Układy równań liniowych

Kamil Śliwiński 193740

April 2024

1 Wprowadzenie

Celem projektu jest implementacja i analiza dwóch metod iteracyjnych (Jacobiego i Gaussa-Seidla) oraz jednej metody bezpośredniej (faktoryzacja LU) rozwiazywania układów równań liniowych. Układ równań liniowych wykorzystywany w obliczeniach ma nastepujaca postać:

$$Ax = b \tag{1}$$

gdzie:

- A jest dana macierza pasmowa
- b jest danym wektorem wyrazów wolnych
- x jest wektorem rozwiazań

2 Norma residuum

W zadaniach jako norma wektora residuum została użyta norma typu "maksimum", czyli maksymalny bezwgledny element w wektorze residuum.

$$\|\mathbf{e}\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |e_j|$$

3 Zadanie A

Celem tego zadania było wypełnienie macierzy A o rozmarze NxN, dla N = 940 oraz wektora wyrazów wolnych b o długości N, którego n-ty element ma wartość sin(n ·4), a nastepnie stworzenie z nich układu równań.

$$\begin{bmatrix} 12 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 12 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 12 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 12 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & -1 & 12 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & -1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin(4) \\ sin(8) \\ sin(12) \\ sin(16) \\ \vdots \\ sin(4(N-1)) \\ sin(4N) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Równanie liniowe postaci $Ax = b$

4 Zadanie B

Porównanie obu metod dla normy residuum mniejszej niż 10^{-9}. Możemy zauważyć, że metoda Gaussa-Seidla dla danej macierzy potrzebuje mniejszej liczby iteracji dlatego też wykonuje obliczenia około 1,5 razy szybciej niż metoda Jacobiego.

Metoda	iteracje	czas [s]
Jacobi	21	11.22
Gauss–Seidl	15	7.58

Metoda Jacobiego

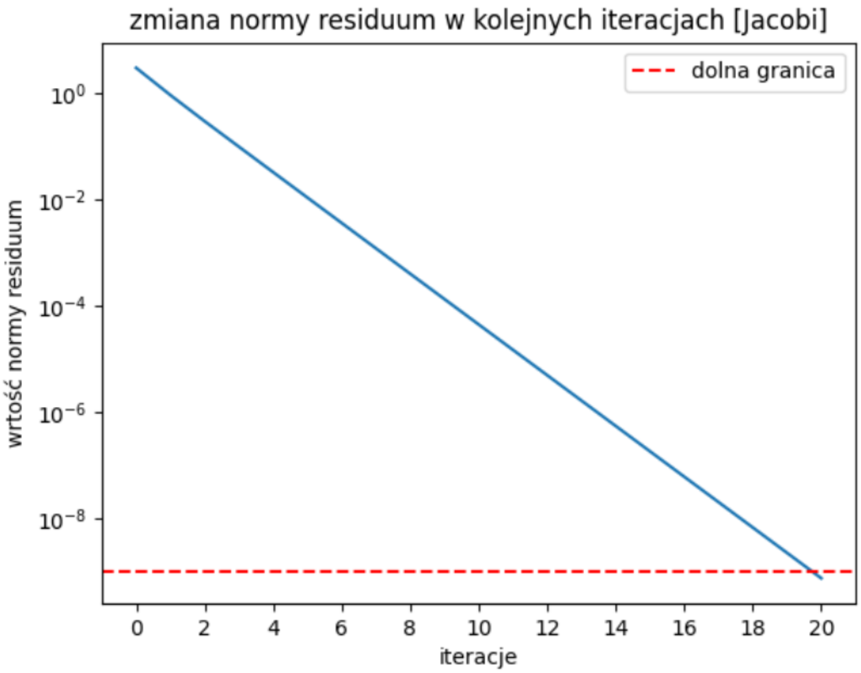

Figure 1: Wykres zmiany normy residuum dla równia z zadnia A

Metoda Gaussa–Seidla

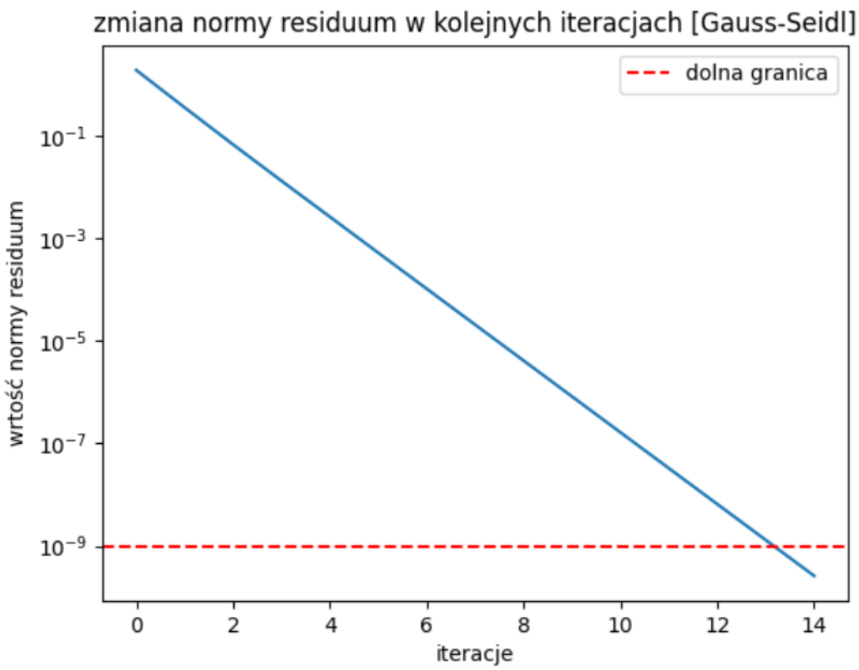

Figure 2: Wykres zmiany normy residuum dla równia z zadnia A

Obie metody

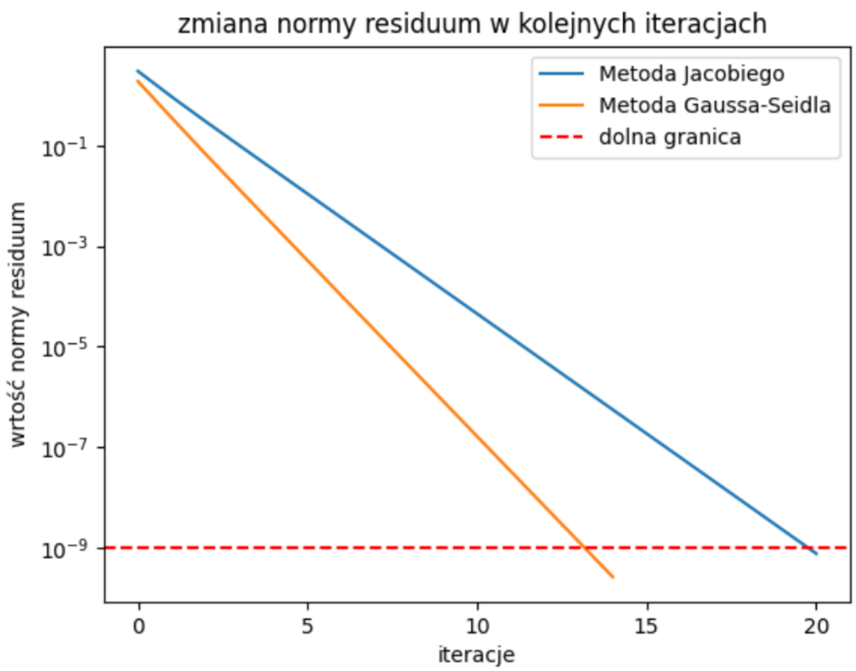

Figure 3: Wykres zmiany normy residuum dla równia z zadnia A

5 Zadanie C

W tym zadaniu przeprowadzmy podoba analize jednak dla nieco zmodyfikowanej macierzy A.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin(4) \\ sin(8) \\ sin(12) \\ sin(16) \\ \vdots \\ sin(4(N-1)) \\ sin(4N) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Równanie liniowe postaci $Ax = b$

