Sprawozdanie

Obliczenia naukowe - lista 3

Kamil Król

244949

Zadanie 1

Celem tego zadania było powtórzenie zadania 5 z listy 1, ale ze zmianą danych i

Zadanie 2

Celem zadania

Zadanie 3

Celem zadania

Zadanie 4

Celem zadania było wyznaczenie pierwiastków równania $\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ używając wcześniej zaimplementowanych metod:

(a) metody bisekcji (z przedziałem początkowym $[1.5, 2.0]$),

(b) metody Newtona (z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$),

(c) metody siecznych (z przybliżeniami początkowymi $x_0 = 1.0$ i $x_1 = 2.0$).

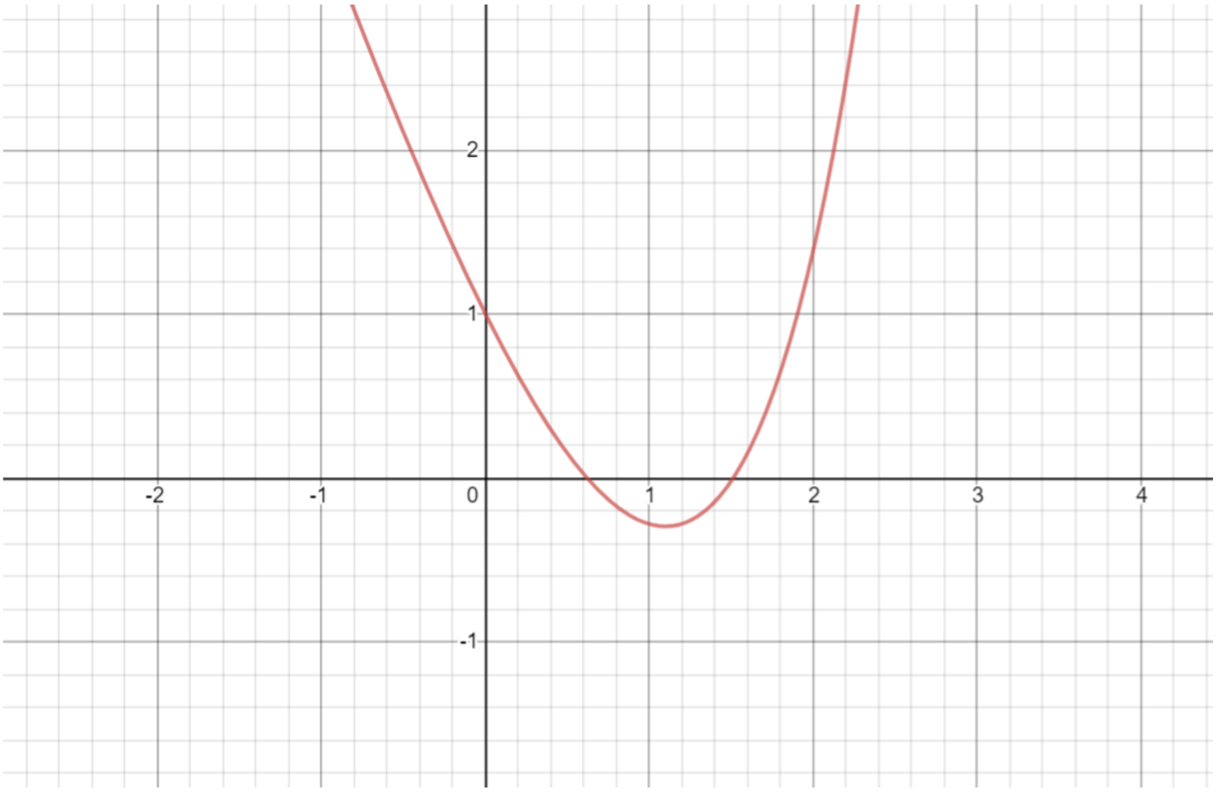
Dla wszystkich metod dokładności były wspólne tj. $\delta = \epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$. Za maksymalną liczbę iteracji przyjąłem 40. Zacząłem od obliczenia pochodnej funkcji f, $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}x$ potrzebnej w metodzie Newtona. Wyniki działania programów znajdują się w tabeli poniżej.

