,tg} x$, wykorzystując wzór Taylora i wykonując k iteracji.

```
arctg_taylor(x,k)
    sum := 0
    power := x
    for i = 0,1,...,k
        if i mod 2 = 0:
            sum := sum + power/(2*i+1)
        else
            sum := sum - power/(2*i+1)
        power := power*x^2
    return sum
```

Na poniższym rysunku widnieją wykresy funkcji `arctg_taylor(x,50)`, oraz bibliotecznej funkcji `atan(x)` wyliczającej $\operatorname{arc\,tg} x$.



Rysunek 1: Wykres funkcji $arctg\_taylor(x, 50)$ i $atan(x)$

Jak można zauważyć, nasz szereg faktycznie daje w przybliżeniu dobre wyniki jedynie dla przedziału (-1,1). Widać również, że dla niektórych x nasz szereg nie jest do końca dokładny. Powinniśmy sprawdzić jak rośnie $arctg\_taylor(x, k)$ dokładność szeregu wraz ze zwiększaniem wartości k. Można to zrobić w następujący sposób - dla danego k:
1. Policzyć wartość arctg-taylor(x,k) dla x=-0.99;-0.98;...;0.99.
2. Dla każdej z tych wartości obliczyć błąd względny, uznając za wartość dokładną wynik funkcji bibliotecznej atan.
3. Obliczyć średni błąd, ze wszystkich błędów z kroku 2.

Funkcja licząca nasz średni błąd wygląda następująco

```
avg_error(k)
    error_sum := 0
    iterations := 0
    for i = -0.99,-0.98,...,0.99
        iterations := iterations+1
        taylor := arctg_taylor(i, k)
        arctg := atan(i)
        error_sum := error_sum + abs((x-y)/y)
    return error_sum/iterations
```

Wyniki obliczeń prezentuje poniższa tabela.

k	**Średni błąd rzędu**
5	10^{-3}
10	10^{-5}
50	10^{-5}
100	10^{-6}
500	10^{-9}
1000	10^{-15}
5000	10^{-50}
10000	10^{-94}
100000	10^{-308}
1000000	10^{-308}

Jak widać w tabeli, dla $k = 10^5$ i $k = 10^6$ uzyskaliśmy identyczny średni błąd. Oznacza, to że od pewnego momentu kolejne składniki sumy zaokroglają się do zera, nie ma więc sensu uruchamiać funkcji dla k większych od pewnego k_0. Doświadczalnie sprawdziłem, że $k_0 = 34700$. 10^{-308} to błąd rzędu precyzji arytmetyki (2^{-1024})

Na wykresie (1) możemy zauważyć, że dokładność naszej funkcji jest lepsza dla x bliskich 0 a gorsza na krańcach przedziału (-1,1). Ma to oczywiście sens - dla x bliskiego zeru, kolejne składniki sumy szybciej dążą do zera, więc kolejne sumy szybciej dążą do dokładnej wartości arctg(x). Warto sprawdzić jaka jest różnica w dokładności funkcji arctg_taylor(x,k) między argumentami bliższymi i dalszymi od zera. W tym celu można przerobić funkcję avg_error(k) tak by policzyła średni błąd dla mniejszych przedziałów.

Wyniki dla k=1000

Przedział	**Średni błąd rzędu**
$[0, 0.2]$	10^{-308}
$[0.2, 0.4]$	10^{-308}
$[0.4, 0.6]$	10^{-308}
$[0.6, 0.8]$	10^{-199}
$[0.8, 0.99]$	10^{-14}

Dla przedziałów z lewej strony zera uzyskujemy identyczne wyniki. Jak widać dokładność jest bardzo duża dla większej części przedziału ale od pewnego x_0 zaczyna szybko maleć (doświadczalnie sprawdziłem, że $x_0 \approx \pm 0.7$)

3.2 Funkcja arcctg(x)

W języku Julia nie ma funkcji bliblioteczej obliczającej $\operatorname{arc\,ctg} x$, można ją obliczyć za pomocą wyrażenia `pi/2-atan(x)`. Wyrażenie `pi/2-arctg_taylor(x,k)` oblicza $\operatorname{arc\,ctg} x$ używając tylko czterech podstawowych działań. Przeprowadzając te same eksperymenty co dla funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$ uzyskałem identyczne wyniki.

