Interpolacja

Kamil Śliwiński 193740

May 2024

1 Wprowadzenie

Celem projektu jest implementacja dwóch metod aproksymacji interpolarnej,a nastepnie należy przeprowadzić kilka zróżnicowanych testów w celu oceny przydatności obu metod przy określaniu profilu wysokościowego testowanych tras. Pierwsza metoda wykorzystuje wielomian interpolacyjny Lagrange'a ,druga funkcje sklejane trzeciego stopnia.

2 Opis Metod

2.1 Interpolacja Lagrange'a

Interpolacja Lagrange'a polega na znalezieniu wielomianu $P(x)$ stopnia $n-1$, który przechodzi przez n danych punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$. Wielomian ten jest wyrażony jako suma iloczynów współczynników Lagrange'a $L_i(x)$ oraz wartości funkcji w punktach danych y_i:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i L_i(x)$$

gdzie $L_i(x)$ to współczynniki Lagrange'a definiowane jako:

$$L_i(x) = \prod_{0 \leq j < n j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Kroki w Interpolacji Lagrange'a

1. **Dane wejściowe:** Zbiór n punktów danych $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$.
2. **Konstrukcja wielomianów bazowych $L_i(x)$:** Każdy wielomian bazowy $L_i(x)$ jest iloczynem wyrazów $\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ dla wszystkich $j \neq i$.
3. **Konstrukcja wielomianu interpolacyjnego:** Wielomian interpolacyjny $P(x)$ jest suma iloczynów wartości y_i oraz odpowiadajacych im wielomianów bazowych $L_i(x)$.

Zalety i Wady Interpolacji Lagrange'a

Zalety:

- Prosta i bezpośrednia metoda do konstrukcji wielomianów interpolacyjnych.
- Łatwa implementacja w jezykach programowania.

Wady:

- Wysoka złożoność obliczeniowa dla dużej liczby punktów danych (skalowanie z $\mathcal{O}(n^2)$).
- Problemy numeryczne dla dużych zbiorów danych (niestabilność i wrażliwość na błedy zaokragleń).
- Dla dużych n wielomian interpolacyjny może oscylować (efekt Rungego).

Interpolacja Lagrange'a jest powszechnie używana w analizie numerycznej, naukach inżynierskich oraz do aproksymacji funkcji i rozwiazywania problemów z danymi dyskretnymi.

2.2 Interpolacja funkcjami sklejanymi

Interpolacja funkcjami sklejanymi (ang. spline interpolation) jest technika numeryczna stosowana do znalezienia funkcji, która dokładnie przechodzi przez dane punkty, ale z wieksza gładkościa niż w przypadku interpolacji wielomianowej. W szczególności, funkcje sklejane 3 stopnia (ang. cubic splines) sa czesto stosowane ze wzgledu na ich korzystne właściwości.

Interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia polega na znalezieniu ciagu funkcji wielomianowych 3 stopnia, które sa sklejane w taki sposób, aby zapewnić gładkość i ciagłość w określonych punktach. Każdy wielomian opisuje fragment danych pomiedzy dwoma sasiednimi punktami danych.

Załóżmy, że mamy zbiór n punktów danych $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$. Interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia polega na znalezieniu wielomianów $S_i(x)$ stopnia 3 dla $i = 0, 1, \ldots, n-2$, które spełniaja nastepujace warunki:

1. **Interpolacja:** Każdy wielomian $S_i(x)$ przechodzi przez dwa kolejne punkty danych, tj. $S_i(x_i) = y_i$ i $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$.
2. **Gładkość:** Funkcje sklejane maja ciagłe pierwsze i drugie pochodne na całym przedziale interpolacji, tj. $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$ oraz $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$.
3. **Warunki brzegowe:** Dodatkowe warunki sa stosowane na brzegach przedziału, np. warunki naturalne $S_0''(x_0) = 0$ i $S_{n-2}''(x_{n-1}) = 0$.

Konstrukcja Funkcji Sklejanych 3 Stopnia

Wielomiany sklejane 3 stopnia maja postać:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

Współczynniki a_i, b_i, c_i, i d_i sa obliczane tak, aby spełniały powyższe warunki. Proces ten zwykle obejmuje rozwiazanie układu równań liniowych.

Zalety i Wady Interpolacji Funkcjami Sklejanymi 3 Stopnia

Zalety:

- Zapewnia wieksza gładkość niż interpolacja wielomianowa, co jest korzystne w wielu zastosowaniach.
- Unika problemu oscylacji znanego z interpolacji wielomianowej wysokiego stopnia (efekt Rungego).
- Może być efektywnie obliczana przy użyciu macierzy trójdiagonalnych.

Wady:

- Wymaga rozwiazania układu równań liniowych, co może być obciażajace obliczeniowo dla bardzo dużych zbiorów danych.
- Sklejane funkcje moga być mniej intuicyjne i trudniejsze do interpretacji niż pojedyncze wielomiany.

Interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia jest powszechnie stosowana w grafice komputerowej, analizie sygnałów, przetwarzaniu obrazów oraz w innych dziedzinach inżynierii i nauki, gdzie wymagana jest gładka aproksymacja danych.

3 Trasa 1 - Kanion Kolorado

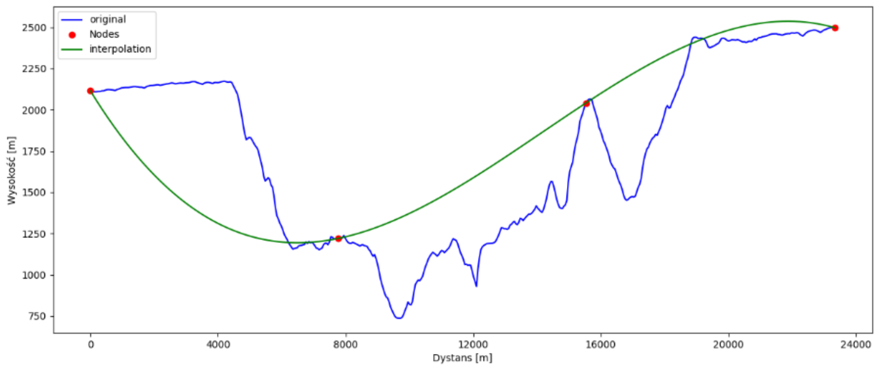

Figure 1: Interpolacja Lagrange'a dla 4 wezłów

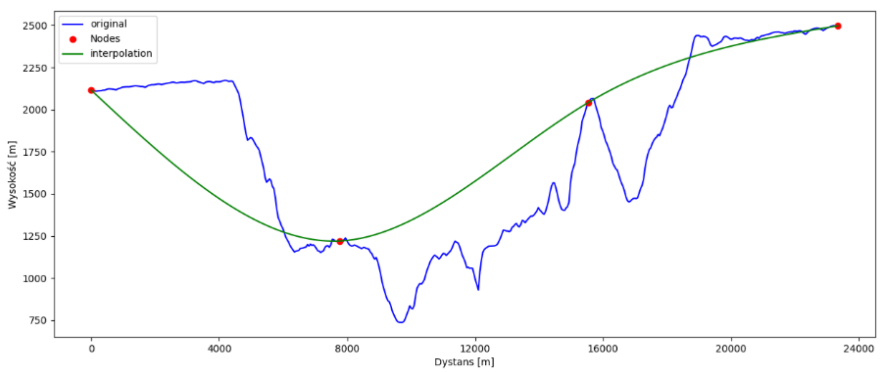

Figure 2: Interpolacja dla 4 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

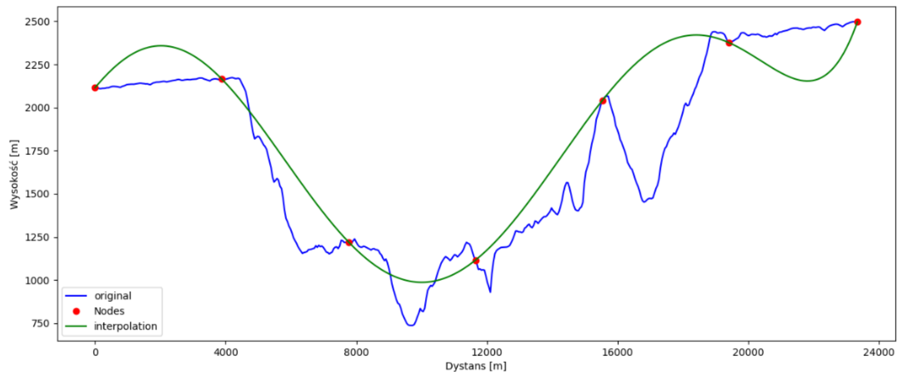

Figure 3: Interpolacja Lagrange'a dla 7 wezłów

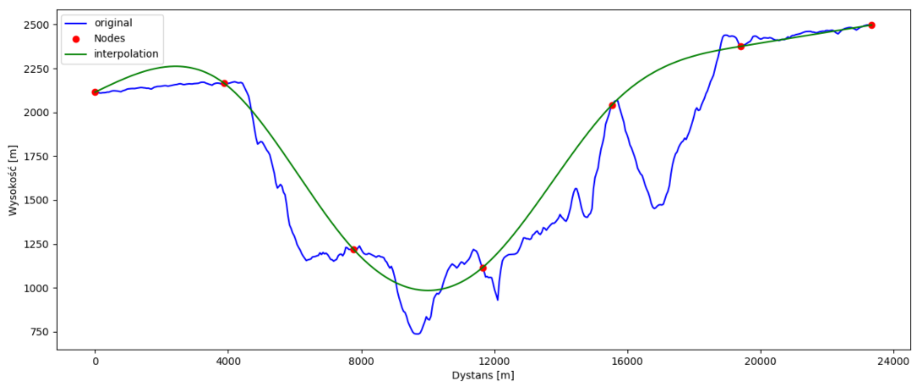

Figure 4: Interpolacja dla 7 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

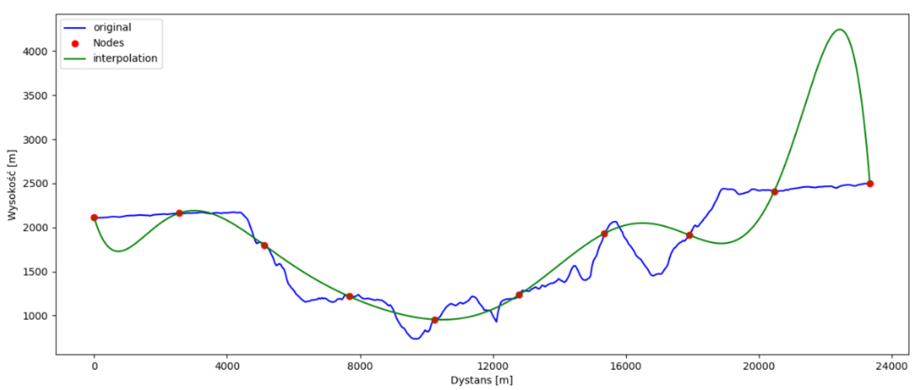

Figure 5: Interpolacja Lagrange'a dla 10 wezłów

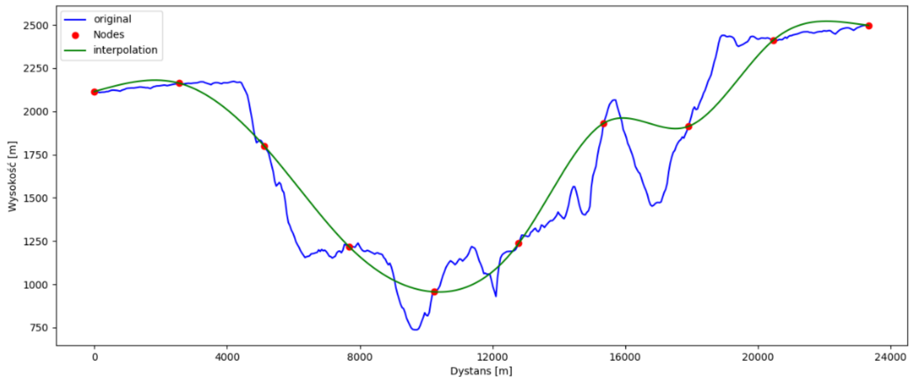

Figure 6: Interpolacja dla 10 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

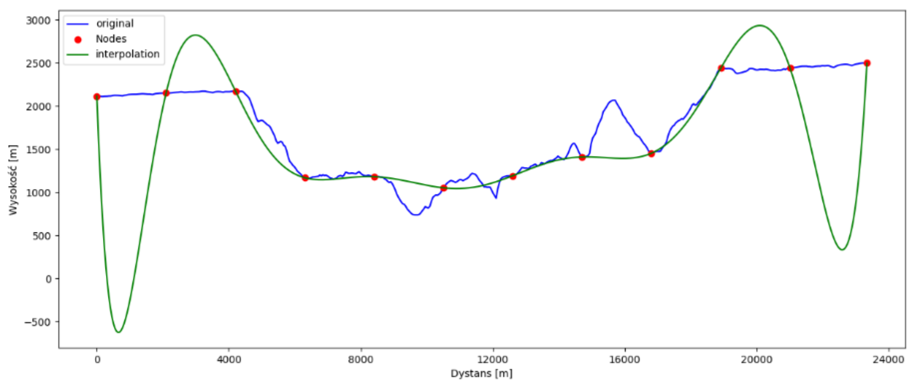

Figure 7: Interpolacja Lagrange'a dla 12 wezłów

W tym przypadku Interpolacja Lagrange'a dla wiekszej liczby wezłów nie ma sensu z powodu coraz wiekszego efektu Rungego ,który całkowicie zaburza skale wykresu i uniemożliwia jego intrepretacje.

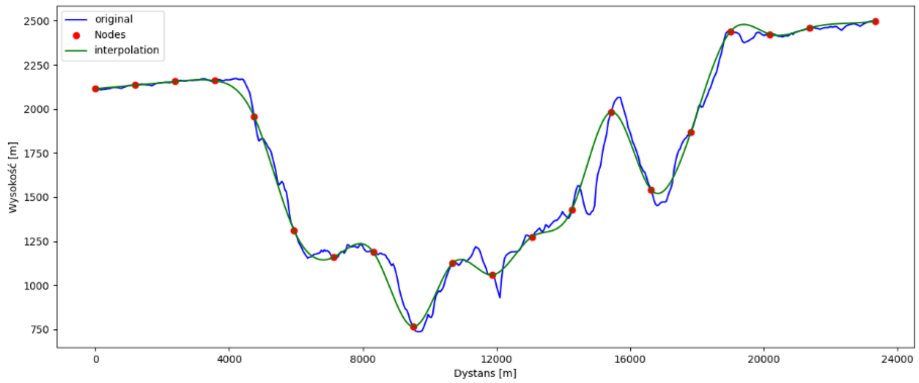

Figure 8: Interpolacja dla 20 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

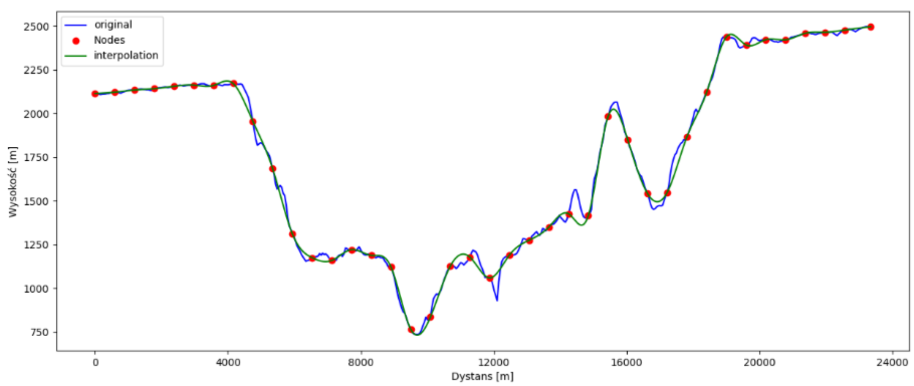

Figure 9: Interpolacja dla 40 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

W przypadku Interpolacji funkcjami sklejanymi dla coraz wiekszej ilości wezłów interpolacja staje sie coraz lepsza .Z tego powodu różnica w interpolacjach (Figure 8 i Figure 9) jest stosunkowo niewielka mimo że liczba wezłów została podwojona. Dla tak dużej ilości wezłów interpolacja jest wyjatkowo skuteczna i bardzo dobrze oddaje oryginalny wykres.

4 Trasa 2 - Gdańsk Spacerniak

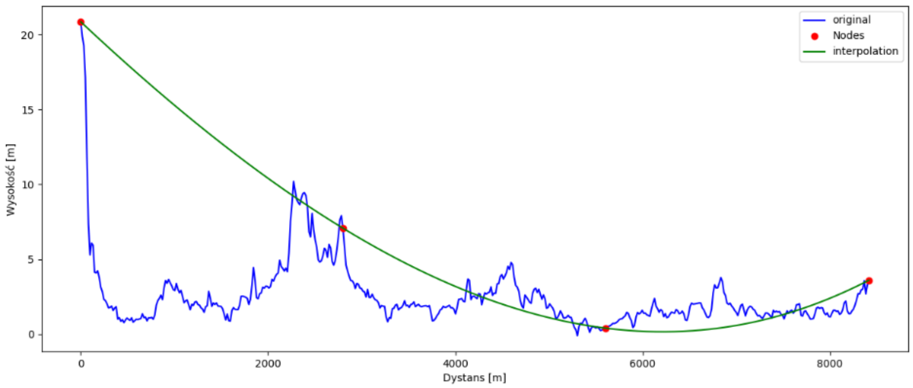

Figure 10: Interpolacja Lagrange'a dla 4 wezłów

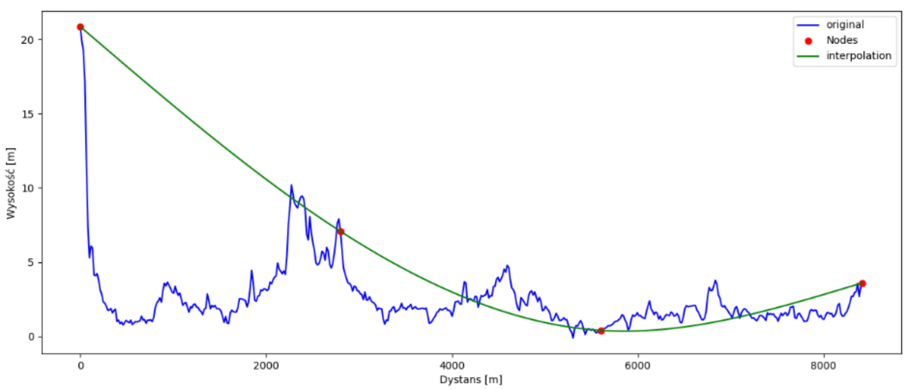

Figure 11: Interpolacja dla 4 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

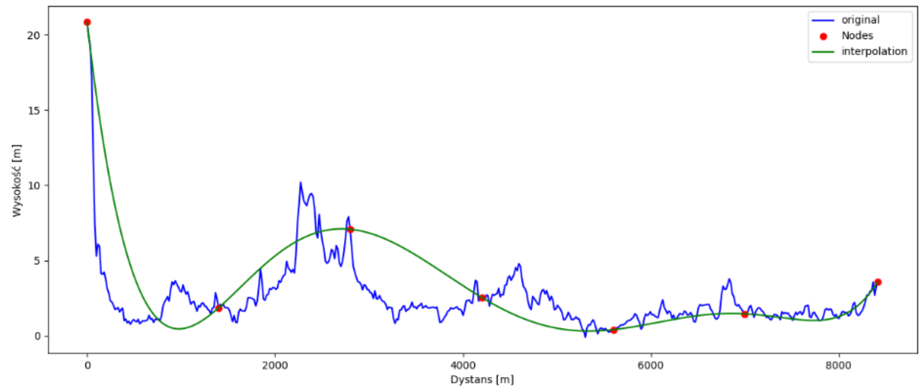

Figure 12: Interpolacja Lagrange'a dla 7 wezłów

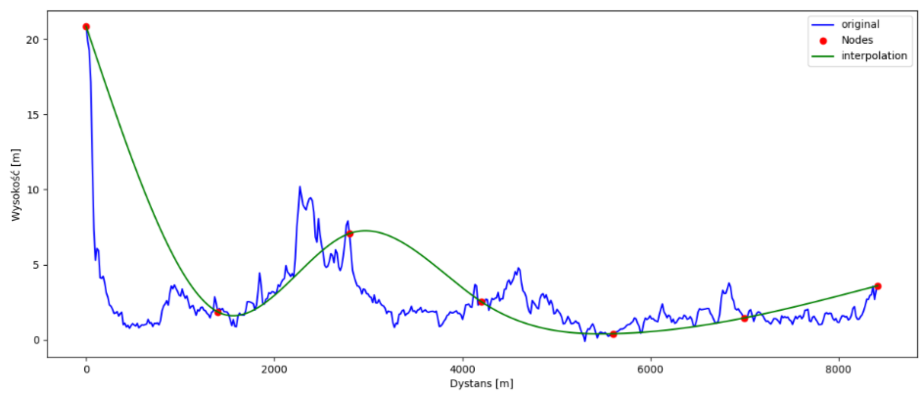

Figure 13: Interpolacja dla 7 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

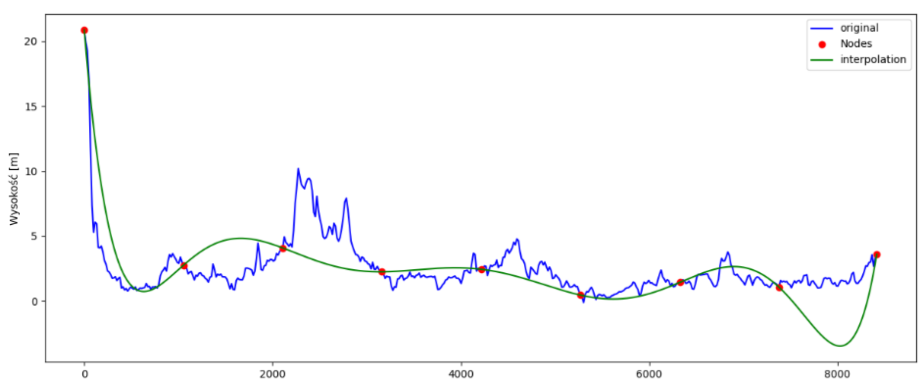

Figure 14: Interpolacja Lagrange'a dla 9 wezłów

Wykres interpolacji Lagrange'a dla 7 (Figure 12)oraz dla 9 wezłów(Figure 14) dobrze ilustruje że w przypadku tej metody wieksza ilość wezłów czyli wielomain interpolacyjny wyższego stopnia wcale nie oznacza lepszej aproksymacji. Ma na to wpływ efekt Rungego oraz fakt że przy równomiernym rozkładzie wezłów możemy dosyć niefortunnie je wyznaczyć co pogorszy nasze rezultaty.

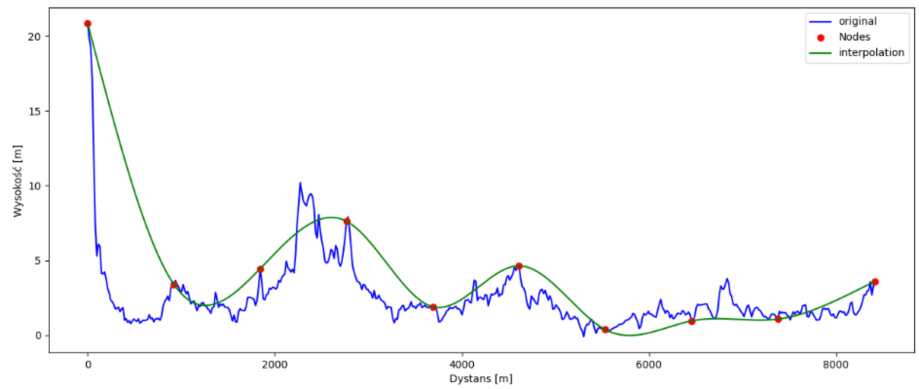

Figure 15: Interpolacja dla 10 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

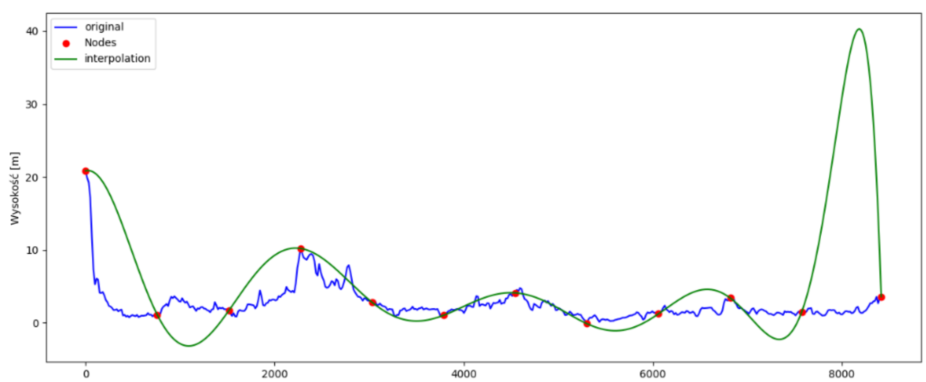

Figure 16: Interpolacja Lagrange'a dla 12 wezłów

Widać że dla coraz wiekszej ilości wezłów efekt Rungego zaczyna wywierać wpływ już nie tylko na krańcowe przedziały ale też i te znajdujace sie coraz bliżej środka co zaweża nam zakres wykresu który wiernie interpoluje oryginalna funkcje.Dalsze zwiekszanie liczby wezłów nie ma już dla tej metody sensu.

