

[POP] Dokumentacja wstępna projektu

Zadanie 13 – karty na prostokątnej planszy o wymiarach $4 \times n$.

Michał Szwejk

331445

Kamil Marszałek

331401

1 Polecenie

W każdej komórce planszy prostokątnej o rozmiarze $4 \times n$ wpisano liczbę całkowitą z_{ij} . Masz do dyspozycji m kart, które musisz rozmieścić na planszy. Poprawny rozkład kart zakłada, że żadna para kart nie może zajmować komórek sąsiadujących w pionie lub poziomie. Twoim zadaniem jest znalezienie takiego rozkładu kart na planszy, aby suma liczb zapisanych w komórkach planszy była jak największa. Nie musisz wykorzystywać wszystkich kart.

2 Reprezentacja rozwiązania

Rozwiązanie jest reprezentowane jako macierz zmiennych binarnych $x_{ij} \in \{0, 1\}$, gdzie i i j odpowiadają wierszowi i kolumnie na planszy. Podejście to można dodatkowo uprościć wykorzystując wektory mask bitowych – każdej kolumnie odpowiada liczba całkowita dodatnia, której reprezentacja binarna odwzorowuje przyjęte wartości.

3 Programowanie dynamiczne

Zagadnienie można rozwiązać wykorzystując programowanie dynamiczne. Jako podproblem definiujemy maksymalizację sumy wartości obecnej kolumny i wartości zakumulowanej wynikającej z rozwiązania poprzednich podproblemów. Dobierając maksymalne lokalne rozwiązanie należy uwzględnić ograniczenie sąsiedztwa (analizujemy dwie kolejne maski, ich iloczyn bitowy musi być równy 0) i liczby kart (suma użytych kart nie może przekraczać m).

4 Strategia zachłanna

Z planszy wybieramy kolejno komórki, dla których opisująca ją wartość liczbową z_{ij} jest największa. Zaznaczamy je (dołączamy do rozwiązania) i usuwamy ich sąsiadów w pionie i poziomie tak długo, aż ograniczenie na liczbę kart m przestanie być spełnione. Po znalezieniu wstępnego rozwiązania strategią zachłanną dodatkowo je ulepszamy naprawiając lokalnie regiony o wymiarach $k \times 4$ wykorzystując programowanie dynamiczne. Takie podejście pozwoli nam

naprawić miejsca, w których suma wartości sąsiadów danego pola jest większa niż ono same (mimo iż pojedynczo ma większą wartość). Regiony wybierane są losowo, a ich rozmiar i liczba wszystkich lokalnych poprawek są parametrami algorytmu.

5 Algorytm A*

Algorytm A* łączy podejście programowania dynamicznego z przeszukiwaniem kierowanym heurystyką. Każdy stan opisuje częściowe rozwiązanie (aktualną kolumnę, maskę bitową i liczbę użytych kart), a jego ocena wyrażona jest wzorem:

$$f(s) = g(s) + h(s),$$

gdzie $g(s)$ oznacza uzyskany dotąd zysk, a $h(s)$ szacuje maksymalny możliwy zysk w dalszej części planszy.

Heurystyka $h(s)$ obliczana jest za pomocą *blokowego programowania dynamicznego* — plansza dzielona jest na bloki (np. po 10 kolumn), dla których lokalnie wyznaczane są maksymalne wartości zgodne z ograniczeniami sąsiedztwa i liczby kart. Poza bieżącym blokiem wartości heurystyki są rozszerzane (*propagowane*) o globalną sumę największych dodatnich elementów planszy, co gwarantuje, że $h(s)$ nigdy nie przeszacowuje wartości optymalnej. Dzięki temu A* analizuje znacznie mniej stanów niż pełne DP, zachowując poprawność i optymalność wyniku.

6 Planowane eksperymenty

W eksperymentach porównamy jakość i czas działania zaproponowanych algorytmów na zestawie instancji o różnych rozmiarach planszy i liczbie kart.