

Projekt Równania Różniczkowe i Różnicowe Dokumentacja

Kamil Burkiewicz

24.01.2020

Spis treści

1	Sformułowanie Wariacyjne	1
2	Wyniki	3

1 Sformułowanie Wariacyjne

Przedstawiony został następujący problem:

Rozwiązanie równania różniczkowego metodą elementów skończonych

$$(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) - u(x) = 0$$

$$u(0) = 0$$

$$\frac{du}{dx}(2) - u(2) = 0$$

$$[0, 2] \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$$

Rozwiązanie:

$$-u''(x) - u(x) = 0$$

Mnożymy obie strony równania przez funkcję próbną $v \in V = \{e_0, \dots, e_n\}$

$$-u'' \cdot v - u \cdot v = 0,$$

$$\int_0^2 -u'' \cdot v dx - \int_0^2 u \cdot v dx = 0 \quad (1)$$

Zajmujemy się teraz pierwszą całką:

$$\begin{aligned} \int_0^2 -u'' \cdot v dx &= \left| \begin{matrix} v & v' \\ -u'' & -u' \end{matrix} \right| = [-u' \cdot v]_0^2 + \int_0^2 u' \cdot v' dx = \\ &= -u'(2) \cdot v(2) + u'(0) \cdot v(0) + \int_0^2 u' \cdot v' dx = -u(2) \cdot v(2) + \int_0^2 u' \cdot v' dx \end{aligned}$$

Wstawiamy otrzymany wynik do równania (1) i otrzymujemy:

$$-u(2) \cdot v(2) + \int_0^2 u' \cdot v' dx - \int_0^2 u \cdot v dx = 0 \quad (2)$$

Przyjmujemy, że rozwiązanie jest kombinacją liniową funkcji bazowych,

czyli $u = \sum_{i=0}^{i=n} c_i \cdot e_i$, dla pewnych stałych $c_i, i = 0, \dots, n$

Wstawiamy u do równania (2) oraz wstawiamy poszczególne funkcje próbne

e_j , dla $j = 0, \dots, n$

Otrzymujemy $n + 1$ równań postaci

$$-\sum_{i=0}^n c_i \cdot e_i(2) \cdot e_j(2) + \int_0^2 \left(\sum_{i=0}^n c_i \cdot e_i \right)' \cdot e_j' dx - \int_0^2 \sum_{i=0}^n c_i \cdot e_i \cdot e_j dx = 0$$

Z liniowości całki, pochodnej oraz operatora sumowania:

$$\sum_{i=0}^n c_i \cdot (-e_j(2) \cdot e_i(2)) + \sum_{i=0}^n c_i \int_0^2 e'_i \cdot e'_j dx - \sum_{i=0}^n c_i \int_0^2 e_i \cdot e_j dx = 0$$

$$\sum_{i=0}^n c_i \cdot (-e_j(2) \cdot e_i(2) + \int_0^2 (e'_i \cdot e'_j - e_i \cdot e_j) dx) = 0$$

Przyjmijmy teraz:

$$a_{ij} := -e_i(2) \cdot e_j(2) + \int_0^2 (e'_i \cdot e'_j - e_i \cdot e_j) dx$$

Co po podstawieniu daje:

$$\sum_{i=0}^n c_i \cdot a_{ij} = 0$$

$n + 1$ równań o $n+1$ niewiadomych c_i można zapisać w postaci układu jednorodnego równań liniowych:

$$A \cdot C = 0 \tag{3}$$

Dodatkowo

$$a_{ji} = -e_j(2) \cdot e_i(2) + \int_0^2 (e'_j \cdot e'_i - e_j \cdot e_i) dx = a_{ij}$$

czyli w tym przypadku macierz A będzie symetryczna.

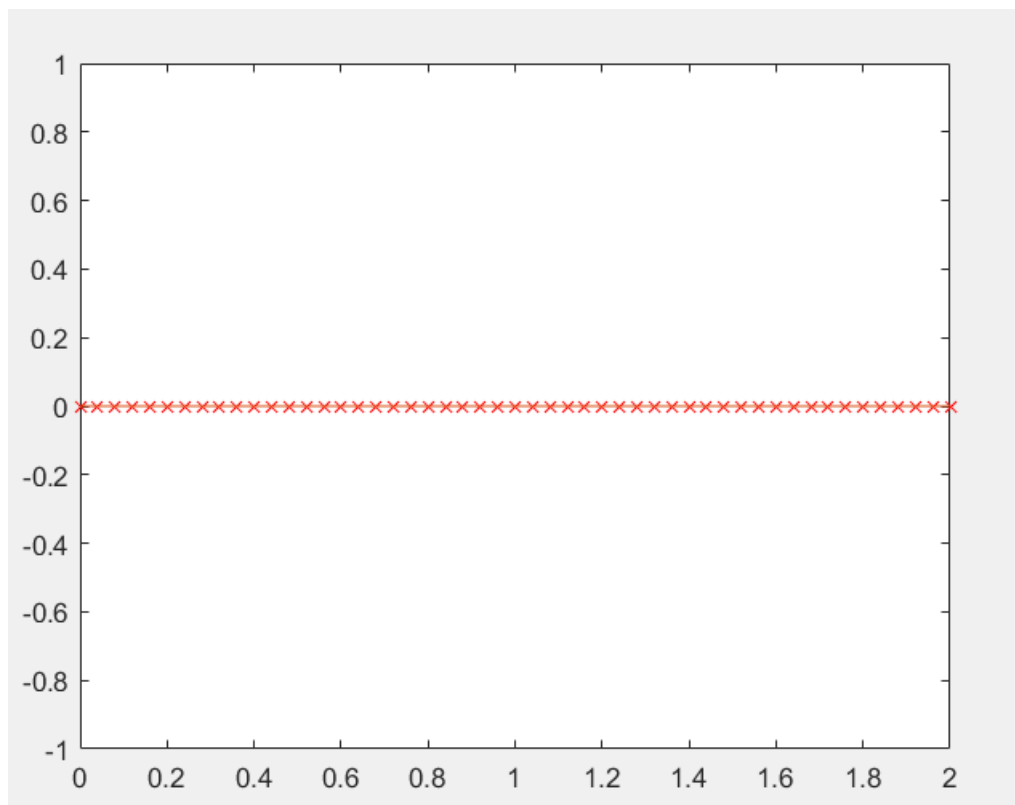
$$A = [a_{ij}]_{n+1 \times n+1}, C = [c_i]_{n+1 \times 1}, 0 = [0]_{n+1 \times 1}$$

Należy znaleźć macierz A^{-1} i pomnożyć przez nią lewostronnie równanie (3).

Możemy zauważyć, że jeżeli istnieją macierz A^{-1} to po pomnożeniu dostaniemy rozwiązanie zerowe.

Odpowiednie obliczenia numeryczne zostaną jednak wykonane.

2 Wyniki



Rozwiązanie dla podziału na 50 podprzedziałów: