postać trygonometryczna l. zespolonej: $z = a+bi = |z|\cdot\cos\varphi + i\cdot|z|\cdot\sin|\varphi| = |z|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ | $z = a+bi$, gdzie $i^2 = -1$

mnożenie liczb zespolonych (moduły mnożymy, a arg. dodajemy): $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$, $Arg|z_1\cdot z_2| = Arg z_1 + Arg z_2$

wzór de Moivre'a: jeżeli $z = |z|(\cos\varphi + \sin\varphi)$ to $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi)$, $n\in N$ | Arg z - spełnia warunek: $0\le Arg z\le 2\pi \vee -\pi < Arg z \le \pi$

Pierwiastkowanie l. zespolonych: $\sqrt[n]{z} = \{w_0,\dots,w_{n-1}\}$, $(k=0, k=1, \dots k=n+1)$ gdzie $w_k = (\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$

Dzielenie liczb zespolonych: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2))$ | moduł l. zespolonej „z” $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ | granica pochodnej $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ | $f'(x_0) = p \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = p$ pochodna w pkt. x_0 równa p istnieje, gdy zachodzi to

styczna do f w punkcie $P(x_0, f(x_0))$: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ | Jeżeli granica pochodnej nie istnieje lub jest niewłaściwa to mówimy, że funkcja f nie ma pochodnej w pkt. x_0

macierz $A = [\ ]_{m\times n}$ ← wiersz „n”, kolumna „m”

Działania na macierzach: $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$, $A-B = [a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$; $\lambda\cdot A = [\lambda\cdot a_{ij}]_{m\times n}$; $A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$

macierz przeciwna: $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$

macierz zerowa: złożona z samych zer

mnożenie macierzy: $A = [\ ]_{m\times k}$ $B = [\ ]_{k\times n}$

wzory na mnożenie macierzy: $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$; $(\lambda\cdot A)\cdot B = A\cdot(\lambda\cdot B) = (A\cdot B)\cdot\lambda$; $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$, $(B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$

macierz transponowana: $A = [\ ]_{m\times n} \Rightarrow A^T = [\ ]_{n\times m}$ (zamiana wierszy z kolumnami)

własności transponowania: $(\lambda\cdot A)^T = \lambda\cdot A^T$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(A^T)^T = A$, $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

macierz kwadratowa <=> symetryczna

macierz diagonalna: $A = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ | macierz skalarna: $A = \begin{bmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{bmatrix}$ | macierz jednostkowa $A^{I} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = I$

wyznacznik macierzy: (tylko dla kwadratowej) $\det A = |\ |_{n\times n}$, $n\ge 2 \iff \det A = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12}\dots$ | metoda Sarrusa: $\det A = $ | macierz nieosobliwa $\det A \ne 0$ | Dopełnienie algebraiczne $A^D = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$, gdzie M_{ij} to wyznacznik n-1 z macierzy A, bez i-wiersza i j-kol.

macierz odwrotna: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot[A^D_r]^T$ | sprawdzenie: $A\cdot A^{-1} = I$ pamiętaj o minusach!

Rząd macierzy: $rzA = 0 \iff$ macierz zerowa; $rzA = r \iff$ najwyższy minor

własności rzędu macierzy: (przekształcenia elementarne) 1) przestawimy 2 wiersze/kolumny 2) pomnożymy wiersz/kol przez stałą 3) Dodamy do w/k inne w/k pomnożone przez stałą 4) skreślimy w/k złożoną z zer

Układ Cramera: liczba niewiadomych = liczba równań | Tw. Cramera $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$, $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$, ... $x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$, gdzie i - kolumna to wyrazy wolne

$A\cdot X = B\ /\cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$ po przeliczeniu mamy wzory Cramera | Przykład tw. Cramera $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}}{3}$, $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}}{3}$ czyli to co w kółku zmieniamy na wyr. wolne

Tw. Kroneckera-Capellego $rzA = rzU = r$ gdzie np. $\begin{cases}x-y=5\\3x+y=1\\x+5y=2\end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix}1&-1\\3&1\\1&5\end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix}1&-1&5\\3&1&1\\1&5&2\end{bmatrix}$

minusy w macierzy odwrotnej? $A^D = \begin{bmatrix}\square&-\square\\-\square&\square\end{bmatrix}_{2\times 2}$ $A_D = \begin{bmatrix}\square&-\square&\square\\-\square&\square&-\square\\\square&-\square&\square\end{bmatrix}_{3\times 3}$ liczby w $\square$ są zawsze dodatnie $|2| = 2$, $|-2| = 2$

wektory - dł. odcinka AB $|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, $A = (x_1,y_1,z_1)$ $B = (x_2,y_2,z_2)$ | wektor zaczepiony ozn. $\vec{AB}$ | współrzędne wektora $\vec{AB}$: $\vec{AB} = [x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1]$ | wektor swobodny każdy wektor zaczepiony równy $\vec{AB}$

Działania na wektorach swobodnych:
1) $\vec a + \vec b = [a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z]$
2) $\lambda + \vec a = [\lambda\cdot a_x, \lambda\cdot a_y, \lambda\cdot a_z]$
3) $-\vec a = [-a_x, -a_y, -a_z]$
4) $\vec a = \vec b = [a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z]$
5) $\vec a \parallel \vec b = [\exists\lambda\in R\setminus\{0\}$ $\vec a = \lambda\cdot\vec b$

wersor - $\vec a^w$ (wektor jednostkowy, ma dł. 1) zgodnie równoległy z $\vec a$. $\vec a^w = [\frac{a_x}{|\vec a|}, \frac{a_y}{|\vec a|}, \frac{a_z}{|\vec a|}]$, $|\vec a| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

$\vec a = [a_x, a_y, a_z] \iff \vec a = \vec{a_x} + \vec{a_y} + \vec{a_z}$ | iloczyn skalarny $\vec a\circ\vec b = \begin{cases}0, & \vec a = 0 \vee \vec b = 0\\ |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\sphericalangle(\vec a,\vec b), & \vec a\ne\vec 0 \wedge \vec b\ne\vec 0\end{cases}$, gdzie $\cos\sphericalangle(\vec a,\vec b) = \frac{\vec a\circ\vec b}{|\vec a|\circ|\vec b|}$

własności iloczynu skalarnego:
1) $\vec a\circ\vec a = |\vec a|^2$
2) $\vec a\circ\vec b = \vec b\circ\vec a$
3) $(\lambda\vec a)\vec b = \vec a\circ(\lambda\vec b) = \lambda\cdot(\vec a\circ\vec b)$
4) $\vec a\circ(\vec b+\vec c) = (\vec a\circ\vec b) + (\vec a\circ\vec c)$

iloczyn skalarny we współczynnikach: $\vec a\circ\vec b = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$

$\vec a\perp\vec b \iff \vec a\circ\vec b = 0$ warunek prostopadłości

iloczyn wektorowy $\vec a\times\vec b = \vec c$ taki, że jeżeli $\vec a = 0 \vee \vec b = 0 \vee \vec a\parallel\vec b$ to $\vec c = \vec 0$; jeżeli $\vec a, \vec b\ne 0$, $\vec a\nparallel\vec b$ to $|\vec c| = |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\sphericalangle(\vec a,\vec b)$ dł. iloczynu wektorowego

$\vec c\perp\vec a$, $\vec c\perp\vec b$ - kierunek iloczynu wektorowego | $P_{\square} = |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\sphericalangle(\vec a,\vec b) = |\vec a\times\vec b|$ | $P_\Delta = \frac12\cdot|\vec a\times\vec b|$

$(\vec a, \vec b, \vec c)$ jest zorientowana z wersorami $(\vec i, \vec j, \vec k)$ - zwrot iloczynu wektorowego

własności iloczynu wektorowego:
1) $(\lambda\cdot\vec a)\times\vec b = \vec a\times(\lambda\cdot\vec b) = \lambda\cdot(\vec a\times\vec b)$
2) $\vec a\times\vec b = -(\vec b\cdot\vec a)$
3) $\vec a\times(\vec b+\vec c) = (\vec a\times\vec b) + (\vec a\times\vec c)$*

iloczyn wektorowy we współrzędnych: $\omega = \vec a\times\vec b = \left[\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\right]$

3)* $\vec a\times\vec b = \begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix} = \vec i\cdot\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix} - \vec j\cdot\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix} + \vec k\cdot\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix} = \omega$

iloczyn mieszany 3 wektorów $\vec a\circ(\vec b\times\vec c)$

wyrażenie iloczynu macierzowego we współczynnikach $\vec a = [a_x, a_y, a_z]$, $\vec b = [b_x, b_y, b_z]$, $\vec c = [c_x, c_y, c_z]$ $[\vec a, \vec b, \vec c] = \begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$

własności iloczynu macierzowego:
1) $[\vec a+\vec r, \vec b, \vec c] = [\vec a, \vec b, \vec c] + [\vec r, \vec b, \vec c]$
2) $[\vec a, \vec b, \vec c] = -[\vec b, \vec a, \vec c]$
3) $[\vec a, \vec b, \vec c] = [\vec b, \vec c, \vec a]$
4) $[\alpha\vec a, \vec b, \vec c] = \alpha\cdot[\vec a, \vec b, \vec c]$
5) $\vec a, \vec b, \vec c$ leżą na 1 pł. $\iff [\vec a, \vec b, \vec c] = 0$

równanie parametryczne prostej $\begin{cases}x = x_0 + t\cdot v_x\\y = y_0 + t\cdot v_y\\z = z_0 + t\cdot v_z\end{cases}$, $t\in R$ | równanie par. prostej w postaci wektorowej $\vec r = \vec{r_0} + t\cdot\vec v$

równanie kierunkowe prostej $\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$ | równanie par. płaszczyzny w postaci wektorowej $\vec r = \vec{r_0} + t\cdot\vec u + s\cdot\vec v$ | równanie parametryczne płaszczyzny $\begin{cases}x = x_0 + u_xt + v_xs\\y = y_0 + u_yt + v_ys\\z = z_0 + u_zt + v_zs\end{cases}$ $t,s\in R$ | równanie ogólne płaszczyzny $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

wzajemne położenie dwóch płaszczyzn: $\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $n_1 = [A_1, B_1, C_1]\perp\Pi_1$; $\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $n_2 = [A_2, B_2, C_2]\perp\Pi_2$
1) są równoległe $\iff \vec{n_1}\parallel\vec{n_2}$
2) pokrywają się $\iff \vec{n_1}\parallel\vec{n_2}$ i dowolny punkt z $\Pi_1\in\Pi_2$
3) przecinają się $\iff \vec{n_1}\ne\vec{n_2}$

równanie krawędziowe prostej $\begin{cases}A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\\A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\end{cases}$, $rz\begin{bmatrix}A_1&B_1&C_1&D_1\\A_2&B_2&C_2&D_2\end{bmatrix} = 2$

granica właściwa ciągu: $\lim_{n\to\infty} a_n = g \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ |a_n-g|<\varepsilon$ (prawie wszystkie)

wzory: jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ to:
1) $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n) = a\pm b$
2) $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = a\cdot b$
3) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
4) $\lim_{n\to\infty} a_n^p = a^p$, $p\in Z$
5) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$, $p\in N$

