WICHA MACIEJ 11STG/7.13

1. Model matematyczny zadanego układu

$$3\frac{d^2y}{dt^2} + 1{,}2\frac{dy}{dt} + 0{,}5y = u(t)$$

Warunki początkowe:

1) $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = -1$

2) $y(0) = 2$

Oznaczenia:

$u(t)$ - wymuszenie

$y(t)$ - odpowiedź układu

A) Transmitancja operatorowa

Przyjmijmy założenia dodatkowe na potrzeby przekształcenia Laplace'a:

1) $y(0) = 0$

2) $y'(0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$ ← postać ogólna

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ ← z własności

$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$

$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2 \cdot Y(s)$

$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = s \cdot Y(s)$

$3 \cdot s^2 Y(s) + 1{,}2 \cdot s \cdot Y(s) + 0{,}5\,Y(s) = U(s)$ ← równanie algebraiczne

$Y(s)[3s^2 + 1{,}2s + 0{,}5] = U(s) \quad // : (3s^2 + 1{,}2s + 0{,}5)$

$$Y(s) = \frac{U(s)}{3s^2 + 1{,}2s + 0{,}5}$$

$$G(s) = \frac{\frac{U(s)}{3s^2 + 1{,}2s + 0{,}5}}{U(s)} = \frac{\cancel{U(s)}}{3s^2 + 1{,}2s + 0{,}5} \cdot \frac{1}{\cancel{U(s)}}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{3s^2 + 1{,}2s + 0{,}5}}$$ ← transmitancja operatorowa

B) Układ równań różniczkowych 1-go rzędu

$$\begin{cases} 3\frac{d^2y}{dt^2} + 1{,}2\frac{dy}{dt} + 0{,}5y = u(t) \\ \frac{dy}{dt} = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\frac{dz}{dt} + 1{,}2z + 0{,}5y = u(t) \\ \frac{dy}{dt} = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\frac{dz}{dt} = u(t) - 1{,}2z - 0{,}5y \quad // : 3 \\ \frac{dy}{dt} = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{3}u(t) - \frac{2}{5}z - \frac{1}{2}y \\ \frac{dy}{dt} = z \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{2}{5}z - \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}u(t) \end{cases}}$$

← układ równań różniczkowych 1-go rzędu

c) Macierzowy równanie stanu i macierz równania wyjścia

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{2}{5}z - \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}u(t) \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$ ← wektor stanu

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$ ← wektor wymuszeń

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$$ ← wektor odpowiedzi

Układ równań po uwzględnieniu nowych oznaczeń:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{6}x_1 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{3}u_1 \end{cases}$$

Uporządkowanie i rozwinięcie układu:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0x_1 + x_2 + 0u_1 + 0u_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{6}x_1 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{3}u_1 + 0u_2 \end{cases}$$

Macierzowe równanie stanu

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/6 & -2/5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierzowe równanie wyjścia

$$y = Cx + Du$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$