metoda	wartość pierwiastka - r	wartość funkcji w punkcie r - $f(r)$	liczba iteracji
metoda bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16
metoda Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4
metoda siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4

Widać, że różnica w ilości wykonanych iteracji między metodą bisekcji a dwoma pozostałymi jest znaczna. Metoda bisekcji okazała się najwolniejsza. Metody Newtona i siecznych okazały się w tym przypadku porównywalne jeśli chodzi o ilość iteracji potrzebną do osiągnięcia zadanej dokładności. Wyniki eksperymentu mają odzwierciedlenie w teorii. Współczynnik zbieżności dla metody siecznych wynosi 1 (zbieżność liniowa), dla metody Newtona 2 (zbieżność kwadratowa), a dla metody siecznych ≈ 1.62.

Zadanie 5

Celem zadania było użycie metody bisekcji do znalezienia, wartości zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$. Zadane dokładności wynosiły $\delta = \epsilon = 10^{-4}$. Zadanie można sprowadzić do problemu rozwiązania równania $e^x - 3x = 0$ lub równoważnie znalezienia miejsc zerowych funkcji $f(x) = e^x - 3x$. Pierwszą rzeczą jaką należało wykonać to dobrać przedział lub przedziały początkowe. Wiemy, że metoda bisekcji wymaga takiego przedziału, że wartości funkcji w jego końcach mają różny znak. W celu wyznaczenia przedziałów początkowych posłużyłem się poniższymi wykresami.



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = e^x - 3x$

Patrząc na wykresy wybrałem przedziały [0,1] oraz [1,2]. Oba z nich spełniają wymagania metody bisekcji. Znalezione pierwiastki to $x_1 = 0.619140625$ oraz $x_2 = 1.5120849609375$ co pokrywa się z tym co sugeruje wykres.

	x_1	x_2
Wartość pierwiastka r	0.619140625	1.5120849609375
Wartość funkcji $f(r)$	-9.066320343276146e-5	-7.618578602741621e-5
Liczba iteracji	9	13
Przedział	[0,1]	[1,2]

Widać, że oba pierwiastki występują dość blisko siebie oraz fakt, że znacznym ułatwieniem w znalezieniu przedziałów początkowych była znajomość przebiegu funkcji f. Na wykresie od razu widać było, że powinniśmy się spodziewać dokładnie dwóch miejsc zerowych oraz gdzie się ich spodziewać. Bez pomocy jaką była znajomość przebiegu funkcji f nie wiedzielibyśmy nawet ilu miejsc zerowych powinniśmy się spodziewać. Innym wnioskiem jest fakt, że znalezione miejsce zerowe zależy od wybranego przedziału początkowego. Ogólniejszym wnioskiem jest to, że bez dobrej znajomości przebiegu funkcji metoda bisekcji może być problematyczna do zastosowania.

W tabeli poniżej znajdują się wyniki eksperymentu drugiego, który polegał na wykonaniu 40 iteracji tego samego wyrażenia rekurencyjnego w arytmetyce Float32 oraz Float64 dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$, a później porównaniu otrzymanych wyników.

numer iteracji	Float32	Float64
1	0.0397	0.0397
2	0.15407173	0.15407173000000002
3	0.5450726	0.5450726260444213
4	1.2889781	1.2889780011888006
5	0.1715188	0.17151914210917552
6	0.5978191	0.5978201201070994
7	1.3191134	1.3191137924137974
8	0.056273222	0.056271577646256565
9	0.21559286	0.21558683923263022
10	0.7229306	0.722914301179573
11	1.3238364	1.3238419441684408
12	0.037716985	0.03769529725473175
13	0.14660022	0.14651838271355924
14	0.521926	0.521670621435246
15	1.2704837	1.2702617739350768
16	0.2395482	0.24035217277824272
17	0.7860428	0.7881011902353041
18	1.2905813	1.2890943027903075
19	0.16552472	0.17108484670194324
20	0.5799036	0.5965293124946907
21	1.3107498	1.3185755879825978
22	0.088804245	0.058377608259430724
23	0.3315584	0.22328659759944824
24	0.9964407	0.7435756763951792
25	1.0070806	1.315588346001072
26	0.9856885	0.07003529560277899
27	1.0280086	0.26542635452061003
28	0.9416294	0.8503519690601384
29	1.1065198	1.2321124623871897
30	0.7529209	0.37414648963928676
31	1.3110139	1.0766291714289444
32	0.0877831	0.8291255674004515
33	0.3280148	1.2541546500504441
34	0.9892781	0.29790694147232066
35	1.021099	0.9253821285571046
36	0.95646656	1.1325322626697856
37	1.0813814	0.6822410727153098
38	0.81736827	1.3326056469620293
39	1.2652004	0.0029091569028512065
40	0.25860548	0.011611238029748606

Z pierwszej tabeli widać, że zaburzenie wartości w 10 iteracji zmienia całkowicie wyniki w dalszych iteracjach. Od tego miejsca nie widać żadnej zależności między wynikami. Widać zatem, że w przypadku równania rekurencyjnego małe zaburzenie danych całkowicie zmieniło następne wyniki. Kolejna tabela pokazuje doświadczenie gdzie żadne zaburzenie nie zostało wprowadzone, jedyna różnica to arytmetyka w jakiej były wykonywane obliczenia. Widać, że na początku wartości są podobne, ale później tak jak w poprzednim eksperymencie zaczynają od siebie odbiegać dając na końcu zupełnie różne wyniki. Oba eksperymenty ukazują jak drobne błędy np. te związane z dokładnością przechowywanych danych mogą się kumulować i wpływać na wyniki. Jest to zjawisko chaosu w układach sprzężeń zwrotnych. Czym są układy sprzężeń zwrotnych? Są to układy gdzie dane wyjściowe jednego procesu są danymi wejściowymi dla kolejnego kroku obliczeń. Wnioskiem z zadania jest to, że to równanie rekurencyjne jest niestabilne. Ponadto widać, że zjawisko chaosu jest trudne lub wręcz niemożliwe do wyeliminowania - dokładność obliczeń możemy ulepszyć poprzez zwiększanie precyzji arytmetyki, ale dla każdej arytmetyki pojawi się moment, w którym obliczenia stracą dokładność.

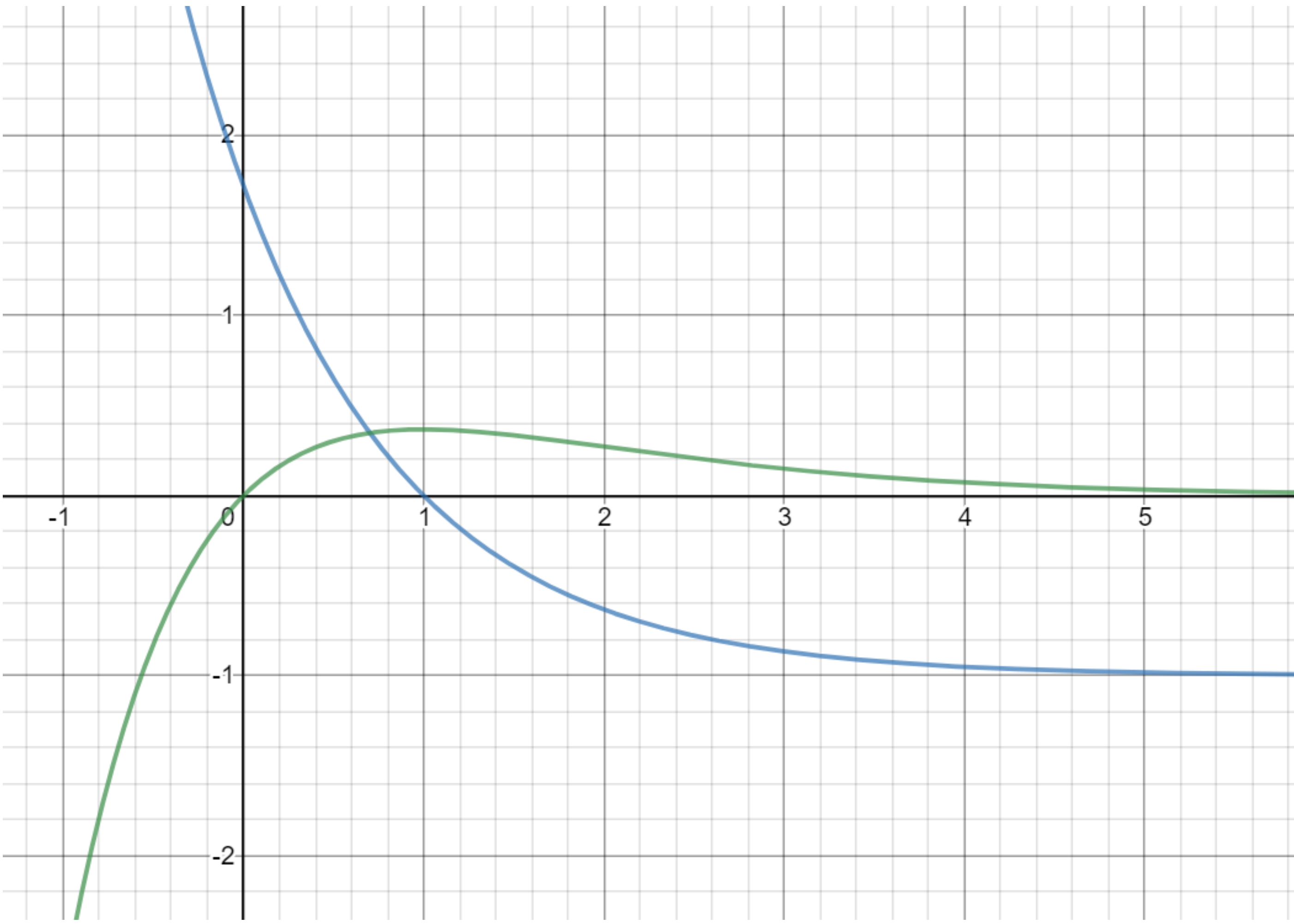
Zadanie 6

Celem zadania było sprawdzenie zachowania pewnego równania rekurencyjnego poprzez wykonanie 40 iteracji dla podanych w treści zadania zestawów danych. Równanie:

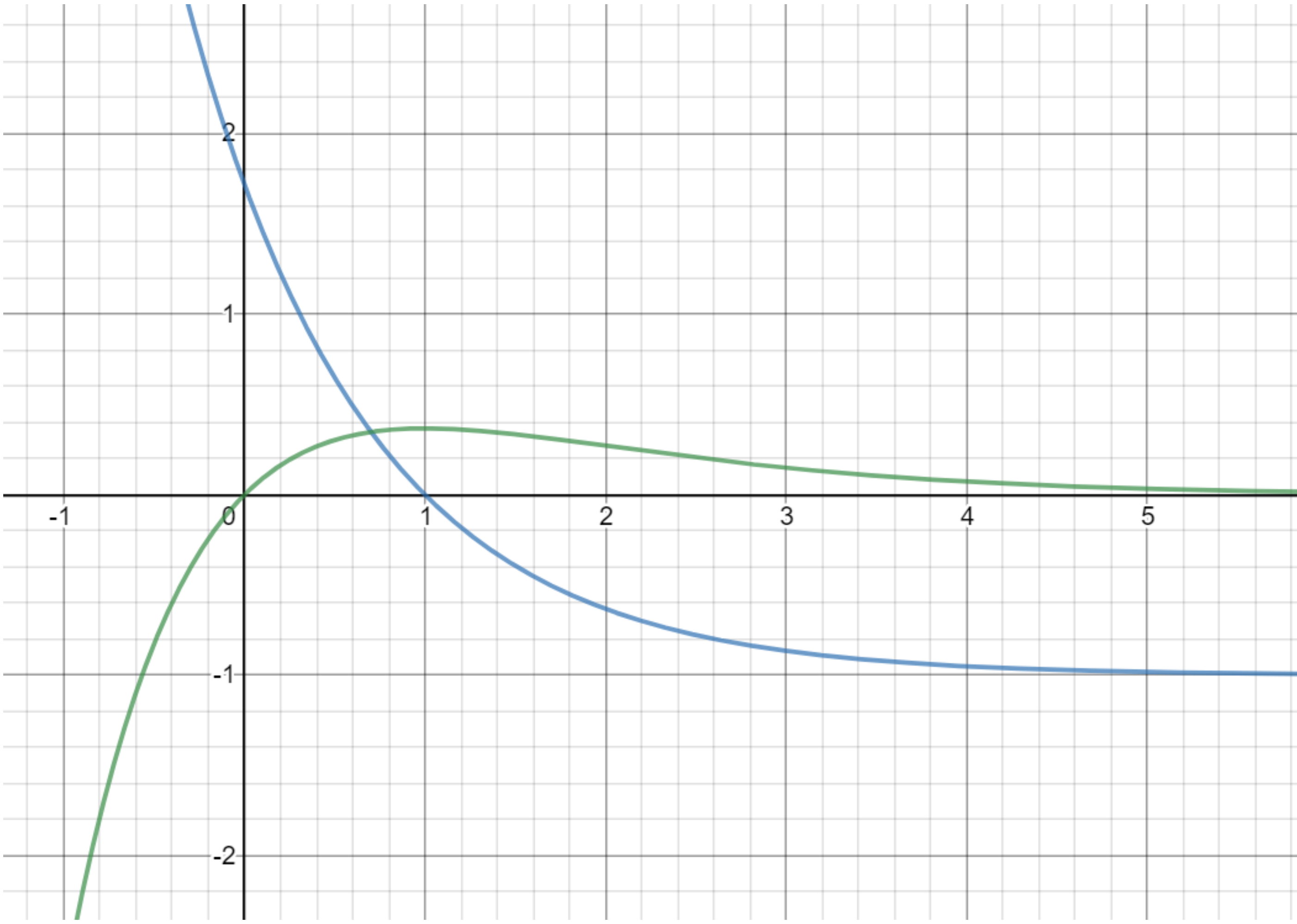
$$x_{n+1} := x_n^2 + c, \text{ dla } n = 0, 1, \ldots$$

Wyniki znajdują się w tabelach na końcu paragrafu.

Obserwując wyniki dla c = -2 widać, że dla $x_0 = 1$ oraz dla $x_0 = 2$ rekurencja okazała się stabilna. Inna rzecz jaką można zauważyć, to fakt, że dla wartości nieznacznie odchylonej od 2.0 tzn. $x_0 = 1.99999999999999$ wyniki są zupełnie różne niż dla $x_0 = 2$. Widać zatem bardzo dużą czułość na warunki początkowe. Obserwując wyniki dla $c = -1$ widać, że otrzymane ciągi dla $x_0 = 1$ jak i $x_0 = -1$ są identyczne. Wynika to z podnoszenia tej wartości do kwadratu. Ostatnie dwie kolumny pokazują sytuację gdzie oba ciągi po jakimś czasie się stabilizują. Zarówno dla $x_0 = 0.25$ jak i $x_0 = 0.75$ otrzymujemy naprzemienne ciągi -1 i 1. Poniżej iteracje graficzne.

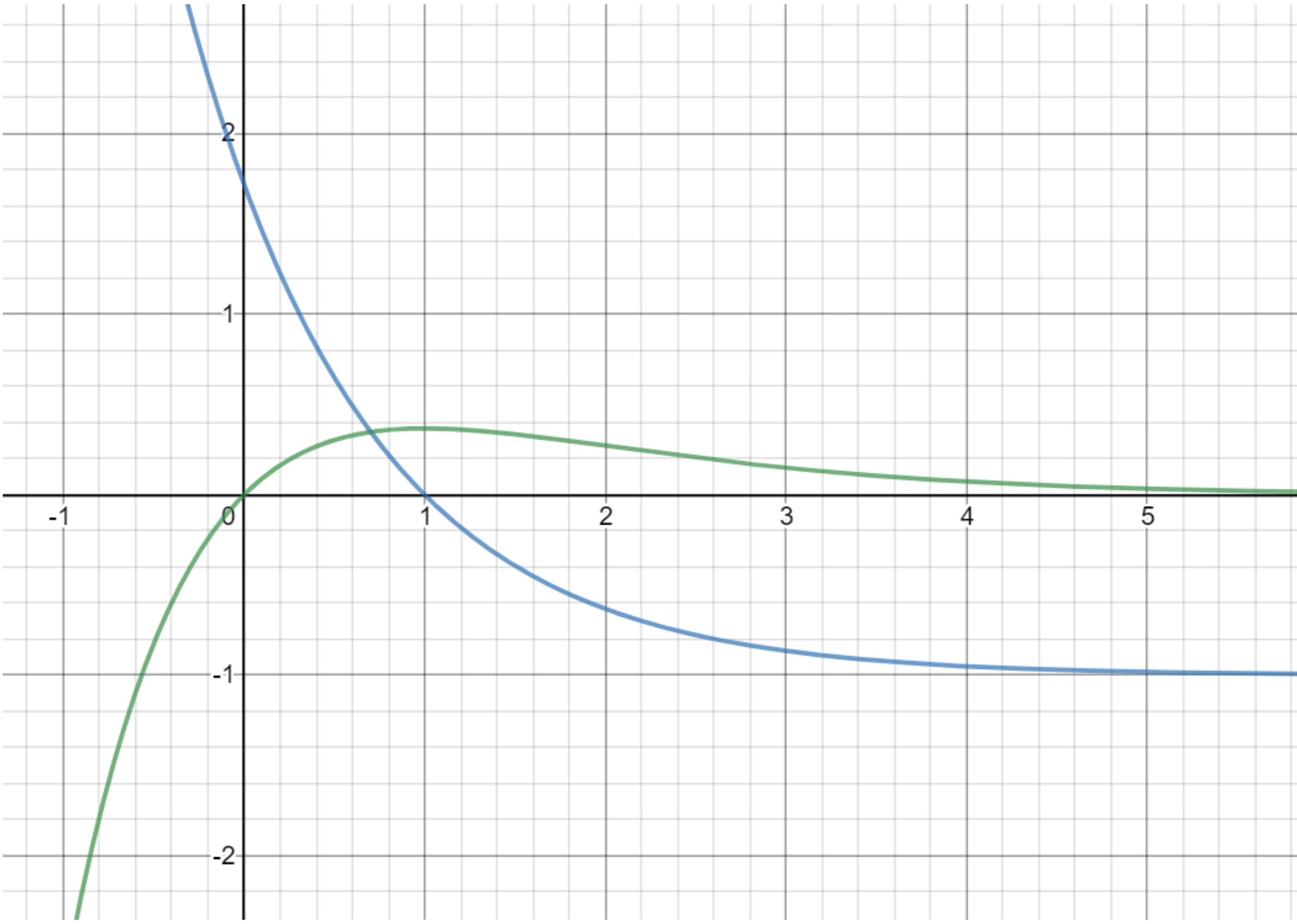


Rysunek 2: $c = -2$, $x_0 = 1$

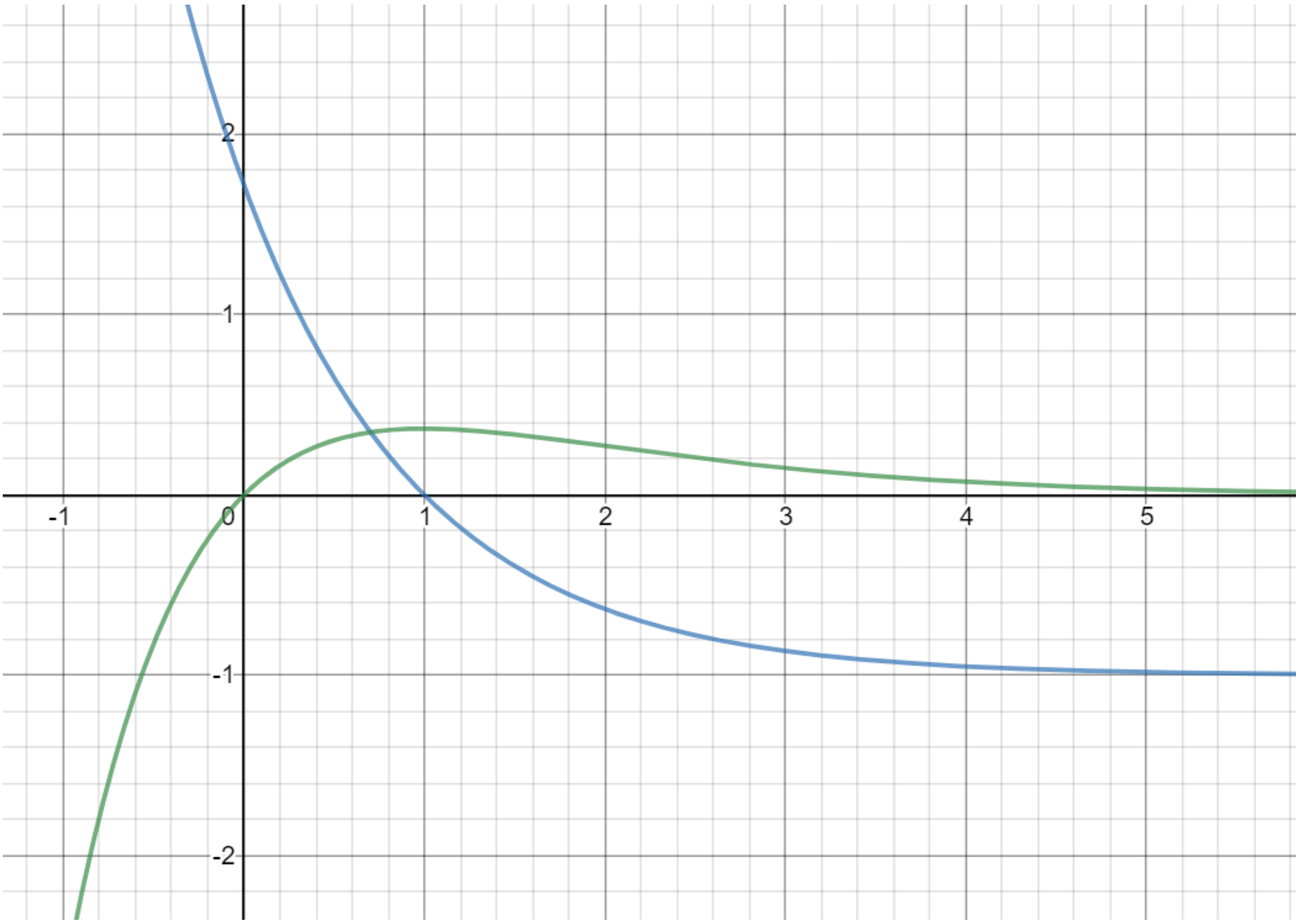


Rysunek 3: $c = -2$, $x_0 = -1$

Wnioski. Zauważmy, że w tym zadaniu również mamy do czynienia ze zjawiskiem sprzężenia zwrotnego. W całym zadaniu możemy wyróżnić 3 typy doświadczeń. Pierwszy z nich to dwa pierwsze doświadczenia oraz te z c = -1 i $x_0 \in \{-1, 1\}$, w którch otrzymano ciągi stałe lub naprzemienne, są to układy stabilne. Zauważmy też, że punkty -1 i 2 są punktami stałymi funkcji $x^2 - 2$. Właśnie dlatego w dwóch pierwszych doświadczeniach wartości zbiegają do tych wartości. Drugi typ to doświadczenie z $x_0 = 1.99999999999999$. Tutaj ciąg był chaotyczny. Jest to układ niestabilny. Trzeci typ doświadczenia reprezentują dwa ostatnie eksperymenty. W obu z nich układ początkowo był chaotyczny, ale po którymś kroku zaczął się stabilizować. Są to układy stabilne.



Rysunek 4: $c = -2$, $x_0 = 1.99999999999999$



Rysunek 5: $c = -1$, $x_0 = 1$

$c = -2$

numer iteracji	$x_0 = 1$	$x_0 = 2$	$x_0 = 1.99999999999999$
1	-1	2	1.99999999999996
2	-1	2	1.9999999999998401
3	-1	2	1.9999999999993605
4	-1	2	1.999999999997442
5	-1	2	1.9999999999897682
6	-1	2	1.9999999999590727
7	-1	2	1.999999999836291
8	-1	2	1.9999999993451638
9	-1	2	1.9999999973806553
10	-1	2	1.999999989522621
11	-1	2	1.9999999580904841
12	-1	2	1.9999998323619383
13	-1	2	1.9999993294477814
14	-1	2	1.9999973177915749
15	-1	2	1.9999892711734937
16	-1	2	1.9999570848090826
17	-1	2	1.999828341078044
18	-1	2	1.9993133937789613
19	-1	2	1.9972540465439481
20	-1	2	1.9890237264361752
21	-1	2	1.9562153843260486
22	-1	2	1.82677862987391
23	-1	2	1.3371201625639997
24	-1	2	-0.21210967086482313
25	-1	2	-1.9550094875256163
26	-1	2	1.822062096315173
27	-1	2	1.319910282828443
28	-1	2	-0.2578368452837396
29	-1	2	-1.9335201612141288
30	-1	2	1.7385002138215109
31	-1	2	1.0223829934574389
32	-1	2	-0.9547330146890065
33	-1	2	-1.0884848706628412
34	-1	2	-0.8152006863380978
35	-1	2	-1.3354478409938944
36	-1	2	-0.21657906398474625
37	-1	2	-1.953093509043491
38	-1	2	1.8145742550678174
39	-1	2	1.2926797271549244
40	-1	2	-0.3289791230026702

$c = -1$

numer iteracji	$x_0 = 1$	$x_0 = -1$	$x_0 = 0.25$	$x_0 = 0.75$
1	0	0	-0.4375	-0.9375
2	-1	-1	-0.80859375	-0.12109375
3	0	0	-0.3461761474609375	-0.9853363037109375
4	-1	-1	-0.8801620749291033	-0.029112368589267135
5	0	0	-0.2253147218564956	-0.9991524699951226
6	-1	-1	-0.9492332761147301	-0.0016943417026455965
7	0	0	-0.0989561875164966	-0.9999971292061947
8	-1	-1	-0.9902076729521999	-5.741579369278327e-6
9	0	0	-0.01948876442658909	-0.9999999999670343
10	-1	-1	-0.999620188061125	-6.593148249578462e-11
11	0	0	-0.0007594796206411569	-1.0
12	-1	-1	-0.9999994231907058	0.0
13	0	0	-1.1536182557003727e-6	-1.0
14	-1	-1	-0.9999999999986692	0.0
15	0	0	-2.6616486792363503e-12	-1.0
16	-1	-1	-1.0	0.0
17	0	0	0.0	-1.0
18	-1	-1	-1.0	0.0
19	0	0	0.0	-1.0
20	-1	-1	-1.0	0.0
21	0	0	0.0	-1.0
22	-1	-1	-1.0	0.0
23	0	0	0.0	-1.0
24	-1	-1	-1.0	0.0
25	0	0	0.0	-1.0
26	-1	-1	-1.0	0.0
27	0	0	0.0	-1.0
28	-1	-1	-1.0	0.0
29	0	0	0.0	-1.0
30	-1	-1	-1.0	0.0
31	0	0	0.0	-1.0
32	-1	-1	-1.0	0.0
33	0	0	0.0	-1.0
34	-1	-1	-1.0	0.0
35	0	0	0.0	-1.0
36	-1	-1	-1.0	0.0
37	0	0	0.0	-1.0
38	-1	-1	-1.0	0.0
39	0	0	0.0	-1.0
40	-1	-1	-1.0	0.0