Podczas próby wykorzystania obu metod, norma z residuum zaczyna rozbiegać do nieskończoności zamiast maleć. Powoduje to że algorytmy nigdy sie nie zatrzymaja, przez co ani metoda Jacobiego, ani Gaussa- Seidla nigdy sie nie zbiegnie. Algorytmy zakończa działanie dopiero po przejściu maksymalnej liczby iteracji jednk podany wynik nie bedzie prawdziwy , dlatego dodajemy górna granice wartośći normy residuum aby nie wykonywać wiecej iteracji gdy wiemy że nie przyniesie nam to i tak rozwiazania.Warto dodać że jesli nie dodamy górnej granicy to przy liczeniu normy residuum dostaniemy wyjatek OverflowError.

Metoda Jacobiego

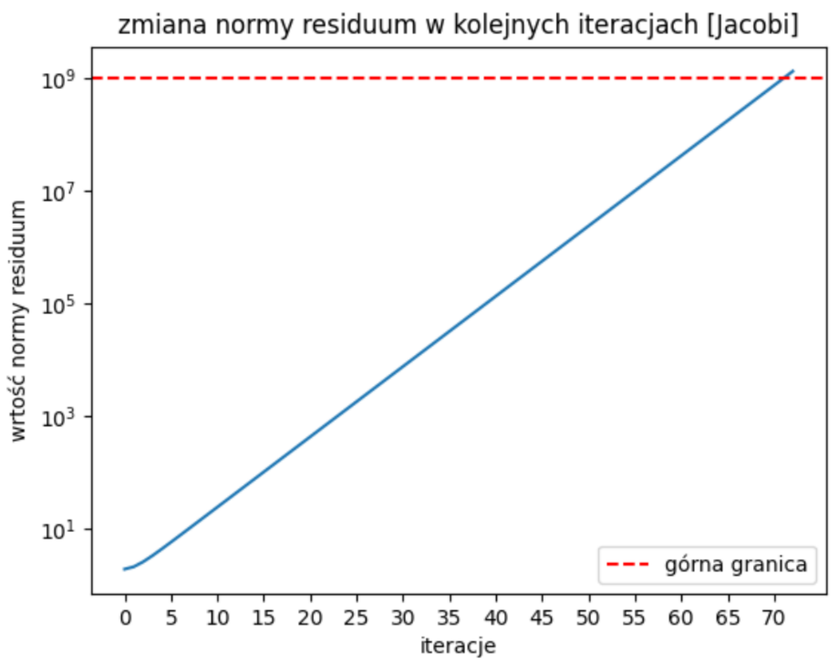

Figure 4: Wykres zmiany normy residuum dla równia z zadnia C

Metoda Gaussa–Seidla

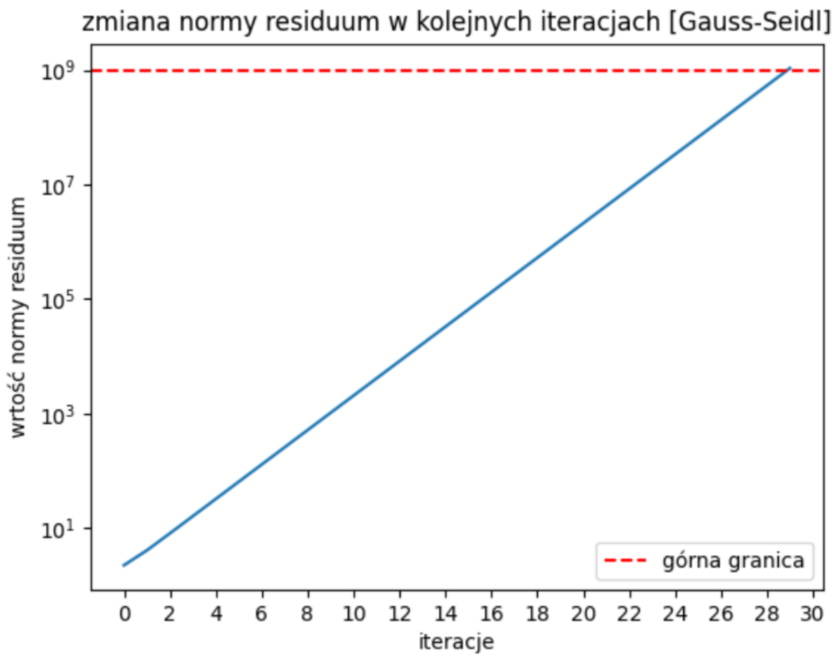

Figure 5: Wykres zmiany normy residuum dla równia z zadnia C

Obie metody

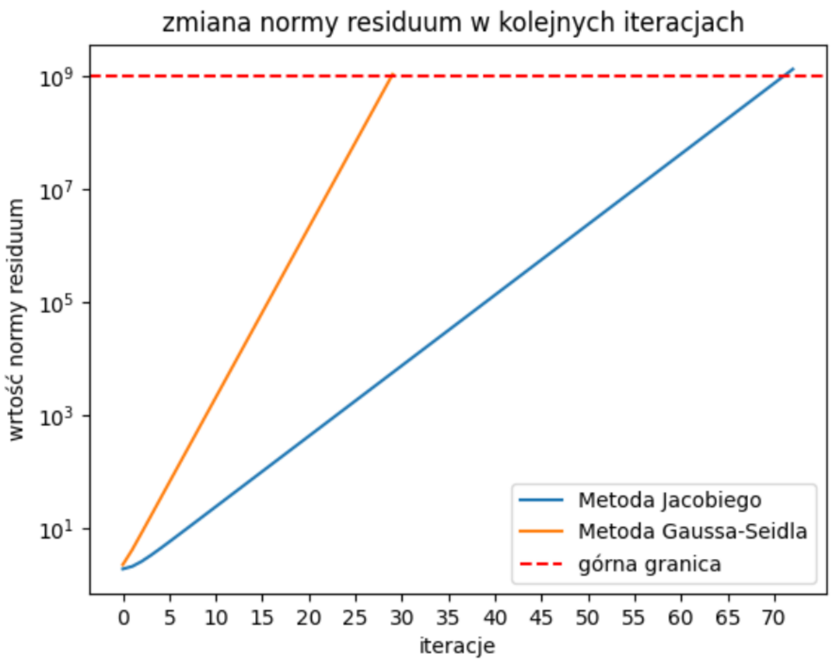

Figure 6: Wykres zmiany normy residuum dla równia z zadnia C.

Warto zauważyć że metody rozbiegaja do nieskończoności z różna szybkością. Metoda Gaussa-Seidla osiaga górna granice ponad 2 razy szybciej.

6 Zadanie D

W tym zadaniu należało rozwiazać równianie z zadania C za pomoca bezpośredniej metody LU. W przeciwieństwie do metod iteracyjnych faktoryzacja LU dobrze wyznaczyła rozwiazania tego równania. Norma z residuum z tak rozwiazanego równania wynosi $8.5677 \cdot 10^{-13}$. Norma rzedu 10^{-13}. jest bardzo mała, co świadczy o wysokiej dokładności rozwiazania.

```
Wartość normy residuum:  8.567671433602793e-13
Czas obliczeń metodą faktoryzacji LU:  115.20985078811646  s
```

Figure 7: Wynik zastosowania faktoryzacji LU

7 Zadanie E

W tym zadaniu należało stworzyć wykres zależności czasu trwania obliczeń poszczególnych metod dla równania z zadania A i macierzy o rozmiarach: N = 100, 500, 1000, 1500.