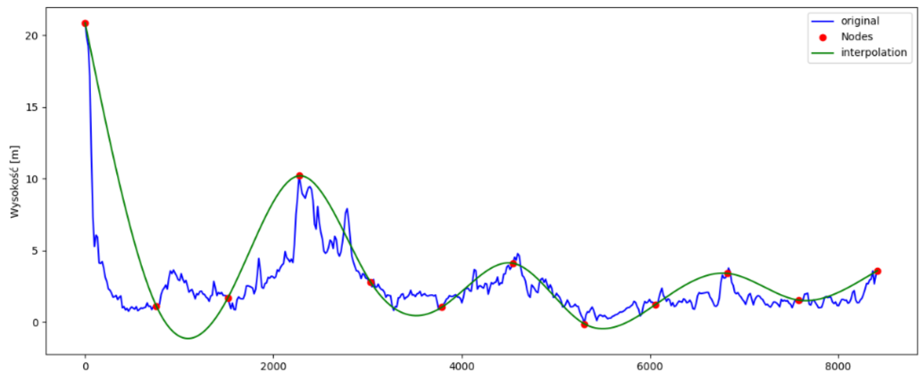

Figure 17: Interpolacja dla 12 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

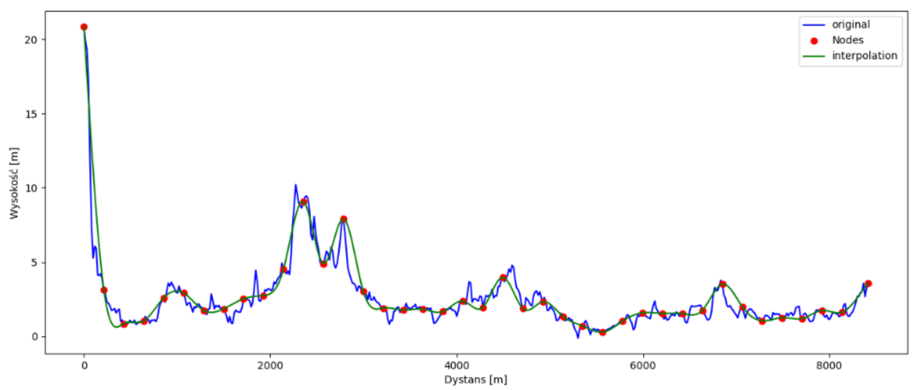

Figure 18: Interpolacja dla 40 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

Dla splajnów wnioski sa podobne jak dla poprzedniej trasy ,zwiekszanie liczby wezłów powoduje lepsze przybliżenie funkcji a dla około 40 wezłów interpolacja jest już bardzo wierna funkcji oryginalnej.

5 Trasa 3 - stała

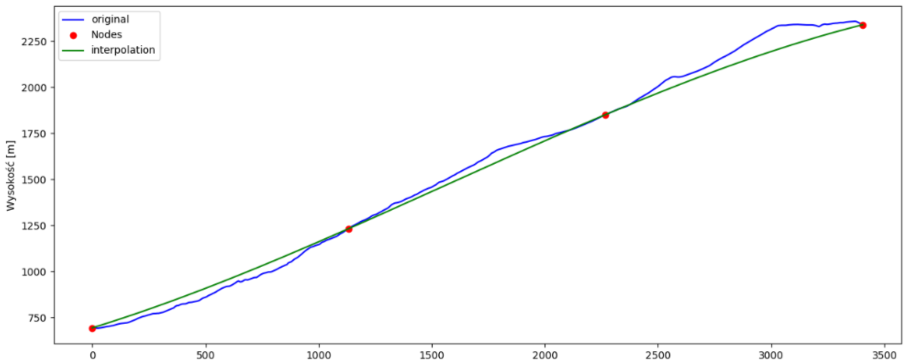

Figure 19: Interpolacja Lagrange'a dla 4 wezłów

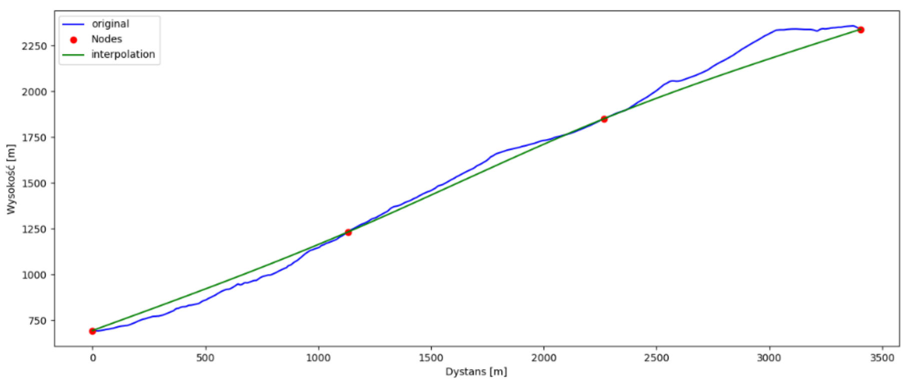

Figure 20: Interpolacja dla 4 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

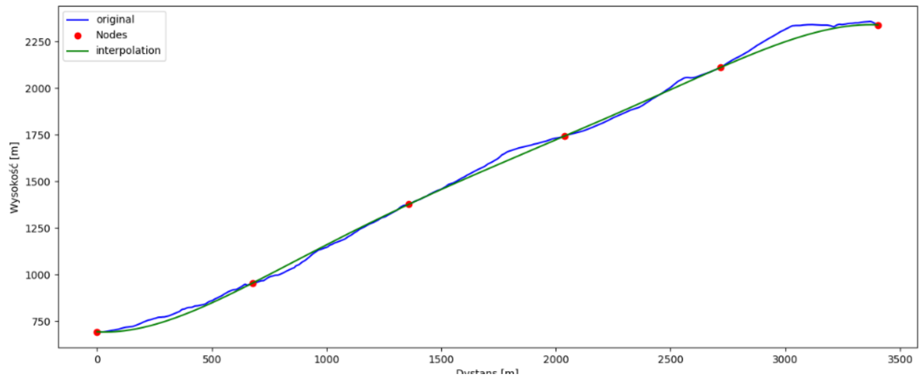

Figure 21: Interpolacja Lagrange'a dla 6 wezłów

Interpolacja Lagrange'a dla nieskomplikowanej funkcji daje bardzo dobre efekty nawet dla małej liczby wezłów.