arytmetyka granic niewłaściwych:
1) $+\infty + a = +\infty$, $-\infty < a \le +\infty$
2) $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, $-\infty < a < +\infty$
3) $a^{+\infty} = 0$, $0\le a < 1$
4) $a^{+\infty} = +\infty$ $1 < a \le +\infty$
5) $(+\infty)^b = 0$, $-\infty\le b < 0$
6) $(+\infty)^b = +\infty$, $0 < b \le +\infty$
7) $a\cdot(+\infty) = +\infty$, $0 < a \le +\infty$
8) $a\cdot(+\infty) = -\infty$, $-\infty\le a < 0$
9) $\frac{a}{0^+} = +\infty$, $0 < a \le +\infty$

symbole nieoznaczone: $[\infty-\infty]$ $[\frac{0}{0}]$ $[0\cdot\infty]$ $[\frac{\infty}{\infty}]$ $[1^\infty]$ $[\infty^0]$ $[0^0]$

Tw o 3 ciągach: $\exists n_0\ \forall n>n_0: c_n\le a_n\le b_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = g$

ciągi specjalne i ich granice:
1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$, $a>0$
2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$
3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$, $a_n>0$, $n\in N$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a>0$
4) $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases}+\infty, & a>1\\1, & a=1\\0, & -1<a<1\\\text{nie istn.} & a\le -1\end{cases}$
5) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$
6) →

6) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$, $\lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$

iniekcja - odwzorowanie różnowartościowe

surekcja - odwzorowanie zbioru X na zbiór Y

bijekcja - odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne

funkcja złożona: $f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))$

funkcje cyklometryczne - odwrotne od f. trygonometrycznych

$\arcsin(\sin x)=x,\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $\quad$ $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)=x,\ x\in\mathbb{R}$ $\quad$ $\sin(\arcsin x)=x,\ x\in[-1,1]$

$\arccos(\cos x)=x,\ x\in[0,\pi]$ $\quad$ $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}x)=x,\ x\in\mathbb{R}$

funkcja odwrotna f^{-1} - rozwiązujemy $f(x)=y$ względem x i to $=f^{-1}$

funkcja ma granicę w x_0 $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$

Granice specjalne:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
2) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$
4) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$
5) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$
6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
7) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$
8) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$
9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
10) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

* x można zastąpić $f(x)$ taką, że $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$

sieczna - iloraz różnicowy $\mathrm{tg}\alpha=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (prosta AB tworzy kąt α)

równanie stycznej $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

równanie prostej normalnej: $y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$, $f'(x_0)\neq 0 \lor x=x_0,\ f'(x)=0$

pochodna f. złożonej: $(g\circ h)'(x)=g'(u_0)\cdot h'(x_0)=g'(h(x_0))\cdot h'(x_0)$

pochodna f. odwrotnej: $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

Podstawowe wzory na pochodne:

1) $(C)'=0$ 2) $(x^n)'=n\cdot x^{n-1},\ n\in\mathbb{N}$ 3) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 4) $(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}$ 5) $(\sin x)'=\cos x$ 6) $(\cos x)'=-\sin x$ 7) $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2x}$ 8) $(\mathrm{ctg}x)'=\frac{-1}{\sin^2x}$ 9) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$ 10) $(e^x)'=e^x$

11) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$ 12) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 13) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 14) $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ 15) $(\mathrm{arctg})'=\frac{1}{1+x^2}$ 16) $(\mathrm{arcctg})'=\frac{-1}{1+x^2}$

pochodna f. złożonej $(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ $\Rightarrow f'(x)=f(x)\cdot(\ln(f(x)))'$ pochodna logarytmiczna) $\Rightarrow f(x)=[h(x)]^{g(x)}\Rightarrow f(x)=e^{\ln f(x)}$

reguła de l'Hospitala $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\ \underline{\underline{[\frac{0}{0}]\lor[\frac{\infty}{\infty}]}}\ \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Tw. Lagrange'a: Jeżeli f ciągła w $\langle a,b\rangle$ i posiada pochodną $f'(x)=x\in(a,b)$ to: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gdzie $c\in(a,b)$

funkcja jest stała $\Leftrightarrow f'(x)=0,\ x\in(a,b)$

warunek konieczny ekstremum: jeżeli f ma w x_0 pochodną i ekstremum, to $f'(x)=0$

warunek wystarczający istnienia ekstremum: funkcja posiada pochodną $f'(x)$ w sąsiedztwie $S(x_0,\delta)$ i jest ciągła w x_0 to:

1) posiada minimum ($f'<0$ −, $f'>0$ +) 2) posiada maksimum ($f'>0$ +, $f'<0$ −)

funkcja wklęsła | funkcja wypukła | (zawsze patrz od osi OX)

punkt przegięcia - jeżeli f ma w x_0 pochodną i punkt przegięcia, to $f''(x)=0$ (warunek konieczny punktu przegięcia, przejście zmiennej przez x_0)

warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia $\Rightarrow$ f posiada $f''(x)$ w otoczeniu $O(x_0,\delta)$ to $f''(x)=0$ i zmienia znak w x_0

asymptota pionowa: $x=x_0$, gdy $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\pm\infty$ (lewo) oraz/lub $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\pm\infty$ (prawo) obustronna lub jednostronna)

asymptota pozioma: $y=C$, gdy $\lim_{x\to-\infty}f(x)=C$ (lewo) (oraz/lub) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=C$ (prawo)

asymptota ukośna: $y=ax+b$ gdy $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax+b)=0$

$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)$

* ta asymptota również może być lewo/prawostronna lub obustronna, dlatego sprawdzamy w $+\infty$ oraz $-\infty$.

różniczka funkcji $df_{x_0}:\mathbb{R}\to h\to f'(x_0)\cdot h\in\mathbb{R}$

całka nieoznaczona f. $\int f(x)dx=\{F(x)+C\}\overset{ozn.}{=}F(x)+C$, $F'(x)=f(x)+C$

Podstawowe wzory:

1) $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1$
2) $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$
3) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$
4) $\int\cos x\,dx=\sin x+C$
5) $\int\frac{1}{\cos^2x}dx=\mathrm{tg}x+C$
6) $\int\frac{1}{\sin^2x}dx=-\mathrm{ctg}x+C$
7) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
8) $\int e^x dx=e^x+C$
9) $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\mathrm{arctg}x+C$
10) $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$

wzór na działania na całkach: (mnożenie i dodawanie do siebie) 1) $\int C\cdot f(x)dx=C\cdot\int f(x)dx$ 2) $\int f(x)\pm g(x)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

Całkowanie przez podstawienie: $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int f(t)dt,\ t=g(x)$

Całkowanie przez części: $\int f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)dx$

całkowanie funkcji wymiernych: $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ st P < st Q - f. właściwa; st P > st Q - f. niewłaściwa

ułamki I rodzaju $y=\frac{A}{(x-a)^n},\ A,a\in\mathbb{R}$

ułamki II rodzaju $y=\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$ gdzie $\Delta=p^2-4q$, $\Delta<0$, $B,C,p,q\in\mathbb{R}$

wzór rekurencyjny: $\int\frac{1}{(t^2+1)^n}dt=\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\int\frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}},\ n\geq 2$

całki typu $\int A\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ obliczamy stosując $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$, $ad-bc\neq0$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

ważniejsze całki z niewymiernościami:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$
3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$
4) $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}+C$
5) $\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$
6) $\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\cdot\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

Całki ważniejszych f. trygonometrycznych

1) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$
2) $\int\sin ax\,dx=\frac{-\cos ax}{a}+C$
3) $\int\cos ax\,dx=\frac{\sin ax}{a}+C$
4) $\int\cos x\,dx=\sin x+C$
5) $\int\mathrm{tg}x\,dx=-\ln|\cos x|+C$
6) $\int\mathrm{ctg}x\,dx=\ln|\sin x|+C$
7) $\int\mathrm{tg}^2x\,dx=\mathrm{tg}x-x+C$
8) $\int\mathrm{ctg}^2x\,dx=-\mathrm{ctg}x-x+C$
9) $\int\sin^2x\,dx=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\cdot\sin2x)+C$
10) $\int\cos^2x\,dx=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\cdot\sin2x)+C$
11) $\int\cos^3x\,dx=\sin x-\frac{1}{3}\cdot\sin^3x+C$
12) $\int\cos^4x\,dx=\frac{1}{4}\cdot(x+\sin2x+\frac{1}{2}(x+\frac{\sin4x}{4}))+C$

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ do podstawowych wzorów na całki

suma całkowa (Riemanna) $\sigma(f,P):=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$

całka oznaczona Riemanna w $\langle a,b\rangle$ $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\delta(P)\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ gdzie $\delta(P)$ - średnia podziału P, ξ - pkt pośredni k-tego odc. podziału P

$\int_a^a f(x)dx=0$ $\quad$ $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx,\ a<b$

związek całki oznaczonej z nieoznaczoną: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\overset{ozn}{=}F(x)\Big|_a^b$

całkowanie przez części: $f,g\in C^1(\langle a,b\rangle)$ wtedy: $\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$

obliczanie pól obszarów płaskich (D) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b,\ f(x)\leq y\leq g(x)\}$ $|D|=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$

jeżeli $f(x)\equiv0$ i krzywa $y=g(x)$ jest opisana $x=x(t),\ y=y(b),\ t\in[t_1,t_2]$, funkcja $y\in C([t_1,t_2])$ natomiast $x\in C^1([t_1,t_2])$ to pole zbioru D ma wzór: $D=\int_{t_1}^{t_2}|y(t)\cdot x'(t)|dt$

układ biegunowy - jeśli D ogranicza krzywa $r=r(\varphi)$ $\varphi\in\langle\alpha,\beta\rangle$, $\beta-\alpha\leq2\pi$ i $\varphi=\alpha$ i $\varphi=\beta$ (półproste) to: $|D|=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r(\varphi)]^2d\varphi$

$y=\sqrt{R^2-x^2}$ - równanie półokręgu

dł. łuku krzywej $K\subset\mathbb{R}^3$ $d=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+(y'(t))^2+(z(t))^2}\,dt$

równanie parametryczne okręgu: $\begin{cases}\frac{x}{R}=\cos t\\ \frac{y}{R}=\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=R\cdot\cos t\\ y=R\cdot\sin t,\ t\in\langle0,2\pi\rangle\end{cases}$

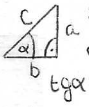
dł. łuku krzywej K na pł. 0XY, gdzie $z=0$, więc wzór to: $d=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$

Licząc ze wzoru na dł. łuku na pł. otrzymujemy również wzór $d=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

objętość bryły obrotowej $|V|=\pi\cdot\int_a^b(f(x))^2dx$

pole powierzchni obrotowej $|S|=2\pi\cdot\int_a^b|f(x)|\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

całki niewłaściwe I rodzaju 1) $\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{T\to+\infty}\int_a^T f(x)dx$ 2) $\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{T\to-\infty}\int_T^a f(x)dx$



$\sin\alpha=\frac{a}{c}$ $\quad\cos\alpha=\frac{b}{c}$ $\quad\mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b}$ $\quad\mathrm{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\quad$ 3) $\sin2x=2\sin x\cos x$ $\quad$ 5) $\mathrm{tg}2x=\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad$ 4) $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$

Kofunkcja (np $\sin\to\cos$, $\cos\to\sin$, $\mathrm{tg}\to\mathrm{ctg}$ i $\mathrm{ctg}\to\mathrm{tg}$) zachodzi przy nieparzystych wielokrotnościach $\measuredangle\ 90°$