4 Obliczanie wartości funkcji poza przedziałem (-1,1)

Do obliczania wartości $\operatorname{arc\,tg} x$ możemy, wykorzystać zależność, że $\operatorname{arc\,tg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$. Jeśli będziemy potrafili obliczyć $\operatorname{tg} y$ używając jedynie 4 podstawowych działań, będziemy mogli znaleźć taki y, że $\operatorname{tg} y = x$ za pomocą metod numerycznych (np. bisekcji lub Newtona), będziemy tylko musieli je lekko zmodyfikować, tak żeby znajdowały odpowiedni y dla różnych wartości x, nie tylko dla zera.

4.1 Obliczanie wartości funkcji tgx

Wiemy, że $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{cosx}$, znajdźmy więc szeregi Maclaurina dla funkcji sinus i cosinus.

$$\sin x = \sin 0 + \frac{x}{1!}\cos 0 - \frac{x^2}{2!}\sin 0 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\sin 0 - ... = 0 + \frac{x}{1!} * 1 - \frac{x^2}{2!} * 0 - \frac{x^3}{3!} * 1 + ... = \frac{x}{1!} - \frac{x}{3!} + \frac{x}{5!} - ...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \cos 0 - \frac{x}{1!}\sin 0 - \frac{x^2}{2!}\cos 0 + ... = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Do obliczania wartości $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ wykorzystamy poniższe funkcje.

```
sin_taylor(x,k)
    sum := 0
    power := x
    fact := 1
```

```
    for i = 0,1,...,k
        if i mod 2 = 0
            sum := sum + power/fact
        else
            sum := sum - power/fact
        power = := power*x^2
        fact = := fact*(2*(i+1))*(2*(i+1)+1)
    return sum

cos_taylor(x,k)
    sum := 0
    power := 1
    fact := 1
    for i = 0,1,...,k
        if i mod 2 = 0
            sum := sum + power/fact
        else
            sum := sum - power/fact
        power = := power*x^2
        fact = := fact*(2*(i+1)-1)*(2*(i+1))
    return sum

tg_taylor(x,k)
    if x = 0 return 0
    else return sin_taylor(x,k)/cos_taylor(x,k)
```

Funkcja `tg_taylor(x,k)` ma największą dokładność (rzędu 10^{-305}), dla k=200. Zwiększanie k powyżej tej wartości nie poprawia dokładności funkcji.

4.2 Wykorzystanie metody bisekcji do obliczania wartość arctgx

Zmodyfikowana wersja algorytmu bisekcji, znajdująca argument o wartości y, dla funkcji f, na przedziale [a,b], z zadaną dokładnością.

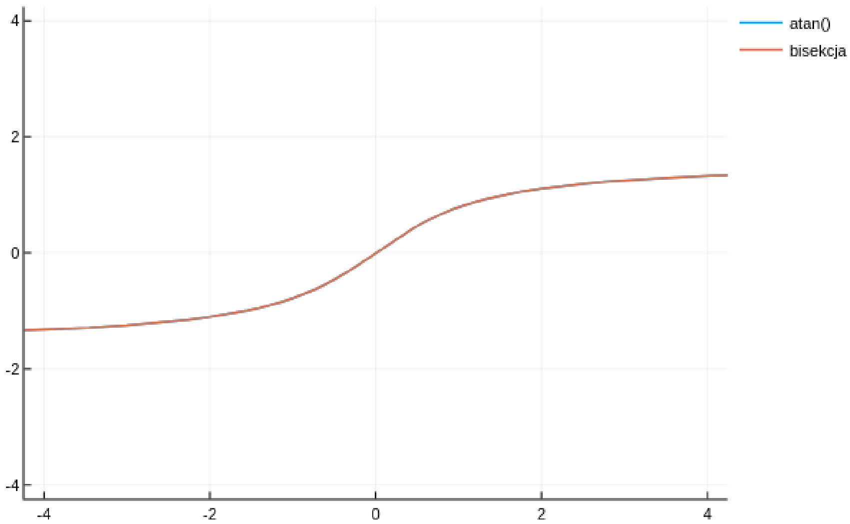
```
bisect(f,y,a,b, epsilon)
    while (abs(a-b)>epsilon)
        s := (a+q)/2.0
        if abs(f(s)-y) <= epsilon
            break
        else if (f(s)-y) * (f(a)-y) < 0
            b := s
        else
```

```
            a := s
        end
    return (a+q)/2
```

Funkcję obliczającą $\operatorname{arc\,tg} x$ możemy zapisać następująco (dla zadanych $k \in N$ i $epsilon > 0$).

```
tg(x) = tg_taylor(x,k)
arctg(x) = bisect(tg,x,-pi/2,pi/2,epsilon)
```

Wykres funkcji `arctgx(x)`, dla $k = 100$ i $epsilon = 10^{-16}$, i bibliotecznej funkcji `atan(x)` wygląda następująco. Różnice są na tyle małe, że nie widać ich na wykresie.