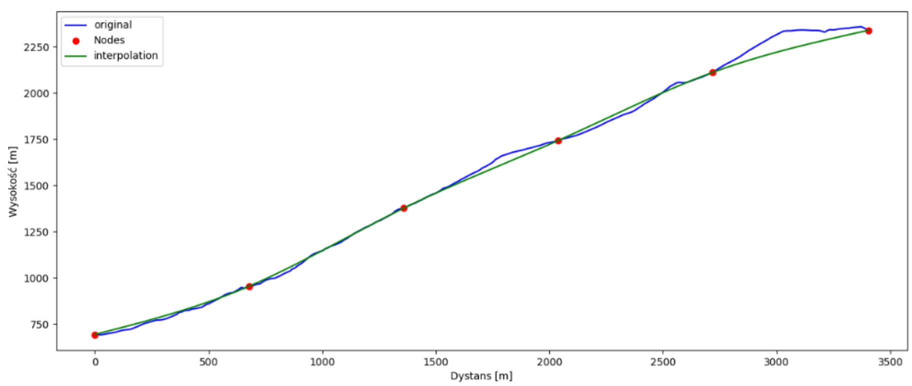

Figure 22: Interpolacja dla 6 wezłów funkcjami sklejanymi (splajny)

Powyższe wykresy pokazuja że funkcje sklejane radza sobie równie dobrze z mniej zaawansowanymi funkcjami co czyni je uniwersalna metoda.

6 Analiza dodatkowa - Rozkład wezłów Czebyszewa

Rozkład wezłów Czebyszewa jest technika używana w interpolacji wielomianowej, która pozwala na minimalizowanie błedów interpolacji, szczególnie w przypadku dużej liczby wezłów. Wezły Czebyszewa sa rozmieszczone w taki sposób, że gestość punktów jest wieksza na końcach przedziału interpolacji, co pomaga zmniejszyć efekt Rungego, czyli oscylacje interpolowanego wielomianu na brzegach przedziału.

Wezły Czebyszewa w przedziale $[-1, 1]$ definiuje sie jako:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

gdzie n to liczba wezłów.

6.1 Interpolacja wielomianowa z użyciem wezłów Czebyszewa

W celu wykonania interpolacji wielomianowej z użyciem wezłów Czebyszewa, najpierw należy obliczyć współrzedne wezłów według powyższego wzoru. Nastepnie, można zastosować klasyczne metody interpolacji, takie jak interpolacja Lagrange'a lub metoda Newtona, przy użyciu wyznaczonych wezłów.

6.2 Zalety wezłów Czebyszewa

Wezły Czebyszewa maja kilka ważnych zalet:

- Minimalizuja maksymalny bład interpolacji.
- Redukuja oscylacje wielomianu interpolacyjnego, zwłaszcza na brzegach przedziału.
- Sa łatwe do wyznaczenia i implementacji w algorytmach numerycznych.

6.3 Przykład

Poniżej przedstawiamy przykład wyznaczania wezłów Czebyszewa dla $n = 5$ w przedziale $[-1, 1]$:

$$x_1 = \cos\left(\frac{1}{10}\pi\right) \approx 0.9511, \quad x_2 = \cos\left(\frac{3}{10}\pi\right) \approx 0.5878, \quad x_3 = \cos\left(\frac{5}{10}\pi\right) = 0,$$

$$x_4 = \cos\left(\frac{7}{10}\pi\right) \approx -0.5878, \quad x_5 = \cos\left(\frac{9}{10}\pi\right) \approx -0.9511$$

Wartości te można nastepnie wykorzystać jako wezły w metodach interpolacji, zapewniajac bardziej precyzyjne i stabilne wyniki w porównaniu do równoodległych wezłów.

6.4 Trasa górzysta

6.4.1 Rozkład Czebyszewa vs rozkład równomierny

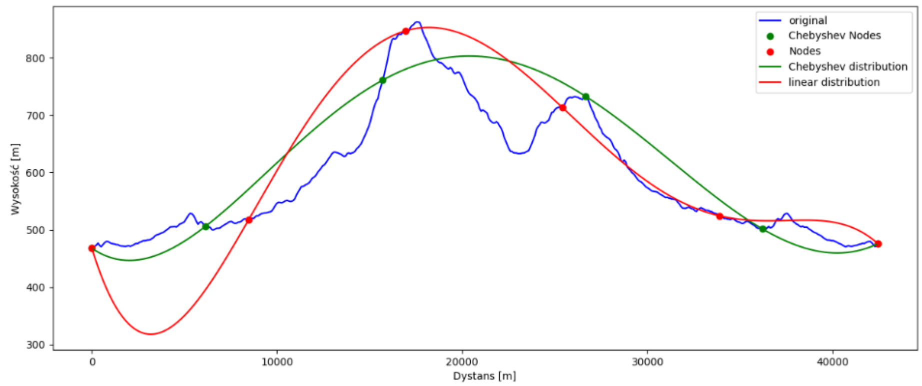

Figure 23: Porównaie interpolacji Lagrange'a dla rozkładu równomiernego i nierównomiernego przy 6 wezłach

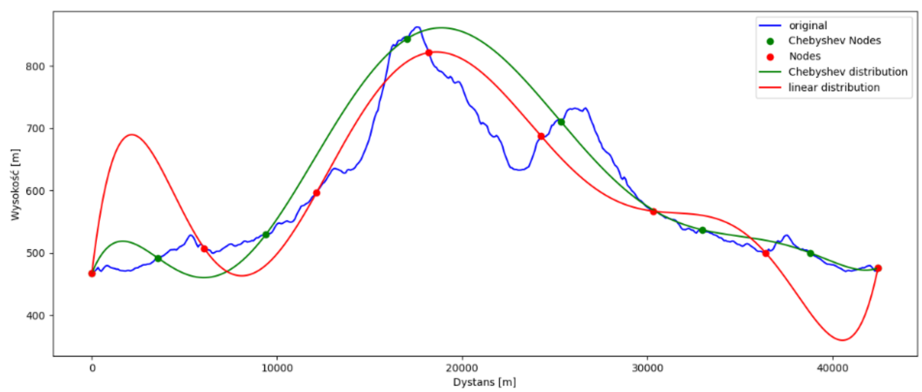

Figure 24: Porównaie interpolacji Lagrange'a dla rozkładu równomiernego i nierównomiernego przy 8 wezłach

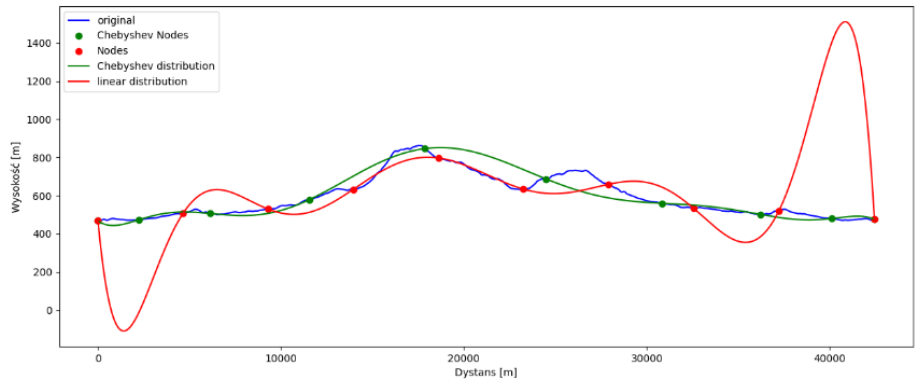

Figure 25: Porównaie interpolacji Lagrange'a dla rozkładu równomiernego i nierównomiernego przy 10 wezłach

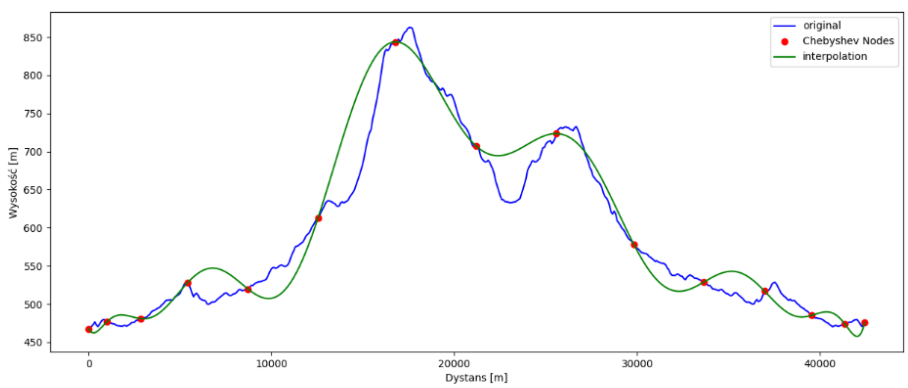

Figure 26: Interpolacja Lagrange'a z rozkładem nierównomiernym dla 15 wezłów

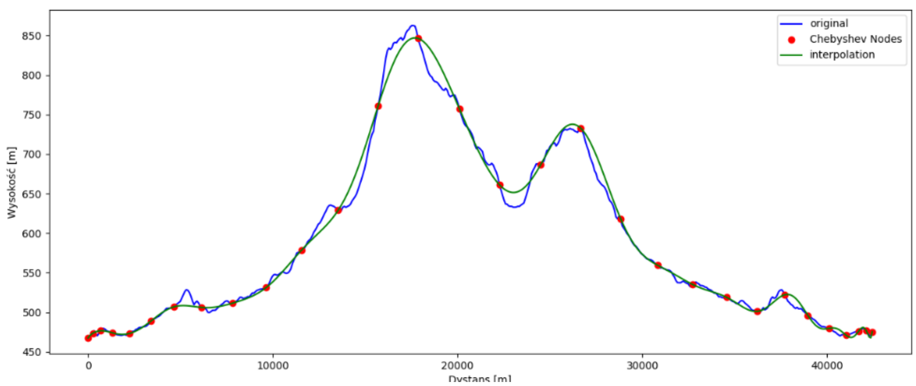

Figure 27: Interpolacja Lagrange'a z rozkładem nierównomiernym dla 30 wezłów

Rozkład Czebyszewa dla interpolacji Lagrange'a znaczaco poprawił jakość aproksymacji orginalnej funkcji. Rozkład ten bardzo skutecznie niweluje efekt Rungego co powoduje że można użyć metody Lagrange'a dla wiekszej liczby wezłów i bardzo dobrze interpolować funkcje oryginalna.

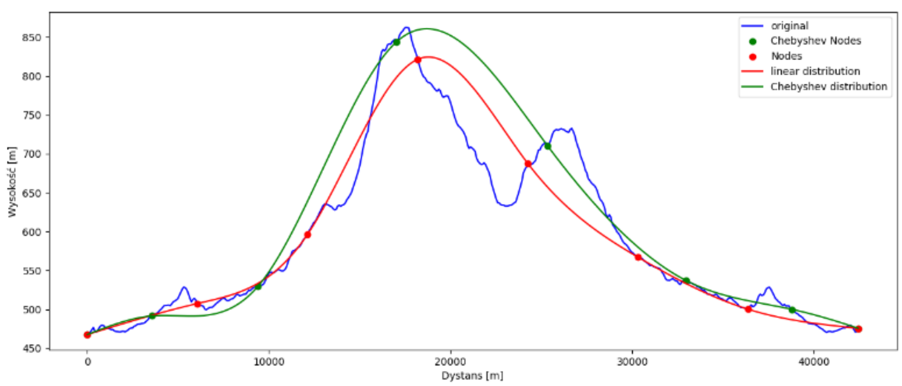

Figure 28: Porównaie interpolacji splajnami dla rozkładu równomiernego i nierównomiernego przy 8 wezłach

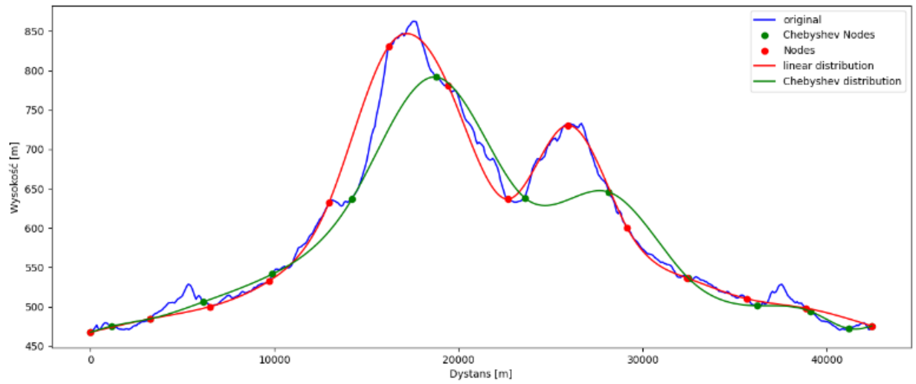

Figure 29: Porównaie interpolacji splajnami dla rozkładu równomiernego i nierównomiernego przy 14 wezłach

Rozkład Czebyszewa dla funkcji sklejanych nie ma wiekszego sensu ponieważ jest on głównie aby niwelować oscylacje na krańcach wykresu,które nie pojawiaja sie w tej metodzie. Taki rozkład zageszcza punkty na krańcach co powoduje że jest ich mniej na środku przedziału dlatego też czesto taka interpolacja funkcjami sklejanymi bedzie gorsza od równomiernego rozkładu wezłów.

6.4.2 Interpolacja splajnami przy rozkładzie równomiernym vs interpolacja Lagrange'a przy rozkładzie Czebyszewa

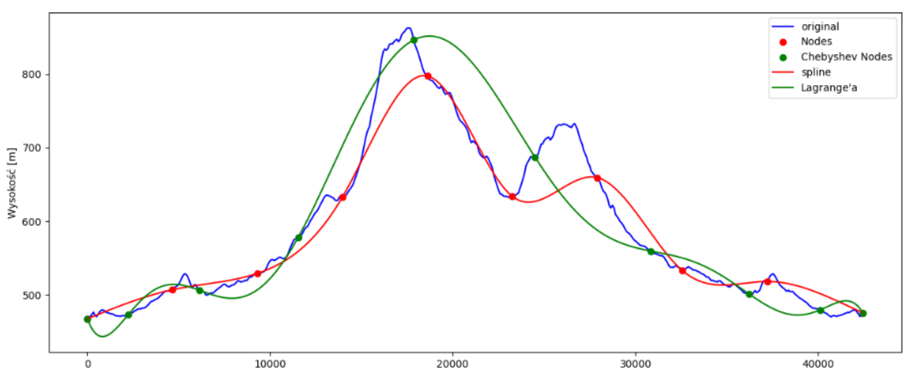

Figure 30: Porównaie interpolacji splajnami dla rozkładu równomiernego i nierównomiernego dla inetrpolacji Lagrange'a przy 10 wezłach

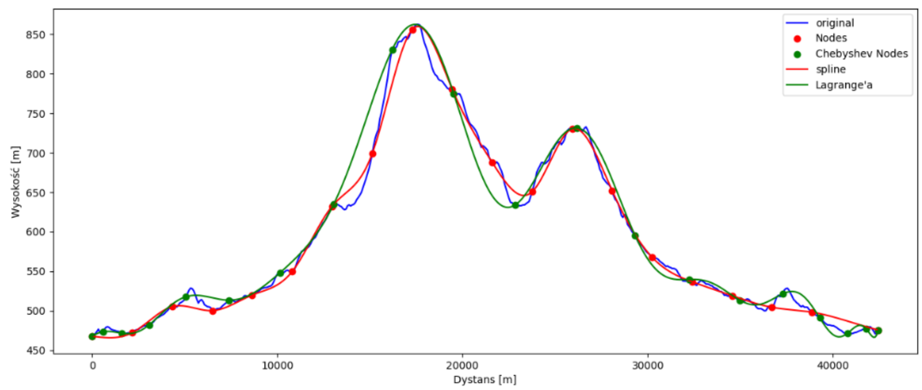

Figure 31: Porównaie interpolacji splajnami dla rozkładu równomiernego i nierównomiernego dla inetrpolacji Lagrange'a przy 20 wezłach

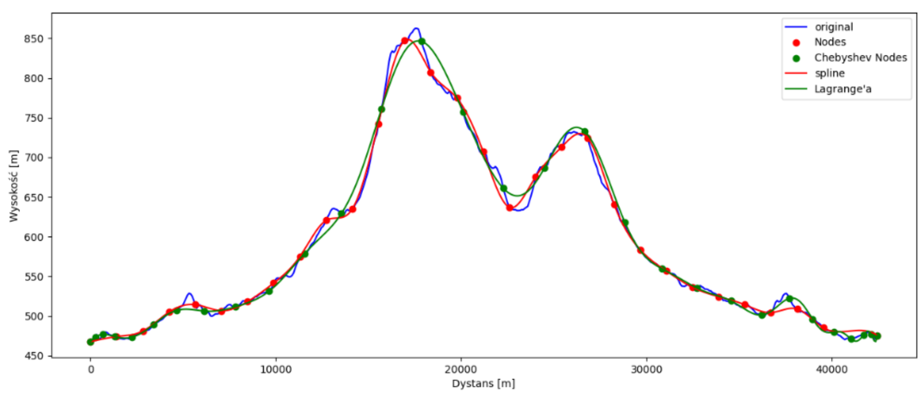

Figure 32: Porównaie interpolacji splajnami dla rozkładu równomiernego i nierównomiernego dla inetrpolacji Lagrange'a przy 30 wezłach

Ponieważ rozkład Czebyszewa powoduje że możemy bez efektu Rungego użyć wielomianu wyższego stopnia do iterpolacji naturale jest porównie tej metody z interpolacja funkcjami sklejanymi przy rozkładzie równomiernym. Efekt jest interesujacy ponieważ jakość interpretacji wydaje sie być bardzo zbliżona a przy coraz wiekszej liczbie wezłów interpolacje wyznaczaja coraz bardziej zbliżona krzywa.

6.5 Wnioski

Na podstawie powyższych wykresów możemy stwierdzić że metoda interpolacyjna Lagrange'a pomimo swojej szybkości, prostocie implementacyjnej oraz mniejszego zapotrzebowania na pamieć generuje efekt Rungego, czyli oscylacje dla krańcach wykresu. Wraz ze wzrostem liczby punktów zwieksza sie dokładność przybliżenia, ale równocześnie efekt Rungego wzrasta aż w pewnym momencie całkowicie uniemożliwia wykorzystanie interpolacji. Dlatego lepszym rozwiazaniem jest zastosowanie metody interpolacji funkcjami sklejanymi. Jest to bardziej zaawansowana metoda o wiekszym zapotrzebowaniu zarówno pamieciowym, jak i czasowym, ale generuje znacznie lepsze rezultaty. Nie jest podatna na efekt Rungego. Wraz ze zwiekszaniem sie liczby podprzedziałów, dla wiekszej ilości wezłów otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie. Nie oznacza to że metoda Lagrange'a nie jest użyteczna ,jeśli mamy do czynienia z mniej skomplikowana funkcja taka interpolacja już przy małej ilości przedziałów może dać bardzo dobry rezultat o czym warto pamietać ponieważ metoda ta jest szybsza. Ciekawym ulepszeniem wydaje sie być zmiana rozkładu z równomiernego na nierównomierny(rozkład Czebyszewa) dla metody Lagrange'a ponieważ znaczaco poprawia to rezultaty i pozwala użyć dowolnie wysokiego wielomianu do interpolacji. Interpolacja funkcjami sklejanymi jest metoda uniwersalna która dobrze sobie radzi z różnymi rodzajami funkcji i dla odpowiedniej liczby przedziałów dopasowuje sie do każdej funkcji. Interpolacja Lagrange'a z pewnościa nie daje tak dobrych rezultatów gdy niezbedne jest użycie wiekszej ilości przedziałów jednak użycie rozkłady czebyszewa wydaje sie dorównywać splajnom jednak aby być tego w pełni przekonanym należałoby porównać obie metody dla wiekszej ilości zróżnicowanych funkcji.