



Akademia Górnictwo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca dyplomowa

**Reprezentacja i przetwarzanie danych
w przestrzeni funkcji sferycznych,
zastosowanie w algorytmach uczenia
maszynowego**

Kamil Bartocha

Kierunek: Matematyka
Specjalność: Matematyka obliczeniowa
i komputerowa

Nr albumu: 296032

Promotorzy:
dr Andrzej Kałuża,
dr inż. Tomasz Pięciak



Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2022

Oświadczenie autora

Ja, niżej podpisany Kamil Bartocha oświadczam, że praca ta została napisana samodzielnie i wykorzystywała (poza zdobytą na studiach wiedzą) jedynie wyniki prac zamieszczonych w spisie literatury.

.....
(Podpis autora)

Oświadczenie promotora

Oświadczam, że praca spełnia wymogi stawiane pracom magisterskim.

.....
(Podpis promotorra)

Spis treści

Streszczenie	2
Abstract	3
Wstęp	4
Rozdział 1. Elementy teorii przestrzeni sferycznej i grupy obrotów	6
1.1. Wprowadzenie do teorii przestrzeni Hilberta	6
1.2. Obroty w przestrzeni sferycznej	7
1.2.1. Wprowadzenie do teorii obrotów w przestrzeniach sferycznych	7
1.2.2. Parametryzacja i całkowanie w przestrzeni \mathbb{S}^2 i $SO(3)$	12
1.2.3. Iloczyn skalarny i korelacje sygnałów sferycznych	13
1.2.4. Rotacje sygnałów i korelacja w grupie $SO(3)$	14
1.2.5. Równoważność warstw	15
1.3. Przestrzeń harmonik sferycznych	15
1.4. Macierze d-Wignera oraz D-Wignera	18
Rozdział 2. Uogólniony algorytm szybkiej transformacji Fouriera	20
Rozdział 3. Algorytm i jego analiza	25
3.1. Algorytm obliczający korelację sferyczną	25
3.2. Oszacowanie błędu aproksymacji	26
Konkluzja	32
Dodatek A.	33
A.1. Konwolucyjne (splotowe) sieci neuronowe	33
A.2. Definicje i Twierdzenia	35
Bibliografia	36

Streszczenie

Praca zawiera analizę teoretyczną nowych sposobów reprezentacji i ekstrakcji cech z danych w przestrzeni \mathbb{S}^2 za pomocą sferycznych sieci konwolucyjnych wykorzystując grupę obrotów $SO(3)$. W pracy przeprowadzona została analiza teoretyczna pozwalająca obliczyć korelację sygnałów, dzięki której, możliwa jest implementacja sferycznej sieci splotowej. Aby tego dokonać wprowadzona została teoria przestrzeni sferycznej \mathbb{S}^2 oraz grupa obrotów $SO(3)$, w których za pomocą szybkiej transformaty Fouriera, harmonik sferycznych oraz funkcji D-Wignera możliwe jest zdefiniowanie oszczędnego numerycznie algorytmu. Dodatkowo praca zawiera analizę jakie warunki muszą spełniać funkcje, na których chcemy wykonać korelację oraz oszacowanie błędu aproksymacji. Analizę algorytmu uzupełniono teoretycznymi i numerycznymi przykładami badającymi zbieżność błędu.

Słowa kluczowe

przestrzeń sferyczna \mathbb{S}^2 , grupa obrotów $SO(3)$, harmoniki sferyczne, sferyczna neuronowa sieć konwolucyjna, macierze D-Wignera.

Abstract

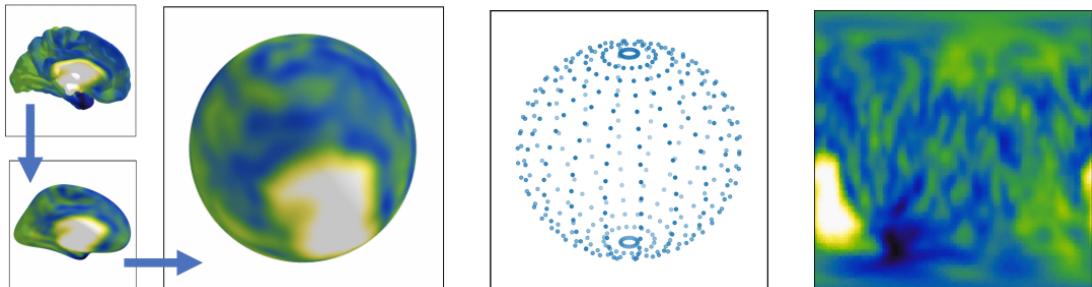
The thesis contains a theoretical analysis of new representation forms and extraction procedures of features from data defined over \mathbb{S}^2 space by means of spherical convolutional networks (SCNN) using the rotation group $SO(3)$. This work provides the theoretical analysis of the correlation function between the signals defined over \mathbb{S}^2 , and thus, enables us to implement a SCNN being a natural extension of well-grounded CNN defined over \mathbb{R}^n . To this end, we first introduce the theory behind the spherical space \mathbb{S}^2 and the group of turns $SO(3)$, and then move toward the concepts of the fast Fourier transform, spherical harmonics and the D-Wigner function, while enduring the algorithm to be numerically economical. Furthermore, the present work provides a comprehensive theoretical analysis of fundamental conditions that must be met by the function used for correlation analysis and the approximation error estimation. Finally yet importantly, the algorithm analysis provided in this thesis is supplemented with theoretical and numerical examples presenting the analysis of error convergence.

Keywords

2-sphere, 3D rotation group $SO(3)$, spherical harmonics, spherical convolutional neural network, D-Wigner matrix.

Wstęp

Algorytm sferycznej konwolucyjnej sieci neuronowej SCNN(ang. spherical convolutional neural network) pozwala przetwarzać obrazy za pomocą technik uczenia głębo-kiego. Jest on ciekawym i efektywnym rozwinięciem teorii sieci konwolucyjnych CNN w przestrzeniach \mathbb{R}^n . O ile klasyczne sieci konwolucyjne zdefiniowane są do przetwarzania danych na siatce kartezjańskiej, to sferyczne sieci splotowe pozwalają przetwarzać wzorce w danych, których naturalną przestrzenią jest sfera. Przykładem użycia takich danych są badania medyczne lub przyrodnicze takie jak etykietowanie bruzd w ludzkiej korze przedcołowej [17], badanie metodą rezonansu magnetycznego (MRI)[18], dopasowanie sferycznej powierzchni korowej mózgu [19] czy też modelowanie molekularne [21]. W pracy nacisk położono na teoretyczne aspekty korelacji sferycznej oraz zbadano jakiej klasy funkcje mogą być w niej stosowane. Przykład graficzny demonstrujący dzia-łanie sferycznej sieci konwolucyjnej do modelowania kory mózgowej możemy zobaczyć na Rysunku 1.



Rysunek 1. [20] Modelowanie korowe z użyciem SCNN. Po lewej mapowanie kory na sferę, następnie próbkowanie, a po prawej mapowanie powierzchni sfery na siatkę dwuwymiarową.

W niniejszej pracy, opartej w głównej mierze na artykule [1], zajmiemy się udowodnieniem jakiej klasy funkcje mogą zostać użyte w algorytmie wykorzystującym uogólnioną szybką transformację Fouriera następującej postaci

$$f(R) \approx \sum_{l=0}^b (2l+1) \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l \hat{f}_{mn}^l D_{mn}^l(R),$$

gdzie $\frac{1}{b} \in \mathbb{N}$ oznacza zagęszczenie punktów, $l \in \mathbb{N}$ oraz $m, n \in \{-l, \dots, l\}$, \hat{f}_{mn}^l to współczynniki Fouriera, a $D_{mn}^l(R)$ oznaczają Macierze D-Wignera dla rotacji R w grupie obrotów $SO(3)$. Następnie oszacujemy z góry błąd aproksymacji algorytmu w normie $L^2(SO(3))$, co zostanie uzupełnione przykładami teoretycznymi i numerycznym pozwalającymi intuicyjnie zaprezentować osiągnięte wyniki.

W rozdziale pierwszym wprowadzono teorię przestrzeni sferycznej \mathbb{S}^2 , w której prowadzone są dalsze rozważania. Przedstawiono również grupę obrotów $SO(3)$ teorię harmonik sferycznych oraz funkcje D-Wignera.

Kolejny rozdział traktuje o uogólnionej szybkiej transformacji Fouriera, która umożliwia efektywne obliczenie współczynników Fouriera.

W rozdziale trzecim przedstawiono algorytm obliczający korelację sferyczną prowadzący nas do implementacji sferycznej konwolucyjnej sieci neuronowej. Udowodniono Twierdzenie 3.1 określające warunek

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1)^{\frac{5}{2}} \sup_{|m|, |n| \leq l} |\hat{f}_{mn}^l| < +\infty, \quad (1)$$

który musi spełniać funkcja f aby można było wykonać na niej korelację sferyczną tak aby błąd aproksymacji zbiegał do 0. Udowodniono również Twierdzenie 3.2 traktujące o tym, że dla funkcji $f : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}$ oraz dla parametru $b \in \mathbb{N}$ błąd aproksymacji jest ograniczony i zachodzi następujące szacowanie

$$\|\pi_b f - f\|_{L^2(SO(3))} \leq \sum_{l=b+1}^{\infty} \sup_{|m|, |n| \leq l} (2l+1)^{\frac{5}{2}} |\hat{f}_{mn}^l|, \quad (2)$$

co jest głównym wynikiem pracy. Rezultaty zostały poparte samodzielnymi eksperymentami numerycznymi w przykładach 3.3 i 3.4.

W pracy zawarty jest również Dodatek A (Rozdział 4), gdzie zawarte zostały definicje Twierdzenia wykorzystane przy pisaniu pracy oraz wstęp do teorii sztucznych sieci neuronowych.

Rozdział 1

Elementy teorii przestrzeni sferycznej i grupy obrotów

1.1. Wprowadzenie do teorii przestrzeni Hilberta

Wprowadźmy podstawowe definicje.

Definicja 1.1. Iloczynem skalarnym nazywamy odwzorowanie $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, które jest liniowe ze względu na pierwszą zmienną, skośnie symetryczne oraz dodatnio określone.

Definicja 1.2. Przestrzeń unitarna nad ciałem \mathbb{K} to para $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie V jest przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} , a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iloczynem skalarnym. Będziemy rozważać przestrzeń określone nad ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R} oraz liczb zespolonych \mathbb{C} .

Następnie możemy zdefiniować przestrzeń Hilberta, która będzie podstawą naszych dalszych rozważań.

Definicja 1.3. Przestrzeń Hilberta $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ to przestrzeń unitarna, która jest zupełna względem normy wyznaczonej przez jej iloczyn skalarny, czyli w której wszystkie ciągi fundamentalne mają granice.

Kolejnym ważnym dla nas narzędziem będzie operator, o którym możemy myśleć jak o mapowaniu, które otrzymując na wejściu sygnał generuje sygnał po odpowiednim przekształceniu. Warto wskazać konkretne przykłady operatorów takie jak pochodna w rachunku całkowym, lub transformata Fouriera. Z uwagi na naturę badanego problemu będziemy rozważać tylko operatory liniowe i ograniczone.

Definicja 1.4 ([2]). Operatorem $\mathcal{L} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ nazywamy odwzorowanie liniowe działające w przestrzeni Hilberta, które mapuje wejściową funkcję lub sygnał f na odpowiadającego

$$g = \mathcal{L}f.$$

1.2. Obroty w przestrzeni sferycznej

Poniższy podrozdział opiera się na rozdziale nr 7 książki [2].

1.2.1. Wprowadzenie do teorii obrotów w przestrzeniach sferycznych

Przestrzeń sferyczną \mathbb{S}^2 będziemy traktować jako przestrzeń osadzoną w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa \mathbb{R}^3 . Każdy jej punkt może być reprezentowany przez wektor

$$\mathbf{u} \equiv (u_x, u_y, u_z)' \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie współczynniki u_x, u_y i u_z to współrzędne na odpowiadających osiach x, y oraz z . Dla dowolnego wektora rozważamy normę Euklidesową.

Definicja 1.5. Normą Euklidesową nazywamy odwzorowanie $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{u} \rightarrow [0, +\infty)$, wyrażone wzorem

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

Prowadzi nas to do definicji sfery.

Definicja 1.6. Sferę jednostkową \mathbb{S}^2 definiujemy jako zbiór punktów $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ o normie równej 1

$$\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{u}\| = 1\}.$$

Dla sfery \mathbb{S}^2 zdefiniujmy sygnały sferyczne.

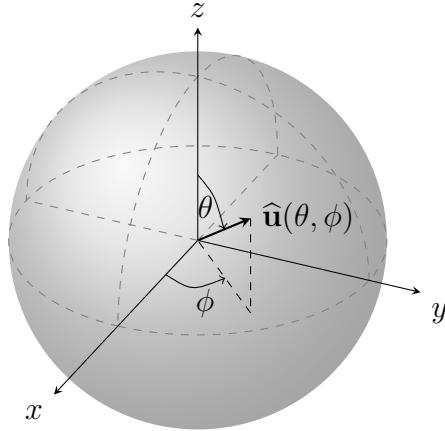
Definicja 1.7. Sygnałem sferycznym nazywamy sferyczny obraz reprezentowany przez ciągłą funkcję $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^K$, gdzie $K \in \mathbb{N}$ oznacza liczbę kanałów sieci konwolucyjnej.

Sygnały będą dla nas kluczowe aby wprowadzić algorytm sieci sferycznej, gdzie liczba kanałów K (wymiar przestrzeni wyjściowej) dobrze pasuje do teorii konwolucyjnych sieci neuronowych. Algorytm konwolucyjnej sieci neuronowej, zwanej inaczej splotową jest w stanie wykryć w sygnale lokalne wzory niezależnie od ich lokalizacji na obrazie. Wprowadzenie do teorii sieci neuronowych zaprezentowane dokładniej zostało w Dodatku A.

Zauważmy, że sfera \mathbb{S}^2 jest rozmaitością o dwóch wymiarach, która może być opisana za pomocą dwóch parametrów. Wektory reprezentujące punkty w (przestrzeni) \mathbb{S}^2 są wektorami jednostkowymi co oznaczamy przez $\hat{\mathbf{u}}$. W przypadku gdy wektor \mathbf{u} nie jest jednostkowy przeprowadzamy proces normalizacji ($\bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$). Interpretujemy $\hat{\mathbf{u}}$ jako kierunek, natomiast $\|\mathbf{u}\|$ jako długość. Do parametryzacji użyjemy współrzędnych sferycznych, dla każdego punktu z \mathbb{S}^2 przypisujemy dwa kąty $\theta \in [0, \pi]$ oznaczający szerokość geograficzną mierzoną względem dodatniej osi z oraz $\phi \in [0, 2\pi]$ oznaczający długość geograficzną względem dodatniej osi x . Współrzędne sferyczne dla punktu $\hat{\mathbf{u}}(\theta, \phi)$ reprezentujemy w postaci

$$\hat{\mathbf{u}} \equiv \hat{\mathbf{u}}(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)',$$

co możemy zobaczyć na Rysunku 1.1.



Rysunek 1.1. Reprezentacja punktu $\hat{\mathbf{u}}(\theta, \phi)$ w układzie współrzędnych sferycznych

Iloczyn skalarny pomiędzy dwoma punktami $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{S}^2$ takimi, że

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}} &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)', \\ \hat{\mathbf{v}} &= (\sin \delta \cos \varphi, \sin \delta \sin \varphi, \cos \delta)',\end{aligned}$$

oznaczamy przez $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$ i określa on odległość kątową Δ pomiędzy punktami oraz wynosi

$$\cos \Delta = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \sin \theta \sin \delta \cos (\phi - \varphi) + \cos \theta \cos \delta.$$

W literaturze możemy zaobserwować różne konwencje obrotów na sferze \mathbb{S}^2 [2]. Pierwsza oś może być użyta ponownie co daje $2 \times 2 \times 3$ możliwości. Do każdej z nich możemy stosować lewostronną i prawostronną konwencję obrotu dzięki czemu otrzymujemy ostateczną liczbę konwencji wynoszącą 24. Orientację obiektu w trzech wymiarach możemy określić w sposób względny, najlepiej za pomocą standardowych wektorów bazowych

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_x &= (1, 0, 0)', \\ \hat{\mathbf{u}}_y &= (0, 1, 0)', \\ \hat{\mathbf{u}}_z &= (0, 0, 1)',\end{aligned}$$

następnie zakładając, że obiekt ma początkową orientację, możemy dokonać jego translacji(przemieszczenia) za pomocą wektorów bazowych. Oznaczmy współrzędne po translacji jako $\hat{\mathbf{v}}_x, \hat{\mathbf{v}}_y, \hat{\mathbf{v}}_z$, wtedy możemy przemieścić obiekt za pomocą macierzy obrotu.

Definicja 1.8. Macierzą obrotu \mathbf{R} nazywamy macierz przemieszczającą $(\hat{\mathbf{u}}_x, \hat{\mathbf{u}}_y, \hat{\mathbf{u}}_z)$ w $(\hat{\mathbf{v}}_x, \hat{\mathbf{v}}_y, \hat{\mathbf{v}}_z)$

$$(\hat{\mathbf{v}}_x, \hat{\mathbf{v}}_y, \hat{\mathbf{v}}_z) = \mathbf{R} \times (\hat{\mathbf{u}}_x, \hat{\mathbf{u}}_y, \hat{\mathbf{u}}_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Grupę rotacji w przestrzeni trójwymiarowej nazywamy specjalną grupą ortogonalną i oznaczamy $SO(3)$. Rotacje są reprezentowane przez macierze wymiaru 3×3 , które zachowują dystans ($\|\mathbf{Rx}\| = \|\mathbf{x}\|$) oraz orientację ($\det(\mathbf{R}) = +1$).

Dowolna zmianę orientacji w grupie $SO(3)$ może być reprezentowana jako pojedyncza rotacja wokół odpowiednio dobranego kierunku. Oznaczmy wektor jednostkowy $\hat{\mathbf{w}} = (w_x, w_y, w_z)$ oraz kąt rotacji $\varphi \in [0, 2\pi)$, który przekształca początkowy wektor \mathbf{u} w wektor \mathbf{v} . Rotację reprezentuje macierz transformacji $\mathbf{R}_\varphi^{(\hat{\mathbf{w}})}$ co możemy zapisać jako

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}_\varphi^{(\hat{\mathbf{w}})} \mathbf{u}.$$

Niech \mathbf{I}_3 oznacza macierz identyczności o wymiarze 3×3 , oraz niech

$$\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}' = \begin{pmatrix} w_x \\ w_z \\ w_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x^2 & w_x w_y & w_x w_z \\ w_y w_x & w_y^2 & w_y w_z \\ w_z w_x & w_z w_y & w_z^2 \end{pmatrix},$$

oraz przez $\hat{\mathbf{w}}^\times$ oznaczmy macierz

$$\hat{\mathbf{w}}^\times = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\hat{\mathbf{w}}^\times \hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{w}}' \hat{\mathbf{w}}^\times = 0$, oraz $\|\hat{\mathbf{w}}\| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = 1$. Dzięki tym własnościom możemy wprowadzić definicję macierzy rotacji.

Definicja 1.9. Macierz rotacji $\mathbf{R}_\varphi^{(\hat{\mathbf{w}})}$ zadana jest przez

$$\mathbf{R}_\varphi^{(\hat{\mathbf{w}})} = (1 - \cos \varphi) \hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}' + \cos \varphi \mathbf{I}_3 + \sin \varphi \hat{\mathbf{w}}^\times. \quad (1.1)$$

Rotacja jest odwracalną operacją, na której operację odwrotną wykonuje się przez negację kąta obrotu

$$(\mathbf{R}_\varphi^{(\hat{\mathbf{w}})})^{-1} = \mathbf{R}_{-\varphi}^{(\hat{\mathbf{w}})}.$$

Rotacje mogą z powodzeniem być stosowane ciągiem względem kolejnych osi oraz kątów. Jest to tzw. fundamentalna własność $SO(3)[3]$. Przyjmując rotacje dla kątów $(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1)$ i osi $\hat{\mathbf{w}}_3, \hat{\mathbf{w}}_2, \hat{\mathbf{w}}_1$ przez ogólną macierz rotacji rozumiemy

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\varphi_3}^{\hat{\mathbf{w}}_3} \mathbf{R}_{\varphi_2}^{\hat{\mathbf{w}}_2} \mathbf{R}_{\varphi_1}^{\hat{\mathbf{w}}_1},$$

gdzie kolejność stosowania rotacji to od lewej do prawej.

Dla powyższej rotacji \mathbf{R} rotacją odwrotną jest

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} &= (\mathbf{R}_{\varphi_3}^{\hat{\mathbf{w}}_3} \mathbf{R}_{\varphi_2}^{\hat{\mathbf{w}}_2} \mathbf{R}_{\varphi_1}^{\hat{\mathbf{w}}_1})^{-1} \\ &= (\mathbf{R}_{\varphi_1}^{\hat{\mathbf{w}}_1})^{-1} (\mathbf{R}_{\varphi_2}^{\hat{\mathbf{w}}_2})^{-1} (\mathbf{R}_{\varphi_3}^{\hat{\mathbf{w}}_3})^{-1} \\ &= \mathbf{R}_{-\varphi_1}^{\hat{\mathbf{w}}_1} \mathbf{R}_{-\varphi_2}^{\hat{\mathbf{w}}_2} \mathbf{R}_{-\varphi_3}^{\hat{\mathbf{w}}_3}. \end{aligned}$$

W celu uzyskania nowej lokalizacji obiektu wokół pojedynczego kierunku $\hat{\mathbf{w}}$, możemy użyć innego podejścia, polega ono na użyciu trzech odpowiednio dobranych rotacji względem osi x, y oraz z w konkretnie zdefiniowanym porządku. Ten sposób znany jest jako Twierdzenie Eulera o rotacjach (A.5, Dodatek A).

Określając rotację z Definicji 1.9 dla trzech głównych osi, możemy zapisać $\hat{\mathbf{u}}_x = (1, 0, 0)'$

$$\mathbf{R}_{\varphi_x}^{(x)} \triangleq \mathbf{R}_{\varphi_x}^{(\hat{\mathbf{u}}_x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

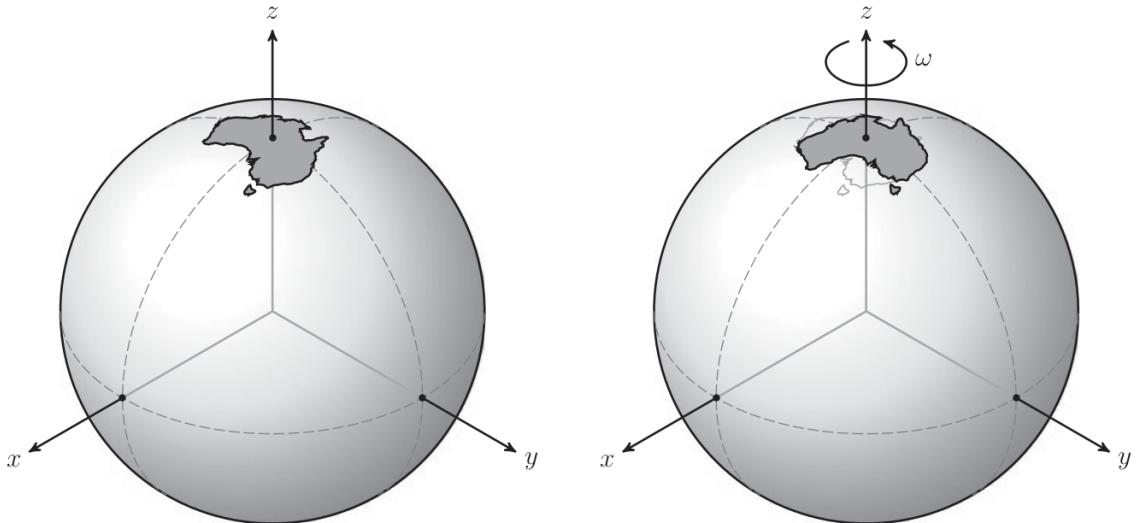
gdzie widzimy, że x dla wektora \mathbf{u} pozostaje niezmieniony podczas rotacji. Analogicznie dla $\hat{\mathbf{u}}_y = (0, 1, 0)'$ otrzymujemy

$$\mathbf{R}_{\varphi_y}^{(y)} \triangleq \mathbf{R}_{\varphi_y}^{(\hat{\mathbf{u}}_y)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

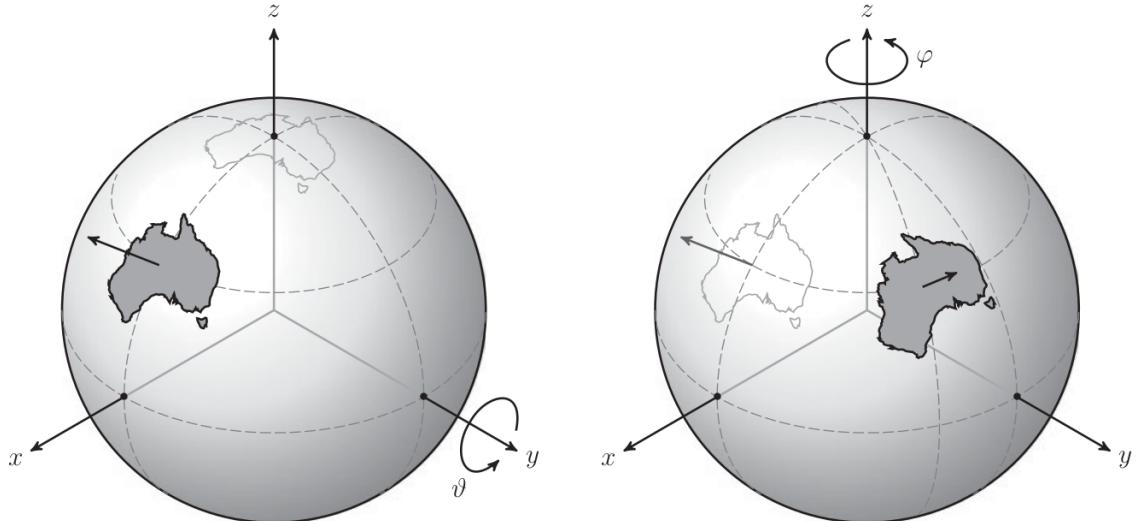
w tym przypadku y wektora \mathbf{u} pozostaje niezmieniony, zaś trzecia rotacja $\hat{\mathbf{u}}_z = (0, 0, 1)'$ zadane jest przez

$$\mathbf{R}_{\varphi_z}^{(z)} \triangleq \mathbf{R}_{\varphi_z}^{(\hat{\mathbf{u}}_z)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Z uwagi na dużą liczbę kombinacji obrotów wybieramy konkretną, prawostronną konwencję obrotu względem osi zyz z odpowiadającymi rotacjami ($\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\omega \in [0, 2\pi]$). Przykładową rotację w konwencji zyz możemy zaobserwować na przykładzie [2].



Rysunek 1.2. [2] Rotacja w konwencji zyz część 1.


 Rysunek 1.3. [2] Rotacja w konwencji zyz część 2.

Na rysunkach 1.2 oraz 1.3 pokazujemy przykładową rotację elementu na sferze w konwencji zyz . Zaczynając od oryginalnego położenia na rysunku 2.1[2], obracamy obiekt o kąt ω wzdłuż osi z , po którym wykonujemy rotację o kąt ϑ wzdłuż osi y i kończymy ponownie obracając obiekt wzdłuż osi z , tym razem o kąt φ .

Dla tak zadanej konwencji oznaczmy przez rotację

$$R = \mathbf{R}_{\varphi\vartheta\omega}^{zyz} = \mathbf{R}_\varphi^{(z)} \mathbf{R}_\vartheta^{(y)} \mathbf{R}_\omega^{(z)}, \quad (1.5)$$

gdzie $\mathbf{R}^{(y)}$ oraz $\mathbf{R}^{(z)}$ zostały wyznaczone w (1.3) i (1.4). Aby otrzymać rotację R w postaci pojedynczej macierzy wykonujemy następujące mnożenia

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \omega & -\cos \vartheta \sin \omega & \sin \vartheta \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ -\sin \vartheta \cos \omega & \sin \vartheta \sin \omega & \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \omega & -\cos \varphi \cos \vartheta \sin \omega - \sin \varphi \cos \omega & \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \cos \omega + \cos \varphi \sin \omega & -\sin \varphi \cos \vartheta \sin \omega + \cos \varphi \cos \omega & \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta \cos \omega & \sin \vartheta \sin \omega & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aby zdefiniować korelację sferyczną potrzebujemy wiedzieć nie tylko jak rotować punkty $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$, ale też jak dokonywać obrotu na sferze. Wprowadźmy zatem operator rotacji L_R , który dla zadanej funkcji f zwraca przemieszczoną o R funkcję $L_R f$

$$[L_R f](\mathbf{x}) = f(R^{-1}\mathbf{x}).$$

Z uwagi na odwracalność rotacji R zachodzi równość $L_{RR'} = L_R L_{R'}$.

1.2.2. Parametryzacja i całkowanie w przestrzeni \mathbb{S}^2 i $SO(3)$

Prezentowana podsekcja i jej następnik opiera się na publikacji [1].

Oznaczmy przez $z(\alpha), y(\beta), z(\gamma)$ rotacje odpowiednio $\mathbf{R}_\alpha^{(z)}, \mathbf{R}_\beta^{(y)}, \mathbf{R}_\gamma^{(z)}$. Dla parametryzacji Eulera w konwencji zyz zdefiniujmy rotację.

Definicja 1.10. Dla $z(\alpha), y(\beta), z(\gamma) \in SO(3)$ rotację R rozumiemy jako

$$R = R(\alpha, \beta, \gamma) = z(\alpha)y(\beta)z(\gamma),$$

gdzie $\alpha \in [0, 2\pi], \beta \in [0, \pi], \gamma \in [0, 2\pi]$.

Używając tej parametryzacji sferycznej, znormalizowana miara Haara (A.2, Dodatek A) zadana jest przez

$$dR = \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta \sin(\beta)}{2} \frac{d\gamma}{2\pi} = \frac{1}{8\pi^2} \sin(\beta) d\alpha d\beta d\gamma.$$

Miara Haara nazywana jest miarą niezmienniczą z uwagi na następującą własność

$$\int_{SO(3)} f(R'R) dR = \int_{SO(3)} f(R) dR.$$

Zapiszmy parametryzację opartą na dwóch parametrach dla elementu z przestrzeni sferycznej $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$

$$\mathbf{x}(\alpha, \beta) = z(\alpha)y(\beta)\mathbf{n},$$

gdzie $n \in \mathbb{R}^3$ jest wektorem bieguna północnego $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$. Wobec powyższego prawdziwe jest, że sfera \mathbb{S}^2 jest ilorazem odpowiednich grup $\mathbb{S}^2 = SO(3)/SO(2)$, gdzie $SO(2)$ to podgrupa rotacji wzdłuż osi z .

Aby móc całkować w przestrzeni \mathbb{S}^2 oraz w grupie $SO(3)$ będziemy używać miary Harr'a.

Definicja 1.11. Znormalizowana miara Haara dla sfery zadana jest przez

$$dx = \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta \sin(\beta)}{2} = \frac{1}{4\pi} \sin(\beta) d\alpha d\beta,$$

zaś znormalizowana miara Haara dla podgrupy $SO(2)$ to

$$dh = \frac{d\beta}{2\pi}.$$

O funkcji z przestrzeni \mathbb{S}^2 możemy myśleć jak o funkcji z grupy obrotów $SO(3)$ niezmienniczej względem parametru γ dzięki czemu możemy utożsamić z funkcją $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ funkcję \bar{f}

$$\bar{f}(\alpha, \beta, \gamma) = f(\alpha, \beta). \quad (1.6)$$

Dla uproszczenia zapisu w dalszej części pracy elementy przestrzeni \mathbb{S}^2 przedstawiamy bez pogrubionej czcionki, $\mathbf{x} = x$

Twierdzenie 1.12. Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, z którą utożsamiamy funkcję $\bar{f} : SO(3) \rightarrow \mathbb{C}$ zachodzi następująca zależność

$$\int_{SO(3)} \bar{f}(R)dR = \int_{\mathbb{S}^2} f(x)dx, \quad (1.7)$$

gdzie miara jest znormalizowanej miara Haara.

Dowód. Rozpisując całkę z funkcji \bar{f} otrzymujemy następujące równości

$$\begin{aligned} \int_{SO(3)} \bar{f}(R)dR &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin(\beta) d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma \bar{f}(\alpha, \beta, \gamma) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin(\beta) d\beta f(\alpha, \beta) \int_0^{2\pi} d\gamma \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin(\beta) d\beta f(\alpha, \beta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} f(x)dx, \end{aligned}$$

co dowodzi tezę. \square

Powyższy rezultat pozwoli nam zdefiniować transformację Fouriera w przestrzeni \mathbb{S}^2 za pomocą transformaty Fouriera na $SO(3)$. Możemy to zrobić myśląc o funkcji z grupy \mathbb{S}^2 jak o niezależnej od parametru γ funkcji z grupy rotacji $SO(3)$, a następnie wykonać na niej transformację Fouriera w grupie $SO(3)$.

1.2.3. Iloczyn skalarny i korelacje sygnałów sferycznych

Dla sygnałów sferycznych zdefiniujmy iloczyn skalarny.

Definicja 1.13. Iloczyn skalarny w przestrzeni sferycznej wyrażony jest za pomocą

$$\langle \psi, f \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{k=1}^K \psi_k(x) f_k(x) dx, \quad (1.8)$$

gdzie miara dx oznacza całkowanie względem miary na sferze $dx = \frac{1}{4\pi} \sin(\beta) d\alpha d\beta$, zaś podobnie, jak dla Definicji 1.7, $K \in \mathbb{N}$ oznacza liczbę kanałów.

Z uwagi na niezmienność miary dla dowolnej rotacji $R \in SO(3)$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(Rx) dx = \int_{\mathbb{S}^2} f(x) dx.$$

Używając tego faktu możemy udowodnić, że operator $L_{R^{-1}}$ jest sprzężony do L_R co oznacza, że operator L_R jest unitarny. Zachodzą bowiem następujące równości

$$\begin{aligned}
 \langle L_R \psi, f \rangle &= \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{k=1}^K \psi_k(R^{-1}x) f_k(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{k=1}^K \psi_k(x) f_k(Rx) dx \\
 &= \langle L_{R^{-1}} \psi, f \rangle.
 \end{aligned}$$

Używając powyższych definicji i własności zdefiniujemy korelację sferyczną.

Definicja 1.14. Dla sygnałów sferycznych $f, \psi \in \mathbb{S}^2$ oraz $K \in \mathbb{N}$ kanałów korelacją nazywamy

$$[\psi \star f](R) = \langle L_R \psi, f \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{k=1}^K \psi_k(R^{-1}x) f_k(x) dx,$$

gdzie symbol \star oznacza splot funkcji.

Zauważmy, że wynikiem korelacji sferycznej jest funkcja należąca do grupy $SO(3)$. Bez straty ogólności przeanalizujmy przypadek pojedynczego kanału, $K = 1$.

Przykład

$$\begin{aligned}
 [\psi \star [L_Q f]](R) &= \int_{\mathbb{S}^2} \psi(R^{-1}x) f(Q^{-1}x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{S}^2} \psi(R^{-1}Qx) f(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{S}^2} \psi(Q^{-1}R)^{-1} x f(x) dx \\
 &= [\psi \star f](Q^{-1}R) \\
 &= [L_Q[\psi \star f]](R).
 \end{aligned}$$

1.2.4. Rotacje sygnałów i korelacja w grupie $SO(3)$

Aby zdefiniować korelację $SO(3)$ potrzebujemy najpierw wprowadzić generalizację operatora rotacji tak, aby mógł on działać na sygnałach z $SO(3)$. Zdefiniujmy go analogicznie jak dla sfery \mathbb{S}^2 .

Definicja 1.15. Dla sygnału $f : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^K$ oraz rotacji $R, Q \in SO(3)$ operator rotacji oznaczamy jako

$$[L_R f](Q) = f(R^{-1}Q).$$

Zauważmy, że w przypadku sfery wyrażenie $R^{-1}x$ oznacza rotację $x \in \mathbb{S}^2$ przez obrót przeciwny $R^{-1} \in SO(3)$, zaś w przypadku grupy $SO(3)$ operacja $R^{-1}Q$ oznacza złożenie rotacji, czyli wymnożenie macierzy obrotów.

Analogicznie jak w przypadku sygnałów sferycznych wprowadźmy definicję korelacji dla grupy rotacji $SO(3)$.

Definicja 1.16. Dla sygnałów $f, \psi \in SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^K, K \in \mathbb{N}$, korelacją sygnałów nazywamy

$$[\psi \star f](R) = \langle L_R \psi, f \rangle = \int_{SO(3)} \sum_{k=1}^K \psi_k(R^{-1}Q) f_k(Q) dQ,$$

gdzie miara dQ oznacza całkowanie względem miary w grupie rotacji.

Uwaga 1.17. Miara dQ jest równoważna z miarą $\frac{1}{8\pi^2} d\alpha \sin(\beta) d\beta d\gamma$ w parametryzacji sferycznej.

1.2.5. Równoważność warstw

Aby zastosować teorię rotacji sygnałów sferycznych w praktyce chcielibyśmy móc stosować operator rotacji nie tylko jako dane wejściowe w pierwszej warstwie splotu ale też w następnych. Jest to możliwe z uwagi na istotną własność splotu i korelacji nazywaną równoważnością warstw.

Definicja 1.18. Warstwa Φ jest równoważna jeśli zachodzi związek $\Phi \circ L_R = T_R \circ \Phi$ dla pewnego operatora T_R , gdzie przez symbol \circ rozumiemy złożenie odwzorowań.

Twierdzenie 1.19. Dla unitarnego operatora L_R , rotacji $R \in SO(3)$ oraz dowolnych sygnałów ψ, f warstwy w sferze \mathbb{S}^2 oraz w grupie rotacji $SO(3)$ są równoważne.

Dowód.

$$\begin{aligned} [\psi \star [L_Q f]](R) &= \langle L_R \psi, L_Q f \rangle \\ &= \langle L_{Q^{-1}R} \psi, f \rangle \\ &= [\psi \star f](Q^{-1}R) \\ &= [L_Q [\psi \star f]](R). \end{aligned}$$

□

1.3. Przestrzeń harmonik sferycznych

Podrozdział bazuje na rozdziale nr 7 książki [2].

Definicja 1.20. Przestrzenią Hilberta $L^2(\mathbb{S}^2)$ nazywamy przestrzeń, w której dla dwóch funkcji $f(\theta, \phi) = f(\hat{\mathbf{u}})$ oraz $g(\theta, \phi) = g(\hat{\mathbf{u}})$ o zespolonych wartościach na sferze \mathbb{S}^2 definiujemy iloczyn skalarny

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{\mathbf{u}}) \overline{g(\hat{\mathbf{u}})} ds(\hat{\mathbf{u}}) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \overline{g(\theta, \phi)} \sin \theta d\theta d\phi, \end{aligned}$$

który wyznacza normę

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

Dla przestrzeni $L^2(\mathbb{S}^2)$ zdefiniujmy harmoniki.

Definicja 1.21. Harmoniki sferyczne o stopniu $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ i poziomie $m \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$ definiujemy jako

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi},$$

gdzie wyrażenie, które pierwiastkujemy jest czynnikiem normalizującym zapewniającym nas, że norma z harmoniki $\|Y_l^m\| = 1$, będącą go oznaczać przez

$$N_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}.$$

Druga część równania (współrzędna geograficzna) obejmuje powiązane wielomiany Legendre'a w nieokreślonym $x = \cos \theta$

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l,$$

gdzie

$$l \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad m \in \{0, 1, \dots, l\}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Trzeci człon (długość geograficzna) jedyny o wartościach zespolonych, determinujący zespoloną naturę harmonik wyraża się następująco

$$e^{im\phi} = \cos m\phi + i \sin m\phi.$$

Harmoniki sferyczne posiadają własność ortogonalności (Twierdzenie A.4, Dodatek A), względem zdefiniowanej wcześniej Definicji 1.13 iloczynu skalarnego zachodzi następujący warunek

$$\langle Y_l^m, Y_p^q \rangle = \delta_{l,p}^{m,q} = \delta_{l,p} \delta_{m,q}.$$

Przykład Przykłady harmonik sferycznych dla stopni $l \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}},$$

$$Y_{1,1}(\theta, \phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad Y_{1,-1}(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{-i\phi},$$

$$Y_{1,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta,$$

$$Y_{2,2}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{i2\phi}, \quad Y_{2,-2}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-i2\phi},$$

$$Y_{2,1}(\theta, \phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}, \quad Y_{2,-1}(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi},$$

$$Y_{2,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1),$$

$$Y_{3,3}(\theta, \phi) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{2\pi}} \sin^3 \theta \sin(3\theta), \quad Y_{3,-3}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{2\pi}} \sin^3 \theta \cos(3\theta),$$

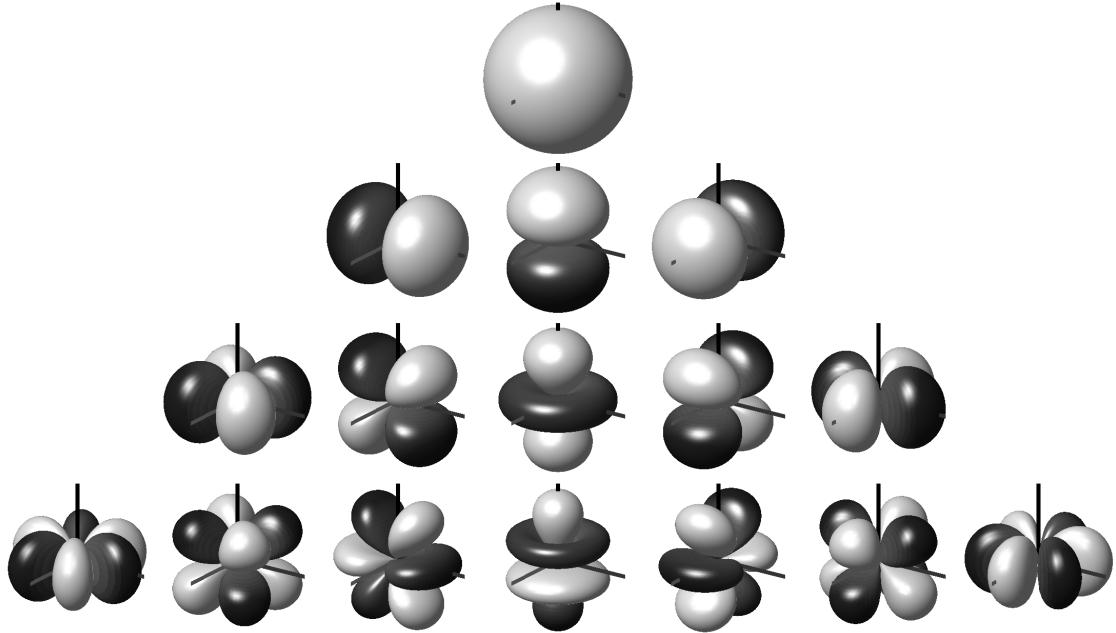
$$Y_{3,2}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta \sin \phi, \quad Y_{3,-2}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta \cos \phi,$$

$$Y_{3,1}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{2\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \phi,$$

$$Y_{3,-1}(\theta, \phi) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{2\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \cos \phi,$$

$$Y_{3,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta).$$

Wizualizację harmonik sferycznych (amplitudę liczby zespolonej przedstawioną w formie powierzchni) dla $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{-l, \dots, l\}$ możemy zobaczyć na Rysunku 1.4.



Rysunek 1.4. [14] Wizualizacja harmonik sferycznych, gdzie pierwszy rząd wyznaczony jest przez parametry: $l = 0, m = 0$, drugi rząd: $l = 1, m \in \{-1, 0, 1\}$, trzeci rząd dla $l = 2, m \in \{-2, \dots, 2\}$ oraz ostatni czwarty rząd to $l = 3, m \in \{-3, \dots, 3\}$

1.4. Macierze d-Wignera oraz D-Wigner

Dla sygnału z przestrzeni $L^2(\mathbb{S}^2)$ rotację przedstawić możemy jako operator $\mathcal{D}(\varphi, \vartheta, \omega)$ zparametryzowany za pomocą kątów Eulera w konwencji xyz , który odpowiada rotacji $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (1.5). Działanie operatora $\mathcal{D}(\varphi, \vartheta, \omega)$ może być rozłożone na trzy prostsze operatory rotacji wzdłuż kolejnych osi z, y, z

$$\mathcal{D}(\varphi, \vartheta, \omega) = \mathcal{D}_z(\varphi) \circ \mathcal{D}_y(\vartheta) \circ \mathcal{D}_z(\omega).$$

Jeśli sygnał f ze współczynnikami harmonik sferycznych $(f)_l^m$ jest obrócony na sferze operatorem rotacji $\mathcal{D}(\varphi, \vartheta, \omega)$, to harmonika sferyczna stopnia l i rzędu m rotowanego sygnału jest kombinacją liniową harmonik sferycznych innego rzędu tego sygnału o tym samym stopniu l , co możemy zapisać jako

$$\langle \mathcal{D}(\varphi, \vartheta, \omega)f, Y_l^m \rangle = \sum_{m'=-l}^l D_{m,m'}^l(\varphi, \vartheta, \omega)(f)_l^{m'},$$

gdzie $D_{m,m'}^l(\varphi, \vartheta, \omega)$ to macierz D-Wigner postaci

$$D_{m,m'}^l(\varphi, \vartheta, \omega) = e^{-im\varphi} d_{m,m'}^l(\vartheta) e^{-im'\omega}, \quad (1.9)$$

w której, zaś występuje macierz d-Wignera zdefiniowana jako

$$d_{m,m'}^l(\vartheta) = \sum_n (-1)^{n-m'+m} \frac{\sqrt{(l+m')!(l-m')!(l+m)!(l-m)!}}{(l+m'-n)!(n)!(l-n-m)!(n-m'+m)!} \times (\cos \frac{\vartheta}{2})^{2l-2n+m'-m} (\sin \frac{\vartheta}{2})^{2n-m'+m}. \quad (1.10)$$

Macierz D-Wignera możemy zobaczyć w Przykładzie 1.5.

Przykład 1.5.

$$\mathbf{D}(\varphi, \vartheta, \omega) =$$

$$\begin{pmatrix} D_{0,0}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{-1,-1}^1 & D_{-1,0}^1 & D_{-1,1}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{0,-1}^1 & D_{0,0}^1 & D_{0,1}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{1,-1}^1 & D_{1,0}^1 & D_{1,1}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{-2,-2}^2 & D_{-2,-1}^2 & D_{-2,0}^2 & D_{-2,1}^2 & D_{-2,2}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{-1,-2}^2 & D_{-1,-1}^2 & D_{-1,0}^2 & D_{-1,1}^2 & D_{-1,2}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{0,-2}^2 & D_{0,-1}^2 & D_{0,0}^2 & D_{0,1}^2 & D_{0,2}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1,-2}^2 & D_{1,-1}^2 & D_{1,01}^2 & D_{1,1}^2 & D_{1,2}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{2,-2}^2 & D_{2,-1}^2 & D_{2,0}^2 & D_{2,1}^2 & D_{2,2}^2 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

gdzie zaobserwować możemy kolejne bloki rozmiaru $1 \times 1, 3 \times 3, 5 \times 5$.

Elementy macierzy (1.11) przedstawiamy za pomocą prostego przykładu.

Przykład 1.6. Dla kątów $\varphi, \omega = 0$ macierz blokowa rozmiaru $(2l+1) \times (2l+1)$ wyrażone następująco. Dla $l=0$ mamy macierz rozmiaru 1×1 $D_{0,0}^0(0, \vartheta, 0) = (1)$, następnie dla $l=1$ oraz $m \in \{-1, 0, 1\}$ jest to macierz 3×3 zadana przez

$$D^1(0, \vartheta, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos \vartheta}{2} & \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos \vartheta}{2} \\ -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} & \cos \vartheta & \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos \vartheta}{2} & -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos \vartheta}{2} \end{pmatrix},$$

gdzie pojedynczy element $d_{1,0}^1(0, \vartheta, 0)$ macierzy D^1 wyliczamy za pomocą wzoru (1.10)

$$d_{1,0}^1(\vartheta) = (-1)^{(0-0+1)} \sqrt{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} = -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}. \quad (1.12)$$

Warto podkreślić, że dla rozważanego przykładu wyrażenia $e^{-im\varphi}, e^{-im'\omega}$ wzoru (1.9) wynoszą 1 z uwagi na zerowe kąty φ oraz ω .

Rozdział 2

Uogólniony algorytm szybkiej transformacji Fouriera

Korelacje oraz konwolucje (sploty) mogą być efektywnie przetwarzane za pomocą algorytmu szybkiej transformacji Fouriera, wprowadźmy jej definicję.

Definicja 2.1. *Szybką transformacją Fouriera nazywamy algorytm wyznaczania dyskretnej transformaty Fouriera określony wzorem*

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} nk},$$

gdzie x_0, \dots, x_{N-1} są liczbami zespolonymi, a parametr $k = 0, \dots, N-1$, $N \in \mathbb{N}$.

Obliczanie sum według powyższego wzoru wymaga wykonania $O(N^2)$ operacji, znane są jednak sprawdzone algorytmy szybkiej transformacji Fouriera tj. algorytm Cooleya-Tukeya, który bazując na metodzie dziel i zwycięzaj rekurencyjnie dzieli transformatę wielkości $N = N_1 N_2$ na transformaty wielkości N_1 i N_2 zgodnie z algorytmem Cooleya-Tukeya. Złożoność obliczeniowa algorytmu szybkiej transformacji Fouriera wynosi $O(N \log_2 N)$.

Dla funkcji określonych na sferze i należących do grupy rotacji $SO(3)$ istnieje analogiczna transformacja, którą nazywać będziemy uogólnioną transformacją Fouriera oraz odpowiadający jej szybki algorytm uogólnionej transformacji Fouriera.

Definicja 2.2. Uogólniona transformacja Fouriera to liniowe rzutowanie funkcji na zbiór ortogonalnych funkcji bazowych.

Dla okręgu S^1 lub linii l 2.2 to zespolone funkcje $e^{in\theta}$, dla sfery \mathbb{S}^2 są to harmoniki sferyczne $Y_m^l(x)$ indeksowane po parametrach $l \geq 0$ i $m \in [-l, \dots, l]$. Dla grupy $SO(3)$

to funkcje D-Wignera $D_{mn}^l(R)$ indeksowane po stopniu $l \geq 0$ i parametrach rzędu $m, n \in [-l, \dots, l]$, innymi słowy funkcje macierzowe

$$D^l : SO(3) \rightarrow \mathbb{C}^{(2l+1)(2l+1)}.$$

Istotnym faktem jest ortogonalność funkcji D-Wignera

Twierdzenie 2.3. *Funkcje D-Wignera $D_{mn}^l D_{m'n'}^{l'} \in SO(3)$ są ortogonalne.*

$$\langle D_{mn}^l D_{m'n'}^{l'} \rangle = \frac{\delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}}{2l + 1}. \quad (2.1)$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \langle D_{mn}^l D_{m'n'}^{l'} \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\beta \sin \beta}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{2\pi} D_{mn}^l(\alpha, \beta, \gamma) \overline{D_{m'n'}^{l'}(\alpha, \beta, \gamma)} \\ &= \frac{\delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}}{2l + 1}. \end{aligned}$$

□

Z Twierdzenia 2.3 nasuwa się następujący wniosek

Wniosek 2.4. *Iloczyn skalarny funkcji D-Wignera spełnia następującą własność*

$$\langle D_{mn}^l, D_{mn}^l \rangle = \frac{1}{2l + 1}. \quad (2.2)$$

Wobec faktu, że przestrzeń funkcji D-Wignera jest zupełna oraz stanowi bazę [4] oraz z Twierdzenia 2.3, prawdziwe jest, że funkcja $f : SO(3) \rightarrow \mathbb{C}$ może być przedstawiona jako kombinacja liniowa funkcji D-Wignera, co następnie prowadzi nas do uogólnionej transformaty Fouriera \mathcal{F} .

Definicja 2.5. Uogólnioną transformatą Fouriera \mathcal{F} w grupie $SO(3)$ nazywamy

$$f(R) = [\mathcal{F}^{-1} \widehat{f}](R) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l \widehat{f}_{mn}^l D_{mn}^l(R), \quad (2.3)$$

gdzie \widehat{f}_{mn}^l to współczynniki Fouriera dla f , a $D_{mn}^l(R)$ to macierze D-Wignera.

Korzystając z pokazanej powyżej ortogonalności funkcji D-Wignera możemy wyznaczyć współczynniki Fouriera za pomocą obliczenia iloczynu skalarnego

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}f]_{mn}^l &= \int_{SO(3)} f(R) \overline{D_{mn}^l(R)} dR \\ &= \int_{SO(3)} \left[\sum_{l'=0}^{\infty} (2l' + 1) \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{n'=-l'}^{l'} \widehat{f}_{m'n'}^{l'} D_{m'n'}^{l'}(R) \right] \overline{D_{mn}^l(R)} dR \\ &= \sum_{l'=0}^{\infty} (2l' + 1) \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{n'=-l'}^{l'} \widehat{f}_{m'n'}^{l'} \int_{SO(3)} D_{m'n'}^{l'}(R) \overline{D_{mn}^l(R)} dR \\ &= \widehat{f}_{mn}^l. \end{aligned}$$

Uogólniając oba przypadki oznaczmy przez przestrzeń X grupę $SO(3)$ lub \mathbb{S}^2 oraz odpowiadające jej funkcje bazowe U^l , którymi mogą być wektory Y^l lub macierze D^l . Dla tak zadanej przestrzeni zdefiniujmy uogólnioną transformację Fouriera dla funkcji $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$\widehat{f}_{mn}^l = \int_X f(x) \overline{U_{mn}^l(x)} dx.$$

Zauważmy, że \mathbb{S}^2 nie jest grupą ale w tym przypadku rozważamy jej reprezentację jako wynik ilorazu $SO(3)/SO(2)$. Powyższa całka może być efektywnie obliczona za pomocą szybkiego algorytmu uogólnionej transformacji Fouriera. W konsekwencji otrzymujemy definicję odwróconej transformaty Fouriera.

Definicja 2.6. Odwrotna transformata Fouriera dla grupy $SO(3)$ jest zadana w następujący sposób

$$f(R) \approx \sum_{l=0}^b (2l+1) \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l \widehat{f}_{mn}^l D_{mn}^l(R), \quad (2.4)$$

gdzie $\frac{1}{b} \in \mathbb{N}$ oznacza gęstość punktów, inaczej mówiąc rozdzielcość siatki w przestrzeni trójwymiarowej.

Zwróćmy uwagę na fakt, że w przeciwnieństwie do 2.5 szereg zastępujmy sumą literowaną parametrem l od 0 do b . Jest to naturalne ograniczenie wynikające z rzeczywistych własności reprezentacji obrazu. W następnym rozdziale przeanalizujemy dla jakiego parametru b powyższa transformata poprawnie aproksymuje $f(R)$.

Macierze D-Wignera dla dowolnych rotacji $R, R' \in SO(3)$ posiadają własność

$$D^l(R) D^l(R') = D^l(RR').$$

Analogiczna własność występuje w prostszym przypadku dla grupy $SO(2)$. W istocie $e^{inx} e^{iny} = e^{in(x+y)}$, gdzie $x + y$ to działanie w grupie $SO(2)$. Korzystając z niezmienności miary dR mamy $\int_{SO(3)} f(R'R)dR = \int_{SO(3)} f(R)dR$ uzyskujemy w ten sposób twierdzenie Fouriera dla grupy rotacji $SO(3)$.

Twierdzenie 2.7. Dla dowolnych sygnałów sferycznych $\psi, f \in SO(3)$ korelacja w grupie rotacji $SO(3)$ zachodzi twierdzenie Fouriera

$$\widehat{\psi \star f}^l = \widehat{f}^l \cdot \widehat{\psi}^{l\dagger}, \quad (2.5)$$

gdzie \cdot oznacza mnożenie dwóch macierzy blokowych, \star oznacza splot, a symbol \dagger Hermitowskie sprzężenie.

Dowód.

$$\begin{aligned}
 \widehat{\psi \star f}^l &= \int_{SO(3)} (\psi \star f)(R) \overline{D^l(R)} dR \\
 &= \int_{SO(3)} \int_{SO(3)} \psi(R^{-1}R') f(R') dR' \overline{D^l(R)} dR \\
 &= \int_{SO(3)} \int_{SO(3)} \psi(R^{-1}) f(R') \overline{D^l(R'R)} dR' dR \\
 &= \int_{SO(3)} f(R') \overline{D^l(R')} dR' \int_{SO(3)} \psi(R^{-1}) \overline{D^l(R)} dR \\
 &= \int_{SO(3)} f(R') \overline{D^l(R')} dR' \int_{SO(3)} \psi(R) \overline{D^l(R)}^\dagger dR \\
 &= \widehat{f}^l \cdot \widehat{\psi}^{l\dagger}.
 \end{aligned}$$

□

Otrzymaliśmy zatem, że transformacja Fouriera w grupie $SO(3)$ dla splotu sygnałów ψ oraz f jest równa wymnożeniu macierzy dwóch transformacji Fouriera $\widehat{f}, \widehat{\psi}$.

Dla sfery otrzymujemy analogiczny wynik $\widehat{\psi \star f}^l = \widehat{f}^l \cdot \widehat{\psi}^{l\dagger}$, gdzie \widehat{f}^l oraz $\widehat{\psi}^{l\dagger}$ to wektory.

Z harmonikami sferycznymi $Y_m^l : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ powiązane są funkcje D-Wignera w następujący sposób

$$D_{mn}^l(\alpha, \beta, \gamma) = Y_m^l(\alpha, \beta) e^{in\gamma},$$

co prowadzi nas do następującej relacji macierzy D-Wignera z harmonikami sferycznymi

$$D_{mn}^l(\alpha, \beta, 0) = Y_m^l(\alpha, \beta).$$

Dla funkcji określonych w Twierdzeniu 1.12 prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.8 ([1]). *Konwolucja dowolnych sygnałów $f_1, f_2 \in \mathbb{S}^2$ jest równa konwolucji w grupie rotacji $SO(3)$*

$$[f_1 \star f_2](R) = [\overline{f_1} \star \overline{f_2}](R). \quad (2.6)$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
 [f_1 \star f_2](R) &= \int_{\mathbb{S}^2} f_1(R^{-1}x) f_2(x) dx \\
 &= \int_{SO(2)} \int_{\mathbb{S}^2} f_1(R^{-1}x) f_2(x) dx dh \\
 &= \int_{SO(3)} \overline{f_1}(R^{-1}R') \overline{f_2}(R') dR' \\
 &= [\overline{f_1} \star \overline{f_2}](R).
 \end{aligned}$$

□

Następnie przejdźmy do wyrażenia transformacji Fouriera funkcji należącej do $SO(3)$.

Twierdzenie 2.9 ([1]). *Transformacja Fouriera dla funkcji $\bar{f} \in SO(3)$ wyraża się za pomocą*

$$[\mathcal{F}\bar{f}]_{mn}^l = \delta_{n0} \int_{\mathbb{S}^2} f(x) \overline{Y_m^l(x)} dx. \quad (2.7)$$

Dowód.

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}\bar{f}]_{mn}^l &= \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\beta \sin \beta}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{2\pi} \bar{f}(\alpha, \beta, \gamma) \overline{D_{mn}^l(\alpha, \beta, \gamma)} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\beta \sin \beta}{2} f(\alpha, \beta) \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{2\pi} \overline{D_{mn}^l(\alpha, \beta, \gamma)} \\ &= \delta_{n0} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\beta \sin \beta}{2} f(\alpha, \beta) \int_0^{2\pi} \overline{D_{mn}^l(\alpha, \beta, \gamma)} \\ &= \delta_{n0} \int_{\mathbb{S}^2} f(x) \overline{Y_m^l(x)} dx. \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 2.9 pozwala nam myśleć o transformacji Fouriera w przestrzeni \mathbb{S}^2 jak o transformacji Fouriera z grupy $SO(3)$ z kolumną $n = 0$.

Powyzsze własności prowadzą nas do algorytmu pozwalającego obliczyć korelację dwóch dowolnych sygnałów używając szybkiej transformacji Fouriera w przestrzeni \mathbb{S}^2 , oraz odwróconej szybkiej transformacji Fouriera dla grupy obrotów $SO(3)$.

Rozdział 3

Algorytm i jego analiza

3.1. Algorytm obliczający korelację sferyczną

Dzięki zdefiniowanej wcześniej Definicji 2.6 transformacji Fouriera dla grupy $SO(3)$

$$f(R) \approx \sum_{i=0}^b (2l+1) \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l \widehat{f}_{mn}^l D_{mn}^l(R),$$

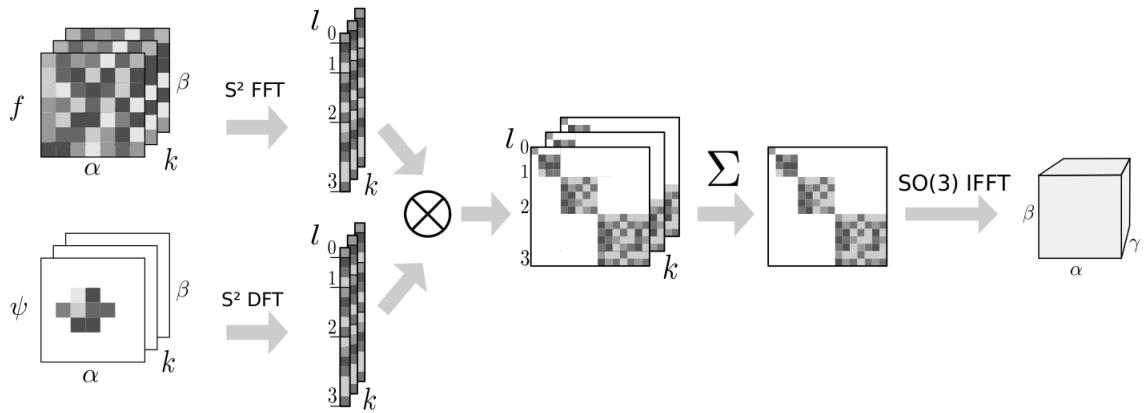
oraz Twierdzeniu Fouriera 2.7

$$\widehat{\psi * f^l} = \widehat{f}^l \cdot \widehat{\psi}^{l\dagger},$$

możemy obliczyć korelację dwóch sygnałów sferycznych, gdzie ψ , który w naszym przypadku utożsamiamy z filtrem.

Algorytm konwolucyjnej sieci neuronowej zaproponowany przez [1] jest dostępny pod linkiem <https://github.com/jonkhler/s2cnn>. Działanie algorytmu możemy zobaczyć na Rysunku (3.1). Dla nas istotne będzie zbadanie jakiej klasy funkcje mogą być z sukcesem aproksymowane za pomocą szybkiej transformacji Fouriera dla grupy $SO(3)$.

Działanie algorytmu możemy zobaczyć na Rysunku 3.1.



Rysunek 3.1. [1]Algorytm korelacji sferycznej. Algorytm zaczynamy od szybkiej transformacji Fouriera (\mathbb{S}^2 -FFT) dla obu sygnałów, następnie wymnożeniu tensorowym wyników, zsumowaniu macierzy blokowych oraz ostatecznie wykonie odwróconej szybkiej transformacji Fouriera ($SO(3)$ -IFFT).

3.2. Oszacowanie błędu aproksymacji

Dla transformacji Fouriera z Definicji 2.6 przeprowadzimy analizę błędu aproksymacji względem parametru $b \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez X_b przestrzeń

$$X_b = \text{lin}\{D_{mn}^l : l \leq b, m, n \in \{-l, \dots, l\}\},$$

oraz zdefiniujmy operator rzutowania przestrzeni na przestrzeń X_b jako

$$\langle \pi_b f - f, g \rangle = 0, \quad \forall g \in X_b.$$

Wtedy operator π_b możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} \pi_b f &= \sum_{0 \leq |m|, |n| \leq l \leq b} \widehat{f}_{mn}^l D_{mn}^l \\ &= \sum_{l=0}^b \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l \widehat{f}_{mn}^l D_{mn}^l. \end{aligned}$$

Rozważamy następnie normę w przestrzeni $L^2(SO(3))$

$$\|f\|_{L^2(SO(3))} = \sqrt{\int_{SO(3)} f(R) \overline{f(R)} dR},$$

zauważmy, że z Wniosku 2.4 wynika

$$\|D_{mn}^l\|_{L^2(SO(3))} = \sqrt{\langle D_{mn}^l, D_{mn}^l \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}. \quad (3.1)$$

Do wyznaczenia oszacowania błędu potrzebne będzie twierdzenie pomocnicze 3.1

Twierdzenie 3.1. Dla dowolnej funkcji $f : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającej warunek

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1)^{\frac{5}{2}} \sup_{|m|,|n|\leq l} |\widehat{f}_{mn}^l| < +\infty, \quad (3.2)$$

dla $b \rightarrow +\infty$ zachodzi

$$\pi_b f \xrightarrow{L^2(SO(3))} f. \quad (3.3)$$

Dowód. Aby udowodnić powyższe twierdzenie przejdźmy przez następujące rachunki

$$\begin{aligned} \|\pi_b f - f\|_{L^2(SO(3))} &= \left\| \sum_{l=b+1}^{\infty} (2l+1) \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l \widehat{f}_{mn}^l D_{mn}^l \right\|_{L^2(SO(3))} \\ &\leq \sum_{l=b+1}^{\infty} (2l+1) \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l \|\widehat{f}_{mn}^l D_{mn}^l\|_{L^2(SO(3))} \\ &\leq \sum_{l=b+1}^{\infty} (2l+1) \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l \sup_{|m|,|n|\leq l} |\widehat{f}_{mn}^l| \|D_{mn}^l\|_{L^2(SO(3))} \quad (3.4) \\ &\leq \sum_{l=b+1}^{\infty} (2l+1)^3 \sup_{|m|,|n|\leq l} |\widehat{f}_{mn}^l| \|D_{mn}^l\|_{L^2(SO(3))} \\ &\leq \sum_{l=b+1}^{\infty} (2l+1)^{\frac{5}{2}} \sup_{|m|,|n|\leq l} |\widehat{f}_{mn}^l|, \end{aligned}$$

gdzie pierwsza nierówność jest prawdziwa na mocy nierówności trójkąta, współczynniki $|\widehat{f}_{mn}^l|$ traktujemy jako skalar, który możemy wyłączyć przed normą, zaś ostatnia nierówność jest prawdziwa dzięki równości (3.1).

Zauważmy, że dla b zbiegającego do nieskończoności wyrażenie otrzymane w (3.4) $\sum_{l=b+1}^{\infty} (2l+1)^{\frac{5}{2}} \sup_{|m|,|n|\leq l} |\widehat{f}_{mn}^l|$ dąży do 0, ponieważ jest to suma ogonowa szeregu zbieżnego co dowodzi tezy.

□

Twierdzenie 3.2. Dla funkcji $f : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}$ oraz dla $b \in \mathbb{N}$ błąd aproksymacji jest ograniczony oraz zachodzi szacowanie

$$\|\pi_b f - f\|_{L^2(SO(3))} \leq \sum_{l=b+1}^{\infty} \sup_{|m|,|n|\leq l} (2l+1)^{\frac{5}{2}} |\widehat{f}_{mn}^l|. \quad (3.5)$$

Dzięki powyższemu rezultatowi, wiemy że algorytm obliczający korelację sferyczną wykorzystujący Definicję 2.6 działa poprawnie dla odpowiednio dużego współczynnika b pod warunkiem, że funkcja jest odpowiedniej klasy, czyli spełnia warunek (3.2) z Twierdzenia 3.1.

Twierdzenie 3.2 przeanalizujemy używając w tym celu dwie funkcje z parametrami odpowiednio dobranymi tak, aby założenia równania były spełnione. Teoretyczne rezultaty uzupełnimy implementacją numeryczną, pokazującą ograniczenie błędu aproksymacji dla różnych wartości parametru b .

Przykład 3.3. Rozważmy funkcje

$$f(R) = \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l c_{mn}^l D_{mn}^l(R), \quad (3.6)$$

gdzie współczynniki c_{mn}^l określmy później, zaś $D_{mn}^l(R)$ to funkcje D-Wignera tworzące bazę. Przeprowadźmy szacowanie

$$\begin{aligned} \|\pi_b f - f\|_{L^2(SO(3))} &\stackrel{(3.1)}{\leq} \sum_{l=b+1}^{+\infty} (2l+1)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l |c_{mn}^l| (2l+1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{l=b+1}^{+\infty} (2l+1) \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l |c_{mn}^l| \\ &\stackrel{(2.4)}{\leq} \sum_{l=b+1}^{+\infty} (2l+1)^{\frac{5}{2}} |c^l|, \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdzie dla ustalonego parametru l przyjmujemy

$$c^l = \sup_{m,n} \{|c_{mn}^l|\}.$$

Aby założenia Twierdzenia 2.4 były spełnione, wystarczy aby c^l spełniało następującą równość

$$|c^l| = (2l+1)^{-\frac{5}{2}} \frac{1}{l^2}. \quad (3.8)$$

Wracając do oszacowania błędu otrzymujemy

$$\|\pi_b f - f\|_{L^2(SO(3))} \leq \sum_{l=b+1}^{+\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{l=1}^b \frac{1}{l^2}. \quad (3.9)$$

Analizę numeryczną przykładu przeprowadzimy korzystając z języka programowania Python 3.9 oraz modułów numpy i matplotlib. Implementacja (3.9) pozwala nam policzyć i wygenerować wykres błędu dla $b \in [0, 100]$.

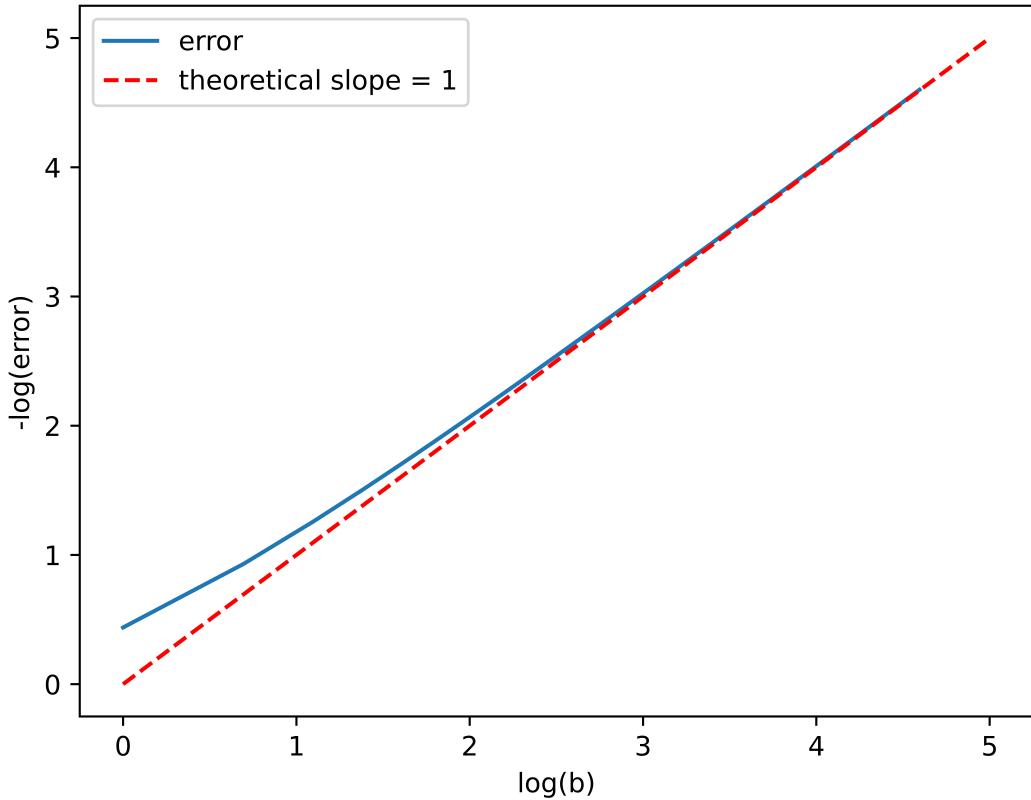
```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def sum_up_b(b):
5     """Calculate and return sum of quotient 1/l^2"""
6     return sum(1 / i**2 for i in range(1, b+1))
7
8 error = [np.pi**2 / 6 - sum_up_b(b) for b in range(1, 100)]
9 x = list(range(1, 100))
10 plt.xlabel("log(b)")
11 plt.ylabel('-log(error)')
12 plt.plot(np.log(x), -np.log(error), label='error')
13 plt.plot([0, 5], [0, 5], c='red', ls='--',
14          label='theoretical slope = 1')
15 plt.legend()
16 plt.savefig('ex1_loglog_error.png', dpi=2000)

```

Implementacja nr 1. Oszacowanie błędu (3.9).

Zobaczmy na Rysunku 3.2 wykres ukazujący tempo zbieżności. Istotnie, błąd (3.9) zbiega do 0.



Rysunek 3.2. Wykres tempa zbieżności dla przykładu 3.3.

Przykład 3.4. Rozważmy skrajny przypadek, dla funkcji f

$$f(R) = \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l c_{mn}^l D_{mn}^l(R), \quad (3.10)$$

przeprowadźmy szacowanie analogiczne do poprzedniego przykładu

$$\|\pi_b f - f\|_{L^2(SO(3))} \leq \sum_{l=b+1}^{+\infty} (2l+1)^{\frac{5}{2}} |c^l|, \quad (3.11)$$

przyjmijmy następnie

$$c^l = (2l+1)^{-\frac{5}{2}} \frac{1}{l^{1+\epsilon}}.$$

Szacując błąd dla $\epsilon > 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|\pi_b f - f\|_{L^2(SO(3))} &\leq \sum_{l=b+1}^{+\infty} (2l+1)^{-\frac{5}{2}} (2l+1)^{\frac{5}{2}} \frac{1}{l^{1+\epsilon}} \\ &= \sum_{l=b+1}^{+\infty} \frac{1}{l^{1+\epsilon}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Oszacujmy szereg (3.12) w postaci umożliwiającej prostą implementację. Zauważmy że możemy rozpoczęć sumowanie od wyrazu $b+1$, zaś pozostałą część zapisać w postaci całki

$$\begin{aligned} \sum_{l=b+1}^{+\infty} \frac{1}{l^{1+\epsilon}} &\leq \left(\frac{1}{b+1}\right)^{1+\epsilon} + \int_{b+1}^{+\infty} x^{-1-\epsilon} dx \\ &= \left(\frac{1}{b+1}\right)^{1+\epsilon} \left[-\frac{x^{-\epsilon}}{\epsilon} \right]_{b+1}^{+\infty} \\ &= \left(\frac{1}{b+1}\right)^{1+\epsilon} \frac{(b+1)^{-\epsilon}}{\epsilon} \\ &= \left(\frac{1}{b+1}\right)^{1+\epsilon} + \frac{1}{\epsilon(b+1)^\epsilon} \\ &= \left(\frac{1}{b+1}\right)^\epsilon \left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{\epsilon}\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Rezultat powyższych przekształceń pozwala nam na obliczenie błędu dla zmieniających się parametrów b oraz ϵ . Poniżej możemy zobaczyć implementację pozwalającą zaobserwowanie wyników teoretycznych.

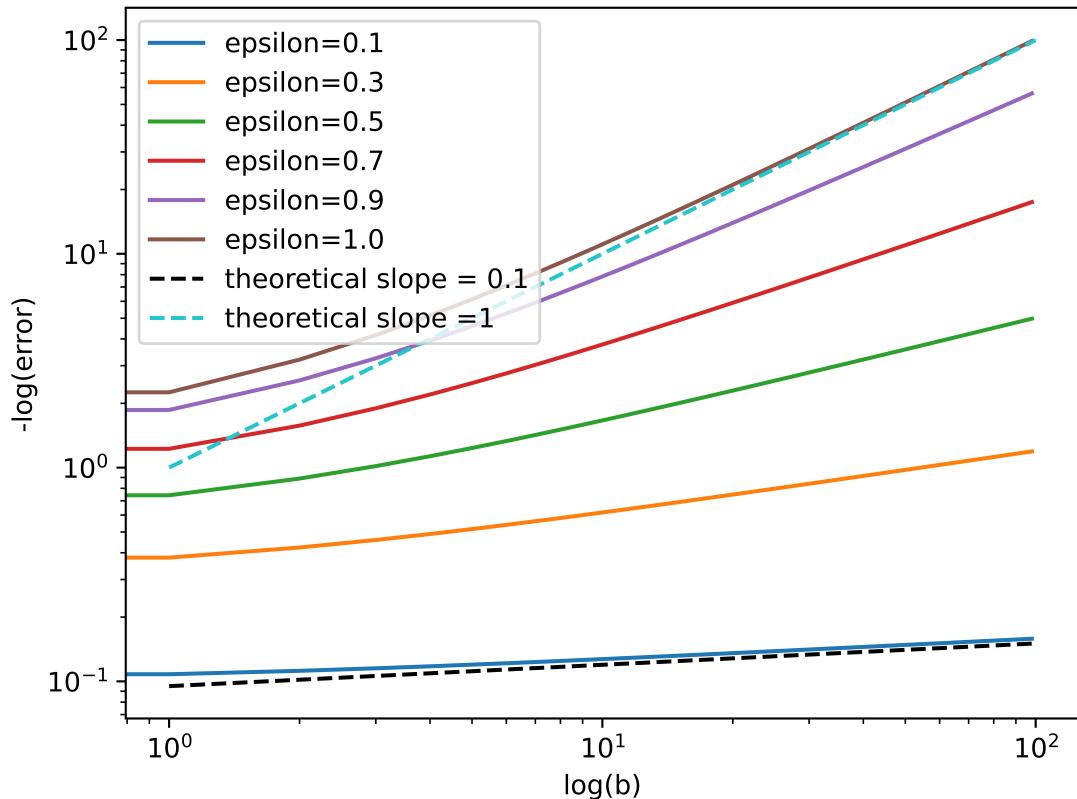
```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def error(b, e):
5     """For every given parameters b and e, returns estimated value."""
6     return (1 / (b + 1))**e * (1 / (b + 1) + 1 / e)
7 values = np.array([[1/error(b, e_ * 0.1) for b in range(1, 100)]
8                   for e_ in (1, 3, 5, 7, 9, 10)])
9 plt.loglog(values.T)
10 plt.plot([1, 10**2], [1, 1 * 10**(2 * 1)], ls='--', c='#24C6CD',
11           label='theoretical slope = 0.2')
12 plt.plot([1, 10**2], [.095, .095 * 10**(2 * .1)], ls='--', c='black',
13           label='theoretical slope = 1')
14 plt.legend([f'epsilon={0.1 * e_:.1f}' for e_ in (1, 3, 5, 7, 9, 10)] +
15            ['theoretical slope = 0.1', 'theoretical slope =1'])
16 plt.xlabel("log(b)")
17 plt.ylabel("-log(error)")
18 plt.savefig('ex2_loglog_error.png', dpi=2000)

```

Implementacja nr 2. Oszacowanie błędu (3.13).

Na Rysunku 3.2 widzimy wykres, który ukazuje tempo zbieżności błędu dla różnego parametru ϵ oraz rosnącego b wraz z dopasowanymi liniami regresji dla skrajnych przypadków.



Rysunek 3.3. Wykres tepa zbieżności dla przykładu 3.4.

Zaprezentowane przykłady pokazują, że już dla małych wartości b błąd istotnie zbiega do 0 jeśli funkcje są odpowiedniej klasy, czyli spełniające warunek

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1)^{\frac{5}{2}} \sup_{|m|, |n| \leq l} |\hat{f}_{mn}^l| < +\infty,$$

czym potwierdzamy tezę Twierdzenia 3.2.