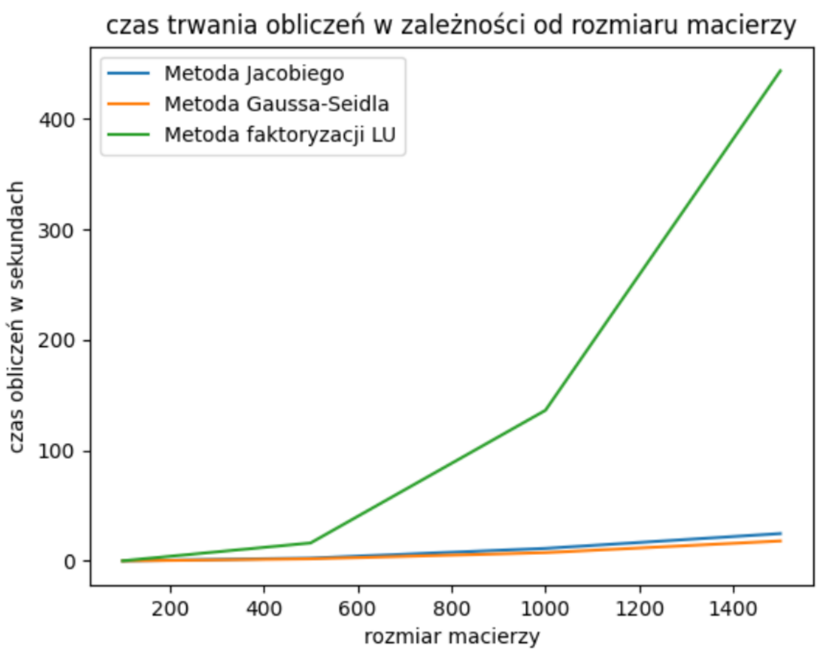

Figure 8: Porównanie wszytskich badanych metod rozwiazywania układów równań liniowych

8 Zadanie F - Wnioski

Z zadania B wynika, że metoda Gaussa-Seidla jest widocznie szybsza od Jacobiego,ponieważ wartości wektora x^k sa wyliczane z wektora x^{k-1} z poprzedniej iteracji, w przeciwieństwie do Gaussa-Seidla, gdzie wykorzystywane sa wartości wyliczone w bierzacej iteracji. Z wykresu 8 z zadania E wynika, że metody iteracyjne przeważaja czasowo na metoda bezpośrednia(faktoryzacja LU). Wynika to ze złożoności algorytmów, gdzie metoda Jacobiego i Gaussa-Seidla jest złożoności $O(n^2)$, gdzie LU to $O(n^3)$, jest to złożoność rozkładu na macierze L oraz U który w tej metodzie jest najbardziej kosztowny. Dlatego też można wywnioskować, że dla macierzy o dużych rozmiarach lepiej wykorzystywać metody iteracyjne.Teoria sprawdza sie z wynikami z zadania E. Należy jednak mieć na uwadze, że krótrzy czas uzyskujemy też kosztem dokładności,ponieważ w metodach iteracyjnych może być ona mniejsza od faktoryzacji LU, co może mieć ogromne znaczenie w szczególnych przypadkach. Ponadto,w zależnośći od danej macierzy,metody iteracyjne moga nie zbiegać sie do poprawnego rozwiazania, tak jak to sie zdarzyło w Zadaniu C, gdzie tylko metoda LU dała rozwiazanie (Zadanie D). Podsumowujac wybór metody rozwiazywania równań liniowych ściśle zależy od macierzy na jakiej musimy te równanie rozwiazać oraz od oczekiwanej dokładności rozwiazania.