

4. a)

b)

c) Udowodnić, że

$$[T(B)]' = T(B').$$

d) Z b) i c) wywnioskować, że

$$T(B) \cup T(C) = T(B \cup C).$$

5. Udowodnić, że jeśli algebra jest skończona to:

a) Opisane w twierdzeniu 2 odwzorowywanie przeprowadza różne elementy na różne, tzn. jeśli  $B \neq C$  to  $T(B) \neq T(C)$ .

W s k a z ó w k a . Jeżeli  $B \neq C$ , to istnieje atom należący do jednego elementu, a nie należący do drugiego.

b) Dla każdego podzbioru  $S$  zbioru atomów istnieje element  $D$  taki, że  $T(D) = S$ .

W s k a z ó w k a . Wziąć za  $D$  sumę, w sensie  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ , wszystkich atomów  $A_1, \dots, A_k$  należących do  $D$ .

6. Z twierdzenia 3 wywnioskować, że każda algebra Boole'a skończona ma liczbę elementów postaci  $2^n$ .

7. Udowodnić, że rachunek zadań w przypadku, gdy liczba zmiennych zdaniowych jest nieskończona, traktowany jako algebra Boole'a tak jak w przykładzie 2, z paragrafu 38, jest algebrą Boole'a, w której żaden element nie ma atomu. Algebry takie nazywamy algebrami *bezatomowymi*.

## § 42. ZNACZENIE TWIERDZEŃ O REPREZENTACJI

Omówmy teraz wnioski jakie płyną z twierdzenia o reprezentacji algebry Boole'a.

Algebry Boole'a wprowadziliśmy aksjomatycznie w §31 tego rozdziału, używając języka potocznego. Teorię tę można również przedstawić w postaci elementarnej teorii sformalizowanej (zob. r. IV).

Formułami atomowymi są formuły postaci równości dwóch termów.

$$(1) \quad f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$$

*Termy* są to wyrażenia zbudowane w omówiony sposób ze zmiennych  $x_1, x_2, x_3, \dots$  stałych 0 oraz 1 (działań zeroargumentowych), symboli „'” działania jednoargumentowego, oraz symboli „ $\cup$ ” i „ $\cap$ ” działań dwuargumentowych. Na przykład wyrażenia;

$$((X_1 \cap X_3) \cup (X_2')') \cup (0 \cup X_1), \\ X_1 \cup (X_2 \cup X_3), \quad 1' \cup (0 \cap 0), \quad X_5, \quad X_1', \quad 0, \quad 1$$

są termami, natomiast wyrażenie:

$$X_1 \cap \cap'(X_1 \cup 0)$$

nie jest termem, gdyż nie jest poprawnie zbudowane.

Z formuł postaci (1) budujemy inne formuły, łącząc je spójnikami zdaniowymi i opatrząc kwantyfikatorami.

Formułą będzie na przykład

$$A x_1 \ E x_1 \ (x_1 \cup x_2 = x_2) \ \& \sim (0 = x_1),$$

czy też

$$\text{Ax}_1 (x_1 = x_1).$$

Formuła ta jest zdaniem, gdyż nie zawiera zmiennych wolnych. Lecz już formuła

$$\text{Ex}_2[(x_1 \cup x_1 = x_2) \ \& \ (0 = x_1)],$$

czy też formuła

$$x_1 = x_1$$

nie są zdaniem, gdyż zawierają zmienną wolną  $x_1$ .

Aksjomatami teorii będą następujące zdania:

1. Aksjomat dotyczący elementów wyróżnionych

$$\sim (0 = 1).$$

2. Aksjomat równości: