Projekt Równania Różniczkowe i Różnicowe Dokumentacja

Kamil Burkiewicz

24.01.2020

Spis treści

1 Sformułowanie Wariacyjne

Przedstawiony został następujący problem:
Przybliżenie rozwiązania równania różniczkowego metodą elementów skończonych

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) - u(x) = 0$$

$$u(0) = 0$$

$$\frac{du}{dx}(2) - u(2) = 0$$

$$[0, 2] \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$$

Rozwiązanie:

$$-u''(x) - u(x) = 0$$

Mnożymy obie strony równania przez funkcję próbną $v \in V = \{e_0, ..., e_n\}$

$$-u'' \cdot v - u \cdot v = 0,$$

$$\int_0^2 -u'' \cdot v dx - \int_0^2 u \cdot v dx = 0 \tag{1}$$

Zajmujemy się teraz pierwszą całką:

$$\int_0^2 -u'' \cdot v dx = \begin{vmatrix} v & v' \\ -u'' & -u' \end{vmatrix} = [-u' \cdot v]_0^2 + \int_0^2 u' \cdot v' dx =$$

$$= -u'(2) \cdot v(2) + u'(0) \cdot v(0) + \int_0^2 u' \cdot v' dx = -u(2) \cdot v(2) + \int_0^2 u' \cdot v' dx$$

Wstawiamy otrzymany wynik do równania (1) i otrzymujemy:

$$-u(2) \cdot v(2) + \int_0^2 u' \cdot v' dx - \int_0^2 u \cdot v dx = 0 \tag{2}$$

Przyjmujemy, że rozwiązanie jest kombinacją liniową funkcji bazowych, czyli

$$u = \sum_{i=0}^{i=n} c_i \cdot e_i$$

dla pewnych stałych $c_i, i = 0, ..., n$
Wstawiamy przewidywaną formę u do równania (2) oraz wstawiamy za funkcje próbną e_j, dla $j = 0, ..., n$. Otrzymujemy n + 1 równań postaci

$$-\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot e_i(2) \cdot e_j(2) + \int_0^2 (\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot e_i)' \cdot e_j' dx - \int_0^2 \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot e_i \cdot e_j dx = 0$$

Z liniowości całki, pochodnej oraz operatora sumowania:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot (-e_j(2) \cdot e_i(2)) + \sum_{i=0}^{n} c_i \int_0^2 e_i' \cdot e_j' dx - \sum_{i=0}^{n} c_i \int_0^2 e_i \cdot e_j dx = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot (-e_j(2) \cdot e_i(2) + \int_0^2 (e_i' \cdot e_j' - e_i \cdot e_j) dx) = 0$$

Przyjmijmy teraz:

$$a_{ij} := -e_i(2) \cdot e_j(2) + \int_0^2 (e_i' \cdot e_j' - e_i \cdot e_j) dx$$

Co po podstawieniu daje:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot a_{ij} = 0$$

n + 1 równań o n+1 niewiadomych c_i można zapisać w postaci układu jednorodnego równań liniowych:

$$A \cdot C = 0 \tag{3}$$

Dodatkowo

$$a_{ji} = -e_j(2) \cdot e_i(2) + \int_0^2 (e_j' \cdot e_i' - e_j \cdot e_i) dx = a_{ij}$$

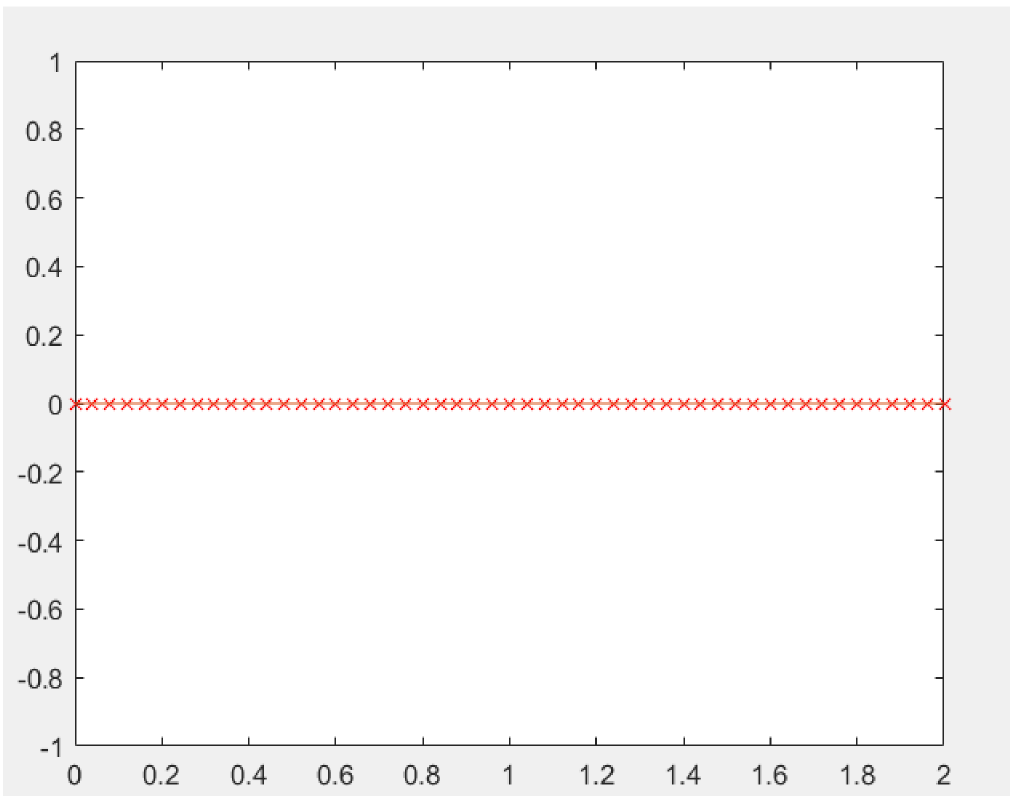
czyli w tym przypadku macierz A będzie symetryczna.

$$A = [a_{ij}]_{n+1 \times n+1}, C = [c_i]_{n+1 \times 1}, 0 = [0]_{n+1 \times 1}$$

Należy znaleźć macierz A^{-1} i pomnożyć przez nią lewostronnie równianie (3). Możemy zauważyć, że jeżeli isteniej macierz A^{-1} to po pomnożeniu dostaniemy rozwiązanie zerowe.
Odpowiednie obliczenia numeryczne zostaną jednak wykonane.

2 Wyniki

Ze względu na zerowy warunek Dirichleta w punkcie 0 pominąłem funkcję bazową e_0. Do numerycznego obliczania całek używam kwadratury Gaussa-Legendra. Jest również procedura wbudowana w program MATLAB, która jest zapisana w kodzie, lecz wykomentowana i dostępna jeśli zaszłaby potrzeba otrzymania dokładniejszych wyników. Obliczam również współczynniki i węzły dla kwadratury Gaussa-Legendra na samym początku programu używając 3ciego wielomianu Legendra. Numer wielomianu Legendra jest do ustalenia, jako stała na początku programu.

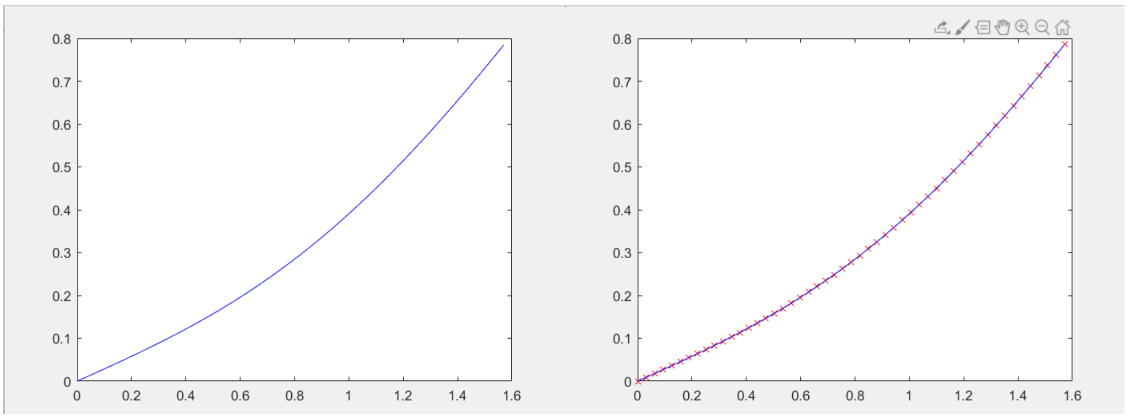


Rozwiązanie dla podziału na 50 podprzedziałów:

Jako, że program został napisany stosując wszelkie możliwe uogólnienia przedstawiam również rozwiązanie równania

$$u'' + u = sin(x)$$

dla analogicznych warunków brzegowych na przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$



Rysunek 1: Lewy: rozwiązanie dokładne; Prawy: MES