Problem komiwojażera dla symulowanego wyżarzania

referat

Kamil Król

244949

1. Opis problemu komiwojażera

1.1. Opis

Problem komiwojażera jest klasycznym przykładem problemu optymalizacyjnego. Należy on do problemów NP-trudnych, a oznacza to między innymi, że nie jest dotąd znany algorytm rozwiązujący ten problem w czasie wielomianowym. Zatem rozwiązanie tego problemu poprzez sprawdzenie wszystkich możliwości jest bardzo *kosztowne*. Mówiąc kolokwialnie – jest to problem bardzo trudny. Stąd właśnie wynika fakt, że to rozwiązania tego problemu często są używane mniej *kosztowne* heurystyki.
Problem polega na znalezieniu cyklu Hamiltona w pewnym ważonym grafie o jak najmniejszej sumie wag krawędzi. Problem często jest przedstawiany jako podróżowanie między miastami.
Formalnie:
Dane: lista miast (wierzchołków), odległości (wagi krawędzi) między każdymi dwoma miastami (wierzchołkami)
Szukane: najkrótsza ścieżka odwiedzająca każde miasto dokładnie raz powracająca do miasta startowego (cykl Hamiltona o minimalnej sumie wag).
Konieczne jest założenie, że rozważany graf jest spójny – z każdego miasta da się dojechać do dowolnego innego. Jeśli graf jest niespójny to cykl Hamiltona nie istnieje.

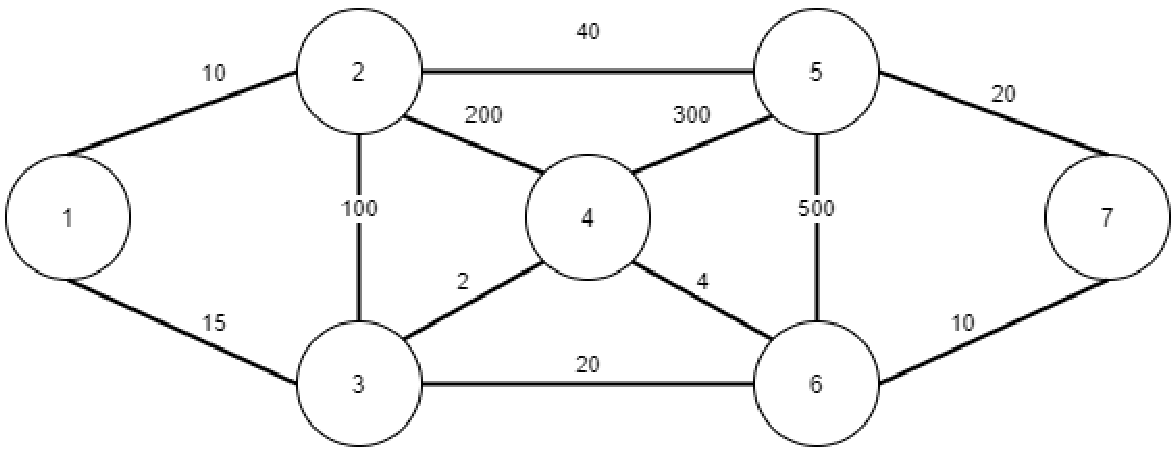
1.2. Przykład

Jest to mały przykład problemu komiwojażera. Na grafie poniżej (Rysunek 1.) można zauważyć kilka przykładowych cykli Hamiltona. Przez $c(x)$ oznaczmy sumę wag na cyklu x. Widać, że cykl τ_1 (Rysunek 2.) jest cyklem o najmniejszej sumie wag w tym grafie. Zatem można stwierdzić, że jest to optymalne rozwiązanie.

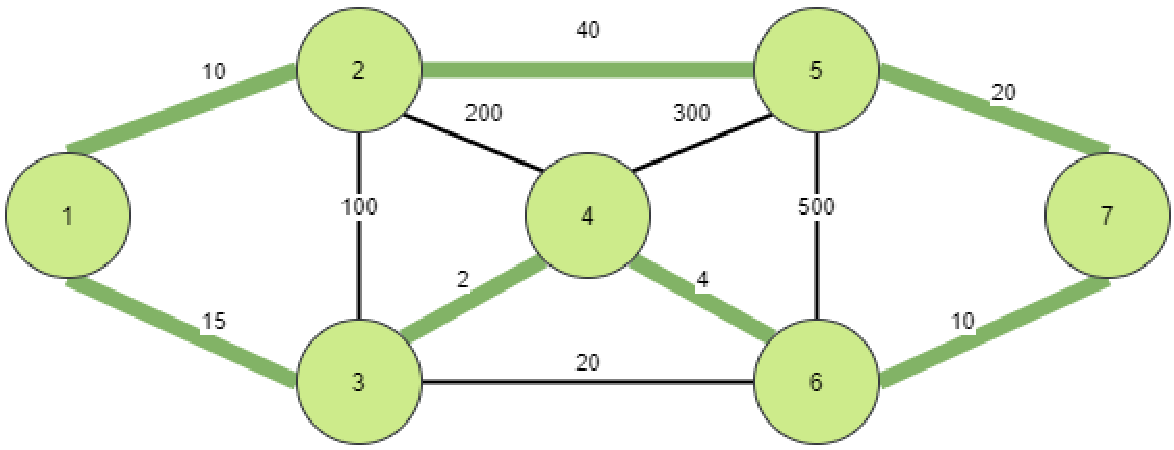
Przykładowe cykle Hamiltona w grafie na rysunku:

$$\tau_1 = 1 \to 2 \to 5 \to 7 \to 6 \to 4 \to 3 \to 1;\ c(\tau_1) = 101$$

$$\tau_2 = 1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 7 \to 6 \to 3 \to 1;\ c(\tau_2) = 575$$



Rysunek 1: Przykładowy ważony graf nieskierowany



Rysunek 2: Graf z rysunku 1. z zaznaczonym cyklem τ_1. Na zielono oznaczono krawędzie oraz wierzchołki przez które przechodzi cykl.

