4. a)
   b)

c) Udowodnić, że

$$[T(B)]' = T(B').$$

d) Z b) i c) wywnioskować, że

$$T(B) \cup T(C) = T(B \cup C).$$

5. Udowodnić, że jeśli algebra jest skończona to:

   a) Opisane w twierdzeniu 2 odwzorowywanie przeprowadza różne elementy na różne, tzn. jeśli $B \neq C$ to $T(B) \neq T(C)$.
   W s k a z ó w k a . Jeżli $B \neq C$, to istnieje atom należący do jednego elementu, a nie należący do drugiego.

   b) Dla każdego podzbioru S zbioru atomów istnieje element D taki, że $T(D) = S$.
   W s k a z ó w k a . Wziąć za D sumę, w sensie $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$, wszystkich atomów $A_1, \ldots, A_k$ należących do D.

6. Z twierdzenia 3 wywnioskować, że każda algebra Boole'a skończona ma liczbę elementów postaci 2^n.

7. Udowodnić, że rachunek zadań w przypadku, gdy liczba zmiennych zdaniowych jest nieskończona, traktowany jako algebra Boole'a tak jak w przykładzie 2, z paragrafu 38, jest algerbą Boole'a, w której żaden element nie ma atomu. Algebry takie nazywamy algebrami *bezatomowymi.*

§ 42. ZNACZENIE TWIERDZEŃ O REPREZENTACJI

Omówmy teraz wnioski jakie płyną z twierdzenia o reprezantacji algebry Boole'a.

Algebry Boole'a wprowadziliśmy aksjomatycznie w §31 tego rozdziału, używając języka potocznego. Teorię tę można również przedstawić w postaci elementarnej teorii sformalizowanej (zob. r. IV).

Formułami atomowymi są formuły postaci równości dwóch termów.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

Termy są to wyrażenia zbudowane w omówiony sposób ze zmiennych $x_1, x_2, x_3, \ldots$ stałych 0 oraz 1 (działań zeroargumentowych), symboli „$'$" działania jednoagrumentowego, oraz symboli „$\cup$" i „$\cap$" działań dwuargumentowych. Na przykład wyrażenia;

$$((X_1 \cap X_3) \cup (X_2')') \cup (0 \cup X_1),$$
$$X_1 \cup (X_2 \cup X_3), \quad 1' \cup (0 \cap 0), \quad X_5, \quad X_1', \quad 0, \quad 1$$

są termami, natomiast wyrażenie:

$$X_1 \cap \cap'(X_1 \cup 0)$$

nie jest termem, gdyż nie jest poprawnie zbudowane.

Z formuł postaci (1) budujemy inne formuły, łącząc je spójnikami zdaniowymi i opatrując kwantyfikatorami.

Formułą będzie na przykład

$$\mathrm{A}x_1\ \mathrm{E}x_1\ (x_1 \cup x_2 = x_2)\ \&\ \sim (0 = x_1),$$

czy też

$$\mathrm{A}x_1\ (x_1 = x_1).$$

Formuła ta jest zdaniem, gdyż nie zawiera zmiennych wolnych. Lecz już formuła

$$\mathrm{E}x_2[(x_1 \cup x_1 = x_2)\ \&\ (0 = x_1)],$$

czy też formuła

$$x_1 = x_1$$

nie są zdaniami, gdyż zawierają zmienną wolną x_1.

Aksjomatami teorii będą następujące zdania:

1. Aksjomat dotyczący elementów wyróżnionych

$$\sim (0 = 1).$$

2. Aksjomat równości:

$$\mathrm{A}x_1\ (x_1 = x_2), \mathrm{A}x_1\mathrm{A}x_2\ [(x_1 = x_2) \Rightarrow (x_2 = x_1)]\mathrm{A}x_1\mathrm{A}x_2\mathrm{A}x_3\ [(x_1 = x_2)\&(x_2 = x_3) \Rightarrow (x_1 = x_3)]$$