Rysunek 2: Wykres funkcji $arctg(x)$ i $atan(x)$

Dla $k = 200$ i $\epsilon = 2^{-1023}$ (błąd rzędu precyzji arytmetyki) funkcja bisekcji wykonuje się ok. 2,16 s.

4.3 Funkcja arcctgx

Przy obliczaniu funkcji $\operatorname{arc\,ctg} x$ skorzystamy z faktu, że $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Więc funkcja licząca $\operatorname{ctg} x$ ze wzoru Taylora wygląda następująco.

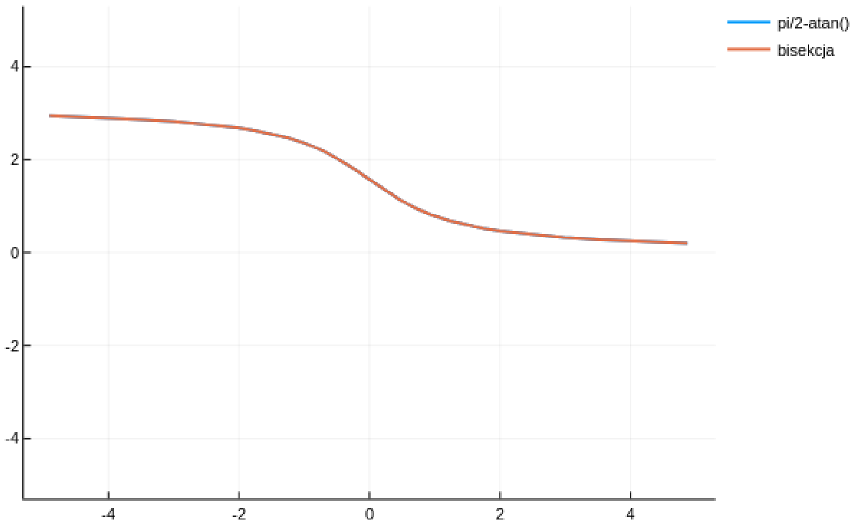
```
ctg_taylor(x,k)
        if x = pi/2 return 0
```

```
else return cos_taylor(x,k)/sin_taylor(x,k)
```

Identycznie jak dla funkcji `tg_taylor(x,k)`, dokładność funkcji `ctg_taylor(x,k)` jest największa dla $k = 200$ i nie poprawia się dla większych k.
Możemy z jej pomocą policzyć $\operatorname{arc\,ctg} x$.

```
ctg(x) = tg_taylor(x,k)
arcctg(x) = bisect(ctg,x,0,pi,epsilon)
```

Wykres funkcji `arctgx(x)`, dla $k = 100$ i $epsilon = 10^{-16}$, i funkcji `pi/2 - atan(x)`:



Rysunek 3: Wykres funkcji $arcctg(x)$ i $pi/2 - atan(x)$

5 Wnioski

Wartości $\operatorname{arc\,tg} x$ i $\operatorname{arc\,ctg} x$ dla $x \in (-1, 1)$ najlepiej liczyć ze wzoru Taylora. Dla liczb spoza tego przedziału trzeba korzystać z innych metod. Metoda zaprezentowana przeze mnie - wykorzystująca bisekcję na funkcji $\operatorname{tg} y/\operatorname{ctg} y$ do znalezienia argumentu o wartości równej $\operatorname{arc\,tg} x/\operatorname{arc\,ctg} x$ nie jest szczególnie szybka ale umożliwia obliczenie szukanej wartości z dużą dokładnością. Nadaje się do obliczania wartości funkcji dla niewielkiej liczby argumentów.

6 Źródła

- http://prac.im.pwr.wroc.pl/ kajetano/AM2/