1.3. Możliwe modyfikacje

Problem ten może być modyfikowany na wiele różnych sposobów. Np. Skierowanie grafu (dopuszczenie dróg jednokierunkowych) nie zmienia istoty problemu ani jego złożoności (o ile graf skierowany jest nadal spójny w sensie spójności w grafie skierowanym). Dodanie wymagania aby graf był grafem pełnym nic nie zmienia, ponieważ TSP w formie przedstawionej wyżej (graf niekoniecznie pełny) można sprowadzić do grafu pełnego poprzez dodanie krawędzi o nieskończonej wadze – nie zmieni to optymalnego rozwiązania. Co stanie się jeżeli zrezygnujemy z konieczności powrotu do miasta startowego? Problem ten nadal jest NP-trudny. Aczkolwiek nie jest to już problem komiwojażera.

2. Symulowane wyżarzanie

2.1. Przypomnienie

Symulowane wyżarzanie jest metaheurystyką aproksymującą globalne minimum/maksimum pewnej danej funkcji. Jej idea oraz nazwa pochodzi od metody wyżarzania w metalurgii, w której to rozgrzewa się dany metal oraz stopniowo się go ochładza kontrolując stale temperaturę. Zbyt szybkie jego ochłodzenie nie da pożądanego efektu.
Dane: funkcja f do zoptymalizowania, rozwiązanie początkowe x_0, definicja sąsiedztwa $\mathcal{N}$, temperatura początkowa T_0, sposób ochładzania δ (np. liniowy), współczynni ochładzania β (jeśli potrzebny), funkcja P obliczająca prawdopodobieństwo zaakceptowania (z ang. acceptance probability) danego rozwiązania x w zależności od aktualnej temperatury T, energii aktualnego rozwiązania oraz energii danego x. Przez energię jakiegoś rozwiązania rozumiemy tutaj wartość funkcji w pewnym punkcie.
Metoda:

1. Za aktualne rozwiązanie x_c podstaw x_0 – rozwiązanie początkowe: $x_c \leftarrow x_0$,
2. Za aktualną temperaturę T podstaw T_0: $T \leftarrow T_0$,
3. Dopóki $T > 0$ wykonuj kroki:
   i) Weź nowego sąsiada aktualnego rozwiązania.
   Tzn. wybierz losowy element ze zbioru sąsiadów x_c: $x_n \leftarrow randomFrom(\mathcal{N}(x_c))$
   Wybrany x_n jest teraz kandydatem na nowe aktualne rozwiązanie,
   ii) Oblicz $p \leftarrow P(x_n, x_c, T)$ – prawdopodobieństwo zaakceptowania kandydata x_n,
   iii) Jeśli $p \geqslant uniform(0,1)$ to podstaw: $x_c \leftarrow x_n$. Jeśli nie, to nie rób nic.
   $uniform(0,1)$ oznacza wylosowanie liczby z przedziału $[0,1]$ zgodnie z rozkładem jednostajnym ciągłym,
   iv) Zaktualizuj aktualną temperaturę: $T \leftarrow \delta(T)$.
4. Zwróć aktualne rozwiązanie x_c.

2.2. Przykłady

Z racji tego, że w powyższym opisie symulowanego wyżarzania pojawia się dużo funkcji/operatorów, przedstawione tu zostaną proste ich przykłady.

generowanie rozwiązania początkowego x_0 – losowe rozwiązanie dopuszczalne. Dla TSP może być to losowy cykl Hamiltona w grafie.

definicja sąsiedztwa $\mathcal{N}(x)$ – Dla pewnej funkcji $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za sąsiedztwo x-a można przyjąć punkty oddalone od niego o pewnien ϵ. Dla TSP musi być to zbiór rozwiązań dopuszczalnych innych od x. Zatem mogą być to cykle Hamiltona w tym samym grafie będące np. permutacją x-a lub x-em z dwoma miastami zamienionymi kolejnością (1 inwersja).

sposób ochładzania δ – Może być to przykładowo jedna z funkcji (dla wszystkich funkcji β oznacza współczynnik ochładzania, i jest numerem aktualnie wykonywanej iteracji):

$$\delta_1(T, i) = T - i\beta, \text{(liniowe)}$$

$$\delta_2(T) = (1 - \beta) \cdot T$$

$$\delta_3(i) = \frac{c}{\log(1 + i)}, \text{ gdzie c jest pewną odpowiednio dobraną do problemu stałą.}$$

acceptance probability P – Może to być dowolna funkcja prawdopodobieństwa wpisująca się w ideę SA. Tzn. wraz ze spadkiem temperatury spada prawdopodobieństwo zaakceptowania gorszych rozwiązań. Przykładowa funkcja P to np. $P(x) = exp(\frac{f(x_c)-f(x)}{T})$ (T jest aktualną temperaturą).

3. Proponowane rozwiązanie problemu I

4. Proponowane rozwiązanie problemu II

5. Wnioski

6. Bibliografia

- **Performance Analysis of Simulated Annealing Cooling Schedules in the Context of Dense Image Matching** by Walid Mahdi, Seyyid Ahmed Medjahed, Mohammed Ouali.