Konkluzja

Reasumując powyższe rozważania można stwierdzić, że uogólniona szybka transformacja Fouriera wykorzystywana w algorytmie sferycznej konwolucyjnej sieci neuronowej pozwala efektywnie aproksymować sygnały. Pokazaliśmy, że algorytm obliczający korelację sferyczną działa poprawnie dla odpowiednio dużego współczynnika b pod warunkiem, że funkcja $f : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}$ jest odpowiedniej klasy, czyli spełnia warunek

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1)^{\frac{5}{2}} \sup_{|m|, |n| \leq l} |\widehat{f}_{mn}^l| < +\infty,$$

zaś błąd aproksymacji jest ograniczony i zachodzi oszacowanie

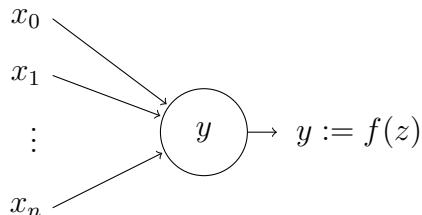
$$\|\pi_b f - f\|_{L^2(SO(3))} \leq \sum_{l=b+1}^{\infty} \sup_{|m|, |n| \leq l} (2l+1)^{\frac{5}{2}} |\widehat{f}_{mn}^l|.$$

Dodatek A

A.1. Konwolucyjne (splotowe) sieci neuronowe

Termin sieć neuronowa jest bardzo sugestywny, sugeruje że maszyny upodobniają się do ludzi, czy też do ludzkiego mózgu, co nadaje mu konotacje fikcji naukowej [7]. Przytoczymy działanie pojedynczego sztucznego neuronu, który naśladując rzeczywisty neuron posiada trzy istotne elementy:

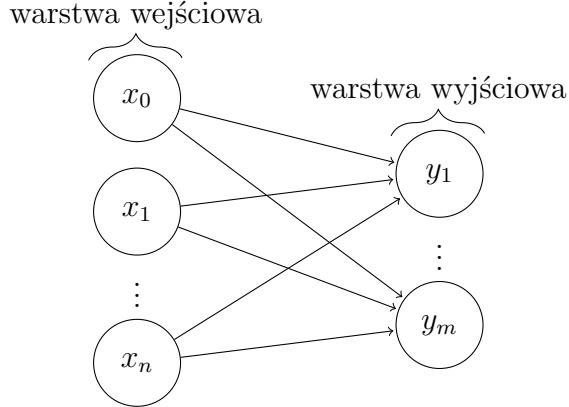
1. Wejście neuronu, do którego wprowadzamy dane, x_0, \dots, x_n .
2. Blok sumujący, przechowujący wagi opowiadające każdemu elementowi wejściowemu y .
3. Wyjście neuronu, jedna konkretna wartość.



Rysunek A.1. Działanie pojedynczego neuronu, który oblicza wartość dla n danych wejściowych.

Zauważmy, że o neuronie możemy myśleć jak, o funkcji która dla danych wejściowych zwraca wartość zwykle jest to suma iloczynów wartości wejściowej x_i i odpowiadającej jej wagi w_i dla $i \in \{1, \dots, n\}$.

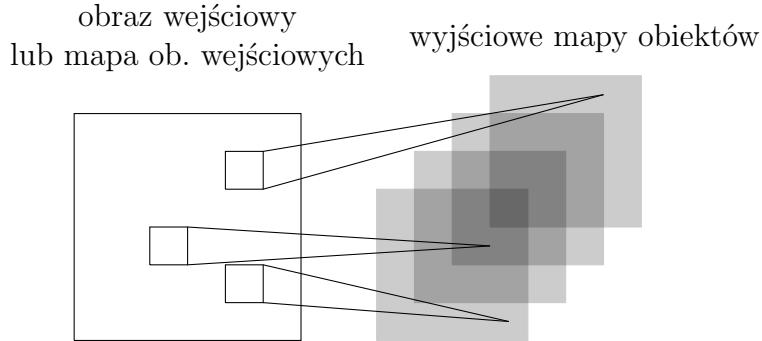
Neurony, mogą być połączone w jeden model liniowy tworząc perceptron postaci $y_i = \mathbf{w}\mathbf{x}$, gdzie \mathbf{w}, \mathbf{x} to wektory. Ideę perceptronu możemy zobaczyć na rysunku A.2.



Rysunek A.2. Perceptron $n + 1$ warstw wejściowych przetwarzanych na m warstw wyjściowych.

Liczba warstw w modelu sieci neuronowej jest zależna od rozważanego zadania i może przybierać dowolną liczbę, jeśli tylko prowadzą one do rozwiązania danego problemu.

Przejdzmy następnie do splotowych sieci neuronowych, które jako klasa sztucznych sieci neuronowych są najczęściej stosowane do analizy obrazów.



Rysunek A.3. Splotowa sieć neuronowa

Splotowa sieć neuronowa [9] przyjmuje na wejście obraz, który jest następnie przetwarzany przez kolejne warstwy. Warstwa splotowa wykonuje wielokrotnie operację splotu dyskretnego na obrazie wejściowym tworząc na wyjściu mapy cech. Operacja splotu dyskretnego w obszarach analizy obrazu wykorzystywana jest do filtracji. Następnie, przefiltrowane obrazy trafiają na nieliniową funkcję aktywacji, która przetwarza każdy piksel. Dodatkowo, po niektórych warstwach aktywacji umieszczana jest warstwa redukująca rozmiar, która zmniejsza liczbę pikseli w przetwarzanych obrazach. Wyjście ostatniej warstwy splotowej trafia na wielowarstwową sieć neuronową.

A.2. Definicje i Twierdzenia

Definicja A.1 ([16]). *Zbiór G z dobrze określonym na nim działaniem \circ nazywamy grupą jeśli spełnia on następujące własności*

- Wewnętrzność, $\forall a, b \in G : a \circ b \in G$
- Łączność, $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- Element neutralny, $\forall a \in G \exists e : a \circ e = a$
- Element odwrotny, $\forall a \in G \exists y : a \circ y = e$

Definicja A.2 ([22]). *Miech G będzie lokalnie zwartą grupą topologiczną. Wówczas lewo niezmienniczą Miarą Haara nazywamy miarę borełowską $\mu : \mathcal{B}(G) \rightarrow [0, \infty)$, taką, że*

- $\mu(K) < \infty$ dla dowolnego zbioru zwarteego $K \subset G$,
- $\forall_{B \in \mathcal{B}(G)} \mu(B) = \inf\{\mu(U) : B \subset U, U \text{ jest zowany}\}$,
- $\forall_{B \in \mathcal{B}(G)} \mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ jest zowany}\}$,
- $\forall_{U \in \mathcal{B}(G), U} - \text{otwarty } \mu(U) > 0$,
- $\forall_{g \in G} \forall_{B \in \mathcal{B}(G)} \mu(gB) = \mu(B)$.

Definicja A.3 ([23]). *Dla funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ Transformata Fouriera wyraża się wzorem*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx,$$

gdzie i to jednostka urojona, a $\langle x, \xi \rangle$ jest iloczynem skalarnym wektorów $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Transformacja Fouriera jest też oznaczana przez \mathcal{F} , wówczas transformata $\hat{f}(\xi)$ jest oznaczana przez $\mathcal{F}[f(x)](\xi)$.

Przykład A.3. W grupie multiplikatywnej (\mathbb{R}_*^+, \times) miara jest miara Harra $\frac{dx}{x}$.

Twierdzenie A.4 ([15]). *Harmoniki sferyczne Y_l^m, Y_p^q są ortogonalne*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \phi) Y_p^q(\theta, \phi) \sin \theta (d\theta) d\phi = \delta_{l,p}^{m,q} = \delta_{l,p} \delta_{m,q}, \quad (\text{A.1})$$

gdzie delta Kroneckera zadana jest jako

$$\delta_{l,p} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } l = p, \\ 0, & \text{jeżeli } l \neq p. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Twierdzenie A.5 ([6]). *Kiedy kula porusza się wokół jej środka, zawsze można znaleźć średnicę, której kierunek w pozycji przesuniętej jest taki sam jak w pozycji początkowej.*

W geometrii Twierdzenie A.5 wskazuje, że w przestrzeni trójwymiarowej, każde przemieszczenie bryły sztywnej tak, że punkt bryły sztywnej pozostaje stały, jest odpowiednikiem jednego obrotu wokół pewnej osi, która biegnie przez stały punkt. Oznacza to również, że złożenie dwóch rotacji jest również rotacją. Dlatego zbiór rotacji ma strukturę grupową, znaną jako grupa rotacji. W kategoriach algebry liniowej twierdzenie to mówi, że w przestrzeni trójwymiarowej dowolne dwa kartezjańskie układy współrzędnych o wspólnym początku są powiązane przez obrót wokół pewnej stałej osi. To oznacza, że iloczyn dwóch macierzy rotacji jest ponownie macierzą obrotu.

Bibliografia

- [1] Taco S. Cohen, Mario Geiger, Jonas Köhler, Max Welling. Spherical CNNs. 2018
- [2] Rodney A. Kennedy, Canberra, Parastoo Sadeghi. Hilbert Space Methods in Signal Processing. 108,136,227–254, 2013
- [3] Eirik Andreas Mork. The Fundamental Group of $\text{SO}(3)$, 2014
- [4] Jie Shen, Jie Xu, Pingwen Zhang, Approximations on $\text{SO}(3)$ by Wigner D-matrix and applications, 5, 2016.
- [5] Andrzej Sołtysiak, Wstęp do torii spektralnej. 9-21, 2016.
- [6] Bob Palais, Richard Palais, Stephen Rodi, A Disorienting Look at Euler's Theorem on the Axis of a Rotation. 9-21, 2016.
- [7] Kevin Gurney, An introduction to neural networks. 1997.
- [8] David Stutz, Learning Shape Completion from Bounding Boxes with CAD Shape Priors. 2017.
- [9] Arkadiusz Kwasigroch, Michał grochowski, Rozpoznanie obiektów przez głębokie sieci neuronowe. 2016.
- [10] F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy. 306-307 2016.
- [11] Van Rossum, G., Drake, F. L. (2009). Python 3 Reference Manual. Scotts Valley, CA: CreateSpace.
- [12] Harris, C.R., Millman, K.J., van der Walt, S.J. et al. Array programming with NumPy. Nature 585, 357–362 (2020)
- [13] J. D. Hunter, "Matplotlib: A 2D Graphics Environment", Computing in Science Engineering, vol. 9, no. 3, pp. 90-95, 2007.
- [14] Wikimedia Commons contributors, 'File:Spherical Harmonics deg3.png', Wikimedia

- Commons, the free media repository, 23 May 2021, 13:27 UTC, [accessed 20 June 2022]
- [15] Wojciech Jarosz, Efficient Monte Carlo Methods for Light Transport in Scattering Media, Appendix B 172, 2008
 - [16] Andrzej Białynicki-Birula, Zarys algebry. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1987
 - [17] Lingyan Hao et al. Automatic labeling of cortical sulci using spherical neural networks in a developmental cohort, 2020
 - [18] Fenqiang Zhao, et al. Spherical U-NET for infant cortical surface parcellation, 2019
 - [19] Fenqiang Zhao, et al. Unsupervised Learning for Spherical Surface Registration, 2020
 - [20] Hugo Barbaroux, et al. Encoding human cortex using spherical CNNs - A study on Alzheimer's disease classification, 2020
 - [21] Wouter Boomsma, Jes Frellsen, Spherical convolutions and their application in molecular modelling, 2017
 - [22] Jonathan Gleason, Existance and uniqueness of Haar measure, 2010
 - [23] Transformacja Fouriera. (2022, marzec 5). Wikipedia, wolna encyklopedia. Dostęp 18:08, lipiec